UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA DE OCCIDENTE
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA.

GUIA DE EJERCICIOS Nº 4 .
(CÁLCULO DIFERENCIAL DE INGENIERIA)

A) Determine $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ para $f(x)$ y a dados . En caso de no existir justifique su respuesta .

1) $\lim\limits_{x\to 5} (6)$

2) $\lim\limits_{x\to 1} (4x - 5)$

3) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} (3x + 5)$

4) $\lim\limits_{x\to 0} (x^3 - 2x + 1)$

5) $\lim\limits_{x\to 3} (x(2x + 1))$

6) $\lim\limits_{x\to -1} (5x + 7)^4$

7) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x^3 + 1}{x - 1}\right)$

8) $\lim\limits_{x\to 4} \left(\dfrac{x}{-7x + 1}\right)$

9) $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{\dfrac{x^3 + 2x + 3}{x^2 + 5}}$

10) $\lim\limits_{x\to -2} \left(\dfrac{5x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x - 1}{x^5 - 4x^2 + 1}\right)$

11) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{x^2 - 5}{2x^3 + 6}\right)$

12) $\lim\limits_{x\to -1} \left(\dfrac{2x + 3}{x^2 - 3x + 4}\right)$

13) $\lim\limits_{x\to 4} \left(\dfrac{(3x - 4)^{50}}{(2x - 1)^{12}}\right)$

14) $\lim\limits_{x\to 5} \left(\dfrac{2x + 5}{x - 8}\right)$

15) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{(x^4 + 10)^{11}}{x - 2}\right)$

16) $\lim\limits_{x\to 8} \left(\dfrac{(x - 2)(x + 5)}{x - 8}\right)$

17) $\lim\limits_{x\to 4} \left(\sqrt[3]{\dfrac{x^2 - 3x + 4}{2x^2 - x - 1}}\right)$

18) $\lim\limits_{x\to 4} \left(\sqrt{x+\sqrt{x}}\,\sqrt{x^3+\sqrt{2x+1}}\right)$

19) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{x^2+3x-1}{x}+\dfrac{1}{x}\right)$

20) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{6}{x^2+2x-8}\right)$

21) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\sqrt{x^3-3x-10}\right)$

22) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{\sqrt{x}}{x^2-2x+1}\right)$

B) Los siguientes límites son de indeterminación $\dfrac{0}{0}$. Determínelos en caso que existan .

1) $\lim\limits_{x\to 6} \left(\dfrac{x^2-6x}{x^2-7x+6}\right)$

2) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x^3-1}{x^2-1}\right)$

3) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x^2-1}{(x-1)^2}\right)$

4) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{3x^2-3}{x-1}\right)$

5) $\lim\limits_{x\to -4} \left(\dfrac{x^3+64}{x+4}\right)$

6) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{x^4-16}{x^3-8}\right)$

7) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x^4-1}{x^5-x^4-x+1}\right)$

8) $\lim\limits_{x\to 64} \left(\dfrac{x-64}{\sqrt{x}-8}\right)$

9) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{5x^3+8x^2}{3x^4-16x^2}\right)$

10) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x^3-2x+1}{x^3+x^2-2}\right)$

11) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}\right)$

12) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{(x+2)^3-8}{x}\right)$

13) $\lim\limits_{x\to 3} \left(\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}\right)$

14) $\lim\limits_{x\to 3} \left(\dfrac{\sqrt{2x+3}-x}{x-3}\right)$

15) $\lim\limits_{x\to 5} \left(\dfrac{x^2-25}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}\right)$

16) $\lim\limits_{x\to 8} \left(\dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}\right)$

17) $\lim\limits_{x\to 8} \left(\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-4\sqrt[3]{x}+4}{(x-8)^2}\right)$

18) $\lim_{x\to 4} \left(\frac{2x^3 - 11x^2 + 10x + 8}{3x^3 - 17x^2 + 16x + 16}\right)$

19) $\lim_{x\to 1} \left(\frac{x^4 + x^3 - x - 1}{x^3 + x^2 + 3x - 5}\right)$

20) $\lim_{x\to 2} \left(\frac{x^5 + x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 4x - 4}{x - 2}\right)$

21) $\lim_{x\to 4} \left(\sqrt{\frac{x}{x + 5}}\left(\frac{x^2 - 16}{x - 4}\right)^2\right)$ 22) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x}((x+1)^3 - 1)\right)$

23) $\lim_{x\to 1} \left(\frac{x - 1}{x^2 - 2x + 1}\right)$

C) Calcule los límites laterales de las siguientes funciones en el punto a indicado . También diga si el límite existe en dicho punto .

1) $f(x) = |x + 3|$ $\quad a = -3$

2) $f(x) = \left|5x + \frac{1}{3}\right|$ $\quad a = -\frac{1}{15}$

3) $f(x) = |-4x + 1| + 6$ $\quad a = \frac{1}{4}$

4) $f(x) = \frac{|x|}{x}$ $\quad a = 0$

5) $f(x) = \frac{|x + 6|}{x + 6}$ $\quad a = -6$

6) $f(x) = \frac{|x| - x}{x}$ $\quad a = 0$

7) $f(x) = \frac{|x + 1| - x - 1}{x + 1}$ $\quad a = -1$

8) $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{|x|}{x}$ $\quad a = 0$

9) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x + 1|}$ $\quad a = -1$

10) $f(x) = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{|x+1|}$ $\qquad a = -1$

11) $f(x) = \begin{cases} -1 \ , & x < 0 \\ 0 \ , & x = 0 \\ 1 \ , & 0 < x \end{cases}$ $\qquad a = 0$

12) $f(x) = \begin{cases} -2 \ , & x < 0 \\ 2 \ , & 0 \leq x \end{cases}$ $\qquad a = 0$

13) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x \ , & x < 2 \\ 1 \ , & x = 2 \\ x^2 - 6x + 8 \ , & 2 < x \end{cases}$ $\qquad a = 2$

14) $f(x) = \begin{cases} x + 4 \ , & x \leq -4 \\ 4 - x \ , & -4 < x \end{cases}$ $\qquad a = -4$

15) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 \ , & x < -2 \\ 0 \ , & x = -2 \\ 11 - x^2 \ , & -2 < x \end{cases}$ $\qquad a = -2$

D) Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 \ , & x \leq -2 \\ ax + b \ , & -2 < x < 2 \\ 2x - 6 \ , & 2 \leq x \end{cases}$ determine los valores a y b tales que los límites de f en -2 y 2 existan .

E) Determine los puntos , en caso de existir , donde la función no es contínua (discontínua) .

1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

2) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^{10}+5}$

3) $f(x) = \dfrac{6}{x^2 + x + 1}$

4) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^4 - 1}$

5) $f(x) = \dfrac{|x+5|}{x+5}$

6) $f(x) = \begin{cases} x + 1 \ , & x < 5 \\ x^2 \ , & 5 \leq x \end{cases}$

7) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 25}{x - 5} \ , & x \neq 5 \\ 10 \ , & x = 5 \end{cases}$

8) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 2} \ , & x \neq 2 \\ 4 \ , & x = 2 \end{cases}$

F) Los siguientes límites trigonométricos son considerados básicos , pues a partir de ellos pueden resolverse una gran cantidad de otros límites trigonométricos . Demuestre estos límites básicos dados a continuación .

1) $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\,(kx)}{x} = k \qquad k \neq 0$

2) $\lim_{x\to 0} \text{sen}\,x = 0$

3) $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$

4) $\lim_{x\to a} \text{sen}\,x = \text{sen}\,a \qquad a \in R$

5) $\lim_{x\to a} \cos x = \cos a \qquad a \in R$

6) $\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$

7) $\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{\text{sen}\,x} = 0$

G) Determine los límites trigonométricos siguientes . Utilice los límites del literal anterior .

1) $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\,(4x)}{3x}$

2) $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\,(-4x)}{5x}$

3) $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\,(x)}{4 + x}$

4) $\lim_{x\to 0} \frac{1 + \text{sen}\,x}{1 + \cos x}$

5) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{3x}$

6) $\lim_{x\to 0} \frac{2\,\text{sen}^2 x}{x \cos^2 x}$

7) $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}^2\,(0.5x)}{\text{sen}\,x}$

8) $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}^2\,(6x)}{x^2}$

9) $\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{\text{sen}^2\,(3x)}$

10) $\lim_{x\to 1} \frac{\text{sen}\,(x - 1)}{2x - 2}$

11) $\lim\limits_{x \to 2\pi} \dfrac{x - 2\pi}{\text{sen } x}$

12) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}^4 x}{2x^3}$

13) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x}{x}$

14) $\lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{1 + \text{sen } x}{\cos x}$

15) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } (3x)}{\text{sen } (7x)}$

16) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1 - \cos x)^2}{x}$

17) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{\cos^2 x - 1}$

18) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } x + \tan x}{x}$

19) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos 2x}{\cos 3x}$

20) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x \sec x \csc 4x}$

21) $\lim\limits_{x \to 0} (5x \cot 2x)$

22) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos (3x - \frac{\pi}{2})}{x}$

23) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1 - \cos x)^2}{x}$

24) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos 2x}{\cos x - \text{sen } x}$

H) Determine si los siguientes límites tienden a $+\infty$ ó $-\infty$. Aplique los criterios dados al final de esta Guía .

1) $\lim\limits_{x \to 5^-} \dfrac{1}{x - 5}$

2) $\lim\limits_{x \to 6} \dfrac{4}{(x - 6)^2}$

3) $\lim\limits_{x \to 4^+} \dfrac{2}{(x + 4)^3}$

4) $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{10}{x^2 - 4}$

5) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{(x - 1)^4}$

6) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{-1}{\sqrt{x}}$

7) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{2 + \text{sen } x}{x}$

8) $\lim\limits_{x \to \pi^+} \csc x$

9) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2 - 3}{x^3 + x^2}$

10) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$

11) $\lim_{x \to 2^-} \left(\frac{1}{x - 2} - \frac{3}{x^2 - 4} \right)$

12) $\lim_{x \to 3} \frac{5(x + 4)}{(x - 3)^2 (x - 4)}$

13) $\lim_{x \to 3} \frac{5(x + 4)}{(x - 3)^2 (x - 4)}$

14) $\lim_{x \to 2^-} \frac{-x + 2}{(x - 2)^2}$

15) $\lim_{x \to 2^-} \frac{-x + 2}{(x - 2)^2}$

16) $\lim_{x \to 1} \left(3 + \frac{x + 2}{(x - 1)^2} \right)$

TEOREMA SOBRE EVALUACIÓN DE LÍMITES .

1) Si $P(x)$ es una función polinómica entonces $\lim\limits_{x \to a} P(x) = P(a)$.

2) Si $\lim\limits_{x \to a} f_1(x) = L_1$, $\lim\limits_{x \to a} f_2(x) = L_2$, …………….. y $\lim\limits_{x \to a} f_n(x) = L_n$

entonces $\lim\limits_{x \to a} [\, f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots\ldots\ldots \pm f_n(x) \,] = L_1 \pm L_2 \pm$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \pm L_n$.

3) Si $\lim\limits_{x \to a} f_1(x) = L_1$, $\lim\limits_{x \to a} f_2(x) = L_2$, …………….. y $\lim\limits_{x \to a} f_n(x) = L_n$

entonces $\lim\limits_{x \to a} [\, f_1(x)\, f_2(x) \ldots\ldots\ldots f_n(x) \,] = L_1\, L_2 \ldots\ldots\ldots L_n$.

4) Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ y n es cualquier entero positivo , entonces

$\lim\limits_{x \to a} [f(x)]^n = L^n$.

5) Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ y n es cualquier entero positivo , entonces

$\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$ con la observación de que si n es par debe darse de que $0 < L$ para que exista el límite .

6) Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$, entonces $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$

si $M \neq 0$.

TEOREMA SOBRE LÍMITES INFINITOS .

Si a es cualquier número real y si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = C \neq 0$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$,

entonces :

1) Si $0 < C$ y $g(x) \to 0$ a través de valores positivos de $g(x)$,

entonces $\lim\limits_{x\to a} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = +\infty$.

2) Si $0 < C$ y $g(x) \to 0$ a través de valores negativos de $g(x)$,

entonces $\lim\limits_{x\to a} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = -\infty$.

3) Si $C < 0$ y $g(x) \to 0$ a través de valores positivos de $g(x)$,

entonces $\lim\limits_{x\to a} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = -\infty$.

4) Si $C < 0$ y $g(x) \to 0$ a través de valores negativos de $g(x)$,

entonces $\lim\limits_{x\to a} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = +\infty$.