Modelo de Valoración de Opciones

Presentación Final

Fernando Cotrina

Universidad Diego Portales (UDP)

22 de Diciembre del 2025

- **Definición:** Contratos que otorgan al comprador el derecho (pero no la obligación) de comprar o vender un activo subyacente a un precio fijo (Strike) antes de o en una fecha específica.
- **Tipos básicos:**
    - **Opción Call (Compra):** Derecho a *comprar* el activo a un precio determinado. Se usa cuando se espera que el precio suba.
    - **Opción Put (Venta):** Derecho a *vender* el activo a un precio determinado. Se usa como cobertura o especulación a la baja.
- **Por estilo de ejercicio:**
    - **Americana:** Se puede ejercer en **cualquier momento** hasta la fecha de vencimiento.
    - **Europea:** Solo se puede ejercer en la **fecha de vencimiento**.

Posiciones en Opciones

Existen cuatro posiciones fundamentales en el mercado de opciones, dependiendo de si se compra (posición larga) o se vende (posición corta) el contrato:

Posiciones Largas (Comprador)

Pagan la prima y tienen el derecho.

- **Long Call:** Compra de una opción de compra. Se beneficia si el precio del activo **sube** ($S_T > K$).
- **Long Put:** Compra de una opción de venta. Se beneficia si el precio del activo **baja** ($S_T < K$).

Posiciones Cortas (Vendedor)

Cobran la prima y tienen la obligación.

- **Short Call:** Venta de una opción de compra. Asume la obligación de vender el activo si el comprador ejerce.
- **Short Put:** Venta de una opción de venta. Asume la obligación de comprar el activo si el comprador ejerce.

Payoff de las Opciones Europeas

El *payoff* (pago) al vencimiento depende del precio del activo (S_T) y el strike (K).

Opciones Call (Compra)

La opción se ejerce si $S_T > K$. Si $S_T \leq K$, no se ejerce.

- **Long Call:** $\max(S_T - K, 0)$
- **Short Call:** $-\max(S_T - K, 0) = \min(K - S_T, 0)$

Opciones Put (Venta)

La opción se ejerce si $S_T < K$. Si $S_T \geq K$, no se ejerce.

- **Long Put:** $\max(K - S_T, 0)$
- **Short Put:** $-\max(K - S_T, 0) = \min(S_T - K, 0)$

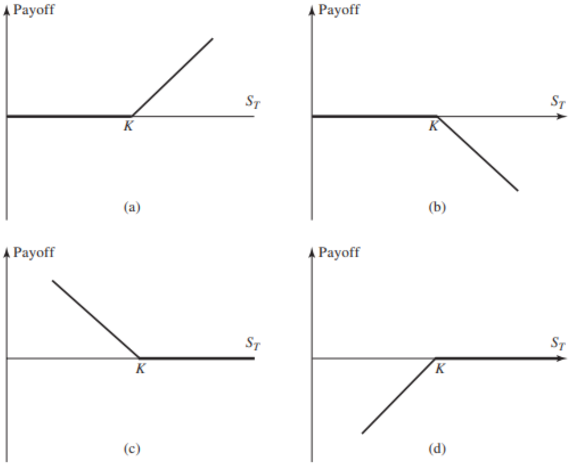


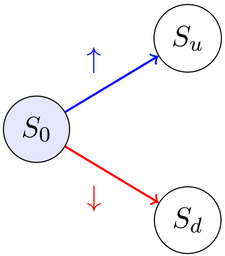
Figure 1: Diagramas de payoff al vencimiento para las cuatro posiciones básicas: a) Long Call, b) Short Call, c) Long Put, y d) Short Put.

Resumen del efecto sobre el precio de la opción al aumentar una variable (ceteris paribus):

	Opción Europea		**Opción Americana**	
Variable	**Call**	**Put**	**Call**	**Put**
Precio del activo (S_0)	$+$	$-$	$+$	$-$
Precio de ejercicio (K)	$-$	$+$	$-$	$+$
Tiempo al vencimiento (T)	?	?	$+$	$+$
Volatilidad (σ)	$+$	$+$	$+$	$+$
Tasa libre de riesgo (r)	$+$	$-$	$+$	$-$
Dividendos futuros (D)	$-$	$+$	$-$	$+$

Nota: $+$ (Aumenta), $-$ (Disminuye), ? (Incierto).
**El tiempo en opciones europeas es incierto por el efecto de los dividendos y tasas negativas teóricas, aunque usualmente es positivo.*

- Es un modelo en **tiempo discreto** para la valoración de opciones. Se asume que en cada intervalo de tiempo, el precio del activo (S) solo puede moverse en dos direcciones:
  - **Subir (↑):** Por un factor u ($S \cdot u$).
  - **Bajar (↓):** Por un factor d ($S \cdot d$).
- **Idea Clave**: El futuro no es una línea recta, sino que se modela como un **árbol de posibles precios** que se expande en el tiempo.



Representación de un paso.

Supuestos Fundamentales

Para que el modelo sea válido, asumimos un entorno de **mercado perfecto**:

- **Sin fricciones:** No hay costos de transacción, impuestos, ni restricciones de margen.
- **Tasa libre de riesgo (r) constante:** Se puede prestar y pedir prestado dinero a la misma tasa libre de riesgo r durante la vida de la opción.
- **Ventas en corto permitidas:** Los participantes pueden vender activos que no poseen y usar los ingresos plenamente.
- **Divisibilidad:** Los activos son perfectamente divisibles (se pueden comprar fracciones de acciones).

El Pilar del Modelo: No Arbitraje

No existen oportunidades de obtener ganancias libres de riesgo sin inversión neta inicial. Si existieran, el mercado las eliminaría instantáneamente.

Variables de Mercado:

- S_0: Precio spot actual del activo subyacente.
- K: Precio de ejercicio (*Strike*).
- r: Tasa libre de riesgo anualizada (compuesta continuamente).
- T: Tiempo total hasta el vencimiento (en años).
- σ: Volatilidad anualizada del activo subyacente.

Parámetros del Modelo:

- Δt: Longitud de un paso de tiempo (T/N).
- u: Factor multiplicativo de subida $(S_u = S_0 \cdot u)$.
- d: Factor multiplicativo de bajada $(S_d = S_0 \cdot d)$.
- $f_{i,j}$: Valor de la opción en el nodo (i, j).
- Δ: Ratio de cobertura (*Hedge Ratio*).
- p: Probabilidad neutral al riesgo.

Valoración por No Arbitraje: Cartera de Réplica

Construimos un portafolio libre de riesgo (Π) mediante una posición larga en Δ unidades del subyacente y una posición corta en 1 opción:

$$\Pi_0 = \Delta S_0 - f_0$$

Para garantizar la ausencia de riesgo, el valor del portafolio al final del periodo debe ser idéntico independientemente del movimiento del mercado ($\Pi_u = \Pi_d$):

$$\Delta S_0 u - f_u = \Delta S_0 d - f_d \tag{1}$$

Despejando Δ, obtenemos el **Hedge Ratio** (Delta neutral):

$$\Delta = \frac{f_u - f_d}{S_0(u - d)}$$

En la especificación de **Cox, Ross y Rubinstein (1979)**, definimos los factores de salto en función de la volatilidad (σ) y el paso de tiempo (Δt):

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$$
$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

- **Propiedad de Recombinación ($ud = 1$):** Si el precio sube y luego baja (o viceversa), volvemos al precio inicial S_0. Esto simplifica computacionalmente el árbol (los nodos no crecen exponencialmente).
- **Volatilidad:** A mayor σ, mayor es la dispersión entre u y d, reflejando mayor incertidumbre.

Derivación: Principio de Valoración Neutral al Riesgo

Dado que el portafolio Π es libre de riesgo, para evitar arbitraje:

$$\Pi_T = \Pi_0 \cdot e^{r\Delta t}$$

Igualamos el valor final del portafolio (en el estado "up", por ejemplo) con el valor inicial capitalizado:

$$\Delta S_0 u - f_u = (\Delta S_0 - f_0)e^{r\Delta t} \tag{2}$$

Sustituyendo el valor de $\Delta = \frac{f_u - f_d}{S_0(u-d)}$ y despejando f_0, obtenemos la ecuación fundamental de valoración:

$$f_0 = e^{-r\Delta t}\left[\left(\frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}\right) f_u + \left(1 - \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}\right) f_d\right]$$

Para simplificar la ecuación anterior, definimos la variable p:

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}$$

Sustituyendo p en la fórmula de valoración, llegamos a una expresión simple:

$$f_0 = e^{-r\Delta t}[pf_u + (1 - p)f_d]$$

$$f_0 = e^{-r\Delta t}\hat{E}[f_T]$$

Dado que desconocemos el valor de la opción hoy ($t = 0$), pero conocemos su valor exacto al vencimiento ($t = T$), el proceso de valoración debe ser **recursivo e inverso**:

1. **Proyección (Forward):** Construimos el árbol de precios del activo subyacente (S) desde $t = 0$ hasta $t = T$ usando u y d.
2. **Condición de Borde:** Calculamos el *payoff* de la opción en los nodos finales (T).
3. **Descuento (Backward):** Retrocedemos paso a paso, calculando el valor esperado descontado en cada nodo anterior, usando la probabilidad neutral al riesgo (p).

Algoritmo para Opciones Europeas

Para un árbol de N pasos, el valor de la opción en el nodo (i, j) se denota como $f_{i,j}$.

Paso 1: Nodos Terminales (Vencimiento)

En el tiempo $i = N$, para cada nodo j (de 0 a N):

$$f_{N,j} = \max(S_{N,j} - K, 0) \quad \text{(Para un Call)}$$

Paso 2: Recurrencia (Inducción)

Para cada paso anterior $i = N - 1, N - 2, \ldots, 0$:

$$f_{i,j} = e^{-r\Delta t} \left[p \cdot f_{i+1,j+1} + (1 - p) \cdot f_{i+1,j}\right]$$

Donde:

- $f_{i+1,j+1}$: Valor de la opción si el precio sube.
- $f_{i+1,j}$: Valor de la opción si el precio baja.

A diferencia de las europeas, las opciones americanas permiten el ejercicio anticipado en cualquier nodo $t < T$.
El algoritmo de inducción hacia atrás debe verificar en **cada nodo** si conviene ejercer o mantener la opción (valor de continuación).

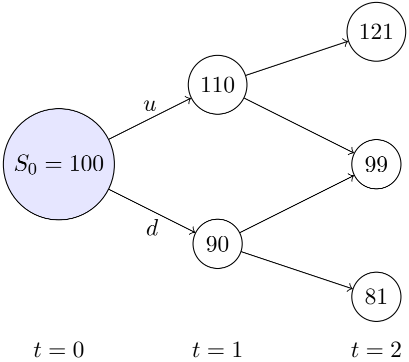
Condición de Optimalidad Americana

En cada nodo (i, j), el valor de la opción es el máximo entre ejercer inmediatamente o esperar:

$$f_{i,j} = \max \left(\underbrace{S_{i,j} - K}_{\text{Valor intrínseco}} , \quad \underbrace{e^{-r\Delta t}[p f_{i+1,j+1} + (1-p) f_{i+1,j}]}_{\text{Valor de continuación}} \right)$$

Ejemplo Numérico: Árbol de Precios del Activo (S)

Activo (S_0) = \$100, Strike (K) = \$100. Factores: $u = 1.10$, $d = 0.90$. Tasa libre de riesgo (r) = 5% por periodo. Tipo: Opción Call Europea, 2 periodos.



Cálculo Detallado de los Nodos

Usando $p = 0.756$, $r = 5\%$ y el factor de descuento $e^{-0.05} \approx 0.9512$, resolvemos de atrás hacia adelante:

1. Probabilidad Neutral al Riesgo (p):

$$p = \frac{e^r - d}{u - d} = \frac{1.0513 - 0.90}{1.10 - 0.90} = \mathbf{0.756}$$

Paso 1: Vencimiento ($t = 2$)

Calculamos el valor intrínseco $\max(S_T - K, 0)$:

- Escenario Arriba-Arriba ($S = 121$): $\max(121 - 100, 0) = \mathbf{21}$
- Escenario Arriba-Abajo ($S = 99$): $\max(99 - 100, 0) = \mathbf{0}$
- Escenario Abajo-Abajo ($S = 81$): $\max(81 - 100, 0) = \mathbf{0}$

2. Inducción Hacia Atrás(Call $K = 100$):

Paso 2: Nodos Intermedios ($t = 1$)

Aplicamos la esperanza neutral al riesgo descontada:

$$f_u = e^{-0.05}[0.756(21) + 0.244(0)] = 0.9512 \cdot 15.876 = \mathbf{15.10}$$

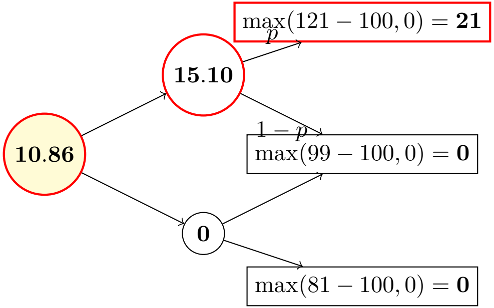
$$f_d = e^{-0.05}[0.756(0) + 0.244(0)] = \mathbf{0}$$

Paso 3: Valor Presente ($t = 0$)

Repetimos el proceso con los valores obtenidos en $t = 1$:

$$f_0 = e^{-0.05}[0.756(15.10) + 0.244(0)] = 0.9512 \cdot 11.41 = \mathbf{10.86}$$

Ejemplo Numérico: Valoración (Backward Induction)



Conclusiones Clave

- **Flexibilidad vs. Fórmulas Cerradas:** A diferencia del modelo de Black-Scholes (que es una "caja negra" analítica), el Modelo Binomial permite valorar opciones complejas, especialmente **Opciones Americanas** y aquellas sobre activos que pagan dividendos discretos.
- **El Poder del No Arbitraje:** Hemos demostrado que no necesitamos conocer la probabilidad real de subida del mercado. Solo necesitamos la volatilidad (σ) y la tasa libre de riesgo (r) para construir una cartera de cobertura perfecta (Δ).
- **Convergencia Asintótica:** A medida que aumentamos el número de pasos ($N \to \infty$) y reducimos el intervalo de tiempo ($\Delta t \to 0$), el precio obtenido por el modelo binomial converge exactamente al precio de la fórmula de Black-Scholes-Merton.

¡Muchas Gracias!

Fernando Cotrina