Capital Asset Prices
A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk
William F. Sharpe

Fernando Cotrina

Universidad Diego Portales (UDP)

04 de Septiembre del 2025

Contenido

Contenido

Antecedentes

- **Markowitz (1952)**: formaliza la teoría de portafolios e introduce media–varianza como criterio.
- **Tobin (1958)**: Separa el problema de inversión de Markowitz en dos etapas:
  1. Elección de la cartera óptima de activos riesgosos.
  2. Decisión entre esa cartera y el activo libre de riesgo.
- **Hicks (1962):** amplía la idea de Tobin en el marco de comportamiento del inversor.
- **Gordon y Gangolli (1962):** análisis más formal del problema en loterías.

Limitación

Se enfocan en el comportamiento individual del inversionista, pero ninguno construyó una teoría de equilibrio de precios en el mercado bajo riesgo

Motivación

- Persistía un vacío teórico: no existía un modelo que explique cómo se determinan los precios de los activos en un mercado bajo riesgo.
- Los modelos tradicionales (sin riesgo) sirven para explicar el interés puro, pero no cómo se determina la prima de riesgo.
- La diversificación elimina parte del riesgo: entonces, ¿qué tipo de riesgo es realmente relevante para el precio de un activo?

Contribución

Extiende los modelos anteriores para formular una teoría de equilibrio de precios de activos con riesgo.

Contenido

Contenido

Supuestos de Preferencias

- El resultado de cualquier inversión se considera en términos probabilísticos.
- Planteamos la siguiente función de utilidad:

$$U = f(E_w, \sigma_w)$$

Donde:

  - E_w: Valor esperado de la riqueza
  - σ_w: Desviación estándar predicha
- Se asume que:
  - Se prefiere una mayor riqueza futura esperada ($\frac{\partial U}{\partial E_w} > 0$)
  - Se es adverso al riesgo ($\frac{\partial U}{\partial \sigma_w} < 0$).

Supuestos de Preferencias

- Para simplificar el análisis, expresemos su utilidad en términos de retorno esperado:

$$R = \frac{W_t - W_1}{W_1} \quad \Rightarrow \quad W_t = RW_1 + W_1 \quad \Rightarrow \quad U = g(E_R, \sigma_R)$$

- Se puede resumir el modelo gráficamente mediante curvas de indiferencia.
    - Regla: A mayor nivel de utilidad la curva se desplaza hacia abajo y/o hacia la derecha.

Supuestos de Preferencias

- El inversionista elige el plan que lo ubique en la CI más alta.
- La decisión se hace en dos pasos:
  1. Identificar planes de inversión eficientes.
  2. Escoger uno entre ellos.
- Plan es eficiente si no existe otro con:
  - Igual E_R y menor σ_R, o
  - Igual σ_R y mayor E_R, o
  - Mayor E_R y menor σ_R.
- Gráfico: la inversión Z es ineficiente en comparación a B, C y D.

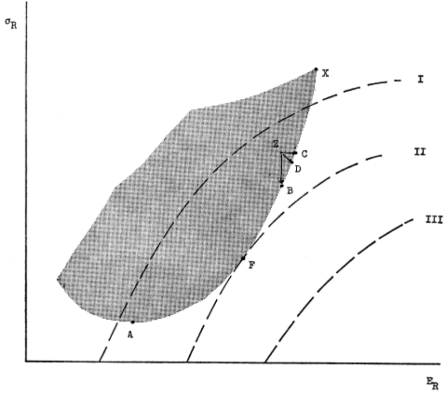

Figure 1: Representación de preferencias.

Contenido

Oportunidades de Inversión

- Considere dos planes de inversión, A y B; la combinación entre ambos resultará en el siguiente valor esperado:

$$E_{R_c} = \alpha E_{R_a} + (1 - \alpha) E_{R_b}$$

- La desviación estándar de la combinación será:

$$\sigma_c = \sqrt{\alpha^2 \sigma_a^2 + (1 - \alpha)^2 \sigma_b^2 + 2\alpha(1 - \alpha) r_{ab} \sigma_a \sigma_b}$$

Donde:

- α: Proporción invertida en el activo A
- r_{ab}: Coeficiente de correlación entre A y B

Relación entre activos

- Correlación entre activos:
  - $r_{AB} = 1$: relación positiva perfecta.
  - $r_{AB} = 0$: sin relación.
  - $r_{AB} = -1$: relación negativa perfecta.
- Gráfico:
  - Línea AB $\rightarrow$ relación positiva.
  - Línea ABZ $\rightarrow$ relación nula.
- **Importante:** La curva de oportunidad de inversión también depende de la correlación.

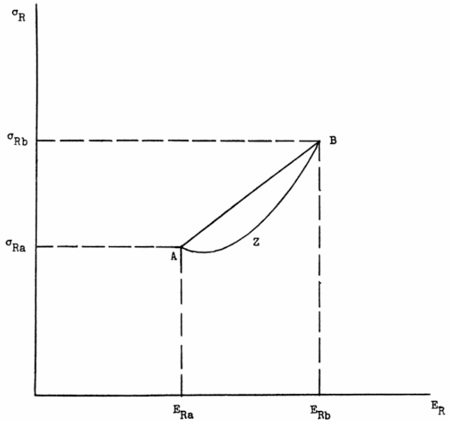

Figure 2: Relación entre activos.

Relación entre activos

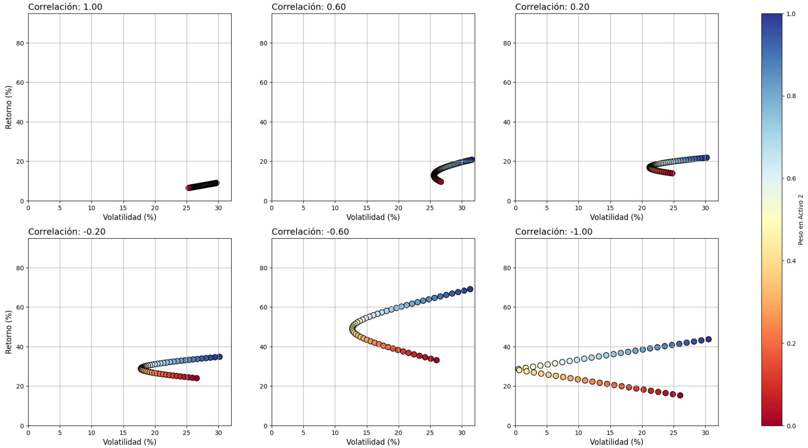

Figure 3: Efecto de la Correlación.

Contenido

Tasa Pura de Interés

- Considere la combinación entre un activo riesgoso A y un activo libre de riesgo P; la combinación entre ambos resultará:

$$E_{R_c} = \alpha E_{R_p} + (1 - \alpha) E_{R_a}$$

Sabiendo que $\sigma_{R_p} = 0$, entonces:

$$\sigma_{R_c} = (1 - \alpha)\sigma_{R_a}$$

- Esto implica que todas las combinaciones están en una línea recta entre el activo libre de riesgo P y el activo riesgoso A.

Relación entre activos

- La línea PA combina el activo libre de riesgo más el activo riesgoso A.
- El punto de tangencia ϕ marca la cartera óptima de riesgosos.
- Si se permite pedir prestado, la frontera se extiende más allá del punto ϕ.
- El problema de inversión se simplifica:
  1. Elegir la cartera óptima de activos riesgosos.
  2. Decidir si pedir prestado o prestar al tipo libre de riesgo.

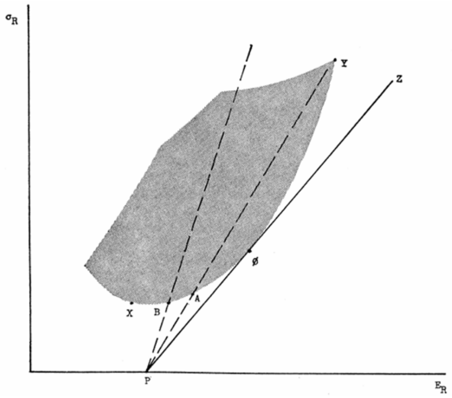

Figure 4: Combinación con el activo no riesgoso.

Contenido

Condiciones de Equilibrio

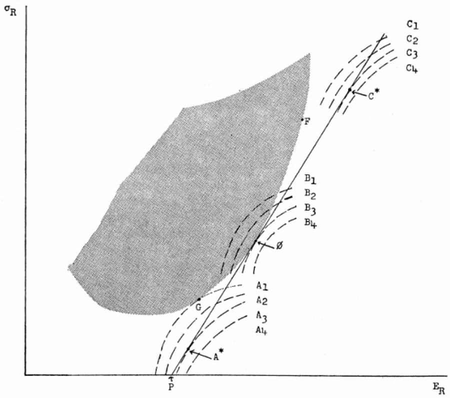

Figure 5: Portafolio Óptimo.

- Suponemos:
  - Tasa de interés única.
  - Expectativas homogéneas.
- De acuerdo a sus preferencias del inversor se elegirá el plan óptimo.

Equilibrio del Mercado:

- Precio de activos demandados $\uparrow \rightarrow E_r \downarrow$
- Precio de activos no demandados $\downarrow \rightarrow E_r \uparrow$
- Se desplaza la frontera de oportunidades hasta volverse lineal.

Condiciones de Equilibrio

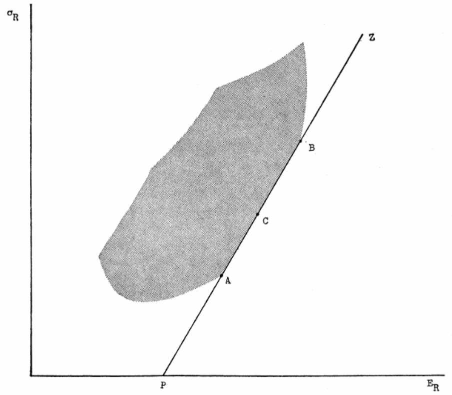

Figure 6: Equilibrio de Mercado.

- En equilibrio: todos los activos contribuyen a alguna combinación eficiente sobre la Capital Market Line.
- Múltiples combinaciones de activos riesgosos son eficientes, pero todas están perfectamente correlacionadas.

Contenido

Activo i y combinación eficiente g

- Definamos:
  - i: activo individual.
  - g: combinación eficiente de activos.
  - g': combinación factible donde i no está presente ($\alpha < 0$).
- La curva igg' se traza tangente a la línea del mercado de capitales.
  - g representa la combinación eficiente.
  - Es continua en ese punto.
- Se establece que los rendimientos de los activos incluidos en g están ligados al riesgo sistemático dentro de la combinación eficiente.

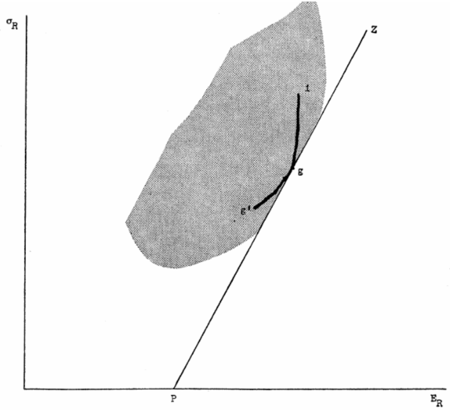

Figure 7: Frontera de decisión.

Riesgo Sistemático y No Sistemático

- Relación entre activo i y combinación g:

$$R_i = \alpha_i + \beta_{ig} R_g + \varepsilon_i$$

- Descomposición del riesgo total (σ_i^2):

$$\sigma_i^2 = \underbrace{\beta_{ig}^2 \sigma_g^2}_{\text{Riesgo sistemático}} + \underbrace{\sigma^2(\varepsilon_i)}_{\text{Riesgo no sistemático}}$$

- **Interpretación**: Todos los activos en g deben tener valores de β_{ig} y E_R.

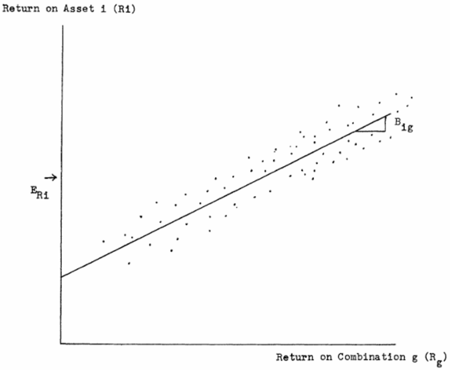

Figure 8: Relación lineal entre activo y portafolio.

Generalización del Modelo

- No es necesario restringirse a una sola combinación eficiente g.
- Puede elegirse cualquier combinación eficiente (g, g^*) o incluso una variable perfectamente correlacionada con ellas.
- Esto se justifica porque:
  - Los rendimientos de todas las combinaciones eficientes están perfectamente correlacionados.
  - La sensibilidad de un activo frente a g o g^* resulta equivalente.

Contenido

Implicancia del Modelo

- **Formalización del CAPM:** Introduce la relación lineal entre riesgo sistemático (β) y rendimiento esperado.
- **Separación de Riesgos:** Diferencia entre riesgo sistemático (no diversificable) y riesgo no sistemático (diversificable).
- **Nacimiento de la (β):** Se convierte en la medida estándar de sensibilidad de un activo frente al mercado.
- **Portafolio de mercado:** Todos los inversionistas deberían mantener una mezcla entre el activo libre de riesgo y el portafolio de mercado.
- **En la práctica:** Dio fundamento teórico al uso de índices amplios (ej. S&P 500) como representación del portafolio de mercado y benchmark de referencia.

¡Muchas Gracias!

Fernando Cotrina