0.1. Homotopía y caminos

Para facilitar la siguiente discusión, utilizaremos la notación y nomenclatura de MC. Veremos que los tipos se comportan como espacios topológicos, y, por lo tanto, también se pueden interpretar como ∞-grupoides. Para esto, recordaremos unas nociones previas.

Dado un espacio topológico X, y dos puntos $x, y \in X$, podemos generar el conjunto de caminos de x a y. Sin embargo, este conjunto es muy fino, generalmente no es importante el camino exacto tomado p, solo su clase de homotopía $[p]$.

Esto es, la clase de equivalencia bajo la relación $p \sim q$ si y solo si existe una homotopía entre p y q rel ∂I; es decir, que existe una función continua $H : I \times I \to X$ tal que

$$H(0,t) = x, \quad H(1,t) = y, \quad H(s,0) = p(s), \quad H(s,1) = q(s),$$

donde $I = [0,1]$.

De esta manera, el conjunto relevante es:

$$\mathrm{Hom}_X(x,y) = \{[p] \mid p : I \to X,\ p(0) = x,\ p(1) = y\}$$

Como es conocido, podemos generar una operación de concatenación y de camino inverso que respeta las clases de homotopía.

$$\begin{gathered} \cdot : \mathrm{Hom}_X(x,y) \times \mathrm{Hom}_X(y,z) \to \mathrm{Hom}_X(x,z) \\ (-)^{-1} : \mathrm{Hom}_X(x,y) \to \mathrm{Hom}_X(y,x) \end{gathered}$$

donde la concatenación es asociativa, tiene como neutro al camino constante refl_x, y es preservada adecuadamente por funciones continuas. Así, estas operaciones le dan una estructura de grupo a $\mathrm{Hom}_X(x,x)$, el cual es llamado el grupo fundamental de X, y es denotado por $\pi_1(X,x)$.

Por otro lado, el espacio X puede ser entendido también como una categoría que tiene como objetos los puntos en X, y como morfismos caminos de x, y (de ahí nuestra notación $\mathrm{Hom}_X(x,y)$). La concatenación de caminos es entonces la composición de morfismos, y el camino constante refl_x es el morfismo identidad. Como categoría, X tiene una propiedad adicional, cada morfismo es invertible.

Definición 0.1.1. Un **grupoide** es una categoría en donde todo morfismo es invertible.

Hemos descrito el grupoide fundamental $\Pi_1(X)$ de X, y observamos que el grupo fundamental usual $\pi_1(X,x)$ aparece como la subcategoría completa generada por $\{x\}$.

Pero este este solo es el nivel 1 de una jerarquía infinita de homotopías y de estructuras algebraicas. Una homotopía H usual entre dos caminos p y q puede ser entendida también como una superficie tal que sus bordes coinciden exactamente con p y q; es decir, H es un 2-camino entre 1-caminos. Un 3-camino sería una homotopía entre dos homotopías H y G que mantiene los bordes del 2-camino que generan.

Generalizando, dados dos n-caminos P y Q con el mismo borde, definimos por recursión que un $(n+1)$-camino entre P y Q, es un mapa $H : I^{n+1} \to X$ tal que $\partial \mathrm{Im}(H) = P \cup Q$.

Se puede verificar que las clases de homotopía de estos n-caminos poseen una operación de concatenación y una operación que genera caminos inversos, y además satisfacen algunas reglas adicionales, llamadas **reglas de coherencia**, las cuales los hacen n-grupoides para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Esto muestra que los espacios topológicos tienen estructura de ∞-grupoides[1].

Denotamos la estructura de n-grupoide de X por $\Pi_n(X)$. Y se tiene que, como en el caso del grupo fundamental, $\pi_n(X, x)$ es la subcategoría completa de $\Pi_n(X)$ generada por x.

Regresando a DTT, podemos entender una prueba p de que $x = y$ como un camino p de x a y. Las reglas del tipo de identidad nos permiten comparar si dos pruebas (caminos) $p, q : x =_X y$ son iguales entre sí; es decir si existe un $r : p =_{(x =_A y)} q$. Este es justamente un 2-camino, y de manera análoga podemos iterar infinitamente y observar una estructura de ∞-grupoides [3] [1].

En las siguientes secciones, verificaremos explícitamente la estructura de 1-grupoide de los tipos y caracterizaremos (hasta homotopía) los caminos en algunos de los tipos introducidos la sección previa.

Veremos que varias definiciones y resultados pueden interpretarse de tres formas distintas, de una forma lógica, de una forma homotópica, y de una forma categórica. Esto se debe a la correspondencia Curry-Howard, al hecho de que los tipos corresponden a tipos de homotopía de espacios topológicos y al hecho de que también son ∞-grupoides, respectivamente.

0.2. Los tipos son 1-grupoides

Desagregamos todas las condiciones que se deben cumplir para que los tipos sean 1-grupoides como descrito en la sección previa:

(I) Existe la composición de morfismos $\cdot$.
(II) Para cada objeto x, existe un morfismo identidad c_x tal que $c_x \cdot f = f \cdot c_y = f$ para todo $f : x \to y$.
(III) La composición de morfismos es asociativa.
(IV) Existe un morfismo f^{-1} inverso para cada morfismo $f : x \to y$, tal que $f^{-1} \cdot f = c_y$ y $f \cdot f^{-1} = c_x$.

Las primeras tres condiciones vienen de los axiomas de una categoría, mientras que el último es la condición de un grupoide. Procederemos a demostrar estas condiciones en orden.

[1] Dado que las reglas de coherencia solo se cumplen hasta homotopía, la estructura algebraica generada es de ∞-grupoides débiles; cada vez que hablemos de grupoides nos referiremos a grupoides débiles.

Lema 0.2.1. *Para todo tipo A y todo $x, y, z : A$ existe la función de concatenación de caminos*

$$- \cdot - : (x = y) \to (y = z) \to (x = z),$$

tal que $\mathsf{refl}_x \cdot \mathsf{refl}_x \equiv \mathsf{refl}_x$.

Nótese que visto lógicamente, este lema enuncia la propiedad de transitividad de la igualdad. Probaremos este lema dos veces; la primera, usando el principio de inducción del tipo de identidades, y la segunda, usando búsqueda de patrones, a fin de comparar estos dos métodos.

Demostración por inducción. Definiremos una función $f : \prod_{(x,y:A)}(x = y) \to \prod_{(z:A)}(y = z) \to (x = z)$ por inducción. Sea $D : \prod_{(x,y:A)}(x = y) \to \mathcal{U}$ la familia de tipos definida por

$$D(x, y, p) :\equiv \prod_{(z:A)} \prod_{(q:y=z)} (x = z).$$

Nótese que $D(x, x, \mathsf{refl}_x) \equiv \prod_{(z:A)} \prod_{(q:x=z)}(x = z)$. Para obtener un elemento de este tipo, volveremos a aplicar inducción, sea $E : \prod_{(x,z:A)} \prod_{(q:x=z)} \to \mathcal{U}$ la familia de tipos definida por $E(x, z, q) :\equiv (x = z)$. Podemos definir

$$e(x) :\equiv \mathsf{refl}_x : E(x, x, \mathsf{refl}_x)$$

Por lo tanto, obtenemos una función

$$d : \prod_{(x,z:A)} \prod_{(q:x=z)} E(x, z, q)$$
$$d :\equiv \mathsf{ind}_{=_A}(E, e)$$

Con esta función, podemos definir

$$f : \prod_{(x,y:A)} \prod_{(p:x=y)} D(x, y, p)$$
$$f :\equiv \mathsf{ind}_{=_A}(D, d)$$

Finalmente, podemos definir

$$p \cdot q :\equiv f(x, y, p, z, q)$$

Además, se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathsf{refl}_x \cdot \mathsf{refl}_x &\equiv f(x, x, \mathsf{refl}_x, x, \mathsf{refl}_x) \\
&\equiv \mathsf{ind}_{=_A}(D, d, x, x, \mathsf{refl}_x, x, \mathsf{refl}_x) \\
&\equiv d(x, x, \mathsf{refl}_x) \\
&\equiv \mathsf{ind}_{=_A}(E, e, x, x, \mathsf{refl}_x) \\
&\equiv e(x) \\
&\equiv \mathsf{refl}_x
\end{aligned}$$

□

Demostración por búsqueda de patrones. Buscamos una función

$$- \cdot - : (x = y) \to (y = z) \to (x = z)$$

Podemos asumir que y es x y que el primer camino es refl_x, por lo que reducimos la tarea a encontrar una función $\mathsf{refl}_x \cdot - : (x = z) \to (x = z)$.

Nuevamente, podemos asumir que z es x y el segundo camino también es refl_x, con lo que solo es necesario encontrar un elemento de $(x = x)$. Tomando $\mathsf{refl}_x : x = x$, podemos definir $\cdot$ por $\mathsf{refl}_x \cdot \mathsf{refl}_x :\equiv \mathsf{refl}_x$. □

Es claro que la segunda prueba, aunque omite ciertos detalles, es mucho más legible que la primera, mientras que conserva suficiente información para ser entendible. En efecto, los asistentes de prueba pueden inferir correctamente todos los datos omitidos. Por estos motivos, este es el estilo que tomaremos en las siguientes demostraciones.

Lema 0.2.2. *Para todo tipo A, $x, y : A$ y $p : x = y$, se tiene que* $\mathsf{refl}_x \cdot p = p$ *y* $p \cdot \mathsf{refl}_y = p$.

Demostración. Podemos asumir que p es refl_x, por lo que ambas ecuaciones se reducen a $\mathsf{refl}_x \cdot \mathsf{refl}_x = \mathsf{refl}_x$, lo cual se da por definición de $\cdot$. □

Este lema muestra que refl_x toma el rol del camino constante, y genera dos 2-caminos $\mathsf{refl\text{-}left} : \mathsf{refl}_x \cdot p =_{(x =_A y)} p$ y $\mathsf{refl\text{-}right} : p \cdot \mathsf{refl}_y =_{(x =_A y)} p$. No nombraremos a todos los n-caminos que definiremos explícitamente.

Lema 0.2.3. *Para todo tipo A, $x, y, z, w : A$, $p : x = y$, $q : y = z$ y $r : z = w$ se tiene $(p \cdot q) \cdot r = p \cdot (q \cdot r)$.*

Demostración. A través de repetidas aplicaciones de búsqueda de patrones, podemos asumir que p, q y r son refl_x, por lo que la ecuación se reduce a $(\mathsf{refl}_x \cdot \mathsf{refl}_x) \cdot \mathsf{refl}_x = \mathsf{refl}_x \cdot (\mathsf{refl}_x \cdot \mathsf{refl}_x)$, lo cual se da por definición de $\cdot$. □

Dado este último lema, no utilizaremos paréntesis cuando haya una concatenación de varios caminos, como es común en álgebra.

Lema 0.2.4. *Para todo tipo A, $x, y : A$, y $p : x = y$, existe un $p^{-1} : y = x$, y este satisface que $p^{-1} \cdot p = \mathsf{refl}_y$ y $p \cdot p^{-1} = \mathsf{refl}_x$.*

Demostración. Asumiendo que p es refl_x, ponemos $\mathsf{refl}_x^{-1} :\equiv \mathsf{refl}_x$. En este caso, las dos ecuaciones se reducen a $\mathsf{refl}_x \cdot \mathsf{refl}_x = \mathsf{refl}_x$, lo cual se da por definición de $\cdot$. □

Nótese que el camino inverso representa el hecho lógico de que las igualdades son simétricas. Juntando estos lemas, obtenemos:

Teorema 0.2.5. *Los tipos son 1-grupoides, siendo los elementos los objetos, y los caminos $p : x = y$ los morfismos.*

Otros dos resultados clásicos y útiles, que se derivan de las reglas de 1-grupoides, son:

Lema 0.2.6. *Para todo tipo A, $x, y, z : A$, y $p : x = y$, $q : y = z$, se tiene que $(p^{-1})^{-1} = p$ y $(p \cdot q)^{-1} = q^{-1} \cdot p^{-1}$.*

Demostración. Asumiendo que p y q son refl_x, ambos lados de ambas expresiones se reducen a refl_x. □

Resaltamos que, a diferencia de en topología, la operación de concatenación y de inversas ha sido definida uniformemente para todos los caminos. Así, inmediatamente todos que los resultados previos, y los de las próximas secciones, aplican para cualquier n-camino.

0.3. Funciones y functores

En topología algebraica, es sabido que las funciones continuas entre espacios topológicos inducen un homomorfismo de grupos entre los grupos fundamentales. Pero más es cierto, las funciones continuas inducen un homomorfismo de ∞-grupoides.

Este es el caso también para las funciones no dependientes en DTT; verificaremos este hecho para la estructura de 1-grupoides. Comenzamos con las funciones no dependientes.

Lema 0.3.1. *Sea $f : A \to B$ una función, para todo $x, y : A$ existe una función*

$$\mathsf{ap}_f : (x =_A y) \to (f(x) =_B f(y)).$$

tal que para todo $x : A$, se tiene que $\mathsf{ap}_f(\mathsf{refl}_x) \equiv \mathsf{refl}_{f(x)}$.

Demostración. Asumiendo que el camino del dominio es refl_x, necesitamos encontrar un camino $f(x) =_B f(x)$, pero tenemos que $\mathsf{refl}_{f(x)}$ es un elemento de este tipo. □

Notación 0.3.2. En algunos casos, escribiremos $f(p)$ o fp en vez de $\mathsf{ap}_f(p)$, como es común en teoría de categorías.

Lógicamente, ap_f refleja el hecho obvio de que la igualdad es preservada bajo aplicación de funciones. Topológicamente, vemos que las funciones llevan caminos a caminos, lo que nos indica cierta noción de continuidad de todas las funciones. En efecto, las funciones entre tipos corresponden a funciones continuas entre tipos de homotopías de espacios topológicos. Categóricamente, como sugerido por la Notación 0.3.2, las funciones corresponden a functores entre grupoides.

Lema 0.3.3. *Sea $f : A \to B$ una función, y $p : x =_A y$ y $q : y =_A z$ dos caminos en A, entonces*

$$\mathsf{ap}_f(p \cdot q) = \mathsf{ap}_f(p) \cdot \mathsf{ap}_f(q)$$

Demostración. Asumiendo que p y q son refl_x, ambos lados se reducen a $\mathsf{refl}_{f(x)}$, por definición de $\cdot$ y ap_f. □

Con el Lema 0.3.1 en mano, podemos aplicar un razonamiento algebraico sobre los caminos:

Lema 0.3.4. *Sea $f : A \to B$ una función, y $p : x =_A y$ un camino, entonces se tiene que $(f(p))^{-1} = f(p^{-1})$*

Demostración. El Lema 0.2.4 nos da un camino $q_1 : p^{-1} \cdot p = \mathsf{refl}_y$. Entonces, definiendo

$$\begin{gathered} g : (y = y) \to (f(y) = f(y)) \\ g(r) :\equiv \mathsf{ap}_f(r), \end{gathered}$$

obtenemos un camino

$$g(q_1) : f(p^{-1} \cdot p) = \mathsf{refl}_{f(y)}$$

Por otro lado, el Lema 0.3.3 nos da un camino $q_2 : f(p^{-1} \cdot p) = f(p^{-1}) \cdot f(p)$.

Juntando estos resultados, obtenemos que

$$q_2^{-1} \cdot g(q_1) : f(p^{-1}) \cdot f(p) = \mathsf{refl}_{f(y)}$$

Definiendo

$$\begin{gathered} h_1 : (f(y) = f(y)) \to (f(y) = f(x)) \\ h_1(r) :\equiv r \cdot (f(p))^{-1}, \end{gathered}$$

obtenemos

$$h_1(q_2^{-1} \cdot g(q_1)) : \Big(f(p^{-1}) \cdot f(p)\Big) \cdot (f(p))^{-1} = \mathsf{refl}_{f(y)} \cdot (f(p))^{-1}$$

Por el Lema 0.2.2, tenemos caminos

$$\begin{gathered} q_3 : f(p^{-1}) \cdot \mathsf{refl}_{f(x)} = f(p^{-1}) \\ q_4 : \mathsf{refl}_{f(y)} \cdot (f(p))^{-1} = (f(p))^{-1} \end{gathered}$$

Por el Lema 0.2.4, tenemos el camino

$$q_5 : f(p) \cdot (f(p))^{-1} = \mathsf{refl}_{f(x)}$$

Poniendo

$$\begin{gathered} h_2 : (f(x) = f(x)) \to (f(y) = f(x)) \\ h_2(r) :\equiv f(p^{-1}) \cdot r, \end{gathered}$$

vemos que

$$h_2(q_5) : f(p^{-1}) \cdot \Big(f(p) \cdot (f(p))^{-1}\Big) = f(p^{-1}) \cdot \mathsf{refl}_{f(x)}$$

Por el Lema 0.2.3, existe un camino

$$q_6 : \Big(f(p^{-1}) \cdot f(p)\Big) \cdot (f(p))^{-1} = f(p^{-1}) \cdot \Big(f(p) \cdot (f(p))^{-1}\Big)$$

Juntando estos resultados previos, obtenemos:

$$\begin{aligned}
(f(p))^{-1} &= \mathsf{refl}_{f(y)} \cdot (f(p))^{-1} && \text{Por } q_4^{-1} \\
&= \left(f(p^{-1}) \cdot f(p)\right) \cdot (f(p))^{-1} && \text{Por } (h_1(q_2^{-1} \cdot g(q_1)))^{-1} \\
&= f(p^{-1}) \cdot \left(f(p) \cdot (f(p))^{-1}\right) && \text{Por } q_6 \\
&= f(p^{-1}) \cdot \mathsf{refl}_{f(x)} && \text{Por } h_2(q_5) \\
&= f(p^{-1}) && \text{Por } q_3
\end{aligned}$$

Nótese que esta cadena de igualdades corresponde en realidad a la siguiente concatenación de caminos:

$$(q_4)^{-1} \cdot (h_1(q_2^{-1} \cdot g(q_1)))^{-1} \cdot q_6 \cdot h_2(q_5) \cdot q_3 : (f(p))^{-1} = f(p^{-1})$$

□

Utilizaremos la práctica común de escribir la cadena de igualdades, dejando implícito el camino específico que se está usando, solo haciendo referencia al resultado previo del cual este se deriva, si es necesario.

Hemos construido un 2-camino específico en la demostración del lema anterior, pero nótese que este no es único. Pudimos, por ejemplo, utilizar inducción sobre p. Uno esperaría que estos dos 2-caminos sean iguales; es decir, que existe un 3-camino que los relaciona. Este es efectivamente el caso, como se puede ver por inducción, y es una de las consecuencias de las reglas de coherencia de un 2-grupoide.

No obstante, trabajar con las reglas de coherencia de n-caminos para $n \geq 2$ se vuelve rápidamente muy complicado. Veremos luego que en varios casos es posible reducir una pregunta sobre n-caminos, a una de 1-caminos, por lo que nuestro énfasis es en estos.

Otros resultados útiles e inmediatos son los siguientes:

Lema 0.3.5. *Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ funciones, y $p : x =_A y$ un camino, entonces se tiene:*

(I) $\mathsf{ap}_{(g \circ f)}(p) = (\mathsf{ap}_g \circ \mathsf{ap}_f)(p)$
(II) $\mathsf{ap}_{\mathsf{id}}(p) = p$
(III) Sean $q, r : y =_A z$, con $p \cdot q = p \cdot r$, entonces $q = r$
(IV) Sean $q : x =_A y$ y $r : y =_A z$, con $p \cdot r = q \cdot r$, entonces $p = q$

Demostración. Para (I) y (II), asumiendo que p es refl_x, ambos lados se reducen a refl_x. Para (III) y (IV), estos son consecuencia del Lema 0.2.2, cuando asumimos que p y r son refl_y, respectivamente. □

0.4. Funciones dependientes y fibraciones

Sea $f : \prod_{(x:A)} B(x)$ una función dependiente, dado un camino $p : x = y$, se podría esperar que se tenga también un camino en $f(x) = f(y)$. Sin embargo, inspección de este último término muestra que este no tiene sentido: $f(x)$ está en $B(x)$, mientras que $f(y)$ está en $B(y)$, y caminos entre tipos diferentes no está definido. Lo que necesitamos es una forma de relacionar estos dos tipos, la función transporte nos brinda esta posibilidad.

Lema 0.4.1 (Transporte). *Sea B una familia de tipos sobre A, y sea $p : x =_A y$ un camino, entonces existe una función*

$$\mathsf{tr}^B(p, -) : B(x) \to B(y)$$

Demostración. Podemos asumir que p es refl_x, en cuyo caso necesitamos una función $B(x) \to B(x)$, tomamos a la función identidad $\mathsf{id}_{B(x)}$ para esto. □

Entendiendo B como una propiedad que un elemento puede tener, el lema previo nos dice que, si x y y son iguales, entonces $B(x)$ implica $B(y)$. Aplicando el transporte en el camino inverso, obtenemos que $B(x)$ y $B(y)$ son lógicamente equivalentes. Así, podemos "transportar" propiedades B que tenga un elemento x a un elemento y que sea igual a este.

Categóricamente, vemos que tenemos otra categoría cuyos objetos son de la forma $B(x)$ para algún $x : A$, y los morfismos son funciones $f : B(x) \to B(y)$. La función transporte entonces lleva morfismos de A (visto como una categoría) a morfismos en esta nueva categoría presentada. Como uno esperaría, el transporte es un functor (contravariante):

Lema 0.4.2. *Sea B una familia de tipos sobre A, y sean $p : x =_A y$ y $q : y =_A z$ caminos, entonces*

$$\mathsf{tr}^B(p \cdot q, -) = \mathsf{tr}^B(q, -) \circ \mathsf{tr}^B(p, -)$$

Demostración. Podemos asumir que p y q son refl_x, en cuyo caso la ecuación se reduce a $\mathsf{id}_B = \mathsf{id}_B \circ \mathsf{id}_B$, y podemos tomar $\mathsf{refl}_{\mathsf{id}_B}$. □

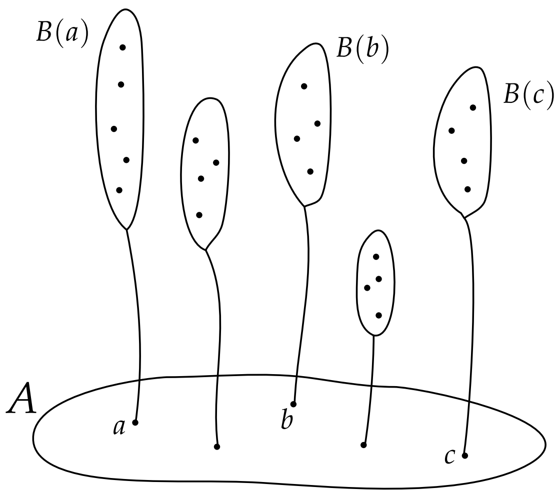
Aunque el punto de vista categórico nos brinda mucha información, es aún más útil considere la perspectiva homotópica la cual presentamos a continuación.

Dada una familia de tipos $B : A \to \mathcal{U}$, la idea es considerar el tipo $B(x)$ como la fibra sobre x, como se ve en la Figura 1. En efecto, en la primera proyección $\mathsf{pr}_1 : \sum_{(x:A)} B(x) \to A$, aquellos elementos que son mapeados a a son justamente de la forma (a, y), por lo que podemos identificarlos con los elementos $y : B(x)$. Es más, se puede demostrar que este concepto de fibra es equivalente al concepto usual de preimagen (ver Proposición 0.5.10).

Con esta imagen en mente, dado un camino $p : x = y$, vemos que la función transporte induce una función entre las fibras $B(a)$ y $B(y)$, tal que la concatenación de caminos respeta la composición de las funciones inducidas. Así, un camino puede ser "levantado" a una función entre fibras.

Otra noción aún más importante de levantamiento, es la de levantamiento de caminos. Como ya mencionamos, no puede haber un camino entre elementos de $u : B(x)$ y $v : B(y)$ pues son tipos distintos, pero sí puede haber un camino entre los elementos $(x, u), (y, v) : \sum_{(x:A)} B(x)$.

Figura 1: Tipos de familias como fibras



Definición 0.4.3. Sea $B : A \to \mathcal{U}$ una familia de tipos. Diremos que un camino $q : (x, u) =_{\sum_{(x:A)} B(x)} (y, v)$ está sobre $p : x = y$, si $\mathsf{pr}_1(q) = p$. Utilizaremos la notación $q : u =^B_p v$ para estos casos.

Con esta definición, podemos enunciar la siguiente propiedad.

Lema 0.4.4. *(Propiedad de levantamiento de caminos) Sea $B : A \to \mathcal{U}$ una familia de tipos y sea $u : B(x)$ para algún $x : A$. Entonces, para todo $p : x = y$ tenemos un camino*

$$\mathsf{lift}(u, p) : (x, u) = (y, \mathsf{tr}^B(p, u))$$

tal que $\mathsf{lift}(u, p)$ está sobre p.

Demostración. Podemos asumir que p es refl_x, en cuyo caso necesitamos una igualdad $(x, u) = (y, \mathsf{tr}^B(\mathsf{refl}_x, u))$, pero el lado derecho de esta igualdad es (x, u), por lo que podemos tomar $\mathsf{refl}_{(x,u)}$.

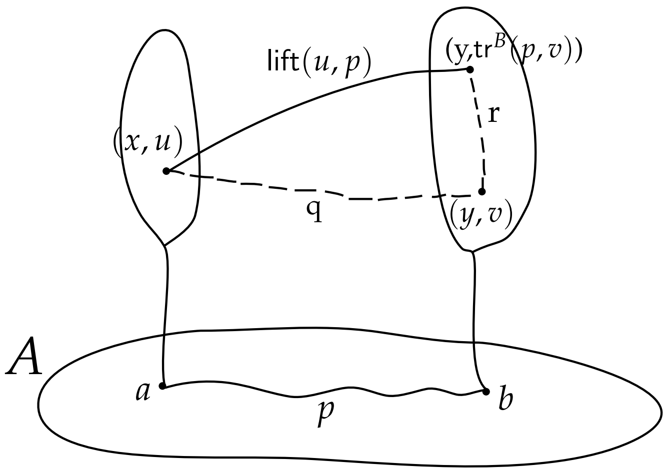
Para ver que $\mathsf{pr}_1(\mathsf{lift}(u, p)) = p$, supongamos nuevamente que p es refl_x, entonces nos queda probar $\mathsf{ap}_{\mathsf{pr}_1}\left(\mathsf{refl}_{(x,u)}\right) = \mathsf{refl}_x$. Pero esto es cierto por definición de ap. □

Aunque esta noción de caminos es muy natural y permite expresar y probar varias propiedades, no es muy fácil manejar. Notando que existe un camino canónico $\mathsf{lift}(u, p) : (x, u) = (y, \mathsf{tr}^B(p, u))$, entonces vemos que todo camino $q : (x, u) = (y, v)$ sobre $p : x = y$ factoriza por $\mathsf{lift}(x, u)$ a un camino $r : (y, \mathsf{tr}^B(p, u)) = (y, v)$ sobre el camino constante en y, ver Figura 2. Análogamente, todo camino $r : (y, \mathsf{tr}^B(p, u)) = (y, v)$ sobre refl_y puede ser expandido a un camino $q : (x, u) = (y, v)$ sobre p, pre-concatenando con $\mathsf{lift}(x, u)$.

Mostraremos luego que esta correspondencia es en realidad una equivalencia (Proposición 0.5.11); es decir, tenemos que

$$\left((x, u) =_{\sum_{(x:A)} B(x)} (y, v)\right) \simeq \left(\mathsf{tr}^B(p, u) =_{B(y)} v\right)$$

Figura 2: Caminos sobre caminos



El tipo de la derecha es mucho más manejable por lo que será el que utilizaremos para las aplicaciones.

Recordemos que una **fibración** $p : E \to X$ es un mapa que puede levantar cualquier homotopía en X hacia una en E. Con el lema previo, vemos entonces la relevancia del tipo $\sum_{(x:A)} B(x)$ en la perspectiva homotópica. El hecho de que haya una proyección $\mathsf{pr}_1 : \sum_{(x:A)} B(x) \to A$, y que además tenemos esta propiedad de levantamiento de caminos, nos da indicios de que pr_1 es una fibración, con espacio total $\sum_{(x:A)} B(x)$. Este es efectivamente el caso, y es demostrado en la Proposición **??**.

Dado esto, podemos entender a las funciones dependientes $f : \prod_{(x:A)} B(x)$ como **secciones**, pues toman un elemento de cada fibra $B(x)$. Como se esperaría, dada una sección $f : \prod_{(x:A)} B(x)$, es posible levantar caminos $p : x = y$ a caminos $p' : f(x) =^B_p f(y)$.

Lema 0.4.5. *Sea $f : \prod_{(x:A)} B(x)$ una función dependiente, entonces existe una función*

$$\mathsf{apd}_f : \prod_{(p:x=y)} \left(\mathsf{tr}^B(p, f(x)) =_{B(y)} f(y)\right)$$

Demostración. Podemos asumir que p es refl_x, en cuyo caso necesitamos una igualdad $\mathsf{tr}^B(\mathsf{refl}_x, f(x)) =_{B(x)} f(x)$, pero el lado izquierdo de esta igualdad es $f(x)$, por lo que podemos tomar $\mathsf{refl}_{f(x)}$. □

Finalmente, retomando la perspectiva categórica, vemos que el transporte tiene una propiedad asociatividad con las funciones (vistas como functores):

Lema 0.4.6. *Sea $B : A \to \mathcal{U}$ una familia de tipos sobre el tipo A, y sea $f : A \to A$ una función. Para todos $x, y : A$ y $p : x = y$ se tiene*

$$\mathsf{tr}^B(f(p), -) = \mathsf{tr}^{B\circ f}(p, -)$$

Lema 0.4.7. *Sea $B : A \to \mathcal{U}$ una familia de tipos sobre el tipo A. Para todos $x, y : A$ y $p : x = y$ se tiene*

$$\mathsf{tr}^{\mathsf{id}}(B(p), -) = \mathsf{tr}^{B}(p, -)$$

Demostración. Por inducción en p, ambos lados de ambas ecuaciones se reducen a la función identidad. □

0.5. Equivalencias homotópicas

En MC, dos funciones son homotópicas cuando existe una deformación continua de sus imágenes. Dicho de otra forma, existe una función continua que une uniformemente las dos imágenes de cada punto en el dominio a través de un camino. Podemos generalizar esto para funciones dependientes:

Definición 0.5.1. Sean $f, g : \prod_{(x:A)} P(x)$ dos secciones. Una **homotopía** entre estas es una funcioń H en el tipo

$$(f \sim g) :\equiv \prod_{x:A} (f(x) = g(x))$$

Diremos que f y g son homotópicas cuando tengamos $f \sim g$.

Es claro que la propiedad de ser homotópicas es una relación de equivalencia, pues esto sigue del hecho de que las igualdades son una relación de equivalencia.

Desde la perspectiva lógica, una homotopía dice que dos funciones son iguales en cada punto del dominio. Categóricamente, una homotopía es una transformación natural.

Lema 0.5.2. *Sea $H : f \sim g$ una homotopía entre las funciones $f, g : A \to B$, y sea $p : x =_A y$. Entonces tenemos*

$$H(x) \cdot g(p) = f(p) \cdot H(y).$$

Diagramáticamente,

$$\begin{tikzcd} f(x) \arrow[r, "f(p)"] \arrow[d, "H(x)"'] & f(y) \arrow[d, "H(y)"] \\ g(x) \arrow[r, "g(p)"'] & g(y) \end{tikzcd}$$

Demostración. Por inducción, podemos suponer que p es refl_x. Entonces, es suficiente demostrar

$$H(x) \cdot \mathsf{refl}_{g(x)} = \mathsf{refl}_{f(x)} \cdot H(x).$$

Pero tenemos que ambos lados son iguales a $H(x)$. □

En topología clásica, cuando para una función $f : A \to B$ existe otra función $g : B \to A$ tal que $f \circ g \sim \mathsf{id}_B$ y $g \circ f \sim \mathsf{id}_A$, decimos que A y B tienen el mismo tipo de homotopía, y f es llamada una equivalencia homotópica. En DTT, esto correspondería a afirmar que el siguiente tipo está habitado.

$$\mathsf{qinv}(f) :\equiv \sum_{g:B\to A} \big((f \circ g \sim \mathsf{id}_B) \times (g \circ f \sim \mathsf{id}_A)\big)$$

Categóricamente, y recordando que las homotopías son transformaciones naturales, este tipo indica la existencia de una equivalencia de categorías entre A y B. Sin embargo, este tipo no corresponde adecuadamente al concepto equivalencias homotópicas, ni al de equivalencias categóricas, sino al de quasi-inversas.

Definición 0.5.3. Sea $f : A \to B$ una función, una **quasi-inversa** de f es un triple (g, α, β) perteneciente al tipo $\mathsf{qinv}(f)$. Abusaremos la notación, y también llamaremos quasi-inversa a la función g del triple.

Ejemplo 0.5.4. La función identidad $\mathsf{id}_A : A \to A$ es su propia quasi-inversa, pues las dos homotopías requeridas se dan por reflexividad.

Ejemplo 0.5.5. Para todo $p : x =_A y$ y $P : A \to \mathcal{U}$, la función

$$\mathsf{tr}^P(p, -) : P(x) \to P(y)$$

tiene como quasi-inversa $\mathsf{tr}^P(p^{-1}, -)$, por el Lema 0.4.2.

La razón por la cual el tipo anterior no corresponde a equivalencias homotópicas se debe a que dos elementos $g, h : \mathsf{qinv}(f)$ podrían no ser iguales, lo cual traería problemas adelante. Así, lo que necesitamos es una noción lógicamente equivalente a $\mathsf{qinv}(f)$, pero que todos los elementos en este tipo sean iguales entre sí. Existen múltiples nociones que satisfacen este requisito, utilizaremos la de mapas bi-invertibles, al ser la más sencilla.

Definición 0.5.6. Decimos que una función $f : A \to B$ es **bi-invertible** si el siguiente tipo está habitado:

$$\mathsf{isequiv}(f) \;:\equiv\; \Big(\sum_{g:B\to A} (f \circ g \sim \mathsf{id}_B)\Big) \times \Big(\sum_{h:B\to A} (h \circ f \sim \mathsf{id}_A)\Big).$$

Proposición 0.5.7. *Para todo $f : A \to B$, los tipos $\mathsf{qinv}(f)$ y $\mathsf{isequiv}(f)$ son lógicamente equivalentes.*

Demostración. Es fácil dar una función $\mathsf{qinv}(f) \to \mathsf{isequiv}(f)$, pues dado un triple $(g, \alpha, \beta) : \mathsf{qinv}(f)$, tenemos que $(g, \alpha, g, \beta) : \mathsf{isequiv}(f)$. Por otro lado, dado (g, α, h, β), definamos γ como la homotopía

$$g \overset{\beta}{\sim} h \circ f \circ g \overset{\alpha}{\sim} h,$$

es decir, $\gamma(x) :\equiv \beta(g(x))^{-1} \cdot h(\alpha(x))$. Ahora definamos $\beta' : g \circ f \sim \mathsf{id}_A$ por $\beta'(x) :\equiv \gamma(f(x)) \cdot \beta(x)$. Entonces $(g, \alpha, \beta') : \mathsf{qinv}(f)$. $\square$

La otra condición, que todos los elementos de $\mathsf{isequiv}(f)$ sean iguales entre sí es un resultado técnico, el cual se asumiremos como dado (ver [4, Sección 4.3]).

Con el concepto de bi-invertibilidad en mano, podemos definir qué es una equivalencia entre dos tipos.

Definición 0.5.8. Una **equivalencia** entre dos tipos A y B es una función $f : A \to B$ junto con un $p : \mathsf{isequiv}(f)$; es decir, una f junto con una prueba de que esta es bi-invertible. Definiremos el tipo de equivalencias entre A y B por

$$(A \simeq B) :\equiv \sum_{f:A\to B} \mathsf{isequiv}(f)$$

Abusaremos el lenguaje, y diremos que f es una equivalencia cuando existe un $p : \mathsf{isequiv}(f)$. Recíprocamente, si tenemos $g : (A \simeq B)$, escribiremos $g(x)$, en vez de $\mathsf{pr}_1(g(x))$.

La noción de equivalencia previamente descrita es la de una equivalencia entre la estructura de tipos. Puesto que los tipos tienen una estructura natural de tipos de homotopía de espacios topológicos, y tambíen la de ∞-grupoides, estas dos estructuras se preservan automáticamente. Nótese que esta implica inmediatamente una equivalencia lógica entre los dos tipos.

Asimismo, como la noción de bi-invertibilidad es lógicamente equivalente a la de tener una quasi-inversa, podemos usar este segundo concepto a la hora de realizar pruebas, como en el siguiente lema.

Lema 0.5.9. *La equivalencia entre tipos es una relación de equivalencia.*

Demostración. Hemos visto que la función identidad es su propia quasi-inversa, por lo que $\simeq$ es reflexiva.

Sea $f : A \to B$ una equivalencia, esta entonces debe tener una quasi-inversa $f^{-1} : B \to A$. Pero vemos que f es una quasi-inversa de f^{-1}, por lo que f^{-1} es una equivalencia $B \to A$.

Finalmente, dados $f : A \simeq B$ y $g : B \simeq C$ con quasi-inversas f^{-1} y g^{-1}; tenemos que para todo $x : A$

$$f^{-1}g^{-1}gfx = f^{-1}fx = x$$

mientras que para todo $y : C$

$$gff^{-1}g^{-1}y = gg^{-1}y = y$$

Por lo tanto, $f^{-1} \circ g^{-1}$ es una quasi-inversa de $g \circ f$, y concluimos $A \simeq C$. □

Veamos las demostraciones de algunas equivalencias que habíamos mencionado previamente.

Proposición 0.5.10. *Sea $B : A \to \mathcal{U}$ una familia de tipos. Entonces, para todo $x : A$ tenemos*

$$B(x) \simeq \sum_{z:\sum_{(a:A)} B(a)} \mathsf{pr}_1(z) = x$$

Demostración. Fijamos un x y definimos

$$f : B(x) \to \sum_{z:\sum_{(a:A)} B(a)} \mathsf{pr}_1(z) = x$$
$$f(y) :\equiv ((x,y), \mathsf{refl}_x)$$

En sentido contrario, definimos

$$g : \sum_{z:\sum_{(a:A)} B(a)} \mathsf{pr}_1(z) = x \to B(x)$$
$$g((x,y), \mathsf{refl}_x) :\equiv y$$

Por cómo fueron definidas, es inmediato que son quasi-inversas. □

Proposición 0.5.11. *Sea* $B : A \to \mathcal{U}$ *una familia de tipos. Entonces, para todo* $x, y : A$*,* $p : x = y$*,* $u : B(x)$ *y* $v : B(y)$ *tenemos*

$$\left(\sum_{q:(x,u)=(y,v)} \mathsf{pr}_1(q) = p \right) \simeq \left(\mathsf{tr}^B(p,u) =_{B(x)} v \right)$$

Demostración. Primero definimos

$$f : \prod_{p:x=y} \left(\sum_{q:(x,u)=(y,v)} \mathsf{pr}_1(q) = p \right) \to \left(\mathsf{tr}^B(p,u) =_{B(x)} v \right)$$
$$f(p, \mathsf{refl}_{(x,u)}, \mathsf{refl}_p) = \mathsf{refl}_u$$

En sentido contrario, definimos

$$g : \prod_{p:x=y} \left(\mathsf{tr}^B(p,u) =_{B(x)} v \right) \to \left(\sum_{q:(x,u)=(y,v)} \mathsf{pr}_1(q) = p \right)$$
$$g(p, \mathsf{refl}_{\mathsf{tr}^B(p,u)}) = (\mathsf{lift}(u,p), q)$$

donde $q : \mathsf{pr}_1(\mathsf{lift}(u,p)) = p$ es el camino dado por el Lema 0.4.4. Ahora, realizando inducción en p, vemos que $g(p) \circ f(p) \sim \mathsf{id}$ y $f(p) \circ g(p) \sim \mathsf{id}$, por lo que son quasi-inversas. □

Con estos conceptos ya definidos, procedemos a caracterizar los caminos en algunos de los tipos introducidos previamente.

0.6. Caminos entre pares dependientes

Dado un camino $p : (a,b) =_{A \times B} (a',b')$, podemos proyectar el camino sobre A y sobre B obteniendo dos caminos, $\mathsf{pr}_1(p) : a =_A a'$ y $\mathsf{pr}_2(p) : b =_B b'$. Intuitivamente, el camino p está únicamente determinado (hasta homotopía) por estos dos caminos.

Para el caso de pares dependientes, se esperaría un resultado similar. Es decir, que caminos $p : (a,b) =_{\sum_{(x:A)} B(x)} (a',b')$ están determinados por un par de caminos $\mathsf{pr}_1(p) : a =_A a'$ y $b =^B_p b'$. Este es efectivamente el caso.

Teorema 0.6.1. *Sea $P : A \to \mathcal{U}$ una familia de tipos sobre A, y sean $w, w' : \sum_{(x:A)} P(x)$. Entonces existe una equivalencia*

$$(w = w') \simeq \sum_{(p:\mathsf{pr}_1(w)=\mathsf{pr}_1(w'))} \mathsf{pr}_2(w) =^P_p \mathsf{pr}_2(w').$$

Demostración. Podemos definir una función

$$f : \prod_{w,w':\sum_{(x:A)} P(x)} (w = w') \to \sum_{(p:\mathsf{pr}_1(w)=\mathsf{pr}_1(w'))} \mathsf{tr}^P(p, \mathsf{pr}_2(w)) = \mathsf{pr}_2(w')$$

por inducción de caminos:

$$f(w, w, \mathsf{refl}_w) :\equiv (\mathsf{refl}_{\mathsf{pr}_1(w)}, \mathsf{refl}_{\mathsf{pr}_2(w)}).$$

En la dirección contraria, podemos definir

$$g : \prod_{w,w':\sum_{(x:A)} P(x)} \left(\sum_{p:\mathsf{pr}_1(w)=\mathsf{pr}_1(w')} \mathsf{tr}^P(p, \mathsf{pr}_2(w)) = \mathsf{pr}_2(w') \right) \to (w = w')$$

realizando inducción en w y en w', por lo que es suficiente mostrar

$$\left(\sum_{p:w_1=w_1'} \mathsf{tr}^P(p, w_2) = w_2' \right) \to ((w_1, w_2) = (w_1', w_2')).$$

Realizando inducción nuevamente en ambos caminos del dominio, vemos que podemos tomar $\mathsf{refl}_{(w_1,w_2)}$ como el caso base.

Ahora, solo falta demostrar que $f \circ g \sim \mathsf{id}$ y $g \circ f \sim \mathsf{id}$, pero esto es inmediato por las definiciones, luego de aplicar inducción. □

La función g definida arriba es particularmente útil, y la llamaremos $\mathsf{pair}^=$, usualmente usándola omitiendo los puntos base w, w'.

Como un corolario, tenemos que los pares dependientes están caracterizados por sus dos coordenadas.

Corolario 0.6.2. *Para $z : \sum_{(x:A)} P(x)$, tenemos $z = (\mathsf{pr}_1(z), \mathsf{pr}_2(z))$.*

Demostración. Tenemos $\mathsf{refl}_{\mathsf{pr}_1(z)} : \mathsf{pr}_1(z) = \mathsf{pr}_1(\mathsf{pr}_1(z), \mathsf{pr}_2(z))$, por lo que por el teorema anterior es suficiente mostrar un camino

$$\mathsf{tr}^P((\mathsf{refl}_{\mathsf{pr}_1(z)}), \mathsf{pr}_2(z)) = \mathsf{pr}_2(\mathsf{pr}_1(z), \mathsf{pr}_2(z))$$

Pero ambos lados son iguales a $\mathsf{pr}_2(z)$. □

Este mismo argumento aplica para pares no dependientes, por lo que obtenemos el resultado mencionado al inicio de la sección.

Corolario 0.6.3. *Sean A y B dos tipos, y sean $w, w' : A \times B$. Entonces existe una equivalencia*

$$(w = w') \simeq \left(\mathsf{pr}_1(w) = \mathsf{pr}_1(w')\right) \times \left(\mathsf{pr}_2(w) = \mathsf{pr}_2(w')\right).$$

0.7. Caminos entre funciones dependientes

En MC, cuando dos funciones $f, g : A \to B$ son iguales en cada punto del dominio, estas son iguales. Entonces, uno esperaría tener

$$(f = g) \;\simeq\; \Big(\prod_{x:A} (f(x) =_{B(x)} g(x))\Big)$$

Por un lado, podemos definir

$$\mathsf{happly} : (f = g) \to \prod_{x:A} (f(x) =_{B(x)} g(x))$$
$$\mathsf{happly}(p) :\equiv \lambda(x : A).\, \mathsf{ap}_{\lambda h.\, h(x)} p$$

Para definir la quasi-inversa, se puede usar univalencia y una serie de argumentos sofisticados (ver [4, Sección 4.9]). En el Teorema **??**, veremos una demostración de esto para el caso de funciones no dependientes. En todo caso, es común introducir el siguiente (redundante) axioma:

Axioma 0.7.1 (Extensionalidad de funciones)**.** *La función* happly *es una equivalencia.*

Este axioma entonces, postula la existencia de un elemento φ en el tipo $\mathsf{isequiv}(\mathsf{happly})$. Todos los axiomas en DTT son de esta forma; es decir, indican la existencia de un elemento en algún tipo. En particular, el axioma previo implica la existencia de una quasi-inversa de happly

$$\mathsf{funext} : \Big(\prod_{x:A} (f(x) = g(x))\Big) \to (f = g),$$

junto con homotopías $\mathsf{happly} \circ \mathsf{funext} \sim \mathsf{id}$ y $\mathsf{funext} \circ \mathsf{happly} \sim \mathsf{id}$.

Topológicamente, estamos identificando las funciones homotópicas entre sí. Esto sugeriría que podemos identificar espacios homotópicamente equivalentes, lo cual realizamos en la siguiente sección.

Con la función funext en mano, podemos mostrar que el tipo $\mathbf{0}$ es un objeto inicial en Type.

Proposición 0.7.2. *Para todo tipo* C *y función* $f : \mathbf{0} \to C$*, tenemos que* $f = \mathsf{rec}_{\mathbf{0}}(C)$.

Demostración. Para todo $x : \mathbf{0}$ podemos inmediatamente concluir que $f(x) = \mathsf{rec}_{\mathbf{0}}(C)(x)$, por lo que $f = \mathsf{rec}_{\mathbf{0}}(C)$. ☐

Veamos con interactúan las el transporte en familias de tipos de funciones.

Lema 0.7.3. *Sea* X *un tipo y* $A, B : X \to \mathcal{U}$ *dos familias de tipos. Para todos* $x_1, x_2 : X$, $p : x_1 = x_2$, $f : A(x_1) \to B(x_1)$ *y* $y : A(x_2)$ *se tiene que*

$$\mathsf{tr}^{\lambda(x:X).\, A(x) \to B(x)}(p, f) = \mathsf{tr}^{B}(p, f(\mathsf{tr}^{A}(p^{-1}, x)))$$

Demostración. Por inducción, podemos asumir que p es refl_{x_1}, en cuyo caso ambos lados de la igualdad se reducen a x. $\square$

Lema 0.7.4. *Sea X un tipo, y sean $A : X \to \mathcal{U}$ y $B : \prod_{(x:X)} A(x) \to \mathcal{U}$ dos familias de tipos. Para todos $x_1, x_2 : X$, $p : x_1 = x_2$, dos funciones $f : \prod_{(y:A(x_1))} B(x_1, y)$ y $g : \prod_{(y:A(x_2))} B(x_2, y)$.*

Si para todos $a_1 : A(x_1)$ y $a_2 : A(x_2)$ y $q : a_1 =^A_p a_2$ se tiene que

$$f(a_1) =^{\lambda(w:\sum_{(x:A)} A(x)).\, B(\mathsf{pr}_1(w),\mathsf{pr}_2(w))}_{\mathsf{pair}^=(p,q)} g(a_2)$$

entonces

$$f =^{\lambda(x:X).\, \prod_{(a:A(x))} B(x,a)}_{p} g$$

Demostración. Por extensionalidad de funciones, es suficiente mostrar que las funciones son iguales cuando son aplicadas en un elemento arbitrario $y : A(x_2)$. Por inducción, podemos asumir que p es refl_{x_1}, en cuyo caso, aplicando la hipótesis para $q = \mathsf{refl}_y$, obtenemos que $f(y) = g(y)$. $\square$

0.8. Caminos entre tipos

Una de las prácticas comunes de MC es identificar objetos isomórficos, pues estos comparten todas las propiedades relevantes del área de estudio. Así, hablamos *del* grupo cíclico de orden 3, no de *un* grupo cíclico de orden 3.

Por un lado, vemos que tipos identificables son equivalentes entre sí:

Lema 0.8.1. *Para tipos $A, B : \mathcal{U}$, existe una función*

$$\mathsf{idtoeqv} : (A =_{\mathcal{U}} B) \to (A \simeq B)$$

Demostración. Primero notamos que la función $\mathsf{id}_{\mathcal{U}}$ es una familia de tipos que tiene como base el universo entero. Ahora, afirmamos que para todo $p : A = B$, $\mathsf{tr}^{\mathsf{id}_{\mathcal{U}}}(p, -) : A \to B$ es una equivalencia. Aplicando inducción sobre p esta función se reduce a id_A, y sabemos que la identidad es una equivalencia, con lo que concluimos el resultado. $\square$

Sin embargo, no es posible, en general, generar una igualdad entre dos tipos a partir de una equivalencia entre ellos. Para esto, es necesario otro axioma.

Axioma 0.8.2 (Univalencia)**.** *Para todos $A, B : \mathcal{U}$,* $\mathsf{idtoeqv}$ *es una equivalencia.*

Tenemos entonces $(A = B) \simeq (A \simeq B)$, así como una quasi-inversa de $\mathsf{idtoeqv}$:

$$\mathsf{ua} : (X \simeq Y) \to (X = Y).$$

Este es el primer axioma que nos separa de Dependent Type Theory. DTT usualmente asume también el axioma K, que indica que todos los caminos con mismos extremos son homotópicos entre sí. Aunque esto no tiene sentido topológicamente, sí es intuitivo desde una perspectiva lógica, pues un camino es una prueba de que $x = y$. Así, K postula que todas las pruebas son iguales entre sí.

A fin de no colapsar la estructura que hay entre los caminos, no hemos introducido este axioma; adicionalmente, si se asume este junto con el axioma de Univalencia, la teoría se vuelve inconsistente [4, Lema 6.4.1.].

Entonces, hemos departido definitivamente de la teoría original, y comenzamos propiamente una nueva teoría llamada *Homotopy Type Theory* (HoTT), la cual traducimos como Teoría Homotópica de Tipos. Si bien todos los resultados previos se cumplen en DTT, varios de estos se cumplen trivialmente, al ser todos los caminos iguales entre sí, asumiendo K.

En particular, el axioma de univalencia formaliza adecuadamente la práctica mencionada de identificar objetos isomórficos. Si A y B son tipos equivalentes, podemos generar un camino $p : A = B$; por lo que cualquier propiedad que tenga A, también la tiene B, pues puede ser transportada a lo largo de p.

0.9. Caminos entre naturales

A diferencia de los otros tipos, caracterizar a los caminos entre naturales requiere una técnica más sofisticada, la cual se llama el método **encode-decode**. Se llama así pues encodificamos el tipo $m = n$ en otro tipo más manejable, lo que nos facilita realizar pruebas respecto al tipo $m = n$. Esta técnica se puede utilizar para caracterizar el coproducto, un resultado que no necesitaremos, y también para calcular el grupo fundamental del círculo (ver Sección **??**).

Retornando a los naturales, encodificaremos caminos en los naturales por el tipo

$$\mathsf{code} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathcal{U}$$

el cual está definido por

$$\begin{aligned}
\mathsf{code}(0,0) &:\equiv \mathbf{1} \\
\mathsf{code}(\mathsf{succ}(m),0) &:\equiv \mathbf{0} \\
\mathsf{code}(0,\mathsf{succ}(n)) &:\equiv \mathbf{0} \\
\mathsf{code}(\mathsf{succ}(m),\mathsf{succ}(n)) &:\equiv \mathsf{code}(m,n).
\end{aligned}$$

Nótese que $\mathsf{code}(m,n)$ corresponde al algoritmo que resta 1 a m y a n hasta que al menos uno de los dos sea igual a 0.

Teorema 0.9.1. *Para todo* $m,n : \mathbb{N}$*, se tiene que* $(m = n) \simeq \mathsf{code}(m,n)$.

Demostración. Por un lado, para definir

$$\mathsf{encode} : \prod_{m,n:\mathbb{N}} (m = n) \to \mathsf{code}(m,n),$$

notamos que podemos definir una función $r : \prod_{(n:\mathbb{N})} \mathsf{code}(n,n)$ por inducción

$$\begin{aligned}
r(0) &:\equiv \star \\
r(\mathsf{succ}(n)) &:\equiv r(n)
\end{aligned}$$

De tal forma que podemos definir

$$\mathsf{encode}(m, n, p) :\equiv \mathsf{tr}^{\mathsf{code}(m,-)}(p, r(m))$$

En sentido contrario, podemos definir

$$\mathsf{decode} : \prod_{m,n:\mathbb{N}} \mathsf{code}(m, n) \to (m = n)$$

realizando inducción en ambos m y n:

$$\begin{aligned}
\mathsf{decode}(0, 0, c) &:\equiv \mathsf{refl}_0 \\
\mathsf{decode}(\mathsf{succ}(m), 0, c) &:\equiv \mathsf{ind}_{\mathbf{0}}(\mathsf{succ}(m) = 0, c) \\
\mathsf{decode}(0, \mathsf{succ}(n), c) &:\equiv \mathsf{ind}_{\mathbf{0}}(0 = \mathsf{succ}(n), c) \\
\mathsf{decode}(\mathsf{succ}(m), \mathsf{succ}(n), c) &:\equiv \mathsf{succ}(\mathsf{decode}(m, n))
\end{aligned}$$

Ahora, solo falta comprobar que estas funciones son quasi-inversas. Veamos primero que

$$\mathsf{decode}(m, n) \circ \mathsf{encode}(m, n) \sim \mathsf{id}.$$

Dado $p : m = n$, podemos realizar inducción y asumir que n es m; es decir, es suficiente mostrar

$$\mathsf{decode}(m, m, \mathsf{encode}(m, m, \mathsf{refl}_m)) = \mathsf{refl}_m.$$

Pero por definición, $\mathsf{encode}(n, n, \mathsf{refl}_n) \equiv r(n)$, así que solo es suficiente demostrar que $\mathsf{decode}(n, n, r(n)) = \mathsf{refl}_n$, realizamos esto por inducción. Para el caso base, vemos que $\mathsf{decode}(0, 0, r(0))$ es igual a refl_0 por definición; para el caso de un $\mathsf{succ}(n)$ necesitamos mostrar que

$$\mathsf{succ}(\mathsf{decode}(n, n, r(n))) = \mathsf{refl}_{\mathsf{succ}(n)}$$

Pero por la hipótesis de inducción, $\mathsf{decode}(n, n, r(n)) = \mathsf{refl}_n$, por lo que obtenemos el resultado deseado.

Solo falta demostrar la otra homotopía,

$$\mathsf{encode}(m, n) \circ \mathsf{decode}(m, n) \sim \mathsf{id}.$$

Dado $c : \mathsf{code}(m, n)$, procederemos por inducción en ambos m y n. Cuando ambos son 0, $\mathsf{code}(0, 0) \equiv \mathbf{1}$, por lo que podemos asumir que $c \equiv \star$, y ambos lados se reducen $\star$. Si uno es un sucesor y el otro no, $\mathsf{code}(m, n)$ es $\mathbf{0}$, por lo que podemos derivar cualquier resultado a partir de $c : \mathbf{0}$. Finalmente, si los dos son sucesores, tenemos

$$\begin{aligned}
&\mathsf{encode}(\mathsf{succ}(m), \mathsf{succ}(n), \mathsf{decode}(\mathsf{succ}(m), \mathsf{succ}(n), c)) \\
&\quad \equiv \mathsf{encode}(\mathsf{succ}(m), \mathsf{succ}(n), \mathsf{succ}(\mathsf{decode}(m, n, c))) && \text{(Def. de } \mathsf{decode}\text{)} \\
&\quad \equiv \mathsf{tr}^{\mathsf{code}(\mathsf{succ}(m),-)}(\mathsf{succ}(\mathsf{decode}(m, n, c)), r(\mathsf{succ}(m))) && \text{(Def. de } \mathsf{encode}\text{)} \\
&\quad = \mathsf{tr}^{\mathsf{code}(\mathsf{succ}(m),\mathsf{succ}(-))}(\mathsf{decode}(m, n, c), r(\mathsf{succ}(m))) && \text{(Lema 0.4.6)} \\
&\quad \equiv \mathsf{tr}^{\mathsf{code}(\mathsf{succ}(m),\mathsf{succ}(-))}(\mathsf{decode}(m, n, c), r((m))) && \text{(Def. de } r\text{)} \\
&\quad \equiv \mathsf{tr}^{\mathsf{code}(m,-)}(\mathsf{decode}(m, n, c), r(m)) && \text{(Def. de } \mathsf{code}\text{)} \\
&\quad \equiv \mathsf{encode}(m, n, \mathsf{decode}(m, n, c)) && \text{(Def. de } \mathsf{encode}\text{)} \\
&\quad = c && \text{(Hip. inductiva.)}
\end{aligned}$$

$\square$

Como una aplicación de esta caracterización, veamos que la función $\mathsf{succ} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es inyectiva.

Corolario 0.9.2. *Sean* $m, n : \mathbb{N}$ *tal que* $\mathsf{succ}(m) = \mathsf{succ}(n)$*, entonces,* $m = n$*.*

Demostración. Dado $p : \mathsf{succ}(m) = \mathsf{succ}(n)$, tenemos

$$\mathsf{encode}(\mathsf{succ}(m), \mathsf{succ}(n), p) : \mathsf{code}(\mathsf{succ}(m), \mathsf{succ}(n)) \equiv \mathsf{code}(m, n),$$

por lo que

$$\mathsf{decode}(m, n, \mathsf{encode}(\mathsf{succ}(m), \mathsf{succ}(n), p)) : m = n.$$

$\square$

Otra consecuencia es que la igualdad entre naturales es **decidible**; es decir, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 0.9.3. *Sean* $m, n : \mathbb{N}$*, entonces se tiene que* $(m = n) \vee \neg(m = n)$*.*

Demostración. En otras palabras, la proposición nos indica que tenemos un elemento del tipo

$$\prod_{m,n:\mathbb{N}} (m = n) + ((m = n) \to \mathbf{0}).$$

Lo generaremos por inducción en m y n. Cuando ambos son 0, podemos tomar $\mathsf{inl}(\mathsf{refl}_0)$. Si el primero es de la forma $\mathsf{succ}(m)$ mientras que el segundo es 0, si tuviésemos $p : \mathsf{succ}(m) = 0$ entonces aplicando encode obtenemos un elemento de $\neg(m = n)$. Análogamente cuando el primero es 0 y el segundo es $\mathsf{succ}(n)$.

Finalmente, cuando tenemos $\mathsf{succ}(m)$ y $\mathsf{succ}(n)$, la hipótesis de inducción nos dice que tenemos un elemento de $(m = n) + \neg(m = n)$. Por inducción en el coproducto, si tenemos $m = n$, podemos concluir $\mathsf{succ}(m) = \mathsf{succ}(n)$, mientras que si tenemos $\neg(m = n)$, podemos generar una contradicción cuando $\mathsf{succ}(m) = \mathsf{succ}(n)$, por el corolario previo. $\square$

0.10. Propiedades Universales

Con los conceptos ya introducidos, podemos ver que los tipos introducidos tienen las propiedades universales esperdadas.

Teorema 0.10.1. *El tipo* $A \times B$ *es el producto de* A *y* B *en la categoría* Type*.*

Demostración. Dados un tipo $C : \mathcal{U}$, y un par de morfismos $f : C \to A$ y $g : C \to B$, buscamos encontrar una única función $h : C \to A \times B$ tal que el diagrama conmute.

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "h"] \arrow[dr, "g"] & \\ A & A \times B \arrow[l, "\mathsf{pr}_1"] \arrow[r, "\mathsf{pr}_2"'] & B \end{tikzcd}$$

Podemos definir h por $h(c) :\equiv (f(c), g(c))$. Por otro lado, si hubiese otra función $h' : C \to A \times B$ que hace que el diagrama conmute, para obtener $h' = h$ basta mostrar que $h'(c) = h(c)$ para todo $c : C$, por extensionalidad de funciones.

Ahora, por Corolario 0.6.3, es suficiente mostrar que

$$\mathsf{pr}_1(h'(c)) = \mathsf{pr}_1(h(c)) \text{ y } \mathsf{pr}_2(h'(c)) = \mathsf{pr}_2(h(c)),$$

pero esto se da por definición de h y por la condición de que h' hace que el diagrama conmute. $\square$

Teorema 0.10.2. *El tipo $A + B$ es el coproducto de A y B en la categoría* Type.

Demostración. Dados un tipo $C : \mathcal{U}$, y un par de morfismos $f : A \to C$ y $g : B \to C$, buscamos encontrar una única función $h : A + B \to C$ tal que el diagrama conmute.

$$\begin{tikzcd} & C & \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "\mathsf{inl}"'] & A + B \arrow[u, dashed, "h"] & B \arrow[ul, "g"'] \arrow[l, "\mathsf{inr}"] \end{tikzcd}$$

Podemos definir h por $h(\mathsf{inl}(a)) :\equiv f(a)$ y $h(\mathsf{inr}(b)) :\equiv g(b)$. Por otro lado, si hubiese otra función $h' : A + B \to C$ que hace que el diagrama conmute, para obtener $h' = h$ basta mostrar que $h'(x) = h(x)$ para todo $x : A + B$, por extensionalidad de funciones.

Ahora, por inducción en $A + B$, basta que

$$h'(\mathsf{inl}(a)) = h(\mathsf{inl}(a)) \text{ y } h'(\mathsf{inr}(b)) = h(\mathsf{inr}(b)),$$

pero esto se da por definición de h y por la condición de que h' hace que el diagrama conmute. $\square$

El tipo de los naturales también satisface una propiedad universal; es decir, es el objeto inicial la siguiente categoría.

Definición 0.10.3. La categoría $\mathsf{Type}_{\mathbb{N}}$ tiene como objetos triples

$$(C, c, f) : \sum_{C:\mathcal{U}} C \times (C \to C),$$

y como morfismos $\alpha : (A, a, f) \to (B, b, g)$ funciones $h : A \to B$ tales que $h(a) = b$ y $h \circ f = g \circ h$. Diagramáticamente:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & A \arrow[d, "h"] \\ B \arrow[r, "g"'] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} a \arrow[d, mapsto, "h"] \\ b \end{tikzcd}$$

Teorema 0.10.4. *El triple* $(\mathbb{N}, 0, \mathsf{succ})$ *es inicial en la categoría* $\mathsf{Type}_{\mathbb{N}}$.

Demostración. Dado un triple (C, c, f) en $\mathsf{Type}_{\mathbb{N}}$ podemos definir una función $h : \mathbb{N} \to C$ por recursión; es decir, $h :\equiv \mathsf{rec}_{\mathbb{N}}(C, c, f)$. Por definición de h, se cumplen las dos propiedades requeridas:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{N} \arrow[r, "\mathsf{succ}"] \arrow[d, "h"'] & \mathbb{N} \arrow[d, "h"] \\
C \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
0 \arrow[d, mapsto, "h"] \\
c
\end{tikzcd}$$

Ahora, dado otro $h' : \mathbb{N} \to C$ tal que $h'(0) = c$ y $h' \circ \mathsf{succ} = f \circ h'$, mostraremos que $h' = h$. Por extensionalidad de funciones basta mostrar que $h'(n) = n$ para todo $n : \mathbb{N}$. Realizaremos esto por inducción en los naturales.

Para el caso base, tenemos

$$h'(0) = c \equiv h(0),$$

mientras que para el paso inductivo tenemos

$$\begin{aligned}
h'(\mathsf{succ}(n)) &= f(h'(n)) && \text{Por definición de } h' \\
&= f(h(n)) && \text{Por el supuesto inductivo} \\
&\equiv h(\mathsf{succ}(n)) && \text{Por definición de } h
\end{aligned}$$

□

La razón de que $\mathbb{N}$ sea inicial en esta categoría específica se debe a los **constructores** de $\mathbb{N}$; es decir, las formas en las que se pueden generar elementos de $\mathbb{N}$. Los naturales tienen dos constructores, el elemento 0 y la función $\mathsf{succ} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$; de ahí que sea inicial en la categoría que tiene como objetos aquellos con la misma estructura interna.

De este resultado se sigue que pudo haberse definido a los naturales como aquel tipo que está libremente generado por los dos siguientes constructores:

- un elemento $0 : \mathbb{N}$
- una función $\mathsf{succ} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Los tipos generados de esta manera se llaman **tipos inductivos** y veremos una generalización de estos en la Sección **??**.

0.11. Metateoría de HoTT

Puestos que hemos introducido el axioma de univalencia, los resultados previos descritos para la metateoría de DTT no necesariamente aplican en HoTT. Sin embargo, existen modelos de HoTT, como el desarrollado en [2].

A grandes rasgos, un modelo es una estructura matemática que satisface todas las reglas y axiomas de una teoría matemática. En el caso del modelo previo, este es un modelo simplicial; los objetos son representados por ciertas clases de conjuntos simpliciales, y las funciones son, a grosso modo, representadas por (clases de equivalencia) de funciones continuas.

Resaltamos dos consecuencias de esto. Primero, tenemos un análogo del Teorema **??**.

Teorema 0.11.1. *(Consistencia de HoTT) No es posible derivar una contradicción en HoTT, es decir* $\cdot \vdash x : \mathbf{0}$ *para algún* x*; asumiendo que la teoría usual de MC también es consistente.*

Por otro lado, este resultado nos garantiza que podemos pensar en los tipos como clases de homotopía de espacios topológicos, y, como ya habíamos sugerido, las funciones realmente son continuas.