Frontera Eficiente y Teoría de Markowitz

Fernando Cotrina

Marzo 2025

I. Teoría Moderna de Portafolio (MPT)

La **Teoría Moderna de Portafolio**, desarrollada por **Harry Markowitz** en 1952, es un marco matemático para la toma de decisiones de inversión bajo riesgo. Su objetivo es construir portafolios eficientes, es decir:

- Maximizar el rendimiento esperado dado un nivel de riesgo, o
- Minimizar el riesgo dado un rendimiento esperado.

Fundamento clave: Diversificación

La **diversificación** es el principio central de la MPT. Al combinar activos que no están perfectamente correlacionados, es posible reducir el riesgo total del portafolio sin sacrificar retorno esperado.

II. Definiciones Básicas

Sea N el número de activos. Denotamos:

- $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_N)^T$: vector de **pesos** del portafolio.
- Cada w_i representa la proporción del capital invertido en el activo i.

En una estrategia **long-only**, se cumple:

$$w_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{N} w_i = 1$$

III. Rendimiento Esperado del Portafolio

El retorno esperado del portafolio es una combinación lineal de los retornos esperados individuales:

$$R_p = \sum_{i=1}^{N} w_i R_i = \mathbf{w}^T \mathbf{R}$$

Donde $\mathbf{R} = (R_1, R_2, \ldots, R_N)^T$ es el vector de retornos esperados de los activos.

IV. Riesgo del Portafolio (Volatilidad)

El riesgo (desviación estándar) del portafolio incorpora varianzas individuales y covarianzas entre activos:

$$\sigma_p = \sqrt{\mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w}}$$

Donde Σ es la matriz de covarianzas de los retornos de los activos.

V. Frontera Eficiente

La **frontera eficiente** es el conjunto de portafolios que maximizan el rendimiento esperado para cada nivel de riesgo o minimizan el riesgo para un rendimiento esperado dado.

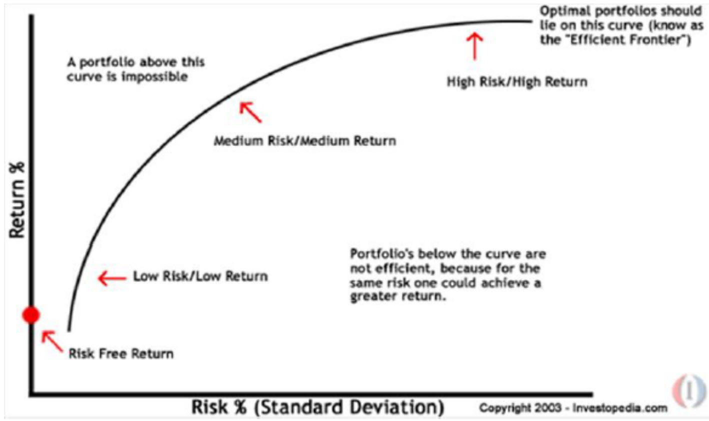

Figure 1: Frontera Eficiente

En el plano **riesgo-retorno**, la frontera eficiente es una curva convexa hacia arriba. Portafolios por debajo de esta curva son ineficientes.

VI. Correlación y Diversificación

El riesgo del portafolio no depende sólo del riesgo individual de cada activo, sino también de cómo se relacionan entre ellos.

1. Correlación

La correlación entre activos i y j se denota ρ_{ij}:

- $\rho_{ij} = 1$: movimientos perfectamente positivos.
- $\rho_{ij} = 0$: no hay relación lineal.
- $\rho_{ij} = -1$: movimientos perfectamente opuestos.

2. Impacto sobre el riesgo

Supón dos activos con igual riesgo individual, $\sigma_1 = \sigma_2$, pero distinta correlación:

- Si $\rho = 1$, no hay beneficio de diversificación.
- Si $\rho < 1$, se reduce el riesgo del portafolio.
- Si $\rho < 0$, es posible que el riesgo del portafolio sea menor que el de cualquiera de los activos.

3. Riesgo para dos activos

Sea w_A y w_B los pesos, σ_A^2, σ_B^2 las varianzas, y ρ_{AB} la correlación:

$$\sigma_p^2 = w_A^2\sigma_A^2 + w_B^2\sigma_B^2 + 2w_Aw_B\rho_{AB}\sigma_A\sigma_B$$

Conclusión: una correlación baja entre activos permite reducir el riesgo del portafolio gracias a la diversificación.

VII. Apéndice: Optimización de Portafolios

1. Portafolio de Volatilidad Mínima Global (GMVP)

Se puede encontrar un portafolio óptimo (en la frontera eficiente) resolviendo un problema de minimización de varianza:

$$\min_{\mathbf{w}} \quad \frac{1}{2}\mathbf{w}^T\Sigma\mathbf{w}$$

Sujeto a:

$$\begin{cases} \mathbf{w}^T\mathbf{1} = 1 \\ 0 \leq \mathbf{w}_i \leq 1 \quad \text{(estrategia long-only)} \end{cases}$$

Nota: Este problema puede resolverse con métodos numéricos como `scipy.optimize`.

2. Maximización del Ratio de Sharpe

El portafolio con mayor ratio de Sharpe maximiza la rentabilidad ajustada al riesgo:

$$\max_{\mathbf{w}} \quad \text{SR} = \frac{R_p - r_f}{\sigma_p}$$

Esto equivale a minimizar el negativo del Sharpe ratio:

$$\min_{\mathbf{w}} \quad -\frac{R_p - r_f}{\sigma_p}$$

Sujeto a las mismas restricciones:

$$\begin{cases} \mathbf{w}^T\mathbf{1} = 1 \\ 0 \leq \mathbf{w}_i \leq 1 \end{cases}$$

Este enfoque permite encontrar la combinación óptima entre riesgo y retorno con respecto a un activo libre de riesgo r_f.