

Empirical Asset Pricing

Cross Section of Expected Returns

Revisión de Literatura

Fernando Cotrina

Universidad Diego Portales (UDP)

26 de Noviembre del 2025



Contenido

- 1 Introducción
- 2 Evidencias Iniciales
- 3 Modelos Multifactorial
- 4 Conclusiones

- 1 **Introducción**
- 2 Evidencias Iniciales
- 3 Modelos Multifactorial
- 4 Conclusiones

Motivación de la Literatura

- **Problema Fundamental:**

¿Cómo se determinan los precios de los activos riesgosos en el mercado? ¿Qué factores explican por qué algunas acciones generan mayores retornos que otras?

- **Relevancia teórica:** Comprender los mecanismos de formación de precios

- **Implicancias prácticas:**

- Evaluación de performance de gestores
- Diseño de estrategias de inversión
- Costo de capital para empresas
- Decisiones de asignación de recursos

Propuesta Inicial: Modelo CAPM

- El retorno esperado del activo i está dado por:

$$E(R_i) = R_f + \beta_i(E(R_m) - R_f)$$

- Donde:

- $E(R_i)$: Retorno esperado del activo
- R_f : Tasa libre de riesgo
- $E(R_m)$: Retorno esperado del mercado
- β_i : Beta del activo i

- Y el riesgo sistemático se define como:

$$\beta_i = \frac{Cov(R_i, R_m)}{Var(R_m)}$$

Características de Equilibrio:

- **Mercado competitivo:** Muchos inversionistas pequeños, tomadores de precio
- **Expectativas homogéneas:** Mismas expectativas sobre retornos
- **Portafolio óptimo único:** Todos mantienen el mismo portafolio de mercado
- **Eficiencia diversificadora:** Solo riesgo sistemático es relevante
- **Proporcionalidad del riesgo:** Premio por riesgo proporcional al beta

Modelo de Valoración por Arbitraje - APT

- El retorno esperado del activo i está dado por:

$$E(R_i) = R_f + \sum_{k=1}^K \beta_{ik} \lambda_k$$

- Donde:

- $E(R_i)$: Retorno esperado del activo
- R_f : Tasa libre de riesgo
- β_{ik} : Sensibilidad al factor k
- λ_k : Premio por riesgo del factor k

- Y la varianza del riesgo idiosincrático:

$$Var \left(\sum_{j=1}^N \frac{1}{N} \varepsilon_j \right) = \frac{\sigma^2}{N}$$

Características Clave:

- **Múltiples factores:** K factores de riesgo sistemático
- **Descomposición del riesgo:** Sistemático + Idiosincrático
- **Sin arbitraje:** Oportunidades se eliminan rápidamente
- **Diversificación:** Riesgo idiosincrático converge a 0 con N grande
- **Aproximación lineal:** Relación aproximada, no exacta como CAPM

Problemas con los modelos

Problema Común

Ambos modelos enfrentan dificultades para explicar empíricamente la variación cruzada de retornos y las anomalías documentadas en los mercados financieros.

- 1 Introducción
- 2 Evidencias Iniciales**
- 3 Modelos Multifactorial
- 4 Conclusiones

- 1 Introducción
- 2 Evidencias Iniciales
 - El CAPM funciona. . . pero poco
 - Primeras extensiones
- 3 Modelos Multifactorial
- 4 Conclusiones

Black, Jensen & Scholes (1972)

The Capital Asset Pricing Model. Some Empirical Tests.

- Probar empíricamente la forma tradicional del CAPM (Sharpe-Lintner) usando datos mensuales de NYSE (1926-1965).
- Cuál es el modelo que quieren probar:

$$E[\tilde{R}_j] = E[\tilde{R}_M]\beta_j \quad (1)$$

Donde \tilde{R}_j es el Exceso de rendimiento del activo j sobre R_F .

Modelo a utilizar: $\alpha_j = 0$ en la regresión $\tilde{R}_{jt} = \alpha_j + \beta_j \tilde{R}_{Mt} + \tilde{e}_{jt}$.

- Problema metodológico por sesgo de selección. ¿Cómo lo solucionan? Agrupando acciones las cuales su β histórico sean iguales.

Resultados Empíricos: Rechazo del CAPM Tradicional

- Los resultados de la estimación fueron:

Parámetro	Estimado	Teórico	t-value
$\hat{\gamma}_0$	0.00359	0	6.52
$\hat{\gamma}_1$	0.01080	0.0142	6.53

Table 1: Coeficientes estimados y sus t values

- El valor estimado de 0.00359 mensual contradice directamente la predicción.
- Pendiente significativamente inferior al premio de mercado.
- Los altos valores t proporcionan evidencia para rechazar ambas hipótesis.

Otras contradicciones:

- Portafolios de beta bajo ($\beta < 1$) tuvieron interceptos $\hat{\alpha}$ positivos.
- Portafolios de beta alto ($\beta > 1$) tuvieron interceptos $\hat{\alpha}$ negativos.
- La relación riesgo-rendimiento se volvió progresivamente más plana en los subperíodos posteriores a 1939, y durante el período 1957-1965 la pendiente fue negativa.

Implicación: Modelo de Dos Factores

- La relación de equilibrio se convierte en un modelo de dos factores, eliminando el supuesto de un activo libre de riesgo:

$$E[\tilde{r}_j] = E[\tilde{r}_z](1 - \beta_j) + E[\tilde{r}_M]\beta_j \quad (2)$$

Donde $E[\tilde{r}_z]$ es el Rendimiento esperado del portafolio "beta cero".

Resultados Clave:

- La constante de la regresión de corte transversal ($\hat{\gamma}_0$) es igual al rendimiento esperado en exceso del factor beta cero (\bar{R}_Z).
- La pendiente concuerda con: $\hat{\gamma}_1 = \bar{R}_M - \bar{R}_Z$.
- El patrón de α' s positivos en betas bajas y α' s negativos en betas altas es explicado es explicado si \bar{R}_Z es positivo.

Evidencia Complementaria y Crítica al CAPM

Fama & MacBeth (1973). *Risk, Return, and Equilibrium: Empirical Tests*

- Corrobora a BJS: la relación β -rendimiento es aproximadamente lineal, pero la forma Sharpe-Lintner del CAPM falla
- Encuentra que el rendimiento del portafolio $\beta = 0$ es mayor que la tasa libre de riesgo, tal como propone el modelo de Black
- β parece ser una medida de riesgo "casi completa"
- El CAPM no funciona "exacto", pero sí como modelo generalizado sin activo libre de riesgo

Roll (1976). *A Critique of the Asset Pricing Theory Tests*

- Afirma que ningún test puede validar o refutar el CAPM, porque el "verdadero portafolio de mercado" es inobservable
- Todos los estudios (incluido Fama-MacBeth y BJS) usan proxies del mercado
- Entonces rechazar empíricamente el CAPM puede ser un error
- No es que el CAPM falle; es que no tenemos forma de probarlo empíricamente

1 Introducción

2 Evidencias Iniciales

El CAPM funciona. . . pero poco

Primeras extensiones

3 Modelos Multifactorial

4 Conclusiones

Fama & French (1992)

The Cross-Section of Expected Stock Returns.

- Plante dos objetivos: Evaluar si el β de mercado es suficiente para explicar rendimientos y explorar variables alternativas que expliquen mejor el modelo.
- Se plantean varios modelos:

$$R_{pt} = \gamma_{0t} + \gamma_{1t}\beta_{p,t-1} \quad (3)$$

$$R_{pt} = \gamma_{0t} + \gamma_{1t}\ln(ME) \quad (4)$$

$$R_{pt} = \gamma_{0t} + \gamma_{1t}\ln(BE/ME) \quad (5)$$

- Modelo Clave:

$$R_{pt} = \gamma_{0t} + \gamma_{1t}\beta_{p,t-1} + \gamma_{2t}\ln(ME) + \gamma_{3t}\ln(BE/ME) \quad (6)$$

- Se utiliza data de las bolsas de NYSE, AMEX, NASDAQ.

Resultados Clave e Implicaciones para el CAPM

- El poder explicativo del β desaparece. Ni en el modelo univariado ni el multivariado.
- Tamaño (ME) y Valor (BE/ME) predicen fuertemente rendimientos:
 - Acciones pequeñas \rightarrow mayores retornos
 - Alto BE/ME \rightarrow mayores retornos (“value premium”)

Variable	Pendiente	<i>t</i> -estadístico
β	0.15	0.46
$\ln(\text{ME})$	-0.11	-1.99
$\ln(\text{BE/ME})$	0.35	4.44

Implicaciones:

- El β no es una medida suficiente de riesgo.
- Características fundamentales como tamaño y valor contable explican mejor los retornos que un modelo teórico general.
- SMB (Small – Big) captura riesgo asociado al tamaño
- HML (High – Low) captura riesgo asociado a valor

Fama & French (1992)

Common Risk Factors in the Returns on Stocks and Bonds.

- Formalizar un modelo multifactorial que explique el riesgo sistemático común en acciones y bonos.
- Cambian de metodología:
 - Permite incluir bonos, donde variables como BE/ME carecen de sentido contable.
 - Las cargas factoriales (betas) se interpretan como sensibilidad al riesgo.
 - Se prueba el modelo evaluando si los interceptos son estadísticamente iguales a cero.
- Resultados Importantes:
 - El modelo de tres factores explica el 90% de la variación de retornos en 21 portafolios.
 - Reduce al mínimo los interceptos ($\alpha \approx 0$).
 - Los β de mercado tienden a 1.

- 1 Introducción
- 2 Evidencias Iniciales
- 3 Modelos Multifactorial**
- 4 Conclusiones

- 1 Introducción
- 2 Evidencias Iniciales
- 3 Modelos Multifactorial**
 - Momentum
 - Liquidez
 - Skewness
 - Modelo de 5 Factores
 - Lucky Factors
 - Machine Learning
- 4 Conclusiones

Carhart (1997)

On Persistence in Mutual Fund Performance

- Trata de demostrar que los comunes en los rendimientos de las acciones y los gastos de inversión explican casi por completo la persistencia en los rendimientos promedio.
- Plantea un modelo de 4 factores:

$$r_i = \alpha_p + \beta_{RMRF}RMRF_t + \beta_{SMB}SMB_t + \beta_{HML}HML_t + \beta_{PR1YR}PR1YR_t + \epsilon_t \quad (7)$$

Donde $PR1YR$ (Price Reversal) es un portafolio que imita el factor de momentum de un año de los rendimientos de las acciones.

- Se utiliza el método de Fama y MacBeth (1973) para estimar el efecto marginal de las características de los fondos sobre el desempeño anormal (α).

Resultados Empíricos

- La persistencia en el rendimiento de los fondos mutuos se explica casi en su totalidad por la sensibilidad a factores comunes (tamaño, valor y momentum) y las diferencias persistentes en los gastos y costos de transacción de los fondos.
- La estrategia de comprar el decil de fondos ganadores del año anterior y vender el decil de perdedores produce un diferencial de rendimiento del 8% anual.
- La única persistencia significativa que no es explicada se concentra en el fuerte rendimiento inferior (strong underperformance) del decil de fondos con los peores rendimientos.

Otras Evidencias del Momentum

- **Jegadeesh & Titman (1993).** *Returns to Buying Winners and Selling Losers*
 - Documentan el fenómeno de momentum de mediano plazo (6-12 meses).
 - Estrategia long-short genera retornos significativos, incluso después de descontar riesgos.
 - También muestran un reversal de largo plazo (13-31 meses), sugiriendo reacciones tardías del mercado.
- **Asness, Moskowitz & Pedersen (2013).** *Value and Momentum Everywhere*
 - Momentum no es exclusivo de acciones: aparece en bonos, divisas, commodities y mercados globales.
 - Evidencia robusta que sugiere que no es una anomalía local, sino un factor sistemático.
- **Barberis, Shleifer & Vishny (1998).** *A Model of Investor Sentiment*
 - Construyen modelo conductual para explicar sobre-reacción y sub-reacción.
 - Justifican simultáneamente momentum en el corto/mediano plazo y reversal en el largo plazo.

- 1 Introducción
- 2 Evidencias Iniciales
- 3 Modelos Multifactorial**
 - Momentum
 - Liquidez**
 - Skewness
 - Modelo de 5 Factores
 - Lucky Factors
 - Machine Learning
- 4 Conclusiones

Amihud & Mendelson (1986)

Asset Pricing and the Bid-Ask Spread

- El objetivo principal es analizar el efecto del bid-ask spread en la fijación de precios de los activos.
- El modelo planteado es:

$$R_{pn}^c = \alpha_0 + \alpha_1 \beta_{pn} + \sum_{t=1}^7 b_i S_{pn}^i + \sum_{t=1}^7 \sum_{j=1}^7 c_{ij} DP_{ij} + \sum_{n=1}^{19} d_n DY_n + \epsilon_{pn} \quad (8)$$

Donde S_{pn} es el spread medio ajustado dentro del grupo.

- Los activos se agruparon en 49 portafolios (7x7) anualmente. La clasificación se hizo independientemente por su spread y su riesgo relativo (β).

Resultados Empíricos

- La prima por bid-ask spread compensa costos de transacción y la microestructura pasa a ser parte de la fijación de precios.
- Alta correlación entre spread y β ; al incluir spread, β pierde significancia.
- El spread se convierte en proxy fundamental de iliquidez, anticipando factores posteriores.

Métrica	Valor	Interpretación
Coef. Spread ($S_{p,n}$)	0.211	+1% spread \rightarrow +0.211% retorno mensual
Corr. R_p y S_p	0.35	Retornos \uparrow con iliquidez
Corr. R_p y β	0.18	Bajo poder explicativo del CAPM
Corr. β y S_p	0.66	Riesgo y iliquidez están ligados

Otras Evidencias sobre Liquidez

- **Amihud (2002).** *Illiquidity and Stock Returns*
 - Propone el índice de iliquidez de Amihud (requiere solo retornos y volumen).
 - Encuentra que la iliquidez predice retornos en el cross-section y en el time-series.
 - Existe una prima por iliquidez agregada a nivel mercado.
- **Brennan & Subrahmanyam (1996).** *Market Microstructure and Asset Pricing: On the Compensation for Illiquidity in Stock Returns*
 - Usa medidas de microestructura con datos intradía.
 - El componente ilíquido explica retornos individuales aun controlando por , tamaño y valor.
 - La liquidez debe considerarse como factor de riesgo sistemático.
- **Pástor & Stambaugh (2003).** *Aggregate Liquidity Factor*
 - Construyen un factor de liquidez agregado y muestran que el factor explica variación transversal y temporal en retornos.
 - Complementa a Fama-French y Carhart y nace el modelo de 5 factores con liquidez.

- 1 Introducción
- 2 Evidencias Iniciales
- 3 Modelos Multifactorial**
 - Momentum
 - Liquidez
 - Skewness**
 - Modelo de 5 Factores
 - Lucky Factors
 - Machine Learning
- 4 Conclusiones

Harvey & Siddique (2000)

Conditional Skewness in Asset Pricing Tests

- El objetivo central es incorporar el skewness condicional (asimetría) como factor sistemático de riesgo en la fijación de precios.
- Se extiende el CAPM con un término cúbico en el SDF, lo que genera un modelo de tres momentos (media–varianza–skewness):

$$E_t[r_{i,t+1}] = \lambda_1 \text{Cov}_t(r_{i,t+1}, r_{M,t+1}) + \lambda_2 \text{Cov}_t(r_{i,t+1}, r_{M,t+1}^2)$$

El segundo término captura la coskewness condicional.

- Medidas empíricas:
 - β_{SKD} : coskewness directa (serie de tiempo).
 - β_{SKS} : beta respecto al spread ($S^- - S^+$) que imita el riesgo de skewness.
- Datos: NYSE/AMEX/NASDAQ, 1963–1993. Pruebas en portafolios por tamaño, B/M y momentum.

Resultados Empíricos

- El spread de skewness ($S^- - S^+$) genera un premio de 3.6% anual.
- Los activos con coskewness negativa (aportan riesgo de cola izquierda) requieren mayor retorno esperado.
- La coskewness explica parte de las anomalías:
 - Momentum: los perdedores exhiben skewness positiva; los ganadores, negativa.
 - Tamaño y B/M: las acciones small-value presentan la coskewness más negativa.
- El modelo reduce errores de fijación de precios RMSE aún sobre FF3 y CAPM.

Activos	Reducción RMSE FF3	+ Skewness
25 Portafolios (Tamaño & B/M)	48%	+10% adicional
10 Portafolios (Momentum)	29%	+17% adicional

Otras Evidencias sobre Skewness

- **Mitton & Vorkink (2007).** *Equilibrium Under Skewness Preference*
 - Los inversionistas muestran preferencias heterogéneas por skewness. Esto causa subdiversificación óptima, haciendo que el skewness idiosincrático sea relevante.
 - La idiosyncratic skewness afecta precios y retornos esperados.
- **Boyer, Mitton & Vorkink (2010).** *Expected Idiosyncratic Skewness*
 - Construyen medidas de skewness esperada a partir de características firm-specific.
 - Encuentran que más skewness lleva a un menor rendimiento esperado.
 - Demuestran que el mercado “paga” por loterías: los inversionistas buscan payoff extremos.
- **Bali, Cakici & Whitelaw (2011).** *Max Return and Lottery Demand*
 - Usa el máximo retorno diario como proxy de skewness extrema.
 - Encuentra una relación negativa fuerte con retornos futuros: efecto “lotería”.
 - Demuestra que los inversionistas sobrepagan por colas derechas, como si compraran boletos de lotería.

- 1 Introducción
- 2 Evidencias Iniciales
- 3 Modelos Multifactorial**
 - Momentum
 - Liquidez
 - Skewness
 - Modelo de 5 Factores**
 - Lucky Factors
 - Machine Learning
- 4 Conclusiones

Fama & French (2014)

A Five-Factor Asset Pricing Model

- El objetivo central es mejorar el modelo FF3 incorporando factores derivados de la valoración contable: rentabilidad e inversión.
- Motivación teórica: el Modelo de Descuento de Dividendos (DDM) implica que $E[R]$ depende de B/M, rentabilidad futura y crecimiento/inversión.
- Modelo de 5 factores:

$$R_{i,t} - R_{F,t} = a_i + b_i(R_{M,t} - R_{F,t}) + s_i SMB_t + h_i HML_t + r_i RMW_t + c_i CMA_t + e_{i,t}$$

- Factores adicionales:
 - RMW: empresas con rentabilidad robusta (alto OP) – débiles.
 - CMA: empresas con inversión conservadora – agresiva.
- Los factores se construyen vía sorts 2x3, 2x2 y conjuntos 2x2x2x2 que controlan simultáneamente tamaño, B/M, OP e Inv.

Resultados Empíricos del Modelo FF5

- El FF5 supera sistemáticamente al FF3 en ajuste de retornos promedio, aunque el GRS sigue rechazando el modelo (errores de fijación persisten).
- Poder explicativo:
 - FF5 explica 71%–94% de la varianza de corte transversal.
 - Reduce la proporción no explicada de retornos promedio a 42%–54%.
- Hallazgo clave: HML es redundante. Su prima es absorbida por RMW y CMA (rentabilidad e inversión).
- Problema persistente: el “molde letal” de microcaps:
 - Pequeñas, baja rentabilidad, alta inversión → alfas negativas significativas.
 - Ejemplo: small con alta inversión y baja OP → $\alpha = -0.35\%$ mensual ($t = -5.30$).

Modelo	GRS	Varianza No Explicada
FF3	4.38	0.69
FF5	2.92	0.20

- 1 Introducción
- 2 Evidencias Iniciales
- 3 Modelos Multifactorial**
 - Momentum
 - Liquidez
 - Skewness
 - Modelo de 5 Factores
 - Lucky Factors**
 - Machine Learning
- 4 Conclusiones

Harvey & Liu (2021)

“Lucky Factors” y Selección Rigurosa Tras el FF5

- El objetivo central es crear una metodología robusta para seleccionar factores que expliquen rendimientos de corte transversal sin caer en factores “afortunados”.
- Metodología:
 - Regresiones de panel sobre acciones individuales, evitando sesgos de *portfolio sorts*.
 - Proceso secuencial con bootstrap FWER para controlar falsos positivos.
 - Cada factor candidato se ajusta (pseudo factor) para que no reduzca el intercepto bajo la hipótesis nula.
- La significancia se mide por la reducción del error de fijación de precios:

$$SI = \sum_{i=1}^N s_i (|a_i| - |a_i^*|),$$

donde s_i pondera el ruido idiosincrático de cada activo.

- Dos criterios de selección:
 - SI_{ew} : Mayor peso a small stocks.
 - SI_{vw} : Mayor peso a big stocks.

Resultados Empíricos

- Resultado clave: el factor de mercado (MKT) es dominante.
 - Bajo ponderación por valor (SI_{vw}), reduce 44.4% del error de fijación de precios.
 - Resuelve la “paradoja” de MKT: es esencial en acciones grandes, aunque su signo/vigor se diluya en pruebas tradicionales.
- Resultado por Tipo de Ponderación:
 - SI_{ew} → Small stocks: el modelo final converge a FF3: MKT + SMB + HML.
 - SI_{vw} → Large stocks: el modelo final es MKT + QMJ (Quality), absorbiendo RMW (profitability) y HML del FF5.
- Implicación para FF5:
 - QMJ sintetiza el rol de RMW y CMA, mostrando que la “calidad/rentabilidad” es el segundo factor central en grandes empresas.
 - El factor HML (valor) es redundante cuando la calidad está presente, confirmando el hallazgo de FF5.

Criterio SI	Modelo Final	Interpretación
Igualitario (SI_{ew})	MKT + SMB + HML	Small stocks → FF3 domina
Valor (SI_{vw})	MKT + QMJ	Calidad explica big stocks

- 1 Introducción
- 2 Evidencias Iniciales
- 3 Modelos Multifactorial**
 - Momentum
 - Liquidez
 - Skewness
 - Modelo de 5 Factores
 - Lucky Factors
 - Machine Learning**
- 4 Conclusiones

Evidencia Moderna: Machine Learning en Asset Pricing

- **Gu, Kelly & Xiu (2018).** *Empirical Asset Pricing via Machine Learning*
 - Evalúan más de 30 algoritmos (tree-based, regularization, deep learning) para predecir retornos.
 - Los modelos no lineales capturan interacciones complejas entre características (size, value, profitability, momentum, quality).
 - Predicción: los métodos ML superan ampliamente a FF y a modelos lineales; random forests y neural nets lideran.
- **Bryzgalova, Pelger & Zhu (2021).** *Forest Through the Trees: Building Cross-Sections of Stock Returns*
 - Utilizan regularización y ML para identificar factores “esenciales”.
 - Hallan parsimonia: muchos factores del “zoo” son redundantes, similares a versiones ML de FF5 + calidad + fricción.
 - Conclusión: machine learning evita factores espurios y confirma estructuras económicas relevantes.
- **Chen, Pelger & Zhu (2019).** *Deep Learning in Asset Pricing*
 - Redes neuronales no lineales construyen una SDF (factor dominante) de forma flexible.
 - El SDF no lineal supera a FF5, momentum y QMJ al minimizar pricing errors.
 - Resultado: la SDF aprendida permite un único factor “más potente” que combina riesgo, tamaño, calidad y fricciones.

- 1 Introducción
- 2 Evidencias Iniciales
- 3 Modelos Multifactorial
- 4 Conclusiones**

Conclusiones

- La literatura evoluciona desde modelos media–varianza (CAPM) hacia estructuras multifactoriales guiadas por fricciones, preferencias y comportamiento.
- Las anomalías (tamaño, valor, momentum, liquidez, skewness, sentimiento) muestran que el riesgo sistemático no es solo mercado: hay riesgos no lineales, microestructurales y conductuales.
- La proliferación de factores exige rigor estadístico: Lucky Factors (2021) muestra que muchos factores son hallazgos espurios si no se controla el data mining.
- Machine Learning no solo predice mejor: selecciona y combina factores, revelando relaciones no lineales y estructuras económicas profundas. El futuro es parsimonia + flexibilidad.
- La agenda actual combina teoría, microestructura y aprendizaje automático para construir SDFs eficientes, robustos y económicamente interpretables.

¡Muchas Gracias!