DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

La operación de derivación toma una función f y produce una nueva función f'. Si ahora derivamos f', producimos otra función denotada por f'' y denominada segunda derivada de f. A su vez, puede derivarse, y de ahí producir f''', que se denomina tercera derivada de f, y así sucesivamente. La cuarta derivada se denota con $f^{(4)}$, la quinta derivada se denota con $f^{(5)}$, etc.

Por ejemplo, si

$f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 7x - 8$

$f'(x) = 6x^2 - 8x + 7$

$f''(x) = 12x - 8$

$f'''(x) = 12$

$f^{(4)}(x) = 0$

Como la derivada de la función cero es cero, la cuarta derivada y todas las derivadas de orden superior de f serán cero.

Derivada	Notación f	Notación y	Notación D	Notación $\frac{dy}{dx}$
Primera	$f'(x)$	y'	$D_x y$	$\frac{dy}{dx}$
Segunda	$f''(x)$	y''	$D_x^2 y$	$\frac{d^2y}{dx^2}$
Tercera	$f'''(x)$	y'''	$D_x^3 y$	$\frac{d^3y}{dx^3}$
Cuarta	$f^{(4)}(x)$	$y^{(4)}$	$D_x^4 y$	$\frac{d^4y}{dx^4}$
………….. n – ésima	………….. $f^{(n)}(x)$	…………… $y^{(n)}$	…………….. $D_x^n y$	…………….. $\frac{d^ny}{dx^n}$

PARTE A

1) $f(x) = x^5 - 3x^3 + 8x - 5$ $\qquad\qquad$ $f^{(4)}(x)$

Tenemos

$f'(x) = 5x^4 - 9x^2 + 8$

$f''(x) = 20x^3 - 18x$

$f'''(x) = 60x^2 - 18$

$\boxed{f^{(4)}(x) = 120x}$ ■

4) $f(x) = \dfrac{2}{x^2}$ $\qquad\qquad$ $f'''(x)$

Modifiquemos f

$f(x) = 2x^{-2}$ ----- > $f'(x) = -4x^{-3}$ ----- > $f''(x) = 12x^{-4}$

$f'''(x) = -48x^{-5}$

$= \boxed{-\dfrac{48}{x^5}}$ ■

7) $y = (2x^3 + 2)^5$ $\qquad\qquad$ y'''

Derivemos

$$
\begin{aligned}
y' &= 5(2x^3 + 2)^4\,(2x^3 + 2)' \\
&= 5(2x^3 + 2)^4\,(6x^2) \\
&= 30(2x^3 + 2)^4\,x^2 \\
y'' &= (30(2x^3 + 2)^4\,x^2)' \\
&= 30((2x^3 + 2)^4\,x^2)' \\
&= 30[(2x^3 + 2)^4\,(x^2)' + ((2x^3 + 2)^4)'\,x^2] \\
&= 30[(2x^3 + 2)^4\,2x + 4(2x^3 + 2)^3\,(2x^3 + 2)'\,x^2] \\
&= 30[(2x^3 + 2)^4\,2x + 4(2x^3 + 2)^3\,(6x^2)\,x^2] \\
&= 30(2x^3 + 2)^3[(2x^3 + 2)\,2x + 24x^4] \\
&= 30(2x^3 + 2)^3(28x^4 + 4x)
\end{aligned}
$$

$$y''' = (30(2x^3+2)^3(28x^4+4x))'$$
$$= 30((2x^3+2)^3(28x^4+4x))'$$
$$= 30[(2x^3+2)^3(28x^4+4x)' + ((2x^3+2)^3)'(28x^4+4x)]$$
$$= 30[(2x^3+2)^3(112x^3+4) + 3(2x^3+2)^2(2x^3+2)'(28x^4+4x)]$$
$$= 30(2x^3+2)^2[(2x^3+2)(112x^3+4) + 3(6x^2)(28x^4+4x)]$$
$$= \boxed{30(2x^3+2)^2(728x^6+304x^3+8)} \qquad \blacksquare$$

11) $f(x) = \dfrac{2x+1}{3x-2}$ $\qquad f^{(2)}(x)$

Veamos las derivadas

$$f'(x) = \left(\frac{2x+1}{3x-2}\right)'$$
$$= \frac{(3x-2)(2x+1)' - (3x-2)'(2x+1)}{(3x-2)^2}$$
$$= \frac{(3x-2)(2) - 3(2x+1)}{(3x-2)^2}$$
$$= \frac{\cancel{6x} - 4 - \cancel{6x} - 3}{(3x-2)^2}$$
$$= -\frac{7}{(3x-2)^2}$$
$$= -7(3x-2)^{-2}$$
$$f^{(2)}(x) = (-7(3x-2)^{-2})'$$
$$= (-7)(-2)(3x-2)^{-3}(3x-2)'$$
$$= 14(3x-2)^{-3}(3)$$
$$= \boxed{\frac{42}{(3x-2)^3}} \qquad \blacksquare$$

15) $f(x) = \tan^3(2x-1)$ $\qquad f^{(2)}(x)$

Tenemos

$$f'(x) = (\tan^3(2x-1))'$$

$= 3\tan^2(2x-1)\,(\tan(2x-1))'$

$= 3\tan^2(2x-1)\,\sec^2(2x-1)\,(2x-1)'$

$= 3\tan^2(2x-1)\,\sec^2(2x-1)\,(2)$

$= 6\tan^2(2x-1)\,(\tan^2(2x-1) + 1)$

$= 6\tan^4(2x-1) + 6\tan^2(2x-1)$

$= 6(\tan^4(2x-1) + \tan^2(2x-1))$

$f''(x) = (6(\tan^4(2x-1) + \tan^2(2x-1))'$

$= 6(\tan^4(2x-1) + \tan^2(2x-1))'$

$= 6(4\tan^3(2x-1)\,(\tan(2x-1))' + 2\tan(2x-1)\,(\tan(2x-1))')$

$= 12\tan(2x-1)\,[2\tan^2(2x-1) + 1](\tan(2x-1))'$

$= 12\tan(2x-1)\,[2\tan^2(2x-1) + 1](\sec^2(2x-1))(2x-1)'$

$= 12\tan(2x-1)\,[2\tan^2(2x-1) + 1](\sec^2(2x-1))(2)$

$= \boxed{24\tan(2x-1)\,[2\tan^2(2x-1) + 1]\sec^2(2x-1)}$ ■

17) $f(x) = \ln(\text{sen}\,(x^2))$ $\qquad f''(x)$

Derivemos

$$f'(x) = \frac{D_x\big(\text{sen}\,(x^2)\big)}{\text{sen}\,(x^2)} = \frac{(\cos\,(x^2))(2x)}{\text{sen}\,(x^2)} = 2x\cot(x^2)$$

$f''(x) = (2x)'\cot(x^2) + 2x(\cot(x^2))'$

$= 2\cot(x^2) + 2x(-\csc^2(x^2)\,(2x))$

$= \boxed{2\cot(x^2) - 4x^2\csc^2(x^2)}$ ■

19) $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$ $\qquad f'''(x)$

$$f'(x) = \frac{(1+x)(1-x)' - (1-x)(1+x)'}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{(1+x)(-1) - (1-x)(1)}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{-2}{(1+x)^2}$$

$$= -2(1+x)^{-2}$$

$$f''(x) = -2(-2)(1+x)^{-2-1}$$

$$= 4(1+x)^{-3}$$

$$= \frac{4}{(1+x)^3}$$

$$f'''(x) = 4(-3)(1+x)^{-3-1}$$

$$= -12(1+x)^{-4}$$

$$= \boxed{-\frac{12}{(1+x)^4}} \qquad \blacksquare$$

21) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-3x}}$ $\qquad\qquad$ $f'''(x)$

Modifiquemos la función

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-3x}} = \frac{1}{(2-3x)^{\frac{1}{2}}} = (2-3x)^{-\frac{1}{2}}$$

Esto facilita bastante el derivar . Veamos

$$f'(x) = -\frac{1}{2}(2-3x)^{-\frac{3}{2}}(-3)$$

$$= \frac{3}{2}(2-3x)^{-\frac{3}{2}}$$

$$f''(x) = \frac{3}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)(2-3x)^{-\frac{5}{2}}(-3)$$

$$= \frac{27}{4}(2-3x)^{-\frac{5}{2}}$$

$$f'''(x) = \frac{27}{4}\left(-\frac{5}{2}\right)(2-3x)^{-\frac{7}{2}}(-3)$$

$$= \boxed{\frac{405}{8}(2-3x)^{-\frac{7}{2}}} \qquad \blacksquare$$

23) $f(x) = \dfrac{1}{(1 - x)^2}$ $\qquad\qquad\qquad\qquad f^{(n)}(x)$

En estos ejercicios de fórmulas de derivadas , es muy frecuente aplicar el concepto de factorial , que se define así :

$n! = (1)(2)(3)........(n)$.

La función f la podemos modificar fácilmente

$f(x) = (1 - x)^{-2}$

El método que se aplica es el determinar las primeras derivadas (tres o cuatro) , y observar el comportamiento de las cantidades .

$f\,'(x) = -2\,(1 - x)^{-3}\,(-1)$

$\quad = 2\,(1 - x)^{-3}$

$f\,''(x) = 2\,(-3)\,(1 - x)^{-4}\,(-1)$

$\quad = (2)(3)\,(1 - x)^{-4}$

$f\,'''(x) = (2)(3)(\,-4)(1 - x)^{-5}\,(-1)$

$\quad = (2)(3)(4)(1 - x)^{-5}$

.

.

.

.

$f^{\,(n)} \quad = (n + 1)!\,(1 - x)^{-(n + 2)}$

$$= \boxed{\dfrac{(n + 1)!}{(1 - x)^{n+2}}}$$

En este tipo de ejercicio hay que tener en cuenta los patrones que se repiten , ellos nos darán la pauta para determinar una fórmula . No siempre es posible hacer esto . ■

27) $f(x) = \text{sen } x$ $\qquad\qquad\qquad\qquad f^{(n)}(x)$

Procederemos como el ejercicio anterior , haciendo unas derivadas , y en este caso , buscaremos una identidad que se vincule con el orden de las derivadas . Veamos

$f(x) = \text{sen}\ (x)$

$f'(x) = \cos\ (x)$

$f''(x) = -\ \text{sen}(x)$

$f'''(x) = -\cos\ (x)$

$f^{(4)}(x) = \text{sen}\ (x)$

La clave de este ejercicio está en la identidad :

$\text{sen}\ (A + B) = \text{sen}\ (A) \cos\ (B) + \text{sen}\ (B) \cos\ (A)$

Hagamos $A = x$ y $B = \frac{n\pi}{2}$

$\text{sen}\ (x + (\frac{n\pi}{2})) = \text{sen}\ (x) \cos\ (\frac{n\pi}{2}) + \text{sen}\ (\frac{n\pi}{2}) \cos\ (x)$

En esta identidad hay que tener en cuenta que n representa el orden de la derivada , veamos algunos :

$n = 1$ ------------ > $\text{sen}\ (x + \frac{\pi}{2}) = \cos\ (x)$ --------- > Primera derivada

$n = 2$ ------------ > $\text{sen}\ (x + \pi) = -\ \text{sen}\ (x)$ ------ > Segunda derivada

$n = 3$ ------------ > $\text{sen}\ (x + \frac{3\pi}{2}) = -\cos\ (x)$ -----> Tercera derivada

$n = 4$ ------------ > $\text{sen}\ (x + \frac{4\pi}{2}) = \text{sen}\ (x)$ -----> Cuarta derivada

Podemos concluir que derivada $n -$ ésima de la función $f(x) = \text{sen } x$ viene dada por la fórmula

$f^{(n)}(x) = \text{sen}\ (x + \frac{n\pi}{2})$ ■

30) $f(x) = (2x + 1)^{-1}$

Hagamos algunas derivadas

$f'(x) = -(2x + 1)^{-2}(2)$

$= -2(2x + 1)^{-2}$

$f''(x) = -2(-2)(2x + 1)^{-3}(2)$

$= (2)(2)(2)(2x + 1)^{-3}$

$f^{(3)}(x) = (2)(2)(2)(-3)(2x + 1)^{-4}(2)$

$= -(2)(2)(2)(2)(3)(2x + 1)^{-4}$

$f^{(4)}(x) = -(2)(2)(2)(2)(3)(-4)(2x + 1)^{-5}(2)$

$= 2^4(2)(3)(4)(2x + 1)^{-5}$

$f^{(5)}(x) = 2^4(2)(3)(4)(-5)(2x + 1)^{-6}(2)$

$= -2^5(2)(3)(4)(5)(2x + 1)^{-6}$

.

.

.

$f^{(n)}(x) = (-1)^n\, 2^n\, n!\, (2x + 1)^{-(n+1)}$

$$= \frac{(-1)^n\, 2^n\, n!}{(2x + 1)^{n+1}}$$

OBSERVACIÓN

Es importante para determinar estas fórmulas que observemos las partes que tienen un comportamiento que se repite y que es posible construir una fórmula . Esto no siempre es posible que suceda , habrán funciones que no tendrán , en sus derivadas , comportamientos reiterativos .

$\int$

<u>DIFERENCIACIÓN IMPLÍCITA</u> .

Se dice que una función donde la variable dependiente se expresa sólo en términos de la variable independiente x , a saber , $y = f(x)$, es una **función explícita** . Por ejemplo , $y = 5x^2 + 3x + 1$ es una función explícita . Por otra parte , se dice que una ecuación equivalente como la siguiente $5x^2 + 3x + 1 - y = 0$ define implícitamente la función , o que y es una función implícita de x . En este caso , la ecuación puede escribirse en forma explícita e implícita . Pero existe una gran cantidad de ecuaciones que solamente pueden ser escritas en forma implícita , y aún así es posible derivarlas . Ejemplos de este tipo de ecuaciones son :

$2x^5 + 10xy^3 + \sqrt[5]{y} + \ln(xy^3) = \operatorname{sen}(2x - 3xy)$

$x^3 + xy^{10} - \tan(x + 3y^6) + \csc(y^3) = x^3 + y^3$

Aquí claramente la y no puede ser escrita en términos de x , es decir la y no se puede despejar . Vamos a estudiar como diferenciar este tipo de ecuaciones y la técnica que se aplica es conocida como diferenciación implícita . Antes de empezar con los ejercicios es importante hacer una distinción :

1) Cuando se nos pida encontrar $\dfrac{dy}{dx}$, debemos entender que la variable independiente es x y la variable dependiente es y , esto tiene la implicación siguiente : $x' = 1$ e $y' = \dfrac{dy}{dx}$.

2) En caso contrario , es decir $\dfrac{dx}{dy}$, la variable independiente es y y la variable dependiente es x , esto implíca que : $y' = 1$ e $\dfrac{dx}{dy} = x'$.

PARTE B

1) $x^2 + 3x + xy = 5$

$\boxed{y'}$

$x^2 + 3x + xy = 5$ ------------ > $(x^2 + 3x + xy)' = (5)'$

$(x^2)' + (3x)' + (xy)' = 0$ ---> $2x + 3 + xy' + x'y = 0$

$2x + 3 + xy' + y = 0$ ------ > $\boxed{y' = -\dfrac{2x + y + 3}{x}}$

$\boxed{x'}$

$x^2 + 3x + xy = 5$ ------------> $(x^2 + 3x + xy)' = (5)'$

$(x^2)' + (3x)' + (xy)' = 0$ ---- > $2xx' + 3x' + xy' + x'y = 0$

$2xx' + 3x' + x + x'y = 0$ ---- > $\boxed{x' = -\dfrac{x}{2x + y + 3}}$ ■

NOTA : En este ejercicio es sencillos ver una propiedad que siempre se va a cumplir : $y'\,x' = 1$.

4) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4$

$\boxed{y'}$

$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4$ --------------- > $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = 4$

$(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}})' = (4)'$ --------- > $(x^{\frac{1}{2}})' + (y^{\frac{1}{2}})' = (4)'$

$\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}x' + \dfrac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}y' = 0$ --- > $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{2\sqrt{y}}y' = 0$

Si despejamos y ' obtendremos : $\boxed{y' = -\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}}$

$\boxed{x'}$

$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4$ --------------- > $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = 4$

$(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}})' = (4)'$ --------- > $(x^{\frac{1}{2}})' + (y^{\frac{1}{2}})' = (4)'$

$$\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}x' + \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}y' = 0 \text{ ---> } \quad \frac{1}{2\sqrt{x}}x' + \frac{1}{2\sqrt{y}} = 0$$

Si despejamos x' obtendremos : $\boxed{x' = -\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}}$ ■

NOTA : En adelante solamente haremos una de las dos , ya que la otra es la inversa multiplicativa .

8) $3y + \cos y = x^2$

Vamos a determinar x' .

$(3y + \cos y)' = (x^2)'$

$(3y)' + (\cos y)' = 2xx'$

$3y' + (-\operatorname{sen} y)y' = 2xx'$ ----- > Recuerde que en este caso $y' = 1$

$3 - \operatorname{sen} y = 2xx'$

$$\boxed{x' = \frac{3 - \operatorname{sen} y}{2x}}$$

Por lo que se afirmó anteriormente , tendremos

$$y' = \frac{2x}{3 - \operatorname{sen} y}$$ ■

13) $(x^2 + y^2)^6 = x^3 - y^3$

Determinemos y' .

$((x^2 + y^2)^6)' = (x^3 - y^3)'$

$6(x^2 + y^2)^5(x^2 + y^2)' = 3x^2 - 3y^2y'$

$6(x^2 + y^2)^5(2x + 2yy') = 3x^2 - 3y^2y'$

Hagamos , para facilitar los cálculos , $A = 6(x^2 + y^2)^5$

$A(2x + 2yy') = 3x^2 - 3y^2y'$

$2Ax + 2Ayy' = 3x^2 - 3y^2y'$

$2Ayy' + 3y^2y' = 3x^2 - 2Ax$

$(2Ay + 3y^2)y' = 3x^2 - 2Ax$

$$y' = \frac{3x^2 - 2Ax}{2Ay + 3y^2} \qquad \blacksquare$$

17) $\dfrac{y}{x-y} = x^2 + 1$

Determinaremos x' .

$$\left(\frac{y}{x-y}\right)' = (x^2+1)'$$

$$\frac{(x-y)y' - y(x-y)'}{(x-y)^2} = 2xx'$$

$$(x-y) - y(x'-1) = 2xx'(x-y)^2$$

Luego del proceso de la derivada , despejamos x' , y obtendremos :

$$\boxed{x' = \frac{x}{2x(x-y)^2 + y}}$$

La otra derivada y' será la inversa multiplicativa , o sea :

$$y' = \frac{2x(x-y)^2 + y}{x} \qquad \blacksquare$$

21) $x\text{sen}\,(y) + \cos\,(2y) = \cos\,(y)$

Haremos x' .

$$x\,\text{sen}\,(y) + \cos\,(2y) = \cos\,(y)$$

$$(x\text{sen}\,(y) + \cos\,(2y))' = (\cos\,(y))'$$

$$x'\text{sen}\,(y) + x\,(\text{sen}\,(y))' - \text{sen}\,(2y)\,(2) = -\,\text{sen}\,(y)$$

$$x'\text{sen}\,(y) + x\cos\,(y) - 2\,\text{sen}\,(2y) = -\,\text{sen}\,(y)$$

$$\boxed{x' = \frac{2\,\text{sen}\,(2y) - \text{sen}\,(y) - x\cos\,(y)}{\text{sen}\,(y)}} \qquad \blacksquare$$

24) $x = \sec y$

Determinaremos y' .

$x' = (\sec y)'$ -----> $1 = (\sec y \tan y)y'$

$$\boxed{y' = \frac{1}{\sec y \tan y}}$$ ■

27) $x = \cot^{-1}(\frac{1}{y})$

Determinemos x'.

$x' = (\cot^{-1} y^{-1})'$ -----> $x' = -\frac{(y^{-1})'}{(\frac{1}{y})^2 + 1}$

$x' = -\frac{-y^{-2}}{\frac{1 + y^2}{y^2}}$ --------> $x' = \frac{y^{-2}}{\frac{1 + y^2}{y^2}}$

$x' = \frac{y^2 y^{-2}}{y^2 + 1}$ -----------> $x' = \frac{y^0}{y^2 + 1}$

$$\boxed{x' = \frac{1}{y^2 + 1}}$$ ■

30) $\csc^{-1}(x^2 + y^2) = x + y$

Determinaremos y'.

$(\csc^{-1}(x^2 + y^2))' = (x + y)'$

$$-\frac{(x^2 + y^2)'}{(x^2 + y^2)\sqrt{(x^2 + y^2)^2 - 1}} = 1 + y'$$

$$-\frac{2x + 2yy'}{(x^2 + y^2)\sqrt{(x^2 + y^2)^2 - 1}} = 1 + y'$$

Hagamos $A = (x^2 + y^2)\sqrt{(x^2 + y^2)^2 - 1}$. Esto se hace con la finalidad de hacer más cómodas las operaciones.

$$-\frac{2x + 2yy'}{(x^2 + y^2)\sqrt{(x^2 + y^2)^2 - 1}} = 1 + y'$$

$$-\frac{2x + 2yy'}{A} = 1 + y'$$

$$-(2x + 2yy') = A(1 + y')$$

$$-2x - 2yy' = A + Ay'$$

$$-2yy' - Ay' = A + 2x$$

$$(-2y - A)\,y' = A + 2x$$

$$y' = \frac{A + 2x}{-2y - A}$$

$$y' = \frac{A + 2x}{-(2y + A)}$$

$$y' = -\frac{A + 2x}{2y + A}$$

$$\boxed{y' = -\frac{A + 2x}{A + 2y}} \quad \blacksquare$$

PARTE C

1) $x^3 + y^3 = 1$ --------------- > $(x^3 + y^3)' = (1)'$

$3x^2 + 3y^2y' = 0$ -------- > $y' = -\dfrac{x^2}{y^2}$ (*)

Ahora volveremos a derivar :

$$y'' = -\frac{y^2(x^2)' - x^2(y^2)'}{(y^2)^2}$$

$$y'' = -\frac{2xy^2 - 2x^2yy'}{y^4}$$

Si sustituimos (*) y simplificamos (hay que hacerlo) , obtenemos :

$$y'' = -\frac{2xy^3 + 2x^4}{y^5}$$

$$= -\frac{2x\,(y^3 + x^3)}{y^5}$$

$$= -\frac{2x\,(x^3 + y^3)}{y^5} \text{ ----------- } > x^3 + y^3 = 1$$

$$\boxed{= -\frac{2x}{y^5}} \qquad \blacksquare$$

6) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Este ejercicio por ser muy largo , algunas operaciones sencillas las dejaremos que el alumno las haga como tarea . Veamos .

La expresión original puede escribirse en forma equivalente como :

$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$

Si derivamos ambos lados de la igualdad obtendremos :

$2b^2 x + 2a^2 y\, y' = 0$

Despejando y' obtenemos :

$$y' = -\frac{b^2\, x}{a^2 y} \text{ ------- } (*)$$

Si volvemos a derivar y simplificamos , tendremos :

$$y'' = -\frac{b^2(y - xy')}{a^2y^2}$$

Si sustituimos (*) y simplificamos nuevamente , obtendremos :

$$y'' = -\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{a^2\, y^2 + b^2x^2}{a^2y^3}\right)$$

$$y'' = -\frac{b^2}{\cancel{a^2}}\left(\frac{\cancel{a^2}\, b^2}{a^2y^3}\right)$$

$$\boxed{y'' = -\frac{b^4}{a^2y^3}} \qquad \blacksquare$$

8) $y^2 - x^2 = \tan(2x)$

Obtengamos la primera derivada y'

$(y^2 - x^2)' = (\tan(2x))'$

$2yy' - 2x = \sec^2(2x)\,(2x)'$

$2yy' - 2x = \sec^2(2x)\,2$ -----> Eliminando 2

Despejando

$$y' = \frac{x + \sec^2(2x)}{y}$$

Hagamos $A = x + \sec^2(2x)$ entonces

$A' = 1 + 2\sec(2x)\sec(2x)\tan(2x)\,(2)$

$A' = 1 + 4\sec^2(2x)\tan(2x)$

Volviendo a y' y sustituyendo A

$$y' = \frac{A}{y}$$

Derivemos nuevamente

$$y'' = \frac{yA' - Ay'}{y^2}$$ -----> Sustituyamos A y A'

$$y'' = \frac{yA' - A(\frac{A}{y})}{y^2}$$

Operemos

$$y'' = \frac{y^2A' - A^2}{y^3}$$ -----> Sustituyamos A' y A

$$\boxed{y'' = \frac{y^2(1 + 4\sec^2(2x)\tan(2x)) - (x + \sec^2(2x))^2}{y^3}}$$ ■

PARTE D

1) $x^4 + y^3 = 24$ $\qquad\qquad$ $P(-2\,,2)$

Determinemos m (es lo mismo que y ’)

$(x^4 + y^3)' = (24)'$ ----- > $4x^3 + 3y^2\, y' = 0$ ----- > $y\,' = -\dfrac{4x^3}{3y^2} = m$

Ahora evaluemos $P(-2\,,2)$

$m = -\frac{4(-2)^3}{3(2)^2} = \dfrac{8}{3}$

Determinemos la ecuación general de la recta tangente

$y - 2 = \dfrac{8}{3}\,(x - (-2))$ ----- > $3(y - 2) = 8(x + 2)$

$3y - 6 = 8x + 16$ ----- > $0 = 8x + 16 - 3y + 6$

$0 = 8x - 3y + 22$

$\boxed{8x - 3y + 22 = 0}$ $\qquad\qquad$ ■

3) $y^2 = x^3(2 - x)$ $\qquad\qquad$ $P(1\,,1)$

Tenemos :

$y^2 = x^3\,(2 - x)$ ----- > $y^2 = 2x^3 - x^4$

$(y^2)\,' = (2x^3 - x^4)\,'$ ----- > $2yy\,' = 6x^2 - 4x^3$

Si evaluamos en el punto $(1\,,1)$, es fácil ver $y\,' = 1$. Este valor es la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto $(1\,,1)$.

Ahora determinemos la ecuación general :

$y - 1 = 1(x - 1)$

$y - 1 = x - 1$

$y = x$

$\boxed{x - y = 0}$ $\qquad\qquad$ ■

6) $x \cos y = 1$ $\qquad\qquad$ $P(2\,, \frac{\pi}{3})$

Tenemos :

$x \cos y = 1$ -----> $(x \cos y)' = (1)'$

$\cos y - x\,(\text{sen}\, y)\, y' = 0$

Si evaluamos el punto $(2\,, \frac{\pi}{3})$ y despejamos y' obtendremos :

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Esta será la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto indicado .

Ahora veamos su ecuación general :

$$y - \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2\sqrt{3}}(x - 2)$$

Mediante una serie de operaciones podemos obtener la ecuación general :

$$\boxed{x - 2\sqrt{3}\, y - 2 + \frac{2\sqrt{3}\,\pi}{3} = 0}$$

<u>OBSERVACIÓN</u> : Las operaciones que no se hagan , las tendrá que hacer el alumno como una tarea ; son bastante sencillas , y el alumno está en capacidad de hacerlas . ■

<u>PARTE E</u>

1) $x^2 - xy + y^2 = 3$

Debemos determinar todos los puntos sobre la gráfica donde $y' = 0$. Derivemos

$(x^2 - xy + y^2)' = (3)'$ -----> $2x - (y + xy') + 2yy' = 0$

Como $y' = 0$ entonces desaparece y nos queda

$2x - y = 0$ -----> $y = 2x$

Si sustituimos esto último en la ecuación original

$x^2 - x(2x) + (2x)^2 = 3$ -----> $x^2 - 2x^2 + 4x^2 = 3$

$3x^2 = 3$ -----> $x^2 = 1$ -----> $x = -1 , 1$

$\underline{x = -1}$

$(-1)^2 - (-1)y + y^2 = 3$ -----> $y^2 + y - 2 = 0$

$$(y + 2)(y - 1) = 0$$

$$y = -2 , 1$$

$\underline{x = 1}$

$1^2 - 1y + y^2 = 3$ -----> $y^2 - y - 2 = 0$

$$(y - 2)(y + 1) = 0$$

$$y = -1 , 2$$

Luego los puntos que buscamos son

$\boxed{(-1 , 1) \quad (-1 , -2) \quad (1 , -1) \quad (1 , 2)}$ ■

PARTE F

2) Encuentre el punto donde se cortan las rectas tangentes a la gráfica de $x^2 + y^2 = 25$ en $(-3 , 4)$ y $(-3 , -4)$.

Debemos , en primer lugar , determinar las rectas tangentes . Pero antes derivemos para obtener las pendientes .

$(x^2 + y^2)' = (25)'$ -----> $2x + 2yy' = 0$ -----> $y' = -\dfrac{x}{y}$

Recta tangente en el punto $(-3 , 4)$.

$$m = -\frac{-3}{4} = \frac{3}{4}$$

$y - 4 = \dfrac{3}{4}(x - (-3))$ -----> $4(y - 4) = 3(x + 3)$

$4y - 16 = 3x + 9$ -----> $3x - 4y + 25 = 0 \quad (1)$

Recta tangente en el punto $(-3\,,-4)$.

$m = -\frac{-3}{-4} = -\frac{3}{4}$

$y-(-4) = -\frac{3}{4}(x-(-3))$ -----> $4(y+4) = -3(x+3)$

$4y+16 = -3x-9$ -----> $3x+4y+25 = 0$ (2)

Ahora veamos donde se cortan ambas rectas

$3x-4y+25 = 0$

$\underline{3x+4y+25 = 0}$

$6x \qquad +50 = 0$ -----> $x = -\frac{50}{6} = -\frac{25}{3}$

Sustituyamos este valor en (1)

$3x-4y+25 = 0$ -----> $3\left(-\frac{25}{3}\right)-4y+25 = 0$

$-25-4y+25 = 0$ -----> $y = 0$

Por tanto el punto de corte es

$\boxed{\left(-\frac{25}{3}\,,0\right)}$ ■

PARTE G

2) $y^3+3x^2y = 13 \qquad 2x^2-2y^2 = 3x \qquad (2\,,1)$

Tenemos que probar que las pendientes (derivadas) , en el punto indicado , su producto es -1 . Veamos

$\underline{y^3+3x^2y = 13}$

$(y^3+3x^2y)' = (13)'$

$3y^2y'+6xy+3x^2y' = 0$

$3(1)^2y'+6(2)(1)+3(2)^2y' = 0$

$15y' = -12$ -----> $y' = -\frac{4}{5}$ -----> Primer Pendiente

$\underline{2x^2 - 2y^2 = 3x}$

$(2x^2 - 2y^2)' = (3x)'$

$4x - 4yy' = 3$

$4(2) - 4(1)y' = 3$

$y' = \frac{-5}{-4} = \frac{5}{4}$ -----> Segunda Pendiente

Por tanto , es evidente que si multiplicamos las dos pendientes , el resultado es -1 , con lo cual estaríamos probando su perpendicularidad . ■

PARTE H

1) La recta normal a $x^3 + y^3 = 3xy$ en el punto $(\frac{3}{2} , \frac{3}{2})$ pasa por el orígen .

Tengamos presente que todas las rectas que pasan por el origen son de la forma $y = mx$. Esto es lo que probaremos .

Determinemos la pendiente de la recta normal en el punto (1.5 , 1.5) .

$(x^3 + y^3)' = (3xy)'$

$3x^2 + 3y^2 y' = 3y + 3xy'$

Ahora evaluemos el punto (1.5 , 1.5) :

$3(1.5)^2 + 3(1.5)^2 y' = 3(1.5) + 3(1.5)y'$

$6.75 + 6.75y' = 4.5 + 4.5y'$

$6.75y' - 4.5y' = 4.5 - 6.75$

$2.25y' = -2.25$ -----> $y' = -1$

Esta es la pendiente de la recta tangente , entonces es evidente que la pendiente de la recta normal es 1 (su producto debe ser -1) .

Veamos ahora la ecuación de la recta normal :

$y - 1.5 \;=\; 1(x - 1.5)$

$y - 1.5 \;= x - 1.5$

$y = x$

Entonces tenemos que la recta normal es la recta identidad , la cual evidentemente pasa por el origen . ■

2) Las gráficas de $2x^2 + y^2 = 6$ e $y^2 = 4x$ se intersectan en ángulo recto .

Primero determinemos los puntos donde se cortan .

Como $y^2 = 4x$ entonces $2x^2 + 4x = 6$. Así

$2(x^2 + 2x) = 6$ ----- > $x^2 + 2x = 3$ ----- > $x^2 + 2x - 3 = 0$

$(x + 3)(x - 1) = 0$

$x = -3$ ----- > $y^2 = 4(-3) = -12$ No genera solución real

$x = 1$ ----- > $y^2 = 4(1) = 4$ ----- > $y = -2 , 2$.

Los puntos donde se cortan las curvas son $A(1 , -2)$ y $B(1 , 2)$.

Solamente probaremos la perpendicularidad en el punto B , el otro queda como tarea .

Derivemos las ecuaciones y evaluemos B .

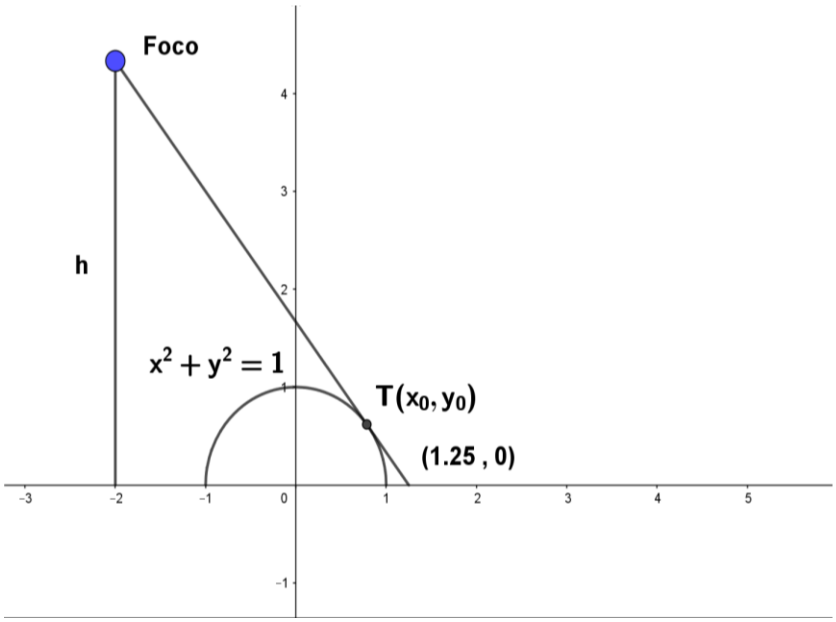
$(2x^2 + y^2)' = (6)'$	$(y^2)' = (4x)'$
$4x + 2yy' = 0$	$2yy' = 4$
$4(1) + 2(2)y' = 0$	$2(2)y' = 4$
$4 + 4y' = 0$	$4y' = 4$
$y' = -1$	$y' = 1$

Es evidente que el producto de estas dos pendientes es -1 .

Luego , en este punto se intersectan en ángulo recto . ■

PARTE G

Veamos el dibujo :



Vamos a determinar la ecuación de la recta tangente en $T(x_0 , y_0)$.

Primero , encontremos la pendiente derivando implícitamente :

$x^2 + y^2 = 1$ --------------- > $(x^2 + y^2)' = (1)'$

$2x + 2yy' = 0$ ----------- > $y' = -\dfrac{x_0}{y_0}$

Pero como y' es la pendiente de la recta tangente , entonces :

$$m = -\frac{x_0}{y_0}$$

Esta misma pendiente la podemos encontrar con los puntos

$T(x_0 , y_0)$ y $(1.25 , 0)$, con lo cual obtenemos :

$$m = \frac{y_0}{x_0 - 1.25}$$

Igualemos ambas expresiones y resolvamos :

$$\frac{y_0}{x_0 - 1.25} = -\frac{x_0}{y_0} \text{ ----- > } y_0^2 = -x_0\,(x_0 - 1.25)$$

$y_0^2 = -x_0^2 + 1.25x_0$ ----- > $x_0^2 + y_0^2 = 1.25x_0$

$1 = 1.25x_0$ ----- > Recuerde que $x_0^2 + y_0^2 = 1$

$x_0 = \frac{4}{5}$

Si sustituimos este valor en la ecuación de la circunferencia obtenemos :

$y_0 = \frac{3}{5}$ ----- > Recuerde también que está en el Primer Cuadrante

Sustituyendo estos valores en alguna de las dos fórmulas de m , obtenemos :

$m = -\frac{4}{3}$

Ahora determinemos la ecuación de la recta tangente , para ello tenemos la pendiente y el punto (1.25 , 0) :

$y - 0 = -\frac{4}{3}(x - 1.25)$

$y = -\frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$

Entonces , la ecuación de la recta es : $y = -\frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$.

Ahora , lo que se nos pide es la altura h a la que se encuentra el foco , para ello solamente tenemos que evaluar en $x = -2$:

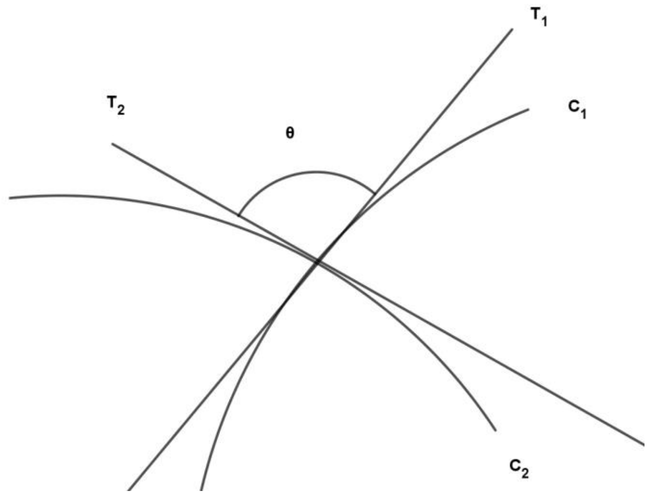
$h = -\frac{4}{3}(-2) + \frac{5}{3}$

Con lo cual obtenemos :

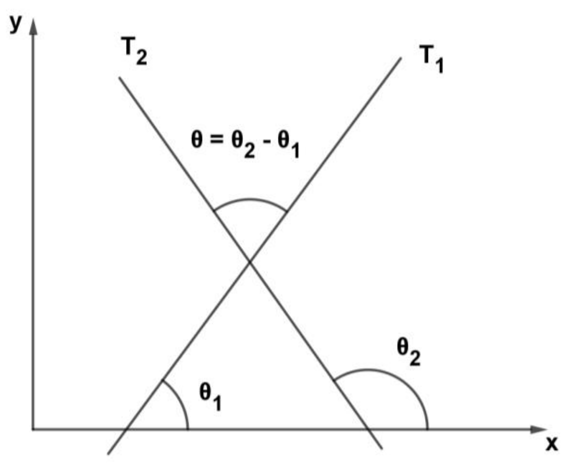
$\boxed{h = \frac{13}{3} \text{ unidades .}}$ ■

PARTE H

Tenemos el siguiente dibujo que se nos proporciona en la Guía :



Ahora dibujemos solamente las rectas tangentes y los ángulos en un gráfico con coordenadas rectangulares (hemos de aclarar que el punto de intersección (a , b) que menciona el problema no aparece en el dibujo , ya que no es importante en la resolución del mismo) :



Como θ_1 y θ_2 son los ángulos de inclinación de cada recta , entonces las pendientes pueden obtenerse a partir de estos ángulos :

$m_1 = \tan\theta_1$ y $m_2 = \tan\theta_2$

Así :

$\tan\theta = \tan(\theta_2 - \theta_1)$

$$= \frac{\operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1)}{\cos(\theta_2 - \theta_1)}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\theta_2 \cos\theta_1 - \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2}{\cos\theta_1 \cos\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2}$$

Si esta expresión es dividida por $\cos\theta_1 \cos\theta_2$ entonces obtendremos el resultado requerido :

$$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \qquad \blacksquare$$

PARTE I

1) Si $x^2 + y^2 = 1$ entonces $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{1}{y^3}$

Obtengamos la primera derivada

$(x^2 + y^2)' = (1)'$ -----> $2x + 2yy' = 0$ -----> $y' = -\dfrac{x}{y}$ --- (1)

Derivemos nuevamente

$$y'' = -\frac{y(1) - x\,y'}{y^2}$$

$$y'' = -\frac{y - x\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2} \text{ ----- Por (1)}$$

$$y'' = -\frac{y + \frac{x^2}{y}}{y^2}$$

$$y'' = -\frac{\frac{y^2 + x^2}{y}}{y^2} \text{ ----- Sumando las fracciones de arriba}$$

$y'' = -\frac{x^2 \ + \ y^2}{y^3}$ ----- > Dividiendo las fracciones

$y'' = -\frac{1}{y^2}$ ----- Se tiene que $x^2 + y^2 = 1$.

Luego queda probado . ■

3) Si $x^2 + 25y^2 = 100$ entonces $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{4}{25y^3}$

Queremos probar que al derivar implícitamente la ecuación

$x^2 + 25y^2 = 100$ obtenemos $y'' = -\frac{4}{25y^3}$.

Hagamos la primera derivada implícita :

$(x^2 + 25y^2)' = (100)'$

$2x + 50yy' = 0$

$y' = -\frac{x}{25y}$

Derivemos por segunda vez :

$$y'' = -\frac{25y \ - \ x25y'}{(25y)^2}$$

$$= -\frac{25y \ - \ 25xy'}{(25y)^2}$$ -------- Sustituyamos y' anterior

$$= -\frac{25y \ - \ 25x(-\frac{x}{25y})}{(25y)^2}$$

$$= -\frac{(25y)^2 \ + \ 25x^2}{(25y)^3}$$ --------- Estas son operaciones sencillas

$$= -\frac{25(25y^2 \ + \ x^2)}{25^3\, y^3}$$

$$= -\frac{x^2 \ + \ 25y^2}{25^2y^3}$$ --------- Como $x^2 + 25y^2 = 100$

$$= -\frac{100}{25^2y^3}$$ --------- Simplificando entre 25

$$= -\frac{4}{25y^3}$$ --------- Es lo que queríamos probar

■

FINALIZACIÓN