REGLA DE LA CADENA PARA DERIVADAS.

Anteriormente hemos estudiado la regla para derivar potencias

$$\frac{d}{dx}(x^n) = n\,x^{n-1}$$

que es válida para todos los números reales x con exponente .

Ahora veremos que una regla semejante se cumple para la derivada de una potencia de una función $y = [\ f(x)\ ]^n$. Consideremos un ejemplo .

Suponga que queremos derivar

$$y = (x^{10} + 8)^2$$

La función y la podemos escribir como

$$y = (x^{10} + 8)(x^{10} + 8)$$

Derivando

$$\frac{d}{dx}(x^{10} + 8)^2 = \frac{d}{dx}((x^{10} + 8)(x^{10} + 8))$$

$$= (x^{10} + 8)\frac{d}{dx}(x^{10} + 8) + (x^{10} + 8)\frac{d}{dx}(x^{10} + 8)$$

$$= (x^{10} + 8)(10x^9) + (x^{10} + 8)(10x^9)$$

$$= 2(x^{10} + 8)(10x^9) \text{ ----- } (*)$$

En forma semejante , para derivar la función $y = (x^{10} + 8)^3$, podemos escribirla como $y = (x^{10} + 8)^2 (x^{10} + 8)$ y usar la regla del producto y el resultado (*)

$$\frac{d}{dx}(x^{10} + 8)^3 = \frac{d}{dx}((x^{10} + 8)^2 (x^{10} + 8))$$

$$= (x^{10} + 8)^2 \frac{d}{dx}(x^{10} + 8) + (x^{10} + 8)\frac{d}{dx}((x^{10} + 8)^2)$$

$$= (x^{10} + 8)^2 (10x^9) + (x^{10} + 8)\, 2(x^{10} + 8)(10x^9)$$

$$= (x^{10} + 8)^2 (10x^9) + 2(x^{10} + 8)^2 (10x^9)$$

$$= 3(x^{10} + 8)^2\,(10x^9)$$

De igual manera la función $y = (x^{10} + 8)^4$ podemos probar que

$$\frac{d}{dx}((x^{10} + 8)^4) = 4(x^{10} + 8)^3\,(10x^9)\ .$$

En general tendremos que

$$\frac{d}{dx}((f(x))^n) = n\,(f(x))^{n-1}\,f\,'(x)\ .$$

PARTE A

1) $f(x) = (3x + 1)^4$

Apliquemos la regla de la cadena .

$$\begin{aligned} f\,'(x) &= D_x((3x + 1)^4) \\ &= 4(3x + 1)^3\,(3x + 1)' \\ &= 4(3x + 1)^3\,(3) \\ &= \boxed{12(3x + 1)^3} \end{aligned} \qquad \blacksquare$$

3) $f(x) = (9x + 2)^{\frac{2}{3}}$

Veamos la regla de la cadena

$$\begin{aligned} f\,'(x) &= ((9x + 2)^{\frac{2}{3}})' \\ &= \frac{2}{3}(9x + 2)^{\frac{2}{3}-1}\,(9x + 2)' \\ &= \frac{2}{3}(9x + 2)^{-\frac{1}{3}}\,(9) \\ &= 6\,(9x + 2)^{-\frac{1}{3}} \text{ ----- } > 2(9) = 18 \quad 18/3 = 6 \\ &= \frac{6}{(9x + 2)^{\frac{1}{3}}} \\ &= \boxed{\frac{6}{\sqrt[3]{9x + 2}}} \end{aligned} \qquad \blacksquare$$

5) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$

Modifiquemos f : $f(x) = (x^2 - 2x + 1)^{\frac{1}{2}}$

Derivemos .

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= D_x\left((x^2 - 2x + 1)^{\frac{1}{2}}\right) \\
&= \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 1)^{\frac{1}{2}-1}(x^2 - 2x + 1)' \\
&= \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 1)^{-\frac{1}{2}}(2x - 2) \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{(x^2 - 2x + 1)^{\frac{1}{2}}}2(x - 1) \\
&= \boxed{\frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}} \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

7) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 3x - 1}$

Este ejercicio puede resolverse con la regla para derivar cocientes , pero aplicaremos la Regla de la Cadena . Veamos

$f(x) = (x^2 + 3x - 1)^{-1}$

$f'(x) = D_x((x^2 + 3x - 1)^{-1}$

$f'(x) = -(x^2 + 3x - 1)^{-2}\, D_x(x^2 + 3x - 1)$

$$f'(x) = -\frac{1}{(x^2 + 3x - 1)^2}(2x + 3)$$

$$\boxed{f'(x) = -\frac{2x + 3}{(x^2 + 3x - 1)^2}} \qquad \blacksquare$$

9) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x^2 - 2}}$

Modifiquemos la función .

$$f(x) \;=\; \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{x^2 \;-\; 2}} \;=\; \frac{1}{(x^2 \;-\; 2)^{\frac{1}{2}}} \;=\; (x^2 - 2)^{-\frac{1}{2}}$$

Derivemos .

$$\begin{aligned} f'(x) \;&=\; D_x((x^2 - 2)^{-\frac{1}{2}}) \\ &= -\frac{1}{2}(x^2 - 2)^{-\frac{3}{2}}(x^2 - 2)' \\ &= -\frac{1}{2}\frac{1}{(x^2 \;-\; 2)^{\frac{3}{2}}}(2x) \\ &= \boxed{-\frac{x}{\sqrt{(x^2 \;-\; 2)^3}}} \qquad\qquad \blacksquare \end{aligned}$$

11) $f(x) = x^2\sqrt{9 - x^2}$

Si derivamos directamente esta función , veremos que es un tanto complicado . Sin embargo , haciendo algunas modificaciones algebraicas podremos derivar más fácilmente . Veamos

$f(x) = x^2\sqrt{9 - x^2}$ ----- > $f(x) = \sqrt{x^4(9 - x^2)}$

$f(x) = \sqrt{9x^4 - x^6}$ ----- > $f(x) = (9x^4 - x^6)^{\frac{1}{2}}$

Ahora derivemos

$$\begin{aligned} f'(x) \;&= \frac{1}{2}(9x^4 - x^6)^{-\frac{1}{2}} D_x(9x^4 - x^6) \\ &= \frac{1}{2}(9x^4 - x^6)^{-\frac{1}{2}}(36x^3 - 6x^5) \\ &= \frac{1}{2(9x^4 \;-\; x^6)^{\frac{1}{2}}}(36x^3 - 6x^5) \\ &= \frac{6x^3(6 \;-\; x^2)}{2\sqrt{x^4(9 \;-\; x^2)}} \end{aligned}$$

$$= \frac{(\cancel{2})(3)x^{\cancel{3}}(6 - x^2)}{\cancel{2x^2}\sqrt{9 - x^2}}$$

$$= \boxed{\frac{3x(6 - x^2)}{\sqrt{9 - x^2}}} \qquad \blacksquare$$

13) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} + 1}{x^2 + 1}$

Modifiquemos .

$$f(x) = \frac{x^{\frac{1}{2}} + 1}{x^2 + 1}$$

Derivemos .

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 1)D_x\left(x^{\frac{1}{2}} + 1\right) - (x^{\frac{1}{2}} + 1)D_x(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{(x^2 + 1)\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right) - (x^{\frac{1}{2}} + 1)(2x)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{(x^2 + 1)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) - (\sqrt{x} + 1)(2x)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{\left(\frac{x^2 + 1}{2\sqrt{x}}\right) - (\sqrt{x} + 1)(2x)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{\frac{x^2 + 1 - 2\sqrt{x}(2x)(\sqrt{x} + 1)}{2\sqrt{x}}}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{x^2 + 1 - 2\sqrt{x}(2x)(\sqrt{x} + 1)}{2\sqrt{x}(x^2 + 1)}$$

$$= \boxed{\frac{x^2 + 1 - 4x\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)}{2\sqrt{x}(x^2 + 1)}} \qquad \blacksquare$$

18) $f(x) = (x^2 - 9)\sqrt{x+2}$

Modifiquemos .

$$f(x) = (x^2 - 9)(x+2)^{\frac{1}{2}}$$

Derivemos .

$$f'(x) = (x^2 - 9)((x+2)^{\frac{1}{2}})' + (x^2 - 9)'(x+2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (x^2 - 9)\frac{1}{2}(x+2)^{-\frac{1}{2}}(x+2)' + 2x\,(x+2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \boxed{\frac{x^2 - 9}{2\sqrt{x+2}} + 2x\sqrt{x+2}} \quad \blacksquare$$

21) $f(x) = x(x^{-1} + x^{-2} + x^{-3})^{-4}$

Esta función tiene una estructura un tanto complicada . Podemos simplificarla para que su derivada resulte más comoda . Veamos como .

En primer lugar hagamos $A = (x^{-1} + x^{-2} + x^{-3})^{-4}$ entonces

$$A' = -4(x^{-1} + x^{-2} + x^{-3})^{-5}(x^{-1} + x^{-2} + x^{-3})'$$

$$= -4(x^{-1} + x^{-2} + x^{-3})^{-5}(-x^{-2} - 2x^{-3} - 3x^{-4})$$

$$= -4(x^{-1} + x^{-2} + x^{-3})^{-5}(-(x^{-2} + 2x^{-3} + 3x^{-4}))$$

$$= 4(x^{-1} + x^{-2} + x^{-3})^{-5}(x^{-2} + 2x^{-3} + 3x^{-4}) \text{ ----- } (*)$$

Ahora modifiquemos la función

$$f(x) = xA$$

Derivemos

$$f'(x) = (xA)'$$

$$= (x)'A + xA'$$

$$= 1A + x4(x^{-1} + x^{-2} + x^{-3})^{-5}(x^{-2} + 2x^{-3} + 3x^{-4}) \text{ --- Por } (*)$$

$$= \boxed{(x^{-1} + x^{-2} + x^{-3})^{-4} + 4x(x^{-1} + x^{-2} + x^{-3})^{-5}(x^{-2} + 2x^{-3} + 3x^{-4})} \quad \blacksquare$$

22) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$

Modifiquemos f.

$$f(x) = (x + x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$$

Derivemos.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= D_x\left((x + x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\right) \\
&= \frac{1}{2}(x + x^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}} D_x(x + x^{\frac{1}{2}}) \\
&= \frac{1}{2}(x + x^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}} (1 + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}) \\
&= \boxed{\frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}
\end{aligned}
$$ ■

24) $f(x) = [x^2 - (1 + \frac{1}{x})^{-4}]^2$

Hagamos una pequeña modificación para f

$$f(x) = [x^2 - (1 + x^{-1})^{-4}]^2$$

Ahora derivemos

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= D_x([x^2 - (1 + x^{-1})^{-4}]^2) \\
&= 2[x^2 - (1 + x^{-1})^{-4}]\, D_x(x^2 - (1 + x^{-1})^{-4}) \\
&= 2[x^2 - (1 + x^{-1})^{-4}]\, (2x - (-4)(1 + x^{-1})^{-5} D_x(1 + x^{-1})) \\
&= 2[x^2 - (1 + x^{-1})^{-4}]\, (2x + 4(1 + x^{-1})^{-5}(-x^{-2})) \\
&= \boxed{2[x^2 - (1 + x^{-1})^{-4}]\, (2x - 4x^{-2}(1 + x^{-1})^{-5})}
\end{aligned}
$$ ■

27) $f(x) = (2 + x \operatorname{sen} 3x)^{10}$

Esta derivada es relativamente sencilla

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= D_x((2 + x \operatorname{sen} 3x)^{10}) \\
&= 10(2 + x \operatorname{sen} 3x)^9\, D_x(2 + x \operatorname{sen} 3x) \\
&= 10(2 + x \operatorname{sen} 3x)^9\, (0 + (x)'\operatorname{sen} 3x + x(\operatorname{sen} 3x)')
\end{aligned}
$$

$= 10(2 + x \text{ sen } 3x)^9 (\text{sen } 3x + x(\cos 3x\ (3)))$

$= \boxed{10(2 + x \text{ sen } 3x)^9 (\text{sen } 3x + 3x\cos 3x)}$ ■

30) $f(x) = x \cot\left(\frac{5}{x^2}\right)$

Modifiquemos f y derivemos

$f(x) \quad = x \cot(5x^{-2})$

$f'(x) \quad = (x)'\cot(5x^{-2}) + x(\cot(5x^{-2}))'$

$= 1\cot(5x^{-2}) + x((-\csc^2(5x^{-2}))(5x^{-2})')$

$= \cot(5x^{-2}) - x\csc^2(5x^{-2})\ (-10x^{-3})$

$= \boxed{\cot\left(\frac{5}{x^2}\right) + \frac{10}{x^2}\csc^2\left(\frac{5}{x^2}\right)}$ ■

32) $f(x) = \text{sen}^2\, 2x \cos^3 3x$

$f'(x) \ = \ D_x(\text{sen}^2\, 2x \cos^3 3x)$

$= \ \text{sen}^2\, 2x\, D_x(\cos^3 3x) \ + \ \cos^3 3x\, D_x(\text{sen}^2\, 2x)$

$= \ \text{sen}^2\, 2x\, (3\cos^2 3x\, D_x(\cos 3x)) \ +$

$\cos^3 3x\, (2\text{sen } 2x\, D_x(\text{sen } 2x))$

$= \ \text{sen}^2\, 2x\, (3\cos^2 3x\, (-\text{sen } 3x\, D_x(3x))) \ +$

$\cos^3 3x\, (2\text{sen } 2x \cos 2x\, D_x(2x))$

$= \ -\text{sen}^2\, 2x\, (3\cos^2 3x\, (3\text{sen } 3x)) \ +$

$\cos^3 3x\, (2\text{sen } 2x \cos 2x\, (2))$

$= \boxed{-9\text{sen}^2\, 2x \text{ sen } 3x \cos^2 3x \ + \ 4\cos^3 3x \text{ sen } 2x \cos 2x}$ ■

35) $f(x) = \text{sen}(\text{sen}(\tan x^2))$

Derivemos

$f'(x) \quad = D_x(\text{sen}(\text{sen}(\tan x^2)))$

$= \cos(\text{sen}(\tan x^2))\, D_x(\text{sen}(\tan x^2))$

$= \cos(\text{sen}(\tan x^2))\, (\cos(\tan x^2)\, D_x(\tan x^2))$

$= \cos(\text{sen}(\tan x^2)) \cos(\tan x^2) \sec^2 x^2 \, (x^2)'$

$= \cos(\text{sen}(\tan x^2)) \cos(\tan x^2) \sec^2 x^2 \, (2x)$

$= \boxed{2x \cos(\text{sen}(\tan x^2)) \cos(\tan x^2) \sec^2 x^2}$ ■

40) $f(x) = \sec(\tan^5 x^4)$

Derivemos .

$f'(x) = D_x(\sec(\tan^5 x^4))$

$= \sec(\tan^5 x^4) \tan(\tan^5 x^4) \, D_x(\tan^5 x^4)$

$= \sec(\tan^5 x^4) \tan(\tan^5 x^4) \, (5 \tan^4 x^4 \, D_x(\tan x^4))$

$= \sec(\tan^5 x^4) \tan(\tan^5 x^4) \, (5 \tan^4 x^4 \sec^2 x^4 \, D_x(x^4))$

$= \sec(\tan^5 x^4) \tan(\tan^5 x^4) \, (5 \tan^4 x^4 \sec^2 x^4 \, (4x^3))$

$= \boxed{20x^3 \sec(\tan^5 x^4) \tan(\tan^5 x^4) \tan^4 x^4 \sec^2 x^4}$ ■

$\int$

DERIVADAS DE FUNCIONES TRASCENDENTES.

Ahora estudiaremos algunas fórmulas para derivar funciones trascendentes (algunas no se han visto) a la luz de la Regla de la Cadena . Estas mismas se plantean en la Guía .

Sea U una función de x .

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS .

1) $D_x(\text{sen } U) = (\cos U) \, D_x U$

2) $D_x(\cos U) = (-\text{sen } U) \, D_x U$

3) $D_x(\tan U) = (\sec^2 U) \, D_x U$

4) $D_x(\sec U) = (\sec U \tan U) \, D_x U$

5) $D_x(\csc U) = (-\csc U \cot U) \, D_x U$

6) $D_x(\cot U) = (-\csc^2 U) \, D_x U$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS .

1) $D_x\,(\text{sen}^{-1}\,U) \;=\; \dfrac{D_x\,U}{\sqrt{1\;-\;U^2}}$

2) $D_x\,(\cos^{-1}\,U) \;=\; -\dfrac{D_x\,U}{\sqrt{1\;-\;U^2}}$

3) $D_x\,(\tan^{-1}\,U) \;=\; \dfrac{D_x\,U}{U^2\;+\;1}$

4) $D_x\,(\cot^{-1}\,U) \;=\; -\dfrac{D_x\,U}{U^2\;+\;1}$

5) $D_x\,(\sec^{-1}\,U) \;=\; \dfrac{D_x\,U}{U\,\sqrt{U^2\;-\;1}}$

6) $D_x\,(\csc^{-1}\,U) \;=\; -\dfrac{D_x\,U}{U\,\sqrt{U^2\;-\;1}}$

FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS .

Sea $0 < a$ y $a \neq 1$. Entonces :

1) $D_x\,(a^U) = (a^U \ln a)\,D_x\,U$

2) $D_x\,(e^U) = (e^U)\,D_x\,U$

3) $D_x\,(\log_a U) = \left(\dfrac{\log_a e}{U}\right) D_x\,U$

4) $D_x\,(\ln U) = \dfrac{D_x\,U}{U}$

PARTE B

1) $f(x) = \text{sen}^{-1}(2x - 1)$

Derivemos .

$$f'(x) \;=\; D_x(\text{sen}^{-1}(2x-1))$$

$$= \frac{D_x(2x\;-\;1)}{\sqrt{1\;-\;(2x\;-\;1)^2}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1 - (4x^2 - 4x + 1)}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1 - 4x^2 + 4x - 1}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4(-x^2 + x)}}$$

$$= \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{x - x^2}}$$

$$= \boxed{\frac{1}{\sqrt{x - x^2}}} \qquad \blacksquare$$

3) $f(x) = \tan^{-1}(x^3)$

Hagamos la derivada

$$f'(x) = D_x(\tan^{-1}(x^3))$$

$$= \frac{D_x(x^3)}{(x^3)^2 + 1}$$

$$= \boxed{\frac{3x^2}{x^6 + 1}} \qquad \blacksquare$$

6) $f(x) = (\operatorname{sen}^{-1} x)\ln x$

Derivemos

$$f'(x) = D_x((\operatorname{sen}^{-1} x)\ln x)$$

$$= (\operatorname{sen}^{-1} x)' \ln x + \operatorname{sen}^{-1} x\,(\ln x)'$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \ln x + \operatorname{sen}^{-1} x \left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= \boxed{\frac{\ln x}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{\operatorname{sen}^{-1} x}{x}} \qquad \blacksquare$$

8) $f(x) = (x^2 + 1)\tan^{-1} x$

Derivemos .

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= D_x((x^2 + 1)\tan^{-1} x) \\
&= (x^2 + 1)D_x(\tan^{-1} x) + \tan^{-1} x\, D_x(x^2 + 1) \\
&= (x^2 + 1)\frac{D_x(x)}{x^2 + 1} + \tan^{-1} x\,(2x) \\
&= (x^2 + 1)\frac{1}{x^2 + 1} + 2x\tan^{-1} x \\
&= \boxed{1 + 2x\tan^{-1} x} \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

12) $f(x) = \cos^{-1}(\sqrt{2x - 1})$

Derivemos .

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= D_x(\cos^{-1}(\sqrt{2x - 1})) \\
&= -\frac{D_x((2x - 1)^{\frac{1}{2}})}{\sqrt{1 - \left(\sqrt{2x - 1}\right)^2}} \\
&= -\frac{\frac{1}{2}(2x - 1)^{-\frac{1}{2}}D_x(2x - 1)}{\sqrt{1 - (2x - 1)}} \\
&= -\frac{\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{2x - 1}}}{\sqrt{1 - 2x + 1}} \\
&= \boxed{-\frac{1}{\sqrt{2x - 1}\sqrt{2 - 2x}}} \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

13) $f(x) = \tan^{-1}(x^3) + \cot^{-1}(x^3)$

Derivemos

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= D_x(\tan^{-1}(x^3) + \cot^{-1}(x^3)) \\
&= D_x(\tan^{-1}(x^3)) + D_x(\cot^{-1}(x^3))
\end{aligned}
$$

$$= \frac{D_x(x^3)}{(x^3)^2 + 1} + \left(-\frac{D_x(x^3)}{(x^3)^2 + 1}\right)$$

$$= \frac{D_x(x^3)}{(x^3)^2 + 1} - \frac{D_x(x^3)}{(x^3)^2 + 1}$$

$$= \boxed{0} \qquad \blacksquare$$

14) $f(x) = \sec^{-1}(\sqrt{x^2 + 1})$

Tenemos .

$f'(x) = D_x(\sec^{-1}(\sqrt{x^2 + 1}))$

$$= \frac{D_x(\sqrt{x^2 + 1})}{\sqrt{x^2 + 1}\sqrt{(\sqrt{x^2 + 1})^2 - 1}}$$

$$= \frac{D_x((x^2 + 1)^{\frac{1}{2}})}{\sqrt{x^2 + 1}\sqrt{x^2 + 1 - 1}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} D_x(x^2 + 1)}{\sqrt{x^2 + 1}\sqrt{x^2}}$$

$$= \frac{D_x(x^2 + 1)}{2(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}\sqrt{x^2 + 1}\, x}$$

$$= \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2 + 1}\sqrt{x^2 + 1}\,\cancel{x}} \text{ -----> Eliminar } 2x$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{x^2 + 1})^2}$$

$$= \boxed{\frac{1}{x^2 + 1}} \qquad \blacksquare$$

18) $f(x) = x^2 \cot^{-1}(3x)$

Derivemos

$f'(x) = (x^2 \cot^{-1}(3x))'$

$$= (x^2)' \cot^{-1}(3x) + x^2 (\cot^{-1}(3x))'$$

$$= 2x \cot^{-1}(3x) + x^2 \left(- \frac{D_x(3x)}{(3x)^2 + 1} \right.$$

$$= \boxed{2x \cot^{-1}(3x) - \frac{3x^2}{9x^2 + 1}} \qquad \blacksquare$$

21) $f(x) = \csc^{-1}(x^3) + \sec^{-1}(x^3)$

Derivemos .

$$f'(x) = D_x(\csc^{-1}(x^3) + \sec^{-1}(x^3))$$

$$= D_x(\csc^{-1}(x^3)) + D_x(\sec^{-1}(x^3))$$

$$= - \frac{D_x(x^3)}{x^3\sqrt{(x^3)^2 - 1}} + \frac{D_x(x^3)}{x^3\sqrt{(x^3)^2 - 1}}$$

Esta diferencia es cero , pues es la resta de una misma cantidad .

Así que :

$$f'(x) = \boxed{0} \qquad \blacksquare$$

26) $f(x) = (\cot^{-1}(\text{sen}^2\, x^5))^4$

Tenemos .

$$f'(x) = D_x((\cot^{-1}(\text{sen}^2\, x^5))^4)$$

$$= 4(\cot^{-1}(\text{sen}^2\, x^5))^3\, D_x(\cot^{-1}(\text{sen}^2\, x^5))$$

$$= 4(\cot^{-1}(\text{sen}^2\, x^5))^3 \left(- \frac{D_x(\text{sen}^2\, x^5)}{(\text{sen}^2\, x^5)^2 + 1} \right)$$

$$= - 4(\cot^{-1}(\text{sen}^2\, x^5))^3 \left(\frac{2\, \text{sen}\, x^5\, D_x(\text{sen}\, x^5)}{\text{sen}^4\, x^5 + 1} \right)$$

$$= - 4(\cot^{-1}(\text{sen}^2\, x^5))^3 \left(\frac{2\, \text{sen}\, x^5 \cos x^5\, D_x(x^5)}{\text{sen}^4\, x^5 + 1} \right)$$

$$= - 4(\cot^{-1}(\text{sen}^2\, x^5))^3 \left(\frac{2\, \text{sen}\, x^5 \cos x^5\, (5x^4)}{\text{sen}^4\, x^5 + 1} \right)$$

$$= \boxed{-\,40x^4(\cot^{-1}(\text{sen}^2 x^5))^3 \left(\frac{\text{sen } x^5 \cos x^5}{\text{sen}^4 x^5 + 1} \right)} \quad \blacksquare$$

PARTE C

1) $f(x) = 5^{3x}$

Derivemos .

$$\begin{aligned} f'(x) &= D_x(5^{3x}) \\ &= 5^{3x} \ln 5 \; D_x(3x) \\ &= 5^{3x} \ln 5 \; (3) \\ &= \boxed{5^{3x}\, 3 \ln 5} \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

3) $f(x) = 5^{x^2} \left(\frac{1}{3}\right)^{\text{sen } x}$

Veamos

$$\begin{aligned} f'(x) &= (5^{x^2})' \left(\frac{1}{3}\right)^{\text{sen } x} + 5^{x^2} \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{\text{sen } x} \right)' \\ &= 5^{x^2} \ln 5 \, (x^2)' \left(\frac{1}{3}\right)^{\text{sen } x} + 5^{x^2} \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{\text{sen } x} \ln \frac{1}{3} \; (\text{sen } x)' \right) \\ &= \boxed{2x\, 5^{x^2} \ln 5 \left(\frac{1}{3}\right)^{\text{sen } x} + \left(\ln \frac{1}{3}\right) 5^{x^2} \left(\frac{1}{3}\right)^{\text{sen } x} \cos x} \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

6) $f(x) = 9^{-0.5x} \text{ sen } 3x$

Derivemos .

$$\begin{aligned} f'(x) &= D_x(9^{-0.5x} \text{ sen } 3x) \\ &= (9^{-0.5x})' \text{ sen } 3x + 9^{-0.5x} (\text{sen } 3x)' \\ &= 9^{-0.5x} \ln 9 \, (-0.5x)' \text{sen } 3x + 9^{-0.5x} \cos 3x \, (3x)' \\ &= 9^{-0.5x} \ln 9 \, (-0.5) \text{sen } 3x + 9^{-0.5x} \cos 3x \, (3) \\ &= \boxed{9^{-0.5x} (-0.5 \ln 9 \text{ sen } 3x + 3 \cos 3x)} \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

9) $f(x) = e^{\sqrt{x}}$

Tenemos

$$f'(x) = (e^{\sqrt{x}})'$$

$$= e^{\sqrt{x}}\,(\sqrt{x})' \text{-----} > (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$ Tarea hacerla

$$= e^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$= \boxed{\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}} \qquad \blacksquare$$

12) $f(x) = \dfrac{e^{x^2}}{x^2 + 1}$

Derivemos

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 1)\,D_x\left(e^{x^2}\right) - e^{x^2}\,D_x(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{(x^2 + 1)\left(e^{x^2}\right)(2x) - e^{x^2}(2x)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{2x\,e^{x^2}(x^2 + \cancel{1} - \cancel{1})}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \boxed{\frac{2x^3\,e^{x^2}}{(x^2 + 1)^2}} \qquad \blacksquare$$

13) $f(x) = \dfrac{e^{10x}}{e^x}$

En este caso podemos modificar la función , de tal manera que la derivada sea más sencilla de ejecutar . Veamos .

$$f(x) = \frac{e^{10x}}{e^x} = e^{10x - x} = e^{9x}$$

Ahora derivemos .

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= D_x(e^{9x}) \\
&= e^{9x}\, D_x(9x) \\
&= e^{9x}\,(9) \\
&= \boxed{9\, e^{9x}} \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

15) $f(x) = \csc\,(e^{1-x^2})$

Veamos

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= (\csc\,(e^{1-x^2}))' \\
&= (-\csc\,(e^{1-x^2})\cot\,(e^{1-x^2}))\,(e^{1-x^2})' \\
&= (-\csc\,(e^{1-x^2})\cot\,(e^{1-x^2}))\,(e^{1-x^2})\,(1-x^2)' \\
&= (-\csc\,(e^{1-x^2})\cot\,(e^{1-x^2}))\,(e^{1-x^2})\,(-2x) \\
&= \boxed{2x\, e^{1-x^2}\csc\,(e^{1-x^2})\cot\,(e^{1-x^2})} \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

16) $f(x) = e^{x\sqrt[5]{x^4+2x}}$

Vamos a modificar el exponente de la función de tal manera que la derivada sea más sencilla . Veamos como .

$$
\begin{aligned}
x\sqrt[5]{x^4+2x} &= \sqrt[5]{x^5(x^4+2x)} \\
&= \sqrt[5]{x^9+2x^6}
\end{aligned}
$$

Entonces .

$$
\begin{aligned}
f(x) &= e^{x\sqrt[5]{x^4+2x}} \\
&= e^{\sqrt[5]{x^9+2x^6}}
\end{aligned}
$$

Derivemos .

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= (\,e^{\sqrt[5]{x^9+2x^6}}\,)' \\
&= e^{\sqrt[5]{x^9+2x^6}}\,(\sqrt[5]{x^9+2x^6}\,)' \\
&= e^{\sqrt[5]{x^9+2x^6}}\,((x^9+2x^6)^{\frac{1}{5}}\,)'
\end{aligned}
$$

$$= e^{\sqrt[5]{x^9 + 2x^6}} \frac{1}{5}(x^9 + 2x^6)^{-\frac{4}{5}}(x^9 + 2x^6)'$$

$$= \frac{1}{5} e^{\sqrt[5]{x^9 + 2x^6}} \left(\frac{1}{(x^9 + 2x^6)^{\frac{4}{5}}}\right)(9x^8 + 12x^5)$$

$$= \boxed{e^{\sqrt[5]{x^9 + 2x^6}} \left(\frac{9x^8 + 12x^5}{5\sqrt[5]{(x^9 + 2x^6)^4}}\right)} \qquad \blacksquare$$

18) $f(x) = e^{e^{x^2}}$

Veamos la derivada .

$$f'(x) = e^{e^{x^2}}(e^{x^2})' \text{ -----} > f'(x) = e^{e^{x^2}}(e^{x^2}(x^2)')$$

$$f'(x) = e^{e^{x^2}}(e^{x^2} 2x)$$

$$= \boxed{2x\, e^{e^{x^2}} e^{x^2}} \qquad \blacksquare$$

19) $f(x) = \log_2(x^2 - 2x + 5)$

Tenemos .

$$f'(x) = (\log_2(x^2 - 2x + 5))'$$

$$= \frac{\log_2 e}{x^2 - 2x + 5}(x^2 - 2x + 5)'$$

$$= \boxed{\frac{\log_2 e}{x^2 - 2x + 5}(2x - 2)} \qquad \blacksquare$$

21) $f(x) = \log\left(\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{2x - 1}\right)$

Antes de derivar , haremos algunas modificaciones de la función , de tal forma que sea más sencilla la derivada .

$$f(x) = \log\left(\frac{(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}{2x - 1}\right)$$

$$= \log((x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}) - \log(2x - 1)$$

$$= \frac{1}{2} \log (x^2 + 1) - \log (2x - 1)$$

Ahora derivemos

$$f'(x) = (\frac{1}{2} \log (x^2 + 1) - \log (2x - 1))'$$

$$= \frac{1}{2} (\log (x^2 + 1))' - (\log (2x - 1))'$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\log e}{x^2 + 1} (x^2 + 1)' - \frac{\log e}{2x - 1} (2x - 1)'$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}} \frac{\log e}{x^2 + 1} (\cancel{2}x) - \frac{\log e}{2x - 1} 2$$

$$= \frac{x \log e}{x^2 + 1} - \frac{2 \log e}{2x - 1}$$

$$= \boxed{-\frac{(x + 2) \log e}{(x^2 + 1)(2x - 1)}} \qquad \blacksquare$$

24) $f(x) = (\ln \sqrt[4]{3x^4 - 2x^2}\,)^3$

En algunos ejercicios , podemos aplicar las propiedades de los logaritmos , todo con el objeto de facilitar la derivada . Veamos .

$$f(x) = (\ln \sqrt[4]{3x^4 - 2x^2}\,)^3$$

$$= (\ln (3x^4 - 2x^2)^{\frac{1}{4}})^3$$

$$= (\frac{1}{4} \ln (3x^4 - 2x^2))^3$$

$$= (\frac{1}{4})^3 (\ln (3x^4 - 2x^2))^3$$

$$= \frac{1}{64} (\ln (3x^4 - 2x^2))^3$$

Derivemos .

$$f'(x) = (\frac{1}{64} (\ln (3x^4 - 2x^2))^3)'$$

$$= \frac{1}{64}((\ln(3x^4 - 2x^2))^3)'$$

$$= \frac{1}{64} 3(\ln(3x^4 - 2x^2))^2 (\ln(3x^4 - 2x^2)'$$

$$= \frac{3}{64}(\ln(3x^4 - 2x^2))^2 \left(\frac{D_x(3x^4 - 2x^2)}{3x^4 - 2x^2}\right)$$

$$= \boxed{\frac{3}{64}(\ln(3x^4 - 2x^2))^2 \left(\frac{12x^3 - 4x}{3x^4 - 2x^2}\right)} \qquad \blacksquare$$

27) $f(x) = \ln\left(\frac{(2x - 5)(x^2 - 1)}{\sqrt{\tan^3 x}}\right)$

Apliquemos propiedades de logaritmos para modificar f .

$$f(x) = \ln((2x - 5)(x^2 - 1)) - \frac{1}{2}\ln(\tan^3 x)$$

$$f(x) = \ln(2x - 5) + \ln(x^2 - 1) - \frac{3}{2}\ln(\tan x)$$

Derivemos

$$f'(x) = D_x(\ln(2x - 5) + \ln(x^2 - 1) - \frac{3}{2}\ln(\tan x))$$

$$= D_x(\ln(2x - 5)) + D_x(\ln(x^2 - 1)) - D_x(\frac{3}{2}\ln(\tan x))$$

$$= \frac{D_x(2x - 5)}{2x - 5} + \frac{D_x(x^2 - 1)}{x^2 - 1} - \frac{3}{2}\,\frac{D_x(\tan x)}{\tan x}$$

$$= \boxed{\frac{2}{2x - 5} + \frac{2x}{x^2 - 1} - \frac{3\sec^2 x}{\tan x}} \qquad \blacksquare$$

28) $f(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{(5x - 1)^7}{x^5 + 3}}\right)$

Modifiquemos la función .

$$f(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{(5x - 1)^7}{x^5 + 3}}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{\sqrt{(5x-1)^7}}{\sqrt{x^5+3}}\right)$$

$$= \ln\sqrt{(5x-1)^7} - \ln\sqrt{x^5+3}$$

$$= \ln(5x-1)^{\frac{7}{2}} - \ln(x^5+3)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{7}{2}\ln(5x-1) - \frac{1}{2}\ln(x^5+3)$$

Ahora derivemos .

$$f'(x) = D_x\left(\frac{7}{2}\ln(5x-1) - \frac{1}{2}\ln(x^5+3)\right)$$

$$= \frac{7}{2}D_x(\ln(5x-1)) - \frac{1}{2}D_x(\ln(x^5+3))$$

$$= \frac{7}{2}\frac{D_x(5x-1)}{5x-1} - \frac{1}{2}\frac{D_x(x^5+3)}{x^5+3}$$

$$= \frac{7}{2}\frac{5}{5x-1} - \frac{1}{2}\frac{5x^4}{x^5+3}$$

$$= \boxed{\frac{35}{2(5x-1)} - \frac{5x^4}{2(x^5+3)}} \qquad \blacksquare$$

PARTE D

3) $y = (\text{sen } x)^{\sqrt{x}}$

Apliquemos logaritmo a ambos lados de la igualdad .

$$\ln y = \ln(\text{sen } x)^{\sqrt{x}}$$

$$\ln y = \sqrt{x}\ln(\text{sen } x)$$

Derivemos ambos lados de la igualdad .

$$(\ln y)' = (\sqrt{x}\ln(\text{sen } x))'$$

$$\frac{y'}{y} = (\sqrt{x})'\ln(\text{sen } x) + \sqrt{x}\,(\ln(\text{sen } x))'$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln(\text{sen } x) + \sqrt{x}\left(\frac{D_x(\text{sen } x)}{\text{sen } x}\right)$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln(\text{sen } x) + \sqrt{x}\left(\frac{\cos x}{\text{sen } x}\right)$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln(\text{sen } x) + \sqrt{x} \cot x$$

$$y' = y\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \ln(\text{sen } x) + \sqrt{x} \cot x\right)$$

$$y' = \boxed{(\text{sen } x)^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \ln(\text{sen } x) + \sqrt{x} \cot x\right)} \quad \blacksquare$$

5) $y = \dfrac{(x^2 + 1)^{x^4}}{x^6}$

Apliquemos ln a ambos lados de la igualdad

$$\ln y = \ln\left(\frac{(x^2 + 1)^{x^4}}{x^6}\right)$$

$$= \ln\left((x^2 + 1)^{x^4}\right) - \ln(x^6)$$

$$= x^4 \ln(x^2 + 1) - 6 \ln x$$

Derivemos

$$(\ln y)' = (x^4 \ln(x^2 + 1) - 6 \ln x)'$$

$$\frac{D_x y}{y} = (x^4 \ln(x^2 + 1))' - (6 \ln x)'$$

$$\frac{D_x y}{y} = (x^4)' \ln(x^2 + 1) + x^4 (\ln(x^2 + 1))' - 6(\ln x)'$$

$$\frac{D_x y}{y} = 4x^3 \ln(x^2 + 1) + x^4 \frac{D_x(x^2 + 1)}{x^2 + 1} - 6\,\frac{1}{x}$$

$$\frac{D_x y}{y} = 4x^3 \ln(x^2 + 1) + \frac{x^4\, 2x}{x^2 + 1} - \frac{6}{x}$$

$$\frac{D_x y}{y} = 4x^3 \ln(x^2+1) + \frac{2x^5}{x^2+1} - \frac{6}{x}$$

$$D_x y = y\left(4x^3 \ln(x^2+1) + \frac{2x^5}{x^2+1} - \frac{6}{x} \right)$$

$$\boxed{D_x y = \frac{(x^2+1)^{x^4}}{x^6}\left(4x^3 \ln(x^2+1) + \frac{2x^5}{x^2+1} - \frac{6}{x} \right)} \qquad \blacksquare$$

10) $y = \dfrac{x^{10}\sqrt{x^2+5}}{\sqrt[3]{8x^2+2}}$

Apliquemos logaritmo natural

$$\ln y = \ln\left(\frac{x^{10}\sqrt{x^2+5}}{\sqrt[3]{8x^2+2}} \right)$$

$$\ln y = \ln\left(x^{10}\sqrt{x^2+5} \right) - \ln\left((8x^2+2)^{\frac{1}{3}} \right)$$

$$= \ln(x^{10}) + \ln((x^2+5)^{\frac{1}{2}}) - \frac{1}{3}\ln(8x^2+2)$$

$$= 10\ln x + \frac{1}{2}\ln(x^2+5) - \frac{1}{3}\ln(8x^2+2)$$

Ahora derivemos

$$(\ln y)' = \left(10\ln x + \frac{1}{2}\ln(x^2+5) - \frac{1}{3}\ln(8x^2+2) \right)'$$

$$\frac{D_x y}{y} = (10\ln x)' + \left(\frac{1}{2}\ln(x^2+5)\right)' - \left(\frac{1}{3}\ln(8x^2+2)\right)'$$

$$= 10(\ln x)' + \frac{1}{2}(\ln(x^2+5))' - \frac{1}{3}(\ln(8x^2+2))'$$

$$= \frac{10}{x} + \frac{1}{2}\frac{D_x(x^2+5)}{x^2+5} - \frac{1}{3}\frac{D_x(8x^2+2)}{8x^2+2}$$

$$= \frac{10}{x} + \frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}x}{x^2+5} - \frac{1}{3}\frac{16x}{8x^2+2}$$

$$= \frac{10}{x} + \frac{x}{x^2+5} - \frac{1}{3}\frac{(\cancel{2})(8)x}{\cancel{2}(4x^2+1)}$$

$$= \frac{10}{x} + \frac{x}{x^2 + 5} - \frac{8x}{3\,(4x^2 + 1)}$$

$$D_x y = y\left(\frac{10}{x} + \frac{x}{x^2 + 5} - \frac{8x}{3\,(4x^2 + 1)}\right)$$

$$= \boxed{\frac{x^{10}\sqrt{x^2 + 5}}{\sqrt[3]{8x^2 + 2}}\left(\frac{10}{x} + \frac{x}{x^2 + 5} - \frac{8x}{3\,(4x^2 + 1)}\right)} \quad \blacksquare$$

12) $y = x\sqrt{x + 1}\,\sqrt[3]{x^2 + 2}$

Apliquemos logaritmo a ambos lados de la igualdad .

$$\ln y = \ln\left(x\sqrt{x + 1}\,\sqrt[3]{x^2 + 2}\right)$$

$$= \ln x + \ln\sqrt{x + 1} + \ln\sqrt[3]{x^2 + 2}$$

$$= \ln x + \ln (x + 1)^{\frac{1}{2}} + \ln (x^2 + 2)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \ln x + \frac{1}{2}\ln (x + 1) + \frac{1}{3}\ln (x^2 + 2)$$

Derivemos .

$$(\ln y)' = \left(\ln x + \frac{1}{2}\ln (x + 1) + \frac{1}{3}\ln (x^2 + 2)\right)'$$

$$\frac{y'}{y} = (\ln x)' + \left(\frac{1}{2}\ln (x + 1)\right)' + \left(\frac{1}{3}\ln (x^2 + 2)\right)'$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\,\frac{D_x(x + 1)}{x + 1} + \frac{1}{3}\,\frac{D_x(x^2 + 2)}{x^2 + 2}$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{1}{2(x + 1)} + \frac{2x}{3(x^2 + 2)}$$

Finalmente tenemos :

$$y' = y\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2(x + 1)} + \frac{2x}{3(x^2 + 2)}\right)$$

$$\boxed{y' = x\sqrt{x + 1}\,\sqrt[3]{x^2 + 2}\,\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2(x + 1)} + \frac{2x}{3(x^2 + 2)}\right)}$$

■

FINALIZACIÓN