



INSTITUTO DE TECNOLOGÍA
SABATO

Modelización de Propiedades y Procesos de Materiales

Modelización de un Ensayo de Jominy

Mauro Federico Daniel Vaca

Año 2022

1. Resumen

En el presente trabajo se analizó la evolución de la temperatura de una probeta durante un ensayo de Jominy. Con este fin, se hizo uso del programa gmsht, el cual fue utilizado para diseñar el modelo a estudiar y realizarle un mallado, y de lenguaje Python, para realizar el análisis del modelo propuesto y finalmente resolver el problema por el método de elementos finitos. En la elección del modelo a estudiar se tuvieron en cuenta las simetrías de la probeta y, además, se consideró un espesor despreciable para realizar un análisis en 2D.

2. Introducción

Un ensayo de Jominy consiste en templar por chorro de agua desde un extremo una probeta cilíndrica de dimensiones estandarizadas que ha sido previamente austenizada. De esta forma, al templar desde un extremo de la misma, se logra obtener un rango de velocidades de enfriamiento muy amplio en una probeta de dimensiones relativamente pequeñas. Por un lado, el extremo templado se enfría de forma muy energética, mientras que el extremo opuesto sufre algo similar a un normalizado. Entre medio, se obtendrán diferentes velocidades de enfriamiento y, por lo tanto, distintas estructuras y durezas, las cuales podrán ser medidas posteriormente.

De esta forma, este trabajo se basa en el análisis de las distintas velocidades de enfriamiento a lo largo de la probeta de Jominy, por lo cual se deberá obtener la evolución de la temperatura para cada posición de la probeta (distancias de Jominy).

3. Modelo y Discretización

La ecuación que gobierna un problema de transferencia de calor en dos dimensiones es:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \dot{q} = 0$$

Siendo k_x y k_y la conductividad térmica en cada dirección.

Y sus condiciones de contorno son:

$$T = T_o(x, y) \text{ on } S_1$$

$$k_x \frac{\partial T}{\partial x} l_x + k_y \frac{\partial T}{\partial y} l_y + q = 0 \text{ on } S_2$$

$$k_x \frac{\partial T}{\partial x} l_x + k_y \frac{\partial T}{\partial y} l_y + h(T - T_\infty) = 0 \text{ on } S_3$$



A partir de las simetrías de la probeta de Jominy, se decidió utilizar un modelo en el que analicemos media probeta, el cual se puede ver en la Figura 1.

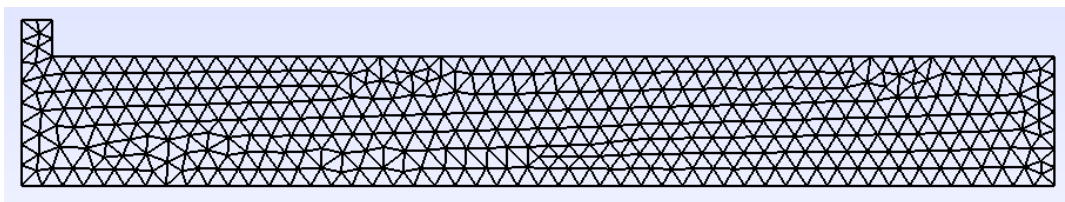


Fig. 1: Modelo utilizado para el estudio de la probeta de Jominy.

A partir de esto, asumo variación lineal de temperatura en los elementos “e”:

$$T^{(e)}(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y = [N(x, y)]\vec{q}^{(e)}$$

Donde:

$$[N(x, y)] = \begin{Bmatrix} N_i(x, y) \\ N_j(x, y) \\ N_k(x, y) \end{Bmatrix}^T = \begin{Bmatrix} (a_i + xb_i + yc_i)/2A^{(e)} \\ (a_j + xb_j + yc_j)/2A^{(e)} \\ (a_k + xb_k + yc_k)/2A^{(e)} \end{Bmatrix}^T$$

$$\vec{q}^{(e)} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} T_i \\ T_j \\ T_k \end{Bmatrix}$$

$A^{(e)}$ es el área y T_i , T_j y T_k las temperaturas en los nodos.

Por otro lado, el cálculo de $A^{(e)}$ se realizó como:

$$A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} = \frac{1}{2} (x_i y_j + x_j y_k + x_k y_i - x_i y_k - x_j y_i - x_k y_j)$$

$$a_i = x_j y_k - x_k y_j$$

$$a_j = x_k y_i - x_i y_k$$

$$a_k = x_i y_j - x_j y_i$$

$$b_i = y_j - y_k$$

$$b_j = y_k - y_i$$

$$b_k = y_i - y_j$$

$$c_i = x_k - x_j$$

$$c_j = x_i - x_k$$

$$c_k = x_j - x_i$$

Se planteó la solución del problema, por residuos ponderados, como:

$$\iint \left(Q + k_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - c\rho \frac{\partial T}{\partial t} \right) N_i(x) dx = 0 ; \text{ con } i = 1, 2, 3$$

La cual matricialmente se puede expresar como:

$$[C] \left\{ \frac{\partial T}{\partial t} \right\} + [K] \{T\} = \{f_Q\} + \{f_q\}$$

$$\left\{ \frac{\partial T}{\partial t} \right\} \simeq \left\{ \frac{T(t + \delta t) - T(t)}{\Delta t} \right\}$$

$$[C] \{T(t + \Delta t)\} = [C] \{T(t)\} - ([K] \{T(t)\} + \{f_Q\} + \{f_q\}) \Delta t$$

Se calculó entonces la matriz de rigidez para cada elemento utilizando las matrices [B] y [D]:

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_j}{\partial x} & \frac{\partial N_k}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_k}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A^{(e)}} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} \quad [D] = \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix}$$

$$[K_1^{(e)}] = \frac{1}{4A^{(e)^2}} \iiint_{V^{(e)}} \begin{bmatrix} b_i & c_i \\ b_j & c_j \\ b_k & c_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} \cdot dV$$

Se consideró como elemento isotrópico de forma tal que k_x y k_y sean iguales y se obtenga:

$$[K_1^{(e)}] = \frac{k}{4A^{(e)}} \begin{bmatrix} (b_i^2 + c_i^2) & (b_i b_j + c_i c_j) & (b_i b_k + c_i c_k) \\ \text{Symmetric} & (b_j^2 + c_j^2) & (b_j b_k + c_j c_k) \\ & & (b_k^2 + c_k^2) \end{bmatrix}$$

También calculo la matriz de capacitancia, como:

$$[C^{(e)}] = \frac{h s_{ji}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Obtenido todo, se procedió a la resolución.

4. Resultados

En la Figura 2 puede observarse un gráfico de las velocidades de enfriamiento obtenidas para diferentes distancias de Jominy. Recordar que las distancias de Jominy se miden desde el extremo templado.

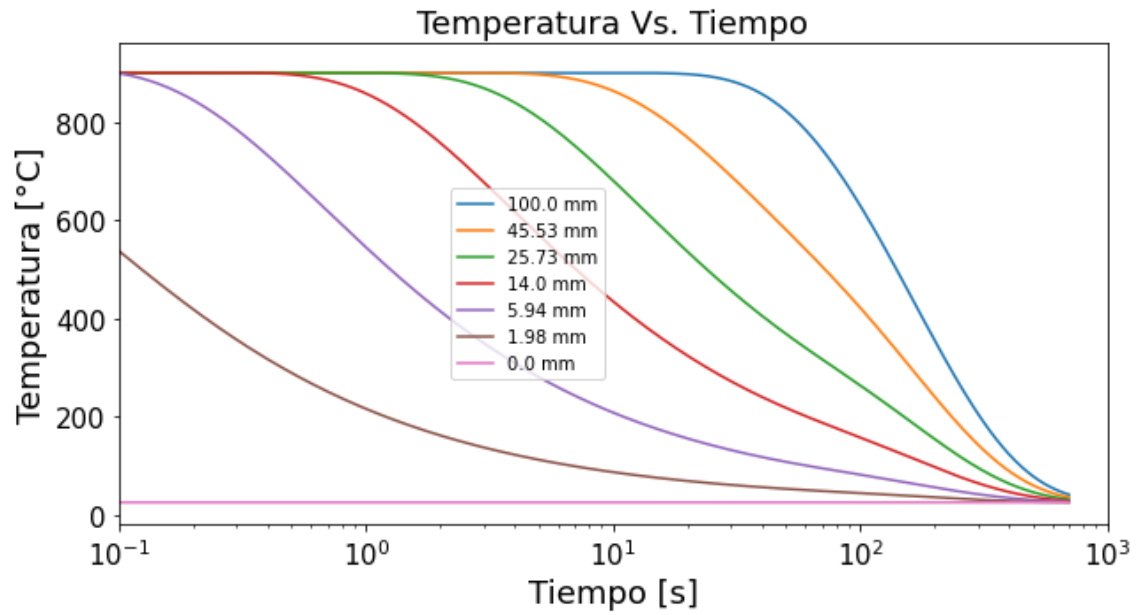


Fig. 2: Grafico de Temperatura vs. Tiempo para diferentes distancias de Jominy.

En la [Figura 3](#), [Figura 4](#) y [Figura 5](#) pueden observarse imágenes obtenidas para la distribución de temperaturas en el modelo utilizado para diferentes tiempos de análisis.

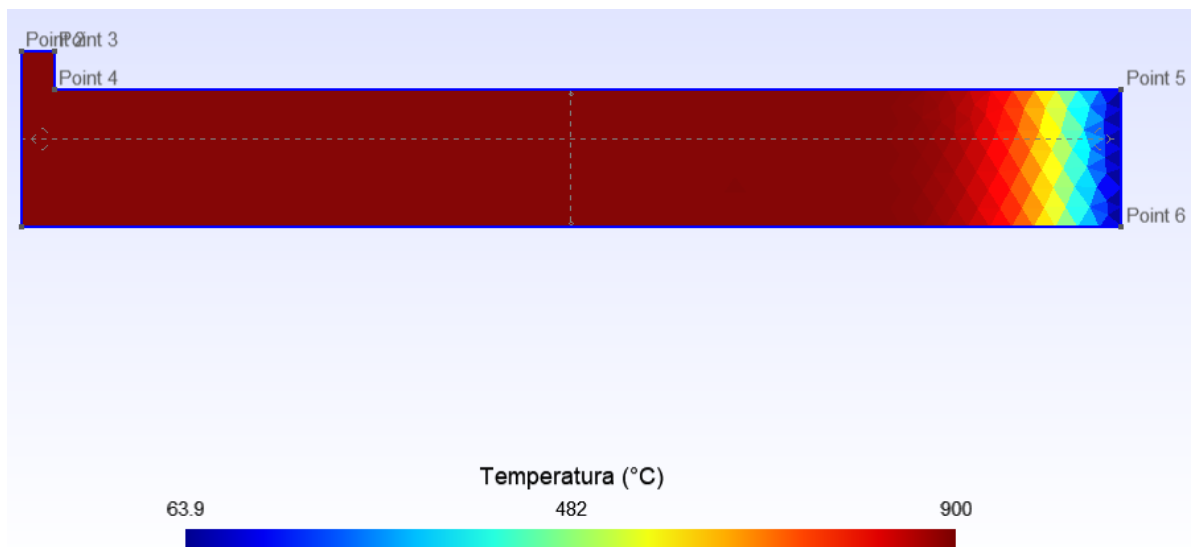


Fig. 3: Distribución de temperaturas en el modelo a 1 segundo de iniciar el temple.

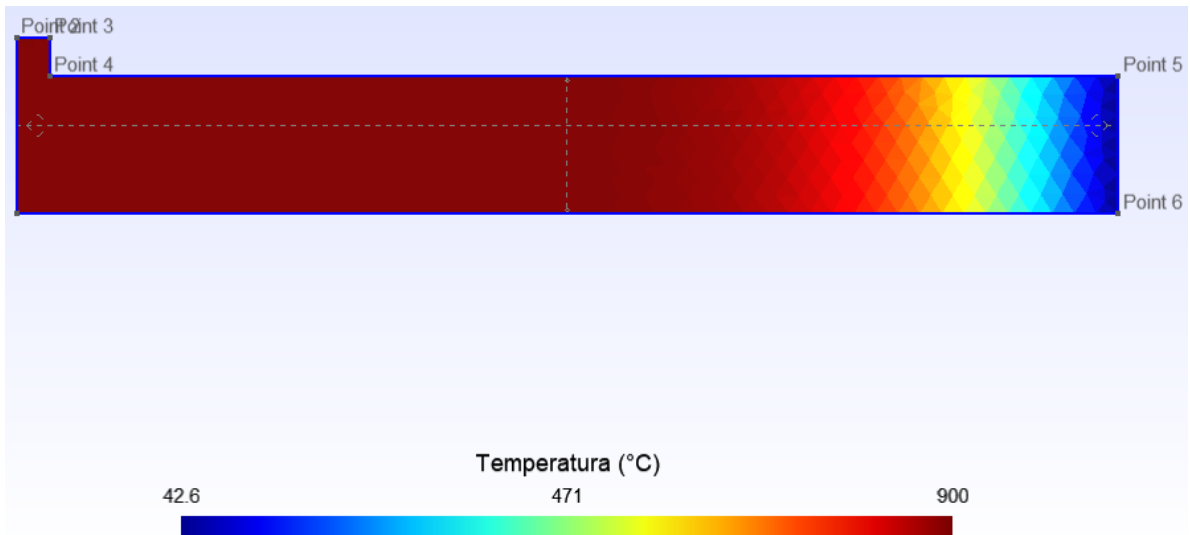


Fig. 4: Distribución de temperaturas en el modelo a 5 segundos de iniciar el temple.

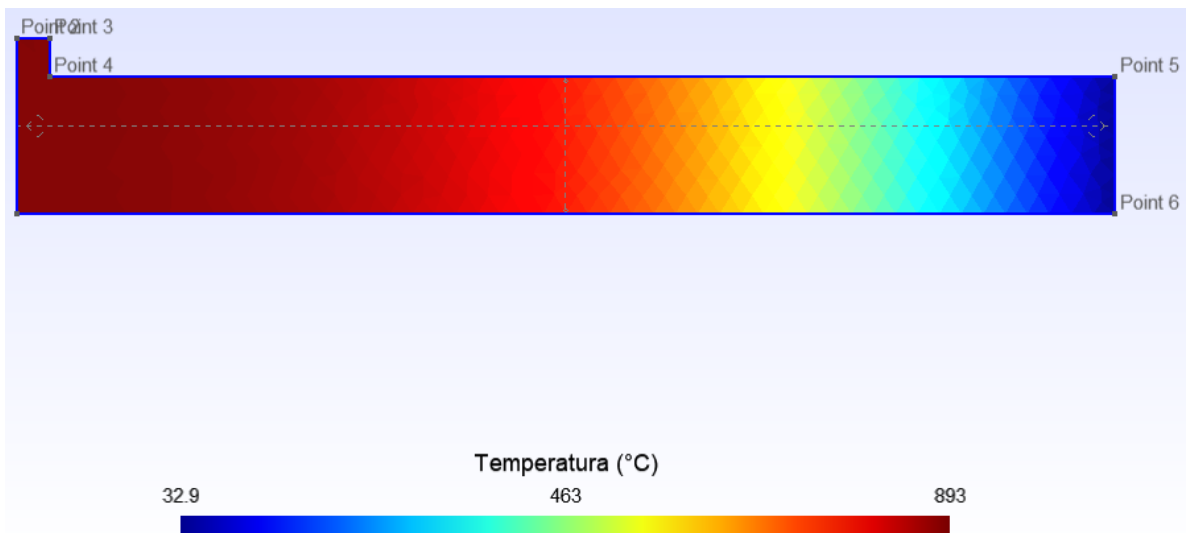


Fig. 5: Distribución de temperaturas en el modelo a 25 segundos de iniciar el temple.

5. Conclusiones

Se pudo obtener de forma eficiente un **aproximado de las velocidades de enfriamiento a lo largo de la probeta de Jominy** (Figura 2). Además, con ayuda del gmsh se pudo obtener un diagrama con código de colores del gradiente de temperaturas en la probeta para diferentes tiempos del ensayo (Figura 3, Figura 4 y Figura 5), los cuales son acordes a las temperaturas mostradas para ciertas distancias en dichos tiempos en la Figura 2.

Los resultados obtenidos fueron satisfactorios y coherentes con lo que se esperaba obtener en este análisis. Por otro lado, si bien se trata de una buena aproximación, se podría considerar como un trabajo complementario el realizar el análisis teniendo en cuenta el enfriamiento que sufre la probeta en las superficies en contacto con el aire a temperatura ambiente.

6. Referencias

- Singiresu S. Rao – The Finite Element Method in Engineering