En este capítulo mencionaremos algunas definiciones clave de teoría de categorías. Seguiremos las convenciones de Riehl [3].

Definición 0.1. Una **categoría** C consiste de

- una colección $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ de objetos $X, Y, Z, \ldots$, y
- una colección $\mathrm{Ar}(\mathcal{C})$ de morfismos $f, g, h, \ldots$,

tales que:

- Cada morfismo tiene dos objetos asociados, su **domino** y su **codominio**. Escribiremos $f : X \to Y$ cuando f sean un morfismo con dominio X y codominio Y.
- Cada objeto X tiene un morfismo identidad $\mathsf{id}_X : X \to X$.
- Para cada par de morfismos $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$, existe un morfismo $g \circ f$, llamado la composición de g y f.

Adicionalmente, se requiere que se cumplan las siguientes condiciones:

- Para todo $f : X \to Y$, se tiene que
$$\mathsf{id}_Y \circ f = f \circ \mathsf{id}_X = f.$$
- Para todos $f : X_1 \to X_2$, $g : X_2 \to X_3$, $h : X_3 \to X_4$, se tiene que
$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h).$$

Nótese que utilizamos el concepto de *colección*, no de *conjunto*; pues necesitamos una mayor generalidad para las categorías que veremos a lo largo de la presente tesis.

Ejemplo 0.1. La categoría Set tiene como objetos conjuntos, y como morfismos funciones entre conjuntes. El morfismo identidad es la función identidad, y la composición de morfismos es la composición de funciones usual. Las dos condiciones adicionales se cumplen inmediatamente.

Al igual que en el ejemplo previo, en la mayoría de casos la satisfacción de las dos últimas condiciones es inmediata. Asimismo, el morfismo identidad y la composición de morfismos es usualmente la función identidad y la composición de funciones usual, respectivamente. Por estos motivos, omitiremos mención de estos detalles en los ejemplos siguiente, salvo la construcción sea diferente.

Ejemplo 0.2. La categoría Vec_K tiene como objetos espacios vectoriales sobre el cuerpo K, y como morfismos transformaciones K-lineales entre espacios vectoriales. Nuevamente, el morfismo identidad es la función identidad, y la composición es la usual.

Ejemplo 0.3. La categoría Top_* tiene como objetos pares (X, x), donde X es un espacio topológico y x es un elemento de X, el cual es llamado el elemento base. Los morfismos son funciones continuas que preservan elementos base.

Ejemplo 0.4. La categoría $\mathbf{0}$ no tiene ningún objeto ni ningún morfismo. La categoría $\mathbf{1}$ tiene un solo elemento, $\star$, y solo un morfismo $\mathsf{id}_\star$.

Ejemplo 0.5. Sea C una categoría, podemos definir una nueva categoría C^{op}, la categoría **opuesta** o **dual**. Esta está definida de la siguiente manera: los objetos son los mismos que en C, pero los morfismos tienen el dominio y codominio intercambiado. Es decir, asignamos a cada morfismo $f : X \to Y$ un morfismo $f^{\mathrm{op}} : Y \to X$.

Finalmente, la composición entre dos morfismos $f^{\mathrm{op}} : Y \to X$ y $g^{\mathrm{op}} : Z \to Y$ la definimos por

$$f^{\mathrm{op}} \circ g^{\mathrm{op}} := (g \circ f)^{\mathrm{op}}.$$

Ejemplo 0.6. Sea C una categoría y sean X y Y objetos de C. A partir de estos datos, podemos formar una nueva categoría $\mathsf{C}_{X,Y}$.

Sus objetos son triples (Z, f, g), donde Z es un objeto de C, y $f : Z \to X$ y $g : Z \to Y$ son morfismos. Un morfismo $\alpha : (Z, f, g) \to (Z', f', g')$ es un morfismo $h : Z \to Z'$ tal que $f \circ h = f'$ y $g \circ h = g'$.

En otras palabras, se requiere que $h : Z \to Z'$ sea tal que el siguiente diagrama conmute.

$$\begin{tikzcd}
& Z \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, "g"] & \\
X & Z' \arrow[l, "f'"] \arrow[r, "g'"'] & Y
\end{tikzcd}$$

La composición de morfismos es la usual composición de morfismos.

Ejemplo 0.7. Veamos la construcción dual a la previa, es decir $\mathsf{C}_{X,Y}^{\mathrm{op}}$.

Sea C una categoría y sean X y Y objetos de C. A partir de estos datos, podemos formar una nueva categoría $\mathsf{C}^{X,Y}$.

Sus objetos son triples (Z, f, g), donde Z es un objeto de C, y $f : X \to Z$ y $g : Y \to Z$ son morfismos. Un morfismo $\alpha : (Z', f', g') \to (Z, f, g)$ es un morfismo $h : Z' \to Z$ tal que $h \circ f' = f$ y $h \circ g' = g$.

En otras palabras, se requiere que $h : Z' \to Z$ sea tal que el siguiente diagrama conmute.

$$\begin{tikzcd}
& Z & \\
X \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "f'"'] & Z' \arrow[u, "h"] & Y \arrow[ul, "g"'] \arrow[l, "g'"]
\end{tikzcd}$$

La composición de morfismos es la usual composición de morfismos. Nótese que el diagrama resultante es el mismo que el del ejemplo anterior, solo que con todas las flechas volteadas.

Procederemos con algunas definiciones comunes involucrando objetos y morfismos en una categoría.

Definición 0.2. Sea C una categoría, entonces:

- Un objeto X es **inicial** si para todo objeto Y existe un único morfismo $f : X \to Y$.
- Un objeto X es **terminal** si para todo objeto Y existe un único morfismo $f : Y \to X$.

- Un morfismo $f : X \to Y$ es un **isomorfismo** si existe un morfismo $f^{-1} : Y \to X$ tal que $f \circ f^{-1} = \mathsf{id}_Y$ y $f^{-1} \circ f = \mathsf{id}_X$. Cuando esto se de, decimos que f^{-1} es una **inversa** de f, y que X y Y son **isomórficos**, lo cual denotamos por $X \simeq Y$.

Nótese que ser un objeto terminal en C es lo mismo que ser un objeto inicial en C. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 0.8. En Set, el conjunto vacío $\varnothing$ es inicial, puesto que dado un conjunto X, la única función $! : \varnothing \to X$ es la trivial. Por otro lado, cualquier conjunto T con un solo elemento es terminal, pues la única función $X \to T$ es la que lleva todos los elementos de X a el único elemento de T. Finalmente, una función $f : X \to Y$ es un isomorfismo si y solo si es una biyección, siendo el morfismo inverso la función inversa usual.

Ejemplo 0.9. En Vec_K, el espacio vectorial $\mathbf{0}$ de dimensión 0 es ambos inicial y terminal, pues dado un espacio vectorial V, la única función $! : \mathbf{0} \to V$ es la que lleva el 0 al 0, y la única función $V \to \mathbf{0}$ es la que lleva todos los vectores de V a 0. Finalmente, un morfismo es un isomorfismo exactamente cuando es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Nótese que existen múltiples objetos terminales en Set, pero todos estos son isomórficos entre sí. Esta no es una casualidad.

Teorema 0.0.1. *Si X y Y son objetos terminales en una categoría C, entonces $X \simeq Y$. Lo mismo se cumple si X y Y son ambos iniciales.*

Demostración. Por ser Y terminal, existe una única función $f : X \to Y$. Por ser X terminal, existe una única función $g : Y \to X$. Pero ahora vemos que tenemos dos funciones $X \to X$, las cuales son $(g \circ f)$ y id_X. Por unicidad, concluimos que $g \circ f = \mathsf{id}_X$. De manera similar, concluimos que $f \circ g = \mathsf{id}_Y$. Entonces, $X \simeq Y$.

La demostración cuando X y Y son iniciales es análoga. $\square$

Continuemos con unos ejemplos de las categorías introducidas en los Ejemplos 0.6 y 0.7.

Ejemplo 0.10. Sean X y Y conjuntos. En la categoría $\mathsf{Set}_{X,Y}$, el producto usual $X \times Y$ junto con las proyecciones es un objeto terminal. En efecto, dados Z, $f : Z \to X$ y $g : Z \to Y$ la única forma de definir una función $h : Z \to (X \times Y)$ tal que el diagrama conmute es por $h(z) = (f(z), g(z))$.

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, "g"] & \\ X & X \times Y \arrow[l, "\pi_X"] \arrow[r, "\pi_Y"'] & Y \end{tikzcd}$$

Ejemplo 0.11. Sean X y Y conjuntos. En la categoría $\mathsf{Set}^{X,Y}$ el coproducto usual $X + Y$ junto con las inserciones naturales es un objeto inicial. En efecto, dados Z,

$f : X \to Z$ y $g : Y \to Z$ la única forma de definir una función $h : (X+Y) \to Z$ tal que el diagrama conmute es por $h(x) = f(x)$ y $h(y) = f(y)$.

$$\begin{tikzcd}
& Z & \\
X \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "\iota_X"'] & X+Y \arrow[u, "h"] & Y \arrow[ul, "g"'] \arrow[l, "\iota_Y"]
\end{tikzcd}$$

Similares resultados aplican para otras categorías, por lo que formularemos las siguientes definiciones.

Definición 0.3. Sea C una categoría y sean X y Y objetos de C. Si Z es un objeto terminal de $\mathsf{C}_{X,Y}$, diremos que Z es el **producto** de X y Y, y lo denotaremos por $X \to Y$. Si Z es un objeto inicial de $\mathsf{C}^{X,Y}$, diremos que Z es el **coproducto** de X y Y, y lo denotaremos por $X+Y$.

Los fundadores de la teoría de categorías mencionaron que el concepto de categoría se creo para poder definir lo que es un functor, y los functores se definieron para poder definir lo que es una transformación natural [2]. Veamos estos conceptos ahora.

Definición 0.4. Sean C y D categorías. Un functor consiste de

- un objeto $F(X)$ en D para cada objeto X en C, y
- un morfismo $F(f) : F(X) \to F(Y)$ en D para cada morfismo $f : X \to Y$ en C.

tales que se cumplen las siguientes dos condiciones

- Para todo par de morfismos $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ en C, se tiene que $F(g \circ f) = Fg \circ Ff$.
- Para todo objeto X en C, se tiene que $F(\mathsf{id}_X) = \mathsf{id}_{F(X)}$.

Ejemplo 0.12. El functor identidad $\mathsf{id}_{\mathsf{C}} : \mathsf{C} \to \mathsf{C}$ lleva cada objeto a sí mismo, y cada morfismo así mismo. Las dos condiciones adicionales se cumplen inmediatamente, y omitiremos mención de estas en los futuros ejemplos.

Ejemplo 0.13. El functor conjunto poder $\mathcal{P} : \mathsf{Set} \to \mathsf{Set}$ lleva objetos a su conjunto poder, y funciones $f : X \to Y$ a una función $\mathcal{P}(f) : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$, la cual está definida por

$$\mathcal{P}(f)(S) := \{f(s) \mid s \in S\}$$

En general, cuando tengamos un functor $F : \mathsf{C} \to \mathsf{C}$ que va de una categoría C hacia si misma, diremos que es un **endofunctor**.

Ejemplo 0.14. El functor espacio dual $(-)^* : \mathsf{Vec}_K \to \mathsf{Vec}_K^{\mathrm{op}}$ lleva cada espacio vectorial V a su espacio dual V^*, y lleva una transformación lineal $f : V \to W$ a una función $f^* : W^* \to V^*$ definida por

$$f^*(\alpha)(v) := \alpha(f(v)).$$

En casos como este, cuando tengamos $F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}^{\mathrm{op}}$, diremos que F es un functor **contravariante**; caso contrario, diremos que es **covariante**.

Ejemplo 0.15. Dados dos functores $F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ y $G : \mathsf{D} \to \mathsf{E}$, podemos definir un nuevo functor $G \circ F : \mathsf{C} \to \mathsf{E}$, definido por

$$(G \circ F)(c) = G(F(c)) \ \text{ y } \ (G \circ F)(f) = G(F(f)),$$

en objetos y morfismos, respectivamente.

Para los siguientes ejemplos, necesitaremos una definición adicional.

Definición 0.5. Sea C una categoría. Diremos que C es una **categoría localmente pequeña** si para todo par de objetos X, Y de C la colección de morfismos con dominio X y codominio Y es un conjunto, y lo denotaremos por $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(X, Y)$. Escribiremos también $\mathrm{Hom}(X, Y)$ cuando la categoría esté sobrentendida.

Ejemplo 0.16. Para todo objeto Z en una categoría C localmente pequeña, tenemos un functor contravariante

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(-, Z) : \mathsf{C} \to \mathsf{Set}^{\mathrm{op}},$$

el cual lleva objetos X al conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(X, Z)$, y morfismos $f : X \to Y$ a una función de conjuntos

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(f, Z) : \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(Y, Z) \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(X, Z)$$

definida por

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(f, Z)(\alpha) = \alpha \circ f$$

Análogamente, tenemos un functor covariante

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(Z, -) : \mathsf{C} \to \mathsf{Set},$$

el cual lleva objetos X a el conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(Z, X)$, y morfismos $f : X \to Y$ a una función de conjuntos

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(Z, f) : \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(Z, X) \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(Z, Y)$$

definida por

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(Z, f)(\alpha) = f \circ \alpha$$

Ejemplo 0.17. La colección de todas las categorías localmente pequeñas es una categoría Cat, siendo los objetos las categorías, y los morfismos los functores entre las categorías.

Sean C y D categorías localmente pequeñas, se puede verificar que la categoría que tiene como objetos pares (X, Y) con $X \in \mathsf{C}$ y $Y \in \mathsf{D}$, y como morfismos $h : (X, Y) \to (X', Y')$ pares (f, g) de morfismos $f : X \to X'$ y $g : Y \to Y'$ es el producto de C y D en Cat [2].

Definición 0.6. Dadas dos categorías C y D, y dos functores $F, G : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$, una **transformación natural** $\tau : F \to G$ consiste de

- un morfismo $\tau_c : F(X) \to G(X)$ para cada $X : C$, llamado el **componente** de τ en X

tal que para todo morfismo $f : X \to Y$ en C, el siguiente diagrama conmute

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\tau_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\tau_Y"'] & G(Y) \end{tikzcd}$$

Ejemplo 0.18. Tenemos una transformación $\tau : \mathsf{id}_{\mathsf{Set}} \to \mathcal{P}$, definiendo cada componente por $\tau_X(x) = \{x\}$. Necesitamos comprobar que para toda función entre conjuntos $f : X \to Y$ el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\tau_X"] \arrow[d, "f"'] & \mathcal{P}(X) \arrow[d, "\mathcal{P}(f)"] \\ Y \arrow[r, "\tau_Y"'] & \mathcal{P}(Y) \end{tikzcd}$$

Pero ahora tenemos que para todo $x \in X$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(f)(\tau_X(x)) &= \mathcal{P}(f)(\{x\}) \\ &= \{f(x)\} \\ &= \tau_Y(f(x)) \end{aligned}$$

Ejemplo 0.19. Tenemos una transformación natural $\tau : \mathsf{id}_{\mathsf{Vec}_K} \to (-)^{**}$, donde el functor $(-)^{**}$ es el functor espacio dual aplicado dos veces. Esta transformación está definida en cada componente por $\tau_V(v)(\alpha) = \alpha(v)$. Sea $\alpha : V \to W$, vemos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\tau_V"] \arrow[d, "f"'] & V^{**} \arrow[d, "f^{**}"] \\ W \arrow[r, "\tau_W"'] & W^{**} \end{tikzcd}$$

pues para todo $v \in V$ y $\beta \in W^*$ tenemos

$$\begin{aligned} f^{**}(\tau_V(v))(\beta) &= \tau_V(v)(f^*(\beta)) \\ &= f^*(\beta)(v) \\ &= \beta(f(v)) \\ &= \tau_W(f(v))(\beta) \end{aligned}$$

Lo interesante del ejemplo previo es que, restringiéndonos al caso de espacios vectoriales de dimensión finita, cada componente es un isomorfismo.

Definición 0.7. Dadas dos categorías C y D, y dos functores $F, G : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$. Diremos que una transformación natural $\tau : F \to G$ es un **isomorfismo natural** si cada componente τ_c es un isomorfismo, y escribiremos $F \cong G$.

Notamos que las transformaciones naturales se pueden componer en el siguiente sentido, si $\tau : F \to G$ y $\eta : G \to H$ son transformaciones naturales, podemos definir $\eta \circ \tau : F \to H$ por $(\eta \circ \tau)_c = \eta_c \circ \tau_c$. Para ver que esta definición satisface el requerimiento de conmutatividad, observamos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} F(x) \arrow[r, "\tau_x"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(x) \arrow[r, "\eta_x"] \arrow[d, "G(f)"] & H(x) \arrow[d, "H(f)"] \\ F(y) \arrow[r, "\tau_x"'] & G(y) \arrow[r, "\eta_y"'] & H(y) \end{tikzcd}$$

pues cada uno de los cuadrados individuales conmuta.

Esto hace que la colección de functores $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Cat}}(X, Y)$ sea una categoría, siendo los objetos los functores, y los morfismos las transformaciones naturales entre ellos.

De esta manera, vemos que un isomorfismo en esta categoría es un isomorfismo natural τ, pues podemos definir una transformación natural inversa $\tau^{-1} : G \to F$ dada por $(\tau^{-1})_d = (\tau_d)^{-1}$, y esta satisface que $\tau \circ \tau^{-1} = \mathsf{id}$ y $\tau^{-1} \circ \tau = \mathsf{id}$.

Sin embargo, este propiedad rara vez se da en aplicaciones, una definición similar, y más conveniente es la siguiente.

Definición 0.8. Una **equivalencia de categorías** consiste de dos functores $F : C \to D$ y $G : D \to C$ tales que existen isomorfismos naturales $F \circ G \cong \mathsf{id}_{\mathsf{D}}$ y $G \circ F \cong \mathsf{id}_{\mathsf{C}}$. Cuando se de esto, escribiremos $\mathsf{C} \simeq \mathsf{D}$.

Ejemplo 0.20. Un ejemplo clásico de equivalencia es la adjunción Tensor-Hom de espacios vectoriales, o de una manera más general, de R-módulos:

$$\mathrm{Hom}(M \times N, P) \simeq \mathrm{Hom}(M, \mathrm{Hom}(N, P)),$$

para todo trío de R-módulos M, N, P. La demostración de este resultado se puede encontrar en [1].

Más general aún es la siguiente equivalencia entre las categorías

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Cat}}(X \times Y, Z) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathsf{Cat}}(X, \mathrm{Hom}_{\mathsf{Cat}}(Y, Z)),$$

la cual se puede encontrar en [2].

Por último, presentamos las siguientes definiciones.

Definición 0.9. Una categoría C es una **subcategoría** de una categoría D si todos los objetos de C son objetos de D, y todos los morfismos de C son morfismos de D.

Decimos que C es una **subcategoría completa** si $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}(X, Y)$, para todo par de objetos X, Y en C.

Ejemplo 0.21. La categoría $\mathsf{Set}_{\mathsf{Fin}}$, que tiene como objetos conjuntos finitos y como morfismos funciones entre estos conjuntos, es una subcategoría completa de Set.

Ejemplo 0.22. Dada una colección de objetos C de una categoría D, la subcategoría completa generada por C es aquella que tiene como objetos los objetos de C, y tiene como morfismos de X, Y en C, la colección $\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}(X, Y)$. La identidad y la composición son las de D.