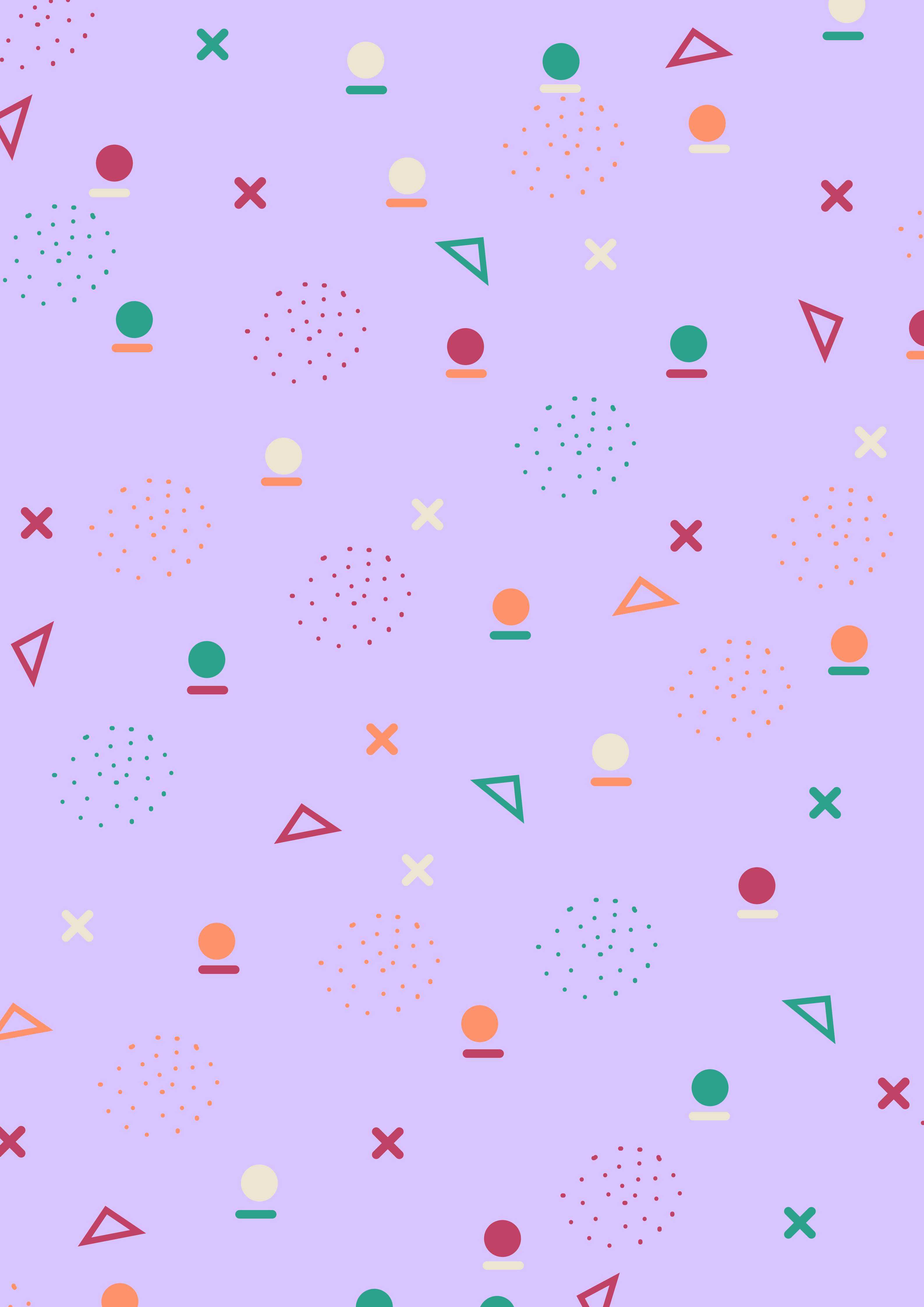


$:$ → es tal que

V = conjunto de vectores

Sean $w, u, v \in V$ se definen las operaciones

1) $u+v = (u_1, \dots, u_v) + (v_1, \dots, v_k) = (u_1+v_1, u_k+v_3, \dots, u_v+v_k)$ → suma sumas entradas
2) $u+(v+w) = (u+v)+w$ → asociatividad (sumas en el orden que quieras)
3) existe un vector llamado 0 tal que $x+0=x$ para todo vector x (neutro aditivo)
4) para cada valor x existe un vector y tal que $x+y=0$ (inverso aditivo) → es lo mismo sumarlo hacia un lado que el otro
5) $1x = x$
6) $(ab)x = a(bx)$
7) $a(x+y) = ax+ay$ → productos escalares
9) $u+v = v+u$
10) $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$

- Sean vectores que satisfagan las 10 reglas. Al conjunto V lo llamaremos espacio vectorial (donde ya están tus letras y vectores)
- Los conjuntos los podemos definir de forma explícita e implícita

- El espacio vectorial de matrices se representa como $\mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$
- Si es un elemento del espacio vectorial le llamamos vector y yo no entendí cuando matriz
- Diferencia entre vector y matriz
  - un solo elemento puede ser un vector
  - un vector es un elemento de un espacio vectorial (cumplen las condiciones de espacio vectorial y sus elementos) y tienen operaciones
  - ejemplos de vectores

$(a, b) \to V_{1\times 2}$

$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \to V_{3\times 1}$

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \to \mathbb{M}_{2\times 2}$

$\mathbb{P}_3 \to f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x$

$a \to \mathbb{R}$

Ejercicio

$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x$

$g(x) = b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x$

$(f+g) = (a_3+b_3)x^3 + (a_2+b_2)x^2 + (a_1+b_1)x$

Combinaciones lineales

Si yo tengo un conjunto de vectores van a ser nuestro conjunto esencial para caracterizar el espacio vectorial

$V = (5, -8) = \alpha(1,0)\ \beta(0,1)$

$\quad\quad 5 \quad\quad -8$

Si es linealmente dependiente

$\alpha_1(1,0,0) + \alpha_2(0,1,0) + \alpha_3(0,0,1) = (0,0,0)$

$(\alpha_1, 0, 0) + (0, \alpha_2, 0) + (0, 0, \alpha_3) = (0,0,0)$

$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0,0,0)$

al descubrir que el conjunto es linealmente dependiente podemos descubrir todo el espacio vectorial

quieres saber que alfa cumple 0

linealmente dependiente = infinidad de soluciones → combinación de algunos otros → quieres saber si son representativos de tu espacio vectorial

linealmente independiente = se puede reducir

La idea aquí es describir y después probar con los datos que tienes

El conjunto V_1, V_2, V_3 si es base de $\mathbb{R}^3$ (pq describe todo el espacio)

$V_1 = (1,0,0)$
$V_2 = (0,1,0)$
$V_3 = (0,0,1)$

La idea de base es describir todo nuestro conjunto de datos con la menor cantidad de info posible

Intención de base ?

Definición de base →

Definición de dimensión → si el número de B es infinito diremos que el espacio vectorial es infinito, en caso contrario diremos que V tiene dimensión infinito

Ej dimensión de matriz 2x2

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ → dimensión 4 — pq tiene 4 elementos para dimensionar

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ → dimensión 8

Dimensión y base — tip hay que enfocarse si los # dependen o no

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 2a_{11} & a_{22} \end{pmatrix} : a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$$

base → dimensión 3

base → todos los elementos debes poderlos escribir como combinación lineal

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 10 & 5 \end{pmatrix} = \underbrace{5 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{es una combinación lineal}}$$

$5 \times 1 = 5$, $5 \times 2 = 10$, $5 \times 1 = 5$, $5 \times 1 = 5$

la base es un 5

el punto de las transformaciones lineales es saltar de un espacio a otro

solo te puede dar el espacio vectorial y no te puedes salir de ahí

dodecaedro
20 vértices
12 caras
30 aristas

dimensión = 20 → número
↓
de elementos de la base

base = $(V_1, V_2, V_{\ldots}, V_{20})$
↓
las V

Para que sea una transformación lineal

① Vectores
② Escalares

Idea transf lineales en machine Learning
Que lleve de un espacio vectorial a uno más cómodo en algun sentido (economico, exp)

si hay pérdida de datos pero no es horrible

→ se le agrega info basura
de 3 dim a 4

→ pierdes info

Como sabes cual te conviene? → que tanto te ganas o pierdes datos

Transformación lineal reglas

① $T(U+V) = T(U) + T(V)$
② $T(\alpha U) = \alpha T(U)$

Ejemplo
$U = (x_1, y_1)$
$V = (x_2, y_2)$

$T(U+V) = T(U) + T(V)$ $\qquad$ $T(x,y) = (-y, 0, x)$

$T((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ → si son vectores transforman $(-(y_1+y_2), 0, x_1 + x_2)$

$T(U) + T(V) = T(x_1, y_1) + T(x_2, y_2)$
$= (-y_1, 0, x_1) + (-y_2, 0, x_2)$
$(-y_1 - y_2, 0, x_1 + x_2)$

es igual entonces
si es una transformación

$T(\alpha U) = T(\alpha(x_1, y_1)) = T(\alpha x_1, \alpha y_1)$
$= (-\alpha y_1, 0, \alpha x_1)$
$\alpha T(U) = \alpha T(x_1, y_1)$
$= \alpha(-y_1, 0, x_1)$
$= (-\alpha y_1, 0, \alpha x_1)$

Ejemplo 3

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$
$T(x,y) = (y, x, 5)$
* $T(U+V) = T(U) + T(V)$
$U = x_1, y_1$
$V = x_2, y_2$
$T((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = T((x_1 + x_2), (y_1 + y_2))$
$y_1 + y_2, x_1 + x_2, 5$
$T((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = (y_1 + y_2), (x_1 + x_2), 5$

* $T(\alpha U) = \alpha T(U)$?
$T(x_1, y_1) + T(x_2, y_2) = (y_1, y_2, x_1, x_2, 5)$

④ $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$
$T(x, y, z, w) = (z, x)$
$U = x, y, z, w$
$V = x_1, y_1, z_1, w_1$
$T(U+V) = T(U) + T(V)$ $\qquad$ suma $\mathbb{R}^4$ componente a comp
$T((x, y, z, w) + (x_1, y_1, z_1, w_1)) = T(x + x_1, y + y_1, z + z_1, w + w_1)$
← ahora si tienes tu vector en $\mathbb{R}^4$
$= (z + z_1), (x + x_1)$
$T(x, y, z, w) + T(x_1, y_1, z_1, w_1)$
$(z, x) + (z_1, x_1)$
$(z + z_1), (x + x_1)$ Vamos bien :)

$T(\alpha U) = \alpha T(U)$
$T(\alpha(x, y, z, w)) = \alpha T(x, y, z, w)$
$T(\alpha x, \alpha y, \alpha z, \alpha w)$
$= \alpha z, \alpha x$ $\qquad$ Si cumple ambas :)

2

⑤ $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$T(x,y) = (y + x, 5x - y)$

⑥ $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$T(x,y) = (-x, y)$
$T(\alpha(x,y)) = \alpha^2 T(x,y)$

⑦ $T: M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$
$$T\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$
es matriz traspuesta

⑧ $$T\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

⑨ $$U\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} + a_{22}$$

Vector: elemento en un espacio vectorial

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 30 \\ 30 & 60 \end{pmatrix}$$

① T:

① $$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -12 & 15 \\ 18 & 0 \\ -1 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 18 \\ 22 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

② $$\begin{pmatrix} 15 & 18 \\ 14 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -12 \\ -10 \end{pmatrix} =$$ No se puede

③ $$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 + 24 & 14 + 27 \\ 24 + 40 & 28 + 45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & 41 \\ 64 & 73 \end{pmatrix}$$

④ $$18 \begin{pmatrix} 2 & 4 & -11 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & 72 & -198 \\ 54 & 90 & 0 \end{pmatrix}$$

⑤ $$\begin{pmatrix} 12 \\ 11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

⑥ $$\begin{pmatrix} 6 & 9 & -11 \\ 11 & 18 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -6 + 0 - 11 \\ 0 + 0 + 0 \\ -11 + 0 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 \\ 0 \\ -11 \end{pmatrix}$$

Varianza y sabe que más

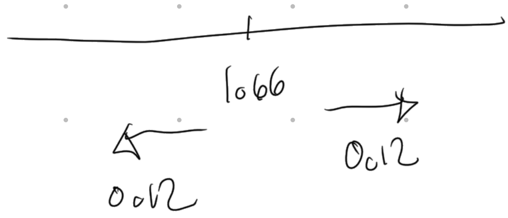
Promedio = 1.66

$$\sigma^2 = \frac{\sum^{n} (\underbrace{x_i}_{\text{dif datos}} - \underbrace{\bar{x}}_{\text{media}})^2}{\underbrace{n}_{\text{total datos}}}$$

x_i	$(x_i - \bar{x})^2$
1.56	$(1.56 - 1.66)^2 = 0.01$
1.80	$(1.80 - 1.66)^2 = 0.0196$
1.50	$(1.50 - 1.66)^2 = 0.0256$
1.77	$(1.77 - 1.66)^2 = 0.0121$

0.0168 ← varianza σ^2

desviación estándar $\sqrt{0.0168} = 0.12$



Covarianza entre x, y

→ que tanto se dispersan ambas variables al mismo tiempo

$$\sigma_{xy} = \frac{\sum^{n} (x_i - x)(y_i - y)}{n}$$

↓

lo haces con cada dato (pero no lo quiero hacer)

Peso	
57	$(57 - 60.75)^2 = 14.0625$
64	$(64 - 60.75)^2 = 10.56$
58	$(58 - 60.75)^2 = 7.56$
64	$(64 - 60.78)^2 = 14.0625$

60.75 ← $\bar{x}$

$\sigma^2 = 11.5625$

desv est = 3.4001

Matriz de covarianza en xy

$$\begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{pmatrix}$$

Valores propios

$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$

$\det(A - \lambda I) = 0$

$\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ → matriz identidad $= \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

Covarianza de altura-peso

$$A = \begin{pmatrix} 0.0168 & 0.408 \\ 0.408 & 10.68 \end{pmatrix}$$

te indica que si hay una cierta tendencia

↓ Valores y vectores propios

$$\det\begin{pmatrix} 0.0168 - \lambda & 0.408 \\ 0.408 & 10.68 - \lambda \end{pmatrix} = 0 \quad \boxed{(0.0168 - \lambda)(10.68 - \lambda) - .408^2 = 0}$$

↑ valores propios

λ → 0.0012, → 10.69 } lo hicimos con wolfram

$\lambda = 16.69$ $\swarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$(A - \lambda I)\, v = 0$

$$\left(\begin{pmatrix} 0.0168 - 10.69 & 0.408 \\ 0.408 & 10.68 - 10.69 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$\begin{cases} -10.67x + 0.408y = 0 \\ 0.408x - 0.01y = 0 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{10.67}{0.408}x$$

$y = 26.15x$

$y = 40.8x$

puedes escoger cualquiera de las dos

$\lambda = 0.0012$

$(A - \lambda I)V = 0$

$$\begin{cases} (0.0168 - 0.0012)x - 0.408y = 0 \\ 0.408x + (10.68 - 0.0012)y = 0 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{0.0115}{0.408} = 0.03x \Rightarrow \begin{matrix} 1 \\ -0.03 \end{matrix}$$

Proyección de datos sobre los vectores propios

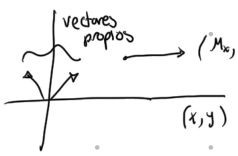
$V_1 = |V_2| = 1$

$V_2 = (x_1, y_1)$

Proyección $\Rightarrow (x,y)\cdot(x_2, y_2)$

$x x_2 + y y_2$

(x,y)



$\rightarrow (M_x, M_y)$

$(x,y) - (M_x, M_y)$

x	y
1.08	57
1.8	64
1.5	58
1.77	64

$x - M_x$	
-0.0975	-3.75
0.1425	3.25
-0.1875	-2.75
0.1125	3.25

Proyección sobre $V_1 = \begin{pmatrix} -0.9993 \\ 0.0380 \end{pmatrix}$

a) $(-0.0975, -3.75)\cdot(-0.993, 0.0380)$

$(-0.0975)(-0.993) + (-3.75)(0.0380)$

≈ 0.482

b) $(0.1425, 3.25) + (0.993, 0.0380)$

$= 0.0187$

Proyección sobre V_2 (

Componente principal

$x \rightarrow$ altura

$y \rightarrow$ peso

son centrados en (0,0)

CP1 $\rightarrow$ 0.0380 (altura) + 0.9993 (peso)

$\hookrightarrow$ explicas el 100% (99%) de variabilidad de los datos

CP2 $\rightarrow$ 0.9993 altura + 0.0380 peso

0.001 de variabilidad

Los datos tienen una tendencia hacia donde esta el vector propio

El vector propio lo escogimos

Cont Ter

$$\begin{pmatrix} 8 & 9 & -11 \\ 11 & 18 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & +0 & -11 \\ -11 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 \\ -11 \end{pmatrix}$$

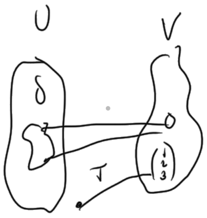
$$\textcircled{6}\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2×2 $\quad$ 3×3

si no son iguales esos números NO se puede

Inversa de transformación lineal

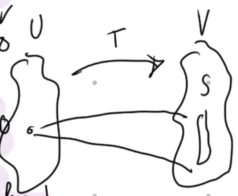
No todas las transformaciones lineales son invertibles



$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es invertible si

- $[T]$ es invertible → determinante → la característica es que sean 1 a 1 → que no se deforme, se debe mantener 1 único elemento en el origen y uno único en el final
- El $[T]$ es invertible si $\det([T]) \neq 0$



$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -M_2 \\ y \end{pmatrix}$$

$y \in \mathbb{R}$

La idea de las transformaciones 1 a 1 es que sean invertibles

→ debe conservar las características del espacio vectorial para regresar al espacio de origen

que no agregue info basura ni se pierda info

$$\textcircled{0}\ [T] = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 15 & 1 \end{bmatrix} = -2$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

→ matriz diagonal sup → todo lo que este arriba es 0

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 6 \end{bmatrix} = 18$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 1$$

es una matriz invertible si el determinante es dif del cero

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ invert}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 6 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \text{ invert}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{bmatrix} \text{ no invert}$$

¿Es posible llevar una matriz lineal a diagonal?

Una matriz T es diagonalizable si existe matriz Q, D invertible tal que nuestra matriz que representa la transf lineal es

$$[T] = Q^{-1} \circ D \circ Q$$

D → valores propios

Q → vectores propios

Sea T diagonalizable

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_1 & & \\ & & \lambda_1 & \\ 0 & & & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

→ la diagonal es que sea # y lo demás 0 abajo y arriba

$$Q = [V_1\ V_2\ V_3\ \dots V_4]$$

donde V son vectores

a los elementos en V_j se le llaman valores propios y a los vectores se le llaman vectores propios

$$D = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

$V_1 \quad V_2 \quad V_3$

$$[T] V_i = \lambda_i V_i$$

$\{V_1, V_2; V_3\}$ base V → la podemos usar para cuantificar info de espacio vectorial

Proyección vectores propios (salón)

Ejercicios 17/02/25

$V = \mathbb{R}^3$

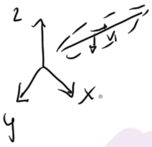
1) $\beta = \{(1,0,0),(0,1,0)\}$ – β no puede ser reducido
– β no genera a todo V

Falta $(0,0,1)$

2) $\beta = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,0,1)\}$

– β sí puede ser reducido $\rightarrow$ es un conjunto linealmente dep

El valor propio es



$\rightarrow$ vector propio tiene un espacio de un elipsoide (tiene un largo y un ancho)
los vectores propios nos determinan la longitud

Continuamos con diagonal

1) Sea $\lambda = \{v_1, \ldots, v_2\}$ de V y sea $[T]$ matriz

$U_1^1 = [T]V_1$

$U_1^2 = [T]U_1^1$

$U_1^3 = [T]U_1^2$

$\{U_1^1, U_1^2\}$

aprovechando que tu dimensión es finita no puedes tener tantos vectores

el # de elementos es la dimensión algebraica de la matriz que representa la dimensión

$I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

Versión 2

1) $\det([T] - xI) = 0$

$$\det\left[\begin{pmatrix} 15 & -8 & 22 \\ 0.87 & 12 & 100 \\ \pi & 4 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\right]$$

1) polinomio característico $= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) = 0$

$= (\lambda - 1)(\lambda - 12)(\lambda - 8)$

$\lambda_1 = 8$
$\lambda_2 = 12$
$\lambda_3 = 1$
pq los queremos hacer 0 y así encontrar valores propios

ej El núcleo del espacio generado

$$N\left[\begin{pmatrix} 15 & -8 & -22 \\ 0.87 & 12 & 100 \\ \pi & 4 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}\right]$$

tienes que usar sistemas de ecuaciones lineales $\rightarrow$

$x_1 - x_2 = 0$
$-5x_1 + 5x_2 = 0$

lo igualamos a cero y obtenemos las posibles soluciones

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

③ Expresamos las restricciones

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

↑ factorizamos y se obtiene el vector propio (hay que hacerlo con cada lambda)