

¿Se puede hacer huevos batidos con una bicicleta?

Fernando Briceño *

Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.

16 de Febrero de 2023

Índice

1. Los huevos de la abuela	2
2. Simplificando al estilo de la "Vaca esférica".	3
3. Desarrollo matemático por medio de las ecuaciones de Lagrange	3
3.1. Coordenadas de la posición de los huevos y sus velocidades.	3
3.2. Calculo de las energías	4
3.2.1. La energía cinética del sistema	4
3.2.2. La energía potencial del sistema	4
3.3. El Lagrangiano del sistema.	5
3.4. Las ecuaciones de Lagrange	6
4. Desarrollo matemático por medio de las ecuaciones de Hamilton	7
4.1. Calculo del Hamiltoniano	7
4.2. Ecuaciones de Hamilton	10
5. Solución numérica de las ecuaciones de movimiento.	10
5.1. La velocidad en x es constante	11
5.2. Desarrollo numérico por el método de Runge-Kutta	11
5.3. Desarrollo numérico y simulación con Python	12
5.4. Limitaciones del método numérico de Runge-Kutta para este sistema	14
5.5. Análisis de las energías del sistema y puntos de retorno	16
5.6. ¿Batidos o fritos?	18

*luferbrica@gmail.com

6. Conclusiones.

19

Resumen

Se busca analizar el movimiento de una masa puntual suspendida mediante una cuerda inextensible y rígida, la cual está sujeta a un eje que se desplaza con dos grados de libertad, para esto se ha hecho uso del desarrollo Lagrangiano de la mecánica de su movimiento, estudiando las ligaduras presentes en el sistema y analizando el resultado matemático del Lagrangiano, con el fin de encontrar primeras integrales e intentar describir las ecuaciones de movimiento del sistema, con lo que se logró graficar distintas trayectorias bajo condiciones iniciales e intervalos pequeños de tiempo.

1. Los huevos de la abuela

Un niño muy entusiasta, pero un poco insoportable en casa por su hiperactividad, se encuentra jugando en el salón de la casa, su abuela, con una terrible jaqueca no puede soportar más el ruido, y como es de costumbre, envía al chico a traer algo del mercado para darle un poco de paz y silencio a la casa. Le encomienda una docena de huevos, y le recomienda puntualmente, dado a su expediente de movimientos bruscos, que no puede agitarlos demasiado pues los huevos estrellados ya no quedarían buenos, serían huevos revueltos.

Sin detenerse a escuchar atentamente, el niño toma su bici y sale a toda velocidad al mercado, en donde empacan sus huevos en una bolsa para que pueda transportarlos en el manubrio de la bicicleta. El niño arranca de nuevo hacia su casa y sin recordar las palabras de su abuela, acelera a toda marcha justo antes de pasar por su calle favorita, una calle empedrada en donde se imagina haciendo motocross. ¿Habrà alguna velocidad adecuada a la que este chico pueda transitar y disfrutar la calle sin agitarle los huevos a la abuela?

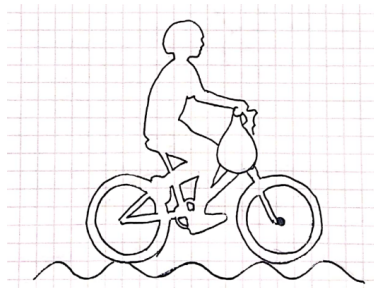


Figura 1: Figura ilustrativa del sistema

2. Simplificando al estilo de la "Vaca esférica".

Aludiendo al conocido chiste sobre una *Vaca esférica*, que pretende de forma jocosa, ridiculizar la forma en que los físicos buscan continuamente simplificar "excesivamente" los sistemas físicos que estudian; buscaremos simplificar algunos elementos del sistema.

Asumamos en primer lugar, que la docena de huevos dentro de la bolsa forman una carga uniforme, cuya geometría asemeja a una esfera, de manera que basta con describir el movimiento de su centro de masa, el cual junto con la bolsa forman un péndulo de longitud L que oscila en un único plano perpendicular al suelo.

Supongamos que la vía empedrada fue encomendada a un gran maestro constructor, que eligió disponer cada piedra como adoquines regulares, con tamaño y forma cuidadosamente seleccionados y esculpidos, de forma tal que al pasar sobre ellos genera un movimiento sinusoidal en la bicicleta. La fricción generada por el aire también es despreciable para nuestro sistema.

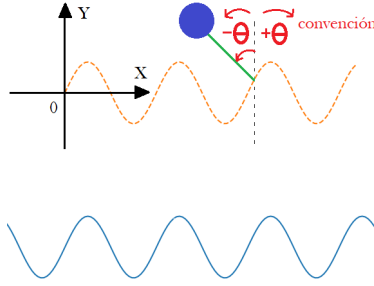


Figura 2: Figura ilustrativa del sistema

3. Desarrollo matemático por medio de las ecuaciones de Lagrange

3.1. Coordenadas de la posición de los huevos y sus velocidades.

Comenzamos por establecer un sistema de coordenadas con dos ejes, el vertical cuya coordenada Y describe la posición vertical y el eje horizontal, cuya coordenada X describe la posición horizontal. Es importante recordar que se ha establecido previamente que el conjunto de todos los huevos se considerará como una masa puntual, dado que se han establecido condiciones para poder realizar esta simplificación del sistema y así poder enfocarnos en la física presente en el sistema.

Para el eje horizontal diremos que:

$$X = x + L \sin \theta \quad (1)$$

$$V_X = \dot{x} + L\dot{\theta}\cos\theta \quad (2)$$

Para el eje vertical diremos que:

$$Y = L\cos\theta + \text{sen}x \quad (3)$$

$$V_Y = \dot{x}\cos x - L\dot{\theta}\text{sen}\theta \quad (4)$$

Establecemos para nuestro estudio que el movimiento se presenta únicamente en dirección de x y y , esto es en el plano $z = 0$, debido a que en el eje z no se presenta ningún tipo de fuerza que cambie el estado de movimiento del cuerpo en esta dirección. También establecemos que $\dot{z} = 0$.

3.2. Cálculo de las energías

3.2.1. La energía cinética del sistema

De las ecuaciones anteriores podemos calcular el cuadrado de las velocidades en cada eje como

$$V_X^2 = \dot{x}^2 + L^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta + 2L\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta \quad (5)$$

$$V_Y^2 = \dot{x}^2\cos^2x + L^2\dot{\theta}^2\text{sen}^2\theta - 2L\dot{x}\dot{\theta}\cos x\text{sen}\theta \quad (6)$$

De esta manera el cuadrado de la velocidad del centro de masa estará definida por V de la forma

$$\begin{aligned} V^2 &= V_X^2 + V_Y^2, \\ &= \dot{x}^2 (1 + \cos^2x) + L^2\dot{\theta}^2 + 2L\dot{x}\dot{\theta} (\cos\theta - \cos x\text{sen}\theta). \end{aligned}$$

Es así como la energía cinética del sistema toma la siguiente forma matemática

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}mV^2, \\ &= \frac{1}{2}m \left[\dot{x}^2 (1 + \cos^2x) + L^2\dot{\theta}^2 + 2L\dot{x}\dot{\theta} (\cos\theta - \cos x\text{sen}\theta) \right]. \end{aligned}$$

3.2.2. La energía potencial del sistema

Para calcular la energía potencial del centro de masas, debemos tener en cuenta la coordenada Y del sistema, el sistema coordenado establece que la posición será máxima cuando el ángulo con la

vertical sea múltiplo entero de 2π , será cero cuando sea múltiplo de entero de $\pi/2$ y tendrá valores negativos cuando el ángulo se encuentre entre $(-\pi/2, \pi/2)$.

Dado que nuestro sistema se encuentra cercano a la superficie de la tierra, se encuentra inmerso en un campo de fuerzas debido un potencial gravitacional que asumiremos como constante, uniforme, y con dirección vertical. De esta manera, la forma del potencial que consideraremos para nuestro sistema será

$$U = mg(L\cos\theta + \sin x), \quad (7)$$

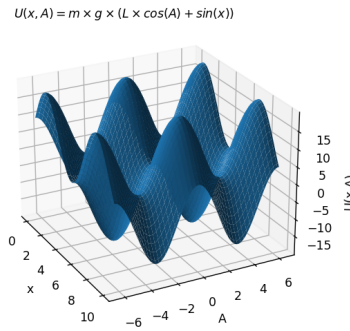


Figura 3: Gráfica de $U = U(x, \theta)$

3.3. El Lagrangiano del sistema.

Ahora podemos proceder a construir el Lagrangiano del sistema de la siguiente manera

$$\begin{aligned} L &= T - U, [1] \\ &= \frac{1}{2}m \left[\dot{x}^2 (1 + \cos^2 x) + L^2 \dot{\theta}^2 + 2L\dot{x}\dot{\theta} (\cos\theta - \cos x \sin\theta) \right] - mg(L\cos\theta + \sin x). \end{aligned}$$

De forma que nuestro lagrangiano nos queda en términos de dos coordenadas generalizadas x y θ . Como ambas coordenadas están presentes de forma explícita en la ecuación, se puede concluir que no existen coordenadas cíclicas, por lo que en estas coordenadas, no hay momentos generalizados constantes.

3.4. Las ecuaciones de Lagrange

Las ecuaciones de Lagrange del sistema, resultan de un desarrollo matemático del lagrangiano, mediante el cálculo de un conjunto de derivadas parciales respecto a las coordenadas generalizadas y totales respecto al tiempo, generando para cada coordenada generalizada una ecuación diferencial parcial, la cual, al ser resuelta, me permite conocer las ecuaciones de movimiento. De forma general, para cualquier coordenada q_i , el principio de D’Lambert permite afirmar que se satisface las ecuaciones diferenciales para cada coordenada, con la forma diferencial

$$\frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0, [1], \quad (8)$$

Ecuaciones de Lagrange para θ

Respecto a θ se puede obtener

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta} &= \frac{1}{2}m \left[2L\dot{x}\dot{\theta}(-\sin\theta - \cos x \cos\theta) \right] - mg(-L\sin\theta) \\ &= mL \left[g\sin\theta - \dot{x}\dot{\theta}(\sin\theta + \cos x \cos\theta) \right]. \end{aligned}$$

Con respecto a $\dot{\theta}$ tenemos

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mL \left[L\dot{\theta} + \dot{x}(\cos\theta - \cos x \sin\theta) \right], \quad (9)$$

así mismo

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = mL \left[L\ddot{\theta} + \ddot{x}(\cos\theta - \cos x \sin\theta) - \dot{x}\dot{\theta}(\sin\theta + \cos x \cos\theta) \right], \quad (10)$$

es así como se obtiene la ecuación diferencial de la forma

$$\frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} \right) = 0, \quad (11)$$

lo que nos da una primera ecuación diferencial de segundo orden

$$g\sin\theta - L\ddot{\theta} + \ddot{x}(\cos x \sin\theta - \cos\theta) = 0. \quad (12)$$

Ecuaciones de Lagrange para x

Respecto a x se puede obtener

$$\frac{\partial L}{\partial x} = m \left[-\dot{x}^2 \cos x \sin x + L \dot{\theta} \sin x \sin \theta - g \cos x \right]. \quad (13)$$

Con respecto a \dot{x} tenemos

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \left[\dot{x} (1 + \cos^2 x) + L \dot{\theta} (\cos \theta - \cos x \sin \theta) \right], \quad (14)$$

así mismo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) &= m \left[\ddot{x} (1 + \cos^2 x) - 2\dot{x}^2 \cos x \sin x + L \ddot{\theta} (\cos \theta - \cos x \sin \theta) + L \dot{\theta} \left(-\dot{\theta} \sin \theta - \left[-\dot{x} \sin x \sin \theta + \dot{\theta} \cos x \cos \theta \right] \right) \right] \\ &= m \left[\ddot{x} (1 + \cos^2 x) - 2\dot{x}^2 \cos x \sin x + L \ddot{\theta} (\cos \theta - \cos x \sin \theta) - L \dot{\theta} \left(\dot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta} \cos x \cos \theta - \dot{x} \sin x \sin \theta \right) \right], \\ &= m \left[\ddot{x} (1 + \cos^2 x) - 2\dot{x}^2 \cos x \sin x + L \ddot{\theta} (\cos \theta - \cos x \sin \theta) - L \dot{\theta}^2 (\sin \theta + \cos x \cos \theta) + L \dot{\theta} \dot{x} \sin x \sin \theta \right]. \end{aligned}$$

es así como se obtiene la ecuación diferencial de la forma

$$\frac{\partial}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}} \right) = 0, \quad (15)$$

lo que nos da una segunda ecuación diferencial de segundo orden

$$\dot{x}^2 \cos x \sin x - g \cos x - \ddot{x} (1 + \cos^2 x) + L \ddot{\theta} (\cos \theta - \cos x \sin \theta) - L \dot{\theta}^2 (\sin \theta + \cos x \cos \theta) = 0. \quad (16)$$

Ahora solo nos queda ponernos manos a la obra con la carpintería, para resolver este sistema de ecuaciones diferenciales y así obtener las ecuaciones de movimiento del sistema.

4. Desarrollo matemático por medio de las ecuaciones de Hamilton

4.1. Calculo del Hamiltoniano

Sean P_x y P_θ los momentos generalizados del sistema, definidos como $P_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$ y a $P_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}$, así definiremos a mano una ecuación para una función h como

$$h(P_x, P_\theta, \dot{x}, \dot{\theta}; t) = P_x \dot{x} + P_\theta \dot{\theta} - L(x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}; t), \quad (17)$$

Dado que podemos aplicar la trasformada de Legendre a L para encontrar una funcionalidad de $\dot{q}_i = \dot{q}_i(P_i)$, entonces podemos definir el hamiltoniano del sistema como

$$H(P_x, P_\theta, x, \theta; t) = P_x \dot{x}(P_x) + P_\theta \dot{\theta}(P_\theta) - L(x, \theta, \dot{x}(P_x), \dot{\theta}(P_\theta); t), [2] \quad (18)$$

Procedemos entonces para x

$$P_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \left[\dot{x} (1 + \cos^2 x) + L \dot{\theta} (\cos \theta - \cos x \sin \theta) \right] \Rightarrow \dot{x}(P_x) = \frac{P_x}{m(1 + \cos^2 x)} - \frac{L \dot{\theta} (\cos \theta - \cos x \sin \theta)}{(1 + \cos^2 x)}. \quad (19)$$

Así mismo para θ

$$P_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mL \left[L \dot{\theta} + \dot{x} (\cos \theta - \cos x \sin \theta) \right] \Rightarrow \dot{\theta}(P_\theta) = \frac{P_\theta}{mL^2} - \frac{\dot{x} (\cos \theta - \cos x \sin \theta)}{L}. \quad (20)$$

Si reemplazamos (20) en (19) obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{P_x}{m(1 + \cos^2 x)} - \frac{L(\cos \theta - \cos x \sin \theta)}{(1 + \cos^2 x)} \left[\frac{P_\theta}{mL^2} - \frac{\dot{x}(\cos \theta - \cos x \sin \theta)}{L} \right], \\ \dot{x} \left[1 - \frac{(\cos \theta - \cos x \sin \theta)^2}{(1 + \cos^2 x)} \right] &= \frac{P_x}{m(1 + \cos^2 x)} - \frac{(\cos \theta - \cos x \sin \theta)}{(1 + \cos^2 x)} \left[\frac{P_\theta}{mL} \right], \\ \dot{x} &= \frac{P_x}{m \left[(1 + \cos^2 x) - (\cos \theta - \cos x \sin \theta)^2 \right]} - \frac{(\cos \theta - \cos x \sin \theta) P_\theta}{mL \left[(1 + \cos^2 x) - (\cos \theta - \cos x \sin \theta)^2 \right]}. \end{aligned}$$

Así mismo, si reemplazamos (19) en obtenemos (20)

$$\begin{aligned}
 \dot{\theta} &= \frac{P_\theta}{mL^2} - \frac{(\cos\theta - \cos x \sin\theta)}{L} \left[\frac{P_x}{m(1 + \cos^2 x)} - \frac{L\dot{\theta}(\cos\theta - \cos x \sin\theta)}{(1 + \cos^2 x)} \right], \\
 \dot{\theta} \left[1 - \frac{(\cos\theta - \cos x \sin\theta)^2}{(1 + \cos^2 x)} \right] &= \frac{P_\theta}{mL^2} - \frac{(\cos\theta - \cos x \sin\theta) P_x}{mL(1 + \cos^2 x)}, \\
 \dot{\theta} &= \frac{P_\theta}{mL^2 \left[1 - \frac{(\cos\theta - \cos x \sin\theta)^2}{(1 + \cos^2 x)} \right]} - \frac{(\cos\theta - \cos x \sin\theta) P_x}{mL(1 + \cos^2 x) \left[1 - \frac{(\cos\theta - \cos x \sin\theta)^2}{(1 + \cos^2 x)} \right]}, \\
 \dot{\theta} &= \frac{(1 + \cos^2 x) P_\theta}{mL^2 \left[(1 + \cos^2 x) - (\cos\theta - \cos x \sin\theta)^2 \right]} - \frac{(\cos\theta - \cos x \sin\theta) P_x}{mL \left[(1 + \cos^2 x) - (\cos\theta - \cos x \sin\theta)^2 \right]}.
 \end{aligned}$$

Es claro ver que si definimos a las funciones f , g , m y n como

$$f(x, \theta) = \frac{1}{m \left[(1 + \cos^2 x) - (\cos\theta - \cos x \sin\theta)^2 \right]} \quad (21)$$

$$g(x, \theta) = -\frac{(\cos\theta - \cos x \sin\theta)}{mL \left[(1 + \cos^2 x) - (\cos\theta - \cos x \sin\theta)^2 \right]}. \quad (22)$$

$$n(x, \theta) = \frac{(1 + \cos^2 x)}{mL^2 \left[(1 + \cos^2 x) - (\cos\theta - \cos x \sin\theta)^2 \right]} \quad (23)$$

y

$$m(x, \theta) = -\frac{(\cos\theta - \cos x \sin\theta)}{mL \left[(1 + \cos^2 x) - (\cos\theta - \cos x \sin\theta)^2 \right]}. \quad (24)$$

podremos definir las velocidades en términos de los momentos generalizados como

$$\dot{x} = f(x, \theta)P_x + g(x, \theta)P_\theta. \quad (25)$$

$$\dot{\theta} = m(x, \theta)P_x + n(x, \theta)P_\theta. \quad (26)$$

De esta manera, al introducir estos resultados en H , dado a los exponentes cuadráticos de \dot{x} y los productos de $\dot{x}\dot{\theta}$ obtenemos

$$H = F(x, \theta)P_\theta^2 + G(x, \theta)P_x^2 + M(x, \theta)P_\theta P_x + U(x, \theta) \quad (27)$$

4.2. Ecuaciones de Hamilton

Ahora podemos obtener nuestras ecuaciones de Hamilton, estas se obtienen a partir de la relación entre las derivadas temporales de las coordenadas generalizadas y los momentos generalizados de la forma

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial P_i}, \quad (28)$$

así como de la relación entre la derivada temporal de los momentos generalizados con respecto a las coordenadas de la forma

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (29)$$

Por lo anterior podemos decir que de este sistema ahora podemos sacar cuatro ecuaciones diferenciales, lo cual resulta ser el doble de ecuaciones que las obtenidas al resolver el sistema por las ecuaciones de Lagrange, sin embargo, nos brinda una ventaja enorme a pesar de duplicar el número de ecuaciones, y es que estas nuevas ecuaciones son ahora de primer grado. Es decir, hemos bajado el grado de las ecuaciones con el sacrificio de duplicar su cantidad.

Estas ecuaciones quedarían entonces de la forma

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial P_x} = 2G(x, \theta)P_x + M(x, \theta)P_\theta, \quad (30)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial P_\theta} = 2F(x, \theta)P_\theta + M(x, \theta)P_x, \quad (31)$$

$$\dot{P}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\left[\frac{\partial F(x, \theta)}{\partial x}P_\theta^2 + \frac{\partial G(x, \theta)}{\partial x}P_x^2 + \frac{\partial M(x, \theta)}{\partial x}P_\theta P_x + \frac{\partial U}{\partial x}\right], \quad (32)$$

$$\dot{P}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -\left[\frac{\partial F(x, \theta)}{\partial \theta}P_\theta^2 + \frac{\partial G(x, \theta)}{\partial \theta}P_x^2 + \frac{\partial M(x, \theta)}{\partial \theta}P_\theta P_x + \frac{\partial U}{\partial \theta}\right]. \quad (33)$$

5. Solución numérica de las ecuaciones de movimiento.

Para poder simular el movimiento de la masa de huevos se optó por el desarrollo numérico mediante el Método de Runge-Kutta. Para esto, primero se estipularon ciertas condiciones que permitieron un desarrollo más simplificado del problema.

5.1. La velocidad en x es constante

Se asume la velocidad de la coordenada x como una constante de forma que a medida que avanza la bicicleta, el punto en el manubrio donde se sujeta la bolsa se mueve con una velocidad constante en dirección de \hat{X} , es así como se define $\dot{x} = \dot{x}_0 = c$, por lo que

$$x = ct; \quad \dot{x} = c; \quad \ddot{x} = 0, \quad (34)$$

5.2. Desarrollo numérico por el método de Runge-Kutta

Manipulando algebraicamente las ecuaciones (12) y (16), y teniendo en cuenta lo anterior tenemos que

$$g \sin \theta - L \ddot{\theta} = c^2 \cos(ct) \sin(ct) - g \cos(ct) + L \ddot{\theta} (\cos \theta - \cos(ct) \sin \theta) - L \dot{\theta}^2 (\sin \theta + \cos x \cos \theta), \quad (35)$$

esto nos permite definir ecuación diferencial de la forma

$$\ddot{\theta} = \frac{g \sin \theta - c^2 \cos(ct) \sin(ct) + g \cos(ct) + L \dot{\theta}^2 (\sin \theta + \cos x \cos \theta)}{L [1 + (\cos \theta - \cos(ct) \sin \theta)]}, \quad (36)$$

lo cual nos permite establecer dos ecuaciones de la forma

$$F_1(t, y, Y) = Y, \quad (37)$$

$$F_2(t, y, Y) = \frac{g \sin y - c^2 \cos(ct) \sin(ct) + g \cos(ct) + LY^2 (\sin y + \cos x \cos y)}{L [1 + (\cos y - \cos(ct) \sin y)]}, \quad (38)$$

en donde

$$\begin{aligned} y &= \theta, \\ Y &= \dot{\theta}, \\ \dot{Y} &= \ddot{\theta}, \end{aligned}$$

cuyos parámetros iniciales son $y_0 = \theta(t_0)$ y $Y_0 = \dot{\theta}(t_0)$, de esta manera se pueden sacar los factores K_{1ji} , K_{2ji} , y_{i+1} y Y_{i+1}

$$\begin{aligned}
 K_{11i} &= hF_1(t_i, y_i, Y_i), \\
 K_{21i} &= hF_2(t_i, y_i, Y_i), \\
 K_{12i} &= hF_1\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_{11i}}{2}, Y_i + \frac{K_{21i}}{2}\right), \\
 K_{22i} &= hF_2\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_{11i}}{2}, Y_i + \frac{K_{21i}}{2}\right), \\
 K_{13i} &= hF_1\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_{12i}}{2}, Y_i + \frac{K_{22i}}{2}\right), \\
 K_{23i} &= hF_2\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_{12i}}{2}, Y_i + \frac{K_{22i}}{2}\right), \\
 K_{14i} &= hF_1(t_i + h, y_i + K_{13i}, Y_i + K_{23i}), \\
 K_{24i} &= hF_2(t_i + h, y_i + K_{13i}, Y_i + K_{23i}), \\
 y_{i+1} &= y_i + \frac{K_{11i} + 2K_{12i} + 2K_{13i} + K_{14i}}{6}, [3] \\
 Y_{i+1} &= Y_i + \frac{K_{21i} + 2K_{22i} + 2K_{23i} + K_{24i}}{6}.
 \end{aligned}$$

Ahora solo es necesario establecer los valores para t_0 , t_f , y h la cual viene siendo la fracción de cada intervalo de tiempo. con esto calculamos $N = \frac{t_f - t_0}{h}$ el cual nos dará el número de iteraciones en las que debemos repetir nuestras operaciones para obtener todas las $\theta_i = y_i$.

5.3. Desarrollo numérico y simulación con Python

Aplicando el método anterior en Python se generó el siguiente código.

```

def F1(t,y,Y):
    return Y
def F2(t,y,Y):
    f2= (g*np.sin(y)-c**2*np.cos(c*t)*np.sin(c*t) + g*np.cos(c*t) + ...
    ... L*Y**2*(np.sin(y)+np.cos(c*t)*np.cos(y)) ) / (L*(1+(np.cos(y)-np.cos(c*t)*np.sin(y))))
    return f2 #f2

def rungeKuta4(f1,f2,a,b,y0,yp0,h):
    N=int((b-a)/h)
    t=np.arange(a, b+h, h, dtype=float)
    t[0]=a
    y=np.zeros(N+1)
    y[0]=y0
    Y=np.zeros(N+1)

```

```
Y[0]=yp0
for i in range(0,N):
    k1=h*f1(t[i],y[i],Y[i])
    k01=h*f2(t[i],y[i],Y[i])
    k2=h*f1(t[i]+(h/2),y[i]+(k1/2),Y[i]+(k01/2))
    k02=h*f2(t[i]+(h/2),y[i]+(k1/2),Y[i]+(k01/2))
    k3=h*f1(t[i]+(h/2),y[i]+(k2/2),Y[i]+(k02/2))
    k03=h*f2(t[i]+(h/2),y[i]+(k2/2),Y[i]+(k02/2))
    k4=h*f1(t[i]+h,y[i]+k3,Y[i]+k03)
    k04=h*f2(t[i]+h,y[i]+k3,Y[i]+k03)
    y[i+1]=y[i]+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6
    Y[i+1]=Y[i]+(k01+2*k02+2*k03+k04)/6
return t, y, Y
t,A,W = rungeKuta4(F1,F2,ti,tf,A0,Ap0,h) #A: el ngulo; W: la velocidad Angular
x = c*t + L*np.sin(A) #x[] un vector con las coordenadas en x
y = L*np.cos(A)+np.sin(c*t) #y[] un vector con las coordenadas en y
```

Esto nos permitió generar dos arreglos para el tiempo y las coordenada X y Y .

Con la solución numérica obtenida se pudo generar una gráfica de la trayectoria de los huevos en el plano X,Y con los siguientes parámetros:

```
c=20 #velocidad en 'x'
g=9.81 #Aceleracin de gravedad
m=1 #Masa de los huevos
L=1 #Longitud del pndulo
h=0.01 #El paso del tiempo
ti=0 #tiempo inicial
tf=0.5 #tiempo final
A0=-np.pi-4 #Valor inicial del ngulo (-4 radianes a partir del punto ms bajo)
Ap0=0 #Valor inicial de la velocidad angular
```

La línea punteada negra es la trayectoria del manubrio de la bicicleta y la línea roja es la trayectoria de los huevos.

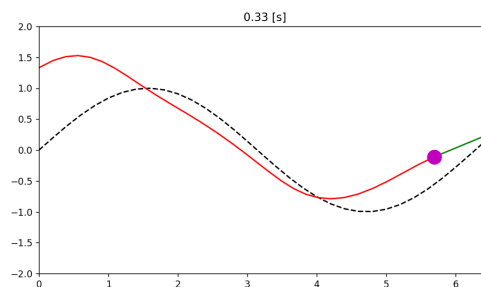


Figura 4: simulación de trayectoria

Se preparó una interfase en línea donde el lector puede modificar los parámetros y obtener distintas trayectorias en el siguiente sitio

<https://fernandobriceno.github.io/LagrangianAndHamiltonianFormulation/Huevos/web/DocenaHuevos.html>. También puede acceder al repositorio para visualizar la simulación en movimiento y conocer los códigos requeridos para esta simulación en <https://github.com/FernandoBriceno/LagrangianAndHamiltonianFormulation>.

5.4. Limitaciones del método numérico de Runge-Kutta para este sistema

Dado que el método utilizado para el desarrollo numérico requiere una función F_2 como la planteada en (38), es fácil observar que existe un conjunto de valores de t y θ para los cuales $F_2 \rightarrow \infty$. Para entender más a detalle este conjunto de valores se ha graficado una función $z = z(\theta, t)$ de forma que

$$z(\theta, t) = 1 + \cos(\theta) - \cos(ct)\sin(\theta), \quad (39)$$

De esta forma puede verse que para todos los valores de t existe un rango bastante limitado de θ en el que z es distinto de cero, por ejemplo, hemos hecho dos gráficas para $c = 2$ y para $c = 20$ como se puede observar a continuación

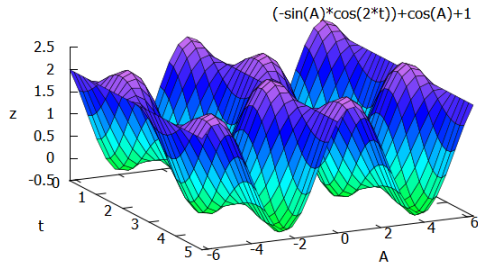


Figura 5: $z = z(\theta, t)$ para $c = 2$

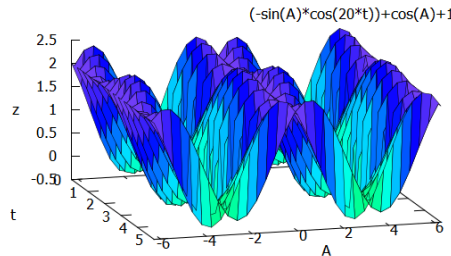


Figura 6: $z = z(\theta, t)$ para $c = 20$

Una vista superior de estas gráficas nos permite conocer cómo al aumentar la velocidad en x (c) los valores máximos y mínimos de la función se comportan de forma tal que el rango en el que el método numérico funciona.

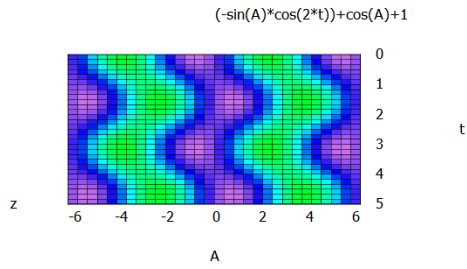


Figura 7: $z = z(\theta, t)$ para $c = 2$ vista superior

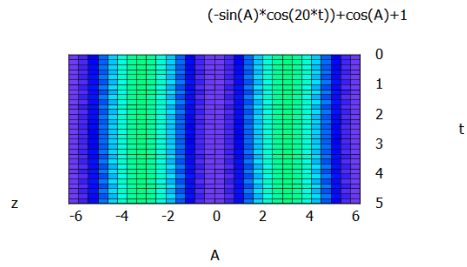


Figura 8: $z = z(\theta, t)$ para $c = 20$ vista superior

Realicemos un análisis más detallado de los valores iniciales de θ que podríamos escoger para los cuáles podríamos encontrar más puntos de trayectoria antes de que falle el método. Observemos la siguiente gráfica.

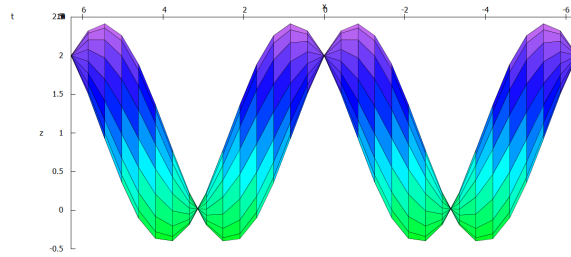


Figura 9: Estudio de z para hallar θ_0 óptimos

Establecemos como hipótesis que los θ_0 con valores donde $z = z(\theta, t)$ es grande permitirán graficar más puntos que aquellos θ_0 donde $z = z(\theta, t)$ sea cercano a cero. Para esto realizaremos una gráfica para 5 valores distintos de θ_0 , estos serán

A0=-3	#Amarillo
A01=-4.2	#Ciang
A02=-5	#Azul
A03=-5.5	#Verde
A04=-6.2	#Rojo

Efectivamente podemos observar que los valores de θ_0 que hacen mayor a $z = z(\theta, t)$, permiten una mejor gráfica, sin embargo se puede observar que $z(\theta_04, t_0) < z(\theta_03, t_0)$ y aún así mostró una mejor gráfica; esto parece sugerir que en realidad no es donde z sea mayor sino aquellos puntos que están más alejados de donde $z = 0$. En efecto, si comienzo con θ_04 este podrá recorrer el rango que θ_03 antes de llegar a un ángulo crítico, pero a demás tendrá un recorrido adicional igual a la

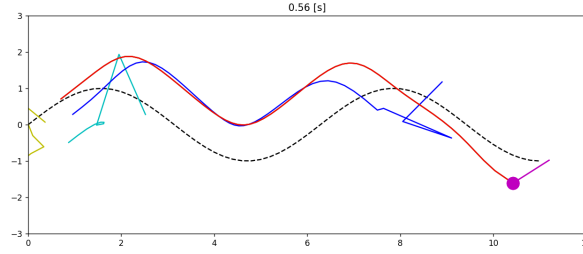


Figura 10: simulación de distintas trayectorias para distintos ángulos iniciales.

diferencia entre θ_{03} y θ_{04} .

5.5. Análisis de las energías del sistema y puntos de retorno

Dado que la única fuerza que actúa sobre el sistema es conservativa, y que el potencial no depende de las velocidades podemos establecer que la energía total del sistema se conserva. de forma que

$$\begin{aligned}
 E &= T + U, \\
 E &= \frac{1}{2}m \left[\dot{x}^2 (1 + \cos^2 x) + L^2 \dot{\theta}^2 + 2L\dot{x}\dot{\theta} (\cos\theta - \cos x \sin\theta) \right] + U(x, \theta), \\
 E - U(x, \theta) &= \frac{1}{2}m \left[\dot{x}^2 (1 + \cos^2 x) + L^2 \dot{\theta}^2 + 2L\dot{x}\dot{\theta} (\cos\theta - \cos x \sin\theta) \right].
 \end{aligned}$$

Dado que la energía cinética es siempre positiva, siempre se va a cumplir que

$$E - U(x, \theta) \geq 0. \quad (40)$$

Por lo que nunca la energía total del sistema puede ser menor que la energía Potencial, a lo mucho pueden ser iguales, pero nunca menor.

$$E \geq U(x, \theta). \quad (41)$$

Para los casos donde la energía total es igual a la energía potencial $E = U(x, \theta)$, se tiene que

$$0 = \frac{1}{2}m \left[\dot{x}^2 (1 + \cos^2 x) + L^2 \dot{\theta}^2 + 2L\dot{x}\dot{\theta} (\cos\theta - \cos x \sin\theta) \right]. \quad (42)$$

Se puede evidenciar que condición para que esto se cumpla es que tanto \dot{x} como $\dot{\theta}$ sean iguales a cero. Los puntos donde esto se cumple se le conocen como **puntos de retorno** [4].

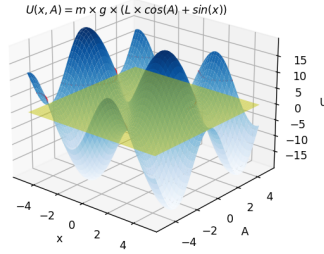


Figura 11: simulación de distintas trayectorias para distintos ángulos iniciales.

Veamos un ejemplo particular para nuestro sistema. Para el caso en el que la energía total tenga un valor de $E = 5$, la energía potencial solo podrá tomar valores por debajo del plano $U(x, \theta) = 5$

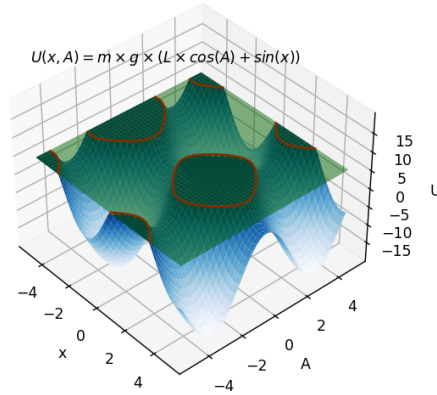


Figura 12: Gráfica del potencial limitado por $E = 5$

Si observamos la gráfica desde una perspectiva superior, podemos ver la proyección sobre el plano $x\theta$ de todos los puntos de retorno. Las curvas de color rojo representan todos estos puntos de retorno, de modo que las coordenadas (x, θ) en el plano no podrán tener valores al interior de las curvas, solo tendrán un sentido al exterior de las mismas.

En nuestro sistema, como hemos establecido la condición de que $\dot{x} = c$, implica que la energía total siempre será mayor que la energía potencial, por lo que no hay puntos de retorno para la coordenada x .

$$E > U(x, \theta). \quad (43)$$

Esto implica que aunque haya puntos donde $\dot{\theta} = 0$, estos no pueden considerarse puntos de

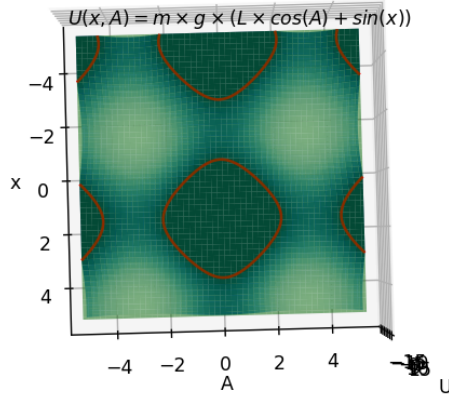


Figura 13: Curvas compuestas por los puntos de retorno (rojo)

retorno, por lo que nuestro sistema, planteado con $\dot{x} = c$ representa un sistema con movimiento infinito. En el caso en el que $\dot{\theta}$ pudiera tomar cualquier valor, podríamos establecer una energía total del sistema que nos permita confinar el movimiento de la partícula en el área formada por las coordenadas (x, θ) por fuera de los contornos de los puntos de retorno. Aunque en principio el sistema pueda moverse por todos los valores de x y θ , tendría algunas restricciones establecidas por el interior de las curvas formadas por los puntos de retorno.

5.6. ¿Batidos o fritos?

Inicialmente esperaba poder estudiar la resonancia del sistema, pero, dado que $\dot{x} = c$ y que $E > U(x, \theta)$, no es posible establecer un período de oscilación del péndulo, su movimiento será esencialmente caótico, por lo que no será posible determinar valores específicos para los cuales la velocidad haga coincidir los movimientos verticales del manubrio, de forma que aumenten la energía cinética del sistema en el momento más oportuno. Otro limitante para esto es que al ser la energía total una constante, la información que nos ofrece $\dot{x} = c$ es el valor máximo que puede adquirir T . Convendremos entonces que los huevos se agitan bien cuando la energía cinética es alta, posiblemente puedan generarse pequeños momentos de acople; quizás podría analizarse estos pequeños intervalos para determinados ángulos iniciales en los que la energía cinética permanece alta durante "largos intervalos temporales, pero parece que el análisis es bastante complejo y extenso para el tiempo que se nos permite dedicar a este análisis. Sin más, propongo esto último como ejercicio para el lector.

6. Conclusiones.

- El formalismo lagrangiano nos permite abordar un problema clásico de una forma más simplificada, cuando se presentan fuerzas de ligadura que la forma de abordarlos por Newton.
- El formalismo hamiltoniano es útil cuando existen coordenadas cíclicas, de lo contrario resulta más complicado que el lagrangiano y hay que acudir de regreso a él.
- Fue posible determinar la trayectoria de una docena de huevos abordando el formalismo lagrangiano y solucionando la ecuación diferencial resultante mediante el método de Runge-Kuta, para intervalos pequeños de tiempo.
- El método de Runge-Kuta, presenta ciertas dificultades al momento de abordar problemas donde se presenten singularidades en parte de su desarrollo. Se debe estudiar entonces las condiciones optimas para utilizarlo en cada caso.
- No fue posible determinar una relación entre la velocidad en x y la energía cinética que permita establecer las condiciones para que los huevos se batan bien, es decir, que en periodos grandes de tiempo su energía cinética sea la máxima posible.

Referencias

- [1] V. I. Arnol 'd. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, 2ed. Thomson Learning, USA, 1989.
- [2] Herbert Goldstein. *Mecánica clásica*, 3ed. Aguilar, S. A., España, 1963.
- [3] M. R. Cullen D. G. Zill. *Matemáticas avanzadas para ingeniería, Vol. 1: Ecuaciones diferenciales*, 3ed. McGraw-Hill/Interamericana Editores, S.A., México, 2006.
- [4] Landau Lifshitz. *Curso de física teórica, Vol. 1, Mecánica*, 2ed. Editorial Reverté, S. A., España, 1994.