

Análisis sobre un ave obesa que rueda sobre un limpiaparabrisas

Fernando Briceño *

Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.

7 de septiembre de 2022

Índice

1. Simplificando al estilo de la "Vaca esférica".	1
2. Desarrollo matemático por medio de las ecuaciones de Lagrange	2
2.1. Cálculo de las energías	2
2.1.1. Energía cinética	2
2.1.2. Energía rotacional.	5
2.1.3. La energía potencial del sistema	6
2.2. El lagrangiano del sistema.	6
2.3. Las ecuaciones de Lagrange	7
3. Desarrollo matemático por medio de las ecuaciones de Hamilton	9
3.1. Cálculo del Hamiltoniano	9
3.2. Ecuaciones de Hamilton	11

Resumen

Se busca analizar el movimiento de un sólido plano que rueda sobre una barra cuya inclinación varía con el tiempo, para esto se ha hecho uso del desarrollo Lagrangiano de la mecánica de su movimiento, estudiando las ligaduras presentes en el sistema y analizando el resultado matemático del Lagrangiano, con el fin de encontrar primeras integrales, su significado físico y describir las ecuaciones de movimiento del sistema.

1. Simplificando al estilo de la "Vaca esférica".

Supongamos que hay un ave pequeña y obesa sobre un limpiaparabrisas que se ha quedado dormida. inesperadamente llega un conductor descuidado que no ve al ave y se dispone a limpiar

*luferbrica@gmail.com

el parabrisas, con tan mala suerte para el ave, que esta termina rodando hasta el eje del mismo ya que no pudo despertarse a tiempo para salir volando.

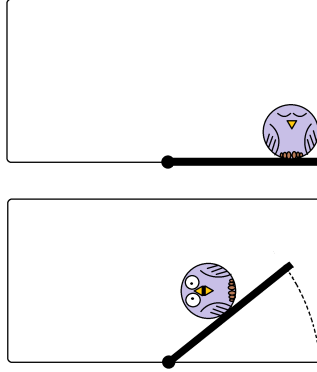


Figura 1: Un ave gorda rodando

Aludiendo al conocido chiste sobre una *Vaca esférica*, que pretende de forma jocosa, ridiculizar la forma en que los físicos buscan continuamente simplificar "excesivamente" los sistemas físicos que estudian; buscaremos simplificar a esta ave y le daremos la forma de un plato bidimensional circular, con radio a y densidad de masa $\rho_a = \frac{m}{A}$, en donde A es el área del ave.

2. Desarrollo matemático por medio de las ecuaciones de Lagrange

2.1. Calculo de las energías

2.1.1. Energía cinética

La energía cinética de la barra M

Para esto tomaremos las ecuaciones de posición del centro de masa de la barra

$$x = \frac{L}{2} \cos(\theta), \quad (1)$$

$$\dot{x} = -\frac{L}{2} \sin(\theta) \dot{\theta}, \quad (2)$$

De igual manera el análisis para el eje vertical

$$y = \frac{L}{2} \sin(\theta), \quad (3)$$

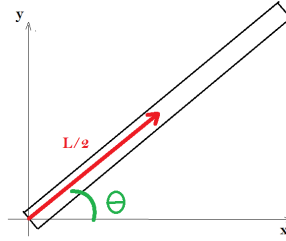


Figura 2: Diagrama de la barra

$$\dot{y} = \frac{L}{2} \cos(\theta) \dot{\theta}, \quad (4)$$

así se puede obtener una ecuación para la energía cinética de la barra de la forma

$$K_1 = M \frac{L^2}{4} \dot{\theta}^2, \quad (5)$$

La energía cinética del Ave m

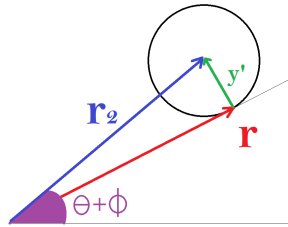


Figura 3: Diagrama de la barra

Para esto tomaremos las ecuaciones de posición del centro de masa del ave. Es facil observar que $\sin \phi = \frac{a}{r_2}$ y $\cos \phi = \frac{r}{r_2}$, por lo tanto

$$\begin{aligned}
 x &= r_2 \cos(\theta + \phi), \\
 &= r_2 [\cos\theta \cos\phi - \sin\theta \sin\phi], \\
 &= r_2 \left[\cos\theta \frac{r}{r_2} - \sin\theta \frac{a}{r_2} \right], \\
 &= r \cos\theta - a \sin\theta, \\
 \dot{x} &= \dot{r} \cos\theta - r \sin\theta \dot{\theta} - a \cos\theta \dot{\theta}.
 \end{aligned}$$

Para el eje vertical haremos un análisis similar

$$\begin{aligned}
 y &= r_2 \sin(\theta + \phi), \\
 &= r_2 [\cos\theta \sin\phi + \sin\theta \cos\phi], \\
 &= r_2 \left[\cos\theta \frac{a}{r_2} + \sin\theta \frac{r}{r_2} \right], \\
 &= r \sin\theta + a \cos\theta, \\
 \dot{y} &= \dot{r} \sin\theta + r \cos\theta \dot{\theta} - a \sin\theta \dot{\theta}.
 \end{aligned}$$

Si elevamos al cuadrado cada expresión de \dot{x} y \dot{y} tendríamos

$$\begin{aligned}
 \dot{y}^2 &= \dot{r}^2 \sin^2\theta + r^2 \dot{\theta}^2 \cos^2\theta + a^2 \dot{\theta}^2 \sin^2\theta + 2r\dot{r}\dot{\theta} \sin\theta \cos\theta - 2a\dot{r}\dot{\theta} \sin^2\theta - 2a\dot{r} \sin\theta \cos\theta \dot{\theta}^2, \\
 \dot{x}^2 &= \dot{r}^2 \cos^2\theta + r^2 \dot{\theta}^2 \sin^2\theta + a^2 \dot{\theta}^2 \cos^2\theta - 2r\dot{r}\dot{\theta} \sin\theta \cos\theta - 2a\dot{r}\dot{\theta} \cos^2\theta + 2a\dot{r} \sin\theta \cos\theta \dot{\theta}^2,
 \end{aligned}$$

obteniendo así una expresión para la velocidad del ave al cuadrado

$$\begin{aligned}
 \dot{x}^2 + \dot{y}^2 &= \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + a^2 \dot{\theta}^2 - 2a\dot{r}\dot{\theta}, \\
 v_2^2 &= r^2 \dot{\theta}^2 + (a^2 \dot{\theta}^2 - 2a\dot{r}\dot{\theta} + \dot{r}^2), \\
 v_2^2 &= r^2 \dot{\theta}^2 + (a\dot{\theta} - \dot{r})^2.
 \end{aligned}$$

De esta manera obtenemos la K_2 de la manera

$$K_2 = \frac{m}{2} \left[r^2 \dot{\theta}^2 + (a\dot{\theta} - \dot{r})^2 \right]. \quad (6)$$

2.1.2. Energía rotacional.

La energía rotacional del limpia parabrisas

Tanto el limpia para brisas como el ave tendrán una energía cinética rotacional. Se considerará el limpiaparabrisas como una barra de longitud L Por lo que su centro de masas estará en $\frac{L}{2}$, tiene una masa M por lo que su densidad de masa será $\rho_L = \frac{m}{L}$, de esta manera calculamos La inercia rotacional de la barra como

$$\begin{aligned} I_1 &= \int x^2 dm; \quad dx \rho_L = dm, \\ &= \rho_L \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 dx, \\ &= \frac{ML^2}{12}. \end{aligned}$$

De esta manera la energía rotacional del limpia parabrisas será

$$\begin{aligned} E_{rot1} &= \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2, \\ &= \frac{ML^2}{24} \dot{\theta}^2. \end{aligned}$$

La energía rotacional del ave.

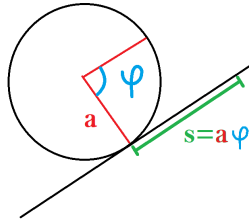


Figura 4: Diagrama de la barra

De igual manera, podemos conseguir la energía rotacional del ave, asumiendo que el ángulo de rotación con respecto a un eje paralelo al limpiaparabrisas φ , se relaciona con el camino recorrido sobre la barra L de la forma $s = a\varphi$ por lo que $\dot{s} = \dot{r} = a\dot{\varphi}$. Así el calculo del momento de inercia para el ave con $\rho_a = \frac{m}{A}$ nos indica que

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int R^2 dm; \quad dR \rho_a 2\pi R = dm, \\
 &= 2\pi \rho_a \int_0^a R^3 dR, \\
 &= \frac{ma^2}{2}.
 \end{aligned}$$

De esta manera la energía rotacional del ave será

$$\begin{aligned}
 E_{rot2} &= \frac{1}{2} I_2 \dot{\varphi}^2, \\
 &= \frac{ma^2}{4} \dot{\varphi}^2, \\
 &= \frac{m}{4} \dot{r}^2.
 \end{aligned}$$

2.1.3. La energía potencial del sistema

La energía potencial del centro de masas del limpia parabrisas será

$$U_1 = Mg \frac{L}{2} \sin \theta, \quad (7)$$

mientras que la energía potencial del centro de masa del ave será

$$U_2 = mg(a \cos \theta + r \sin \theta), \quad (8)$$

2.2. El lagrangiano del sistema.

Ahora podemos proceder a calcular el lagrangiano del sistema de la manera

$$\begin{aligned}
 L &= T - U, [1] \\
 &= (K_1 + K_2 + E_{rot1} + E_{rot2}) - (U_1 + U_2), \\
 &= M \frac{L^2}{4} \dot{\theta}^2 + \frac{m}{2} \left[r^2 \dot{\theta}^2 + (a\dot{\theta} - \dot{r})^2 \right] + \frac{ML^2}{24} \dot{\theta}^2 + \frac{m}{4} \dot{r}^2 - \left[Mg \frac{L}{2} \sin\theta + mg(a\cos\theta + r\sin\theta) \right], \\
 &= \frac{7ML^2}{24} \dot{\theta}^2 + \frac{m}{2} \left[\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + a^2 \dot{\theta}^2 - 2a\dot{r}\dot{\theta} \right] + \frac{m}{4} \dot{r}^2 - \left[\left(\frac{ML}{2m} + r \right) mg \sin\theta + mg a \cos\theta \right], \\
 &= \frac{m}{2} \left[\left(\frac{7ML^2}{12m} \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + a^2 \dot{\theta}^2 \right) - 2a\dot{r}\dot{\theta} + \frac{3}{2} \dot{r}^2 \right] - \left[\left(\frac{ML}{2m} + r \right) mg \sin\theta + mg a \cos\theta \right], \\
 &= \frac{m}{2} \left[\left(\frac{7ML^2}{12m} + a^2 + r^2 \right) \dot{\theta}^2 - 2a\dot{r}\dot{\theta} + \frac{3}{2} \dot{r}^2 \right] - mg \left[\left(\frac{ML}{2m} + r \right) \sin\theta + a \cos\theta \right],
 \end{aligned}$$

de tal manera que si hacemos

$$A = \frac{7ML^2}{12m} + a^2; \quad B = \frac{ML}{2m},$$

Obtenemos el Lagrangiano de la forma

$$L = \frac{m}{2} \left[(A + r^2) \dot{\theta}^2 - 2a\dot{r}\dot{\theta} + \frac{3}{2} \dot{r}^2 \right] - mg [(B + r) \sin\theta + a \cos\theta]. \quad (9)$$

2.3. Las ecuaciones de Lagrange

Las ecuaciones de Lagrange del sistema, resultan de un desarrollo matemático del lagrangiano, mediante el cálculo de un conjunto de derivadas parciales respecto a las coordenadas idnependientes y totales respecto al tiempo, generando para cada coordenada generalizada una ecuación diferencial parcial, la cual, al ser resuelta, me permite conocer las ecuaciones de movimiento.

Ecuaciones de Lagrange para θ

Respecto a θ se puede obtener

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = mg [a \sin\theta - (B + r) \cos\theta]. \quad (10)$$

Con respecto a $\dot{\theta}$ tenemos

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m \left[(A + r^2) \dot{\theta} - a\dot{r} \right], \quad (11)$$

así mismo

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = m \left[2r\dot{r}\dot{\theta} + (A + r^2) \ddot{\theta} - a\ddot{r} \right], \quad (12)$$

es así como se obtiene la ecuación diferencial de la forma

$$\frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} \right), [1] = 0, \quad (13)$$

lo que nos da una primera ecuación diferencial de segundo orden

$$g [a \sin \theta - (B + r) \cos \theta] - \left[2r\dot{r}\dot{\theta} + (A + r^2) \ddot{\theta} - a\ddot{r} \right] = 0. \quad (14)$$

Ecuaciones de Lagrange para r

Respecto a r se puede obtener

$$\frac{\partial L}{\partial r} = m r \dot{\theta}^2 - m g \sin \theta. \quad (15)$$

Con respecto a \dot{r} tenemos

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{3m}{2} \dot{r} - m a \dot{\theta}, \quad (16)$$

así mismo

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) = \frac{3m}{2} \ddot{r} - m a \ddot{\theta}, \quad (17)$$

es así como se obtiene la ecuación diferencial de la forma

$$\frac{\partial}{\partial r} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{r}} \right) = 0, \quad (18)$$

lo que nos da una segunda ecuación diferencial de segundo orden

$$r \dot{\theta}^2 - g \sin \theta - \frac{3}{2} \ddot{r} + a \ddot{\theta} = 0. \quad (19)$$

Ahora solo nos queda ponernos manos a la obra con la carpintería, para resolver este sistema de ecuaciones diferenciales y así obtener las ecuaciones de movimiento del sistema.

3. Desarrollo matemático por medio de las ecuaciones de Hamilton

3.1. Calculo del Hamiltoniano

Sean P_r y P_θ los momentos generalizados del sistema, definidos como $P_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}}$ y a $P_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}$, así definiremos a mano una ecuación para una función h como

$$h(P_r, P_\theta, \dot{r}, \dot{\theta}; t) = P_r \dot{r} + P_\theta \dot{\theta} - L(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}; t), \quad (20)$$

Dado que podemos aplicar la trasformada de Legendre a L para encontrar una funcionalidad de $\dot{q}_i = \dot{q}_i(P_i)$, entonces podemos definir el hamiltoniano del sistema como

$$H(P_r, P_\theta, r, \theta; t) = P_r \dot{r}(P_r) + P_\theta \dot{\theta}(P_\theta) - L(r, \theta, \dot{r}(P_r), \dot{\theta}(P_\theta); t), [2] \quad (21)$$

Procedemos entonces para r

$$P_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{3m}{2} \dot{r} - ma\dot{\theta} \Rightarrow \dot{r}(P_r) = \frac{2}{3} \left(\frac{P_r}{m} + a\dot{\theta} \right). \quad (22)$$

Así mismo para θ

$$P_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m \left[(A + r^2) \dot{\theta} - a\dot{r} \right] \Rightarrow \dot{\theta}(P_\theta) = \frac{P_\theta}{m(A + r^2)} + \frac{a\dot{r}}{A + r^2}. \quad (23)$$

Si reemplazamos (22) en (23) obtenemos

$$\dot{\theta} = \frac{P_\theta}{m \left(A - \frac{2a^2}{3} + r^2 \right)} + \frac{2aP_r}{3m \left(A - \frac{2a^2}{3} + r^2 \right)}. \quad (24)$$

Haciendo $C = A - \frac{2a^2}{3}$ podemos reducir la ecuación a la forma

$$\dot{\theta} = \frac{P_\theta}{m(C + r^2)} + \frac{2aP_r}{3m(C + r^2)}. \quad (25)$$

Ahora si reemplazamos (25) en (22) obtenemos

$$\begin{aligned}
 \dot{r} &= \frac{2}{3} \left[\frac{P_r}{m} + a \left(\frac{P_\theta}{m(C+r^2)} + \frac{2aP_r}{3m(C+r^2)} \right) \right], \\
 &= \frac{a}{\frac{3m}{2}(C+r^2)} P_\theta + \frac{\frac{2a^2}{3} + (C+r^2)}{\frac{3m}{2}(C+r^2)} P_r, \\
 &= \frac{2aP_\theta}{3m(C+r^2)} + \frac{2(A+r^2)P_r}{3m(C+r^2)}.
 \end{aligned}$$

Si hacemos $\lambda = \frac{2}{3m(C+r^2)}$, entonces podemos reducir nuestras ecuaciones para las velocidades de la forma

$$\dot{\theta} = \frac{3\lambda}{2} P_\theta + a\lambda P_r \quad (26)$$

y

$$\dot{r} = a\lambda P_\theta + (A+r^2)\lambda P_r. \quad (27)$$

Ahora si reemplazamos (26) y (27) en (21) y si $\kappa = (A+r^2)$ y $U = mg[(B+r)\sin\theta + a\cos\theta]$

$$\begin{aligned}
 H &= P_r \dot{r} + P_\theta \dot{\theta} - \left\{ \frac{m}{2} \left[(A+r^2) \dot{\theta}^2 - 2a\dot{r}\dot{\theta} + \frac{3}{2} \dot{r}^2 \right] - U \right\}, \\
 &= P_r [a\lambda P_\theta + \kappa\lambda P_r] + P_\theta \left[\frac{3\lambda}{2} P_\theta + a\lambda P_r \right] \dots \\
 &\dots - \left\{ \frac{m}{2} \left[\kappa \left(\frac{3\lambda}{2} P_\theta + a\lambda P_r \right)^2 - 2a(a\lambda P_\theta + \kappa\lambda P_r) \left(\frac{3\lambda}{2} P_\theta + a\lambda P_r \right) + \frac{3}{2} (a\lambda P_\theta + \kappa\lambda P_r)^2 \right] - U \right\}, \\
 &= 2a\lambda P_\theta P_r + \kappa\lambda P_r^2 + \frac{3\lambda}{2} P_\theta^2 \dots \\
 &\dots - \left\{ \frac{3m\lambda^2}{4} \left[\frac{3\kappa}{2} - a^2 \right] P_\theta^2 + \frac{m}{2} \lambda^2 \left[a^2 - 2ka^2 + \frac{3}{2} k^2 \right] P_r^2 + \frac{m}{2} \lambda^2 [3ka + 2a^3] P_\theta P_r - U \right\}, \\
 &= \left(\frac{3\lambda}{2} - \frac{3m\lambda^2}{4} \left[\frac{3\kappa}{2} - a^2 \right] \right) P_\theta^2 + \left(\kappa\lambda - \frac{m}{2} \lambda^2 \left[a^2 - 2ka^2 + \frac{3}{2} k^2 \right] \right) P_r^2 + \left(2a\lambda - \frac{m}{2} \lambda^2 [3ka + 2a^3] \right) P_\theta P_r + U,
 \end{aligned}$$

Si hacemos

$$f(r) = \frac{3\lambda}{2} - \frac{3m\lambda^2}{4} \left[\frac{3\kappa}{2} - a^2 \right], \quad (28)$$

$$g(r) = \kappa\lambda - \frac{m}{2}\lambda^2 \left[a^2 - 2ka^2 + \frac{3}{2}k^2 \right], \quad (29)$$

$$m(r) = 2a\lambda - \frac{m}{2}\lambda^2 [3ka + 2a^3], \quad (30)$$

entonces tendremos

$$H = f(r)P_\theta^2 + g(r)P_r^2 + m(r)P_\theta P_r + U(r, \theta) \quad (31)$$

3.2. Ecuaciones de Hamilton

Ahora podemos obtener nuestras ecuaciones de Hamilton, estas se obtienen a partir de la relación entre las derivadas temporales de las coordenadas generalizadas y los momentos de la forma

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial P_i}, \quad (32)$$

así como de la relación entre la derivada temporal de los momentos generalizados con respecto a las coordenadas de la forma

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (33)$$

Por lo anterior podemos decir que de este sistema ahora podemos sacar cuatro ecuaciones diferenciales, lo cual resulta ser el doble de ecuaciones que las obtenidas al resolver el sistema por las ecuaciones de Lagrange, sin embargo, nos brinda una ventaja enorme a pesar de duplicar el número de ecuaciones, y es que estas nuevas ecuaciones son ahora de primer grado. Es decir, hemos bajado el grado de las ecuaciones con el sacrificio de duplicar su cantidad.

Estas ecuaciones quedarían entonces de la forma

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial P_r} = 2f(r)P_r + m(r)P_\theta, \quad (34)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial P_\theta} = 2g(r)P_\theta + m(r)P_r, \quad (35)$$

$$\dot{P}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = -\frac{\partial f(r)}{\partial r}P_\theta^2 - \frac{\partial g(r)}{\partial r}P_r^2 - \frac{\partial m(r)}{\partial r}P_\theta P_r - \frac{\partial U}{\partial r}, \quad (36)$$

$$\dot{P}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -\frac{\partial U}{\partial \theta}. \quad (37)$$

Referencias

- [1] V. I. Arnol 'd. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, 2ed. Thomson Learning, USA, 1989.
- [2] Herbert Goldstein. *Mecánica clásica*, 3ed. Aguilar, S. A., España, 1963.