Apuntes del Semestre

Revisión de Conceptos Clave

Fernando Cotrina

22 de diciembre de 2025

Clase 1: Representación de Utilidad Esperada

Teorema de Von Neumann-Morgenstern

Bajo los supuestos de racionalidad, las decisiones de consumo e inversión de un individuo no dependen solo de los resultados posibles, sino de la probabilidad de ocurrencia y la utilidad que reportan.

Criterio de Decisión (Desigualdad)

Un individuo preferirá la lotería (activo) X sobre la lotería Y si y solo si la utilidad esperada de X es mayor o igual a la de Y.
Las decisiones se caracterizan de la siguiente forma:

$$E[u(X)] \geq E[u(Y)]$$

$$\sum_i p_i u(x_i) \geq \sum_j q_j u(y_j)$$

Clase 1: Medidas de Aversión al Riesgo

Definición de Aversión al Riesgo: Un agente es averso al riesgo si prefiere el valor esperado de una lotería con certeza antes que la lotería misma ($u'' < 0$).

Medidas de Arrow-Pratt: Permiten cuantificar la aversión localmente.

- **Aversión Absoluta al Riesgo (ARA):**

$$R_A(W) = -\frac{u''(W)}{u'(W)}$$

- **Aversión Relativa al Riesgo (RRA):**

$$R_R(W) = -W\frac{u''(W)}{u'(W)}$$

Clase 2: Dominancia de Primer Orden (FSD)

La FSD ocurre cuando un activo otorga mayor utilidad para **cualquier** agente que prefiera más riqueza a menos ($u' > 0$), sin importar su aversión al riesgo.

Definición FSD

El activo A domina estocásticamente a B en primer orden ($A \succeq_{FSD} B$) si y solo si la función de distribución acumulada (CDF) de A es siempre menor o igual a la de B:

$$F_A(x) \leq F_B(x) \quad \forall x$$

Interpretación: Para cualquier nivel de riqueza x, la probabilidad de obtener un retorno menor a x es más baja en A que en B.

Clase 2: Dominancia de Segundo Orden (SSD)

La SSD es un criterio más fuerte que asume **aversión al riesgo** ($u' > 0$ y $u'' < 0$).

Definición SSD

El activo A domina estocásticamente a B en segundo orden ($A \succeq_{SSD} B$) si el área acumulada bajo la distribución de A es menor o igual a la de B:

$$\int_{-\infty}^{x} [F_B(t) - F_A(t)]dt \geq 0 \quad \forall x$$

Implicancia: Si dos activos tienen la misma media, el activo A domina a B (SSD) si A tiene menor dispersión (varianza) que B (Mean-Preserving Spread).

Clase 3: Retorno y Riesgo (Notación Matricial)

Sea w el vector de pesos de inversión y μ el vector de retornos esperados.

- **Retorno Esperado del Portafolio ($E[R_p]$):**

$$E[R_p] = w^T \mu = \sum_{i=1}^{N} w_i E[R_i]$$

- **Varianza del Portafolio (σ_p^2):**

$$\sigma_p^2 = w^T \Sigma w = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} w_i w_j \sigma_{ij}$$

  Donde Σ es la matriz de varianza-covarianza.

Frontera Eficiente: Conjunto de portafolios que minimizan la varianza para un nivel dado de retorno esperado. Es la parte superior de la hipérbola de mínima varianza.

Teorema

Cualquier portafolio en la frontera eficiente puede ser replicado mediante una combinación lineal de dos portafolios eficientes cualesquiera.

Con Activo Libre de Riesgo (R_f):

- La frontera eficiente se convierte en una línea recta (*Capital Allocation Line*).
- **Separación:** Todos los inversores racionales mantendrán una combinación del activo libre de riesgo y un único **Portafolio Tangente (de Mercado)**.
- La elección de riesgo individual solo afecta la proporción invertida en el activo libre de riesgo vs. el portafolio tangente.

Clase 4: Supuestos y Equilibrio de Mercado

El *Capital Asset Pricing Model* (Sharpe-Lintner) deriva el precio de los activos en equilibrio.

Supuestos Clave:

1. Inversores precio-aceptantes y aversos al riesgo (Mean-Variance).
2. Expectativas Homogéneas (mismo μ y Σ).
3. Existe un activo libre de riesgo (R_f) para prestar y pedir prestado.
4. Mercados perfectos (sin fricciones, sin impuestos).

Consecuencia: El portafolio de mercado (M) es el portafolio tangente y es eficiente.

Clase 4: La Línea del Mercado de Valores (SML)

En equilibrio, el retorno en exceso de cualquier activo i es proporcional a su riesgo sistemático.

Ecuación Fundamental del CAPM

$$E[R_i] = R_f + \beta_i(E[R_m] - R_f)$$

Donde β_i (Beta) mide la sensibilidad del activo al mercado (riesgo no diversificable):

$$\beta_i = \frac{Cov(R_i, R_m)}{\sigma_m^2}$$

Nota: El riesgo idiosincrático (específico de la firma) no tiene premio en el retorno esperado porque puede ser eliminado diversificando.

Clase 5: Arbitrage Pricing Theory (Ross)

El APT relaja los supuestos del CAPM. No requiere identificar el portafolio de mercado, sino que se basa en la **ausencia de arbitraje**.
Modelo de Factores: Se asume que los retornos son generados por K factores sistemáticos (F_k):

$$R_i = E[R_i] + \beta_{i1}F_1 + \beta_{i2}F_2 + \cdots + \beta_{iK}F_K + \epsilon_i$$

Definición de Arbitraje: Estrategia que garantiza un pago positivo en al menos un estado sin inversión neta inicial y sin riesgo de pérdida.

Para que no existan oportunidades de arbitraje asintótico en una economía grande, el retorno esperado debe ser una función lineal de las sensibilidades a los factores.

Fórmula APT

$$E[R_i] = \lambda_0 + \lambda_1\beta_{i1} + \lambda_2\beta_{i2} + \cdots + \lambda_K\beta_{iK}$$

Donde:

- λ_0: Tasa libre de riesgo (R_f).
- λ_k: Prima de riesgo por el factor k.
- β_{ik}: Sensibilidad del activo i al factor k.

Clase 6: Asignación Pareto-Óptima y Mercados Completos

Segundo Teorema del Bienestar: Una asignación Pareto-óptima puede obtenerse maximizando una combinación lineal de utilidades individuales sujeta a restricciones de recursos.

Condición de Optimalidad

Una asignación es Pareto-óptima si y solo si las tasas marginales de sustitución entre consumo presente y futuro contingente son iguales entre individuos:

$$\frac{\pi_{i\omega}\partial u_{i\omega}/\partial c_{i\omega}}{\sum \pi_{i\omega}\partial u_{i\omega}/\partial c_{i0}} = \frac{\phi_\omega}{\phi_0}$$

Mercados Completos: Si el número de activos linealmente independientes iguala al número de estados de la naturaleza, los mercados son completos. Cualquier activo contingente puede replicarse mediante un portafolio de activos complejos.

Clase 6: Precios de Equilibrio y Reglas de Reparto

No Arbitraje: El valor de mercado de un activo complejo (S_x) debe igualar el costo del portafolio de activos contingentes que replica sus pagos.

$$S_x = \sum_{\omega \in \Omega} \phi_\omega x_\omega$$

Sharing Rules (Reglas de Reparto): Con utilidades estrictamente cóncavas, existe una relación uno a uno entre el consumo individual y el agregado: $c_i = f_i(C)$.

Precios con Agente Representativo

Con funciones aditivas e independientes, el precio del activo contingente está dado por la utilidad marginal del consumo agregado:

$$\phi_\omega = \frac{\pi_\omega u'(C_\omega)}{u'(C_0)}$$

.

Clase 6: Factor de Descuento Estocástico (SDF)

Ecuación Fundamental de Valoración: El precio de un activo complejo es el valor esperado de sus pagos descontados por la razón de utilidades marginales intertemporales.

$$S_j = E\left[\frac{u'(C)}{u'(C_0)}x_j\right] = E[mx_j]$$

Donde m es el **Factor de Descuento Estocástico (SDF)**.

- **Tasa Libre de Riesgo:** $R_f = 1/E[m]$.
- **Premio por Riesgo:** Depende de la covarianza con el SDF.

$$E[R_j] - R_f = -R_f Cov(m, R_j)$$

Un activo es más valorado si paga más cuando el consumo es bajo (covarianza negativa con el consumo, positiva con m).

Clase 7: Estructura, Información y Completitud

Equilibrio de Expectativas Racionales: Los precios esperados coinciden con los observados ex-post. La información se revela mediante particiones F_t que se vuelven más finas hasta T.

Completitud Dinámica y Programación Dinámica

Aunque el mercado no sea completo en $t = 0$, se puede completar mediante estrategias de transacciÛn dinámicas si en cada nodo:

$$\text{Nº Activos Linealmente Independientes} \geq \text{Nº Ramas Futuras}$$

El problema del individuo se resuelve por **Programación Dinámica** (hacia atrás), sujeto a la restricción presupuestaria:

$$\theta(t+1)'S(t) = \theta(t)'(S(t) + X(t)) - c(t)$$

Clase 7: Precios de Equilibrio y CCAPM

Con un agente representativo, el precio se determina por la tasa marginal de sustitución intertemporal del consumo agregado (C_t):

$$S_j(t-1) = E\left[\frac{u_t'(C_t)}{u_{t-1}'(C_{t-1})}(x_j(t) + S_j(t))\middle| F_{t-1}\right]$$

Consumption-CAPM (CCAPM)

En entornos dinámicos, el riesgo relevante es la covarianza con el consumo agregado, no solo con el mercado:

$$E[r_{jt}|F_{t-1}] - r_{ft} = \frac{\beta_{jc,t-1}}{\beta_{cc,t-1}}(E[r_{ct}|F_{t-1}] - r_{ft})$$

El premio por riesgo es positivo si el activo paga poco cuando el consumo es bajo (covarianza positiva).

Clase 8: No Arbitraje y Medida Martingala (π^*)

Para evitar el arbitraje (çrear algo de la nada"), el proceso de precios debe ser una **Martingala** tras normalizar por el activo libre de riesgo $B(t)$.

Medida de Martingala Equivalente (π^*)

Existe una distribución de probabilidad sintética π^* (donde todos los estados tienen probabilidad > 0) tal que el precio normalizado hoy es la esperanza del futuro:

$$S_j^*(t) + D_j^*(t) = E^*[S_j^*(s) + D_j^*(s)|F_t]$$

Donde $S^* = S/B$ y $D^* = D/B$.

Esta medida π^* es única para todos los inversores, independiente de sus preferencias subjetivas.

Clase 8: Completitud y Equivalencia Estática-Dinámica

Condición de Completitud: Un mercado es dinámicamente completo si y solo si existe una **única** Medida de Martingala Equivalente (π^*).

Equivalencia Estática-Dinámica: Cualquier problema dinámico de asignación sin arbitraje puede resolverse como si fuera una economía estática en $t = 0$:

1. Se maximiza la utilidad en $t = 0$ usando los precios derivados de π^*.
2. Se implementa la solución óptima en el tiempo mediante estrategias de replicación (trading dinámico).

Clase 9: Fundamentos del Mercado de Opciones

Las opciones son contratos que otorgan un **derecho (al comprador)** y una **obligación (al vendedor)**.

Tipos de Opciones:

- **Call (Compra):** Derecho a comprar el subyacente a un precio fijo (K o Strike).
- **Put (Venta):** Derecho a vender el subyacente a un precio fijo.

Estilo de Ejercicio:

- **Europea:** Solo se ejerce en la fecha de madurez.
- **Americana:** Se puede ejercer en cualquier momento durante la vida del contrato.

Moneyness y Utilidad Bruta:

- **In the Money (ITM):** Genera utilidad bruta positiva si se ejerce (Call: $S_t > K$).
- **Out of the Money (OTM):** Genera utilidad negativa (no se ejerce).

Clase 9: Modelo Binomial (Cartera de Réplica)

Valoración por no arbitraje en tiempo discreto. El precio de la acción puede subir (uS) o bajar (dS).

Cartera de Cobertura (Delta Hedging): Construimos un portafolio Π con Δ acciones y posición corta en 1 opción tal que el valor sea igual en ambos estados (u y d).

$$\Delta S_0 u - f_u = \Delta S_0 d - f_d$$

Despejando el ratio de cobertura:

$$\Delta = \frac{f_u - f_d}{S_0(u - d)}$$

Como Π es libre de riesgo, debe rendir r_f.

De la condición de no arbitraje, derivamos la fórmula general de valoración:

$$f_0 = e^{-r\Delta t}[pf_u + (1-p)f_d]$$

Donde p es la **probabilidad neutral al riesgo**:

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}$$

Interpretación:

- p no es la probabilidad real, sino una probabilidad sintética donde el retorno esperado del activo es la tasa libre de riesgo.
- Permite valorar la opción descontando el pago esperado $\hat{E}[f_T]$ a la tasa r_f.

¡Muchas Gracias!