Modelos ARMA y ARIMA

Adriana Abrego
Analítica Financiera

En esta sección aprenderás dos tipos de modelos de series de tiempo financieras como lo son los modelos ARMA y ARIMA. Para tal fin, comenzaremos entendiendo el concepto de estacionariedad, ya que una serie de tiempo es estacionaria si sus propiedades no dependen del momento en que se observa dicha serie. Lo que nos permite introducirnos a la definición del modelo ARMA que es débil-estacionario y su derivación el modelo ARIMA, el cual combina la diferenciación de una serie con la auto regresión y un modelo de media móvil. Con base en estas definiciones, aprenderemos a identificar estos dos modelos y terminaremos comprendiendo el modelo GARCH como una derivación del modelo ARMA.

Modelo ARMA

El modelo $ARMA(p, q)$ <<*AutoRegressive Moving Average* >> es un modelo autorregresivo de media móvil, el cual combina las propiedades de un modelo $AR(p)$ como de un modelo $MA(q)$ de forma concisa. En detalle, un modelo autorregresivo ($AR(p)$) pronostica la variable de interés por medio de una combinación lineal de los valores pasado de la misma variable. El término autorregresivo se deriva de correr una regresión de la variable contra sí misma (Hyndman & Athanasopoulos, 2018). Este modelo es ampliamente utilizado para pronosticar el rendimiento de los activos debido al hecho de que los rendimientos mensuales presentan autocorrelación significativa de un rezago. Por otra parte, un modelo de media móvil ($MA(q)$)pronostica la variable de interés usando un promedio móvil ponderado de los errores (o innovaciones) pasadas. Por otra parte, un enfoque de este modelo se centra en tratarlo como una extensión de una serie de ruido blanco (Tsay, 2005). El modelo MA es útil para modelar el retorno de una serie financiera, sin embargo, sus aplicaciones más comunes son en el modelamiento de los pequeños cambios del término del error (denominado innovaciones). Por ejemplo, un modelo MA trata de contestar cómo cambia el error dadas las microestructuras en los cambios de precios en los mercados. En detalle, cómo los procesos de puja << *bid and ask*>> hacen que los precios de hoy o mañana (dependiendo del nivel del MA) se afecten ante cambios de ayer.

Concepto de Estacionariedad

Para entender los modelos ARMA y ARIMA, es importante hablar del concepto de estacionariedad. Una serie de tiempo es estacionaria si sus propiedades no dependen del momento en que se observa una serie (Hyndman & Athanasopoulos, 2018). Además, esta estacionariedad puede ser fuerte o débil. Una serie de tiempo presenta estacionariedad débil si la media y la varianza son constantes. Además, los rezagos, conforme se incrementan hacen que la dependencia (medida como la correlación) tienda a cero. En otros términos, los rezagos están en función de la separación y no del tiempo. En síntesis, una serie x_t se dice que es débilmente estacionaria o simplemente estacionaria si cumple con estas tres propiedades:

$$E(x_t) = E(x_{t+1}) = \cdots = E(x_{t+k}) = \mu \;\; (Media\ constante)$$

$$Var(x_t) = Var(x_{t+1}) = \cdots = Var(x_{t+k}) = \sigma \;\; (Varianza\ constante)$$

$$Cov(x_t, x_{t+k}) = \gamma_k$$

Adicionalmente, para que una serie de tiempo presente estacionariedad fuerte tiene que cumplir que la distribución conjunta de $(x_{t_1}, \ldots, x_{t_k})$ es la misma que la de $(x_{t_1+h}, \ldots, x_{t_k+h})$. Lo que significa que la forma en la que se distribuyen los datos en la serie a lo largo del tiempo, son exactamente iguales.

Gráficamente, una serie es estacionaria si presenta un patrón similar al de la gráfica de color verde en la Figura 1. De lo contrario, como se muestran en las gráficas de color rojo, la serie no es estacionaria, debido a la presencia de una tendencia significativa o debido entre otras cosas, a una volatilidad no constante.

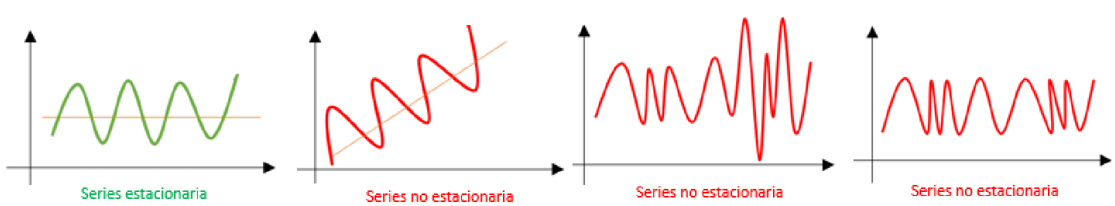

Figura 1. Propiedades de una serie estacionaria.

Elaboración propia

Modelos ARMA y ARIMA

Así, el concepto de estacionariedad es importante debido a que el modelo $\boldsymbol{ARMA(p,q)}$ es débil-estacionario, es decir, podemos determinar el orden y el valor de los parámetros AR y MA de su modelo, teniendo una serie estacionaria. Algunas herramientas que ayudan en este propósito es la herramienta de EACF o Extended Autocorrelation Function (Tsay, 2010), que abordaremos más adelante en esta lectura.

Introduciéndonos más en la notación de los modelos ARMA(p,q), es importante introducir la notación del operador de rezago -el cual se denota con la letra L (del inglés lag)- ya que la notación resulta útil cuando se trabaja con rezagos de series de tiempo. Así, el operador de rezago se define como:

$$Ly_t = y_{t-1}$$

En palabras, el operador de rezago tiene el efecto de retroceder los datos un periodo. Por ejemplo, la forma de escribir una diferencia seria la siguiente:

$$y'_t = y_t - y_{t-1} = (1-L)y_t$$

Una serie de tiempo x_t sigue un modelo $ARMA(p,q)$ si

$$x_t = \phi_0 + \phi_1 x_{t-1} + \cdots \phi_p x_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \theta_q a_{t-q}$$

Donde a_t es el ruido blanco o error del modelo, la parte sombreada en azul corresponde al componente $AR(p)$ cuyo rezago máximo se denota con la letra p, y la parte coloreada de amarillo es el componente $MA(q)$ cuyo máximo rezago de innovaciones está denotado por la letra q. La constante del modelo es $\boldsymbol{\phi_0}$ es la que sirve para derivar la media del proceso.

La forma general de un modelo $ARMA(p,q)$ se escribe como:

$$x_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^{p} \phi_i x_{t-i} + a_t - \sum_{i=1}^{q} \theta_i a_{t-i}$$

Usando la notación del operador de rezago, suponiendo el primer rezago:

$$x_{t-1} = Lx_{t-t} \text{ o}$$

$$a_{t-1} = La_{t-t}$$

El segundo:

$x_{t-2} = L^2 x_{t-t}$ o, $a_{t-2} = L^2 a_{t-t}$ .... etc, hasta el último, p:
$x_{t-p} = L^p x_{t-t}$ o $a_{t-q} = L^q a_{t-t}$

El modelo, si lo factorizamos para la parte de AR y MA se puede escribir como:

$$(1\text{-}\phi_1 L\text{-}\ldots\phi_p L^p)\, x_t = \phi_0 + (1 - \theta_1 L - \cdots - \theta_q L^q)\, a_t$$

El polinomio sombreado con azul es el polinomio característico de un modelo $AR(p)$ y el coloreado en amarillo es el polinomio característico de un modelo $MA(q)$. Algo muy relevante es que si todas las soluciones de la ecuación característica $(1\text{-}\phi_1 L\text{-}\ldots\phi_p L^p)$, es decir, si sus raíces son mayores en valor absoluto a uno, se dice la serie es débil estacionaria.

Un ejemplo es el modelo $ARMA(1,1)$ cuya ecuación es:

$$x_t - \phi_1 x_{t-1} = \phi_0 + a_t - \theta_1 a_{t-1}$$

Modelo ARIMA(p,d,q)

Como se ha comentado en esta lectura, una derivación del modelo $ARMA(p, q)$ es el modelo $ARIMA(p, d, q)$ el cual combina la diferenciación de una serie con la autorregresión y un modelo de media móvil. Se le conoce diferenciación al proceso de calcular las diferencias entre observaciones consecutivas $(x_t - x_{t-1})$ y se una forma de convertir una serie no estacionaria en una serie estacionaria.

Las variables explicativas del modelo incluyen tanto los rezagos de la serie (donde p es el orden de los rezagos de la serie) como los errores pasados (q es el orden del máximo error pasado), así como en el modelo $ARMA(p, q)$. La única diferencia es que grado diferenciación de la serie (d).

Identificación Modelos ARMA(p,q) y ARIMA(p,d,q)

En la identificación de un proceso $ARMA(1,1)$ comúnmente se hace uso mediante los gráficos ACF y el PACF. Sin embargo, estos llegan a ser no muy eficientes para determinar el orden de un modelo ARMA. Por lo cual, Tsay y Tiao (1984) proponen un nuevo enfoque que utiliza función de autocorrelación extendida (EACF) para especificar el orden de un proceso ARMA. Este enfoque consiste en la idea de que, si podemos obtener una estimación consistente del componente $AR(p)$, en un modelo $ARMA(p,q)$, entonces podemos derivar el componente $MA(q)$. Así, de la serie $MA(q)$ derivada se hace uso del ACF para identificar el orden (q) del componente $MA(q)$.

A través del paquete library(TSA) es posible visualizar los resultados en una tabla, donde los renglones indica el nivel de AR(p) y las columnas los niveles de MA(q). La clave en la identificación del nivel p y q es la identificación de un triángulo de "o" con un vértice superior izquierdo. Ese será el nivel del modelo ARMA(p,q).

Por ejemplo, en LA Fig1 se muestra el resultado de un EACF de una serie de rendimientos logarítmicos del índice SP&500 con fechas del 2 de marzo al 31 de julio del 2010.

	MA					
AR	0	1	2	3	4	5
0	X	X	X	X	X	X
1	X	O	O	O	O	O
2	*	X	O	O	O	O
3	*	*	X	O	O	O
4	*	*	*	X	O	O
5	*	*	*	*	X	O

Fig 2. Resultado EACF, candidatos ARMA(p,q) sería ARMA(1,1)

Si se observa la tabla en la Figura 2, se puede observar que el vértice izquierdo superior está ubicado en el renglón 1 y la columna 1, dando como candidato ARMA(1,1).

Otro ejemplo es el siguiente, que muestra el resultado de R-Studio:

AR/MA	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	x	o	o	o	o	o	o	o	x	o	o
1	x	o	o	o	o	o	o	o	o	x	o
2	x	x	o	o	o	o	o	o	o	o	o
3	x	x	x	o	o	o	o	o	o	o	o
4	x	x	x	o	o	o	o	o	o	o	o
5	x	x	o	o	o	o	o	o	o	o	o
6	x	x	o	x	o	x	o	o	o	o	o
7	x	x	o	x	o	x	o	o	o	o	o
8	x	x	o	x	x	x	x	o	o	o	o
9	x	x	o	x	x	x	x	o	x	o	o
10	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	o

Fig 3. Resultado EACF, candidatos ARMA(p,q) sería ARMA(0,1)

En la figura 3, se observa que a pesar que no existe un vértice igual al de la figura 2; sin embargo, el criterio establece que una opción de modelo candidato sería un MA(1), pues este punto representa la esquina superior de un vértice superior izquierdo. Esta posición está en el renglón 0 y columna 1.

El proceso para derivar los órdenes p y d será muy similar al proceso que emplea el ARMA. En el caso de ARIMA, se identifica el orden de integración de la serie, una vez estacionaria, se identifican los parámetros p y d. Para la determinación de los parámetros de los procesos AR y MA, a diferencia del modelo ARMA, se emplean los datos de la serie no estacionaria, especificando en nivel de integración.

El término de error por su parte de cualquiera de estos modelos debe ser independiente e idénticamente distribuidos o iid; lo que significa que los residuales deberán ser independientes o no estar correlacionados, tener la misma distribución de probabilidad con una media de cero y varianza constante u homocedástica.

Modelos de Volatilidad Heterocedástica

Por otro lado, otra derivación de los modelos $ARMA(p,q)$ son los modelos $GARCH(p,q)$, que surgieron para modelar la variación de la volatilidad, es decir, la volatilidad que no es homogénea en el tiempo o que es heterocedástica. Así, este modelo plasma el comportamiento de la varianza, la cual cambia en función del tiempo y que presenta estructuras de dependencia; es decir, varianzas condicionales.

Para poder identificar si una serie presenta varianza heterocedástica, se debe primero modelar el comportamiento de sus rendimientos, por ejemplo, un modelo ARMA(p,d). Una vez obtenido el modelo, se procede a analizar los residuos del modelo de ajuste. En estos, se busca identificar un efecto ARCH.

Los modelos ARCH involucran así, ecuaciones con funciones cuadráticas de los valores de los residuos históricos, o choques cuadráticos pasados. Estos choques, cuando son grandes, son los que inducen altos valores de varianzas condicionales:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \ldots + \alpha_m a_{t-m}^2$$

$a_t = \sigma_t \varepsilon_t$

Donde:

a_t: residuos del modelo de rendimiento medio. Se divide en:

ε_t, es una secuencia de variables aleatorias (v.a) e independientes e idénticamente distribuidas (iid),σ_t que es la desviación estándar condicional o dependiente del tiempo.

Ejemplo, un ARCH(1) es:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2$$

$$Con\ \alpha_0 > 0 \qquad \text{y} \qquad 0 \leq \alpha < 1 \qquad y \qquad \varepsilon_t \sim iid(0,1)$$

Donde a_{t-1}^2 es el primer rezago de la varianza no condicional, σ_t^2 es la varianza condicional y ε_t es el término de error antes comentado.

Esto se traduce que, cuando hay grandes cambios en los valores de las series, tienden a ser seguidos por otros choques, o clústeres de volatilidad.

Este efecto ARCH establece así un efecto de varianza no homogénea en el tiempo. Usualmente, se obtiene el cuadrado de los residuos y se identifica a través de una gráfica PACF de los mismos, el nivel de relación de la varianza. Si el nivel de los rezagos es muy alto, ejemplo, ARCH(9), una consideración es el tomar términos recurrentes de la varianza, formando así modelos de la familia GARCH(p,d). Así, un modelo $GARCH(p,q)$ es un modelo autorregresivo generalizado que a través de la varianza condicional captura la volatilidad de los rendimientos de los activos y se define como:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \, \varepsilon_{i-1}^2 \; + \sum_{i=1}^{p} \beta_j \, \sigma_{t-j}^2$$

Con $\alpha_0 > 0\,, \alpha, \beta \geq 0 \quad \text{y} \quad \alpha + \beta < 1$ y $\varepsilon_t \sim iid(0,1)$

Referencias biliográficas

D. (2018, 26 junio). Series estacionarias: Por qué son importantes para trabajar con modelos. ESTRATEGIAS DE TRADING. https://estrategiastrading.com/series-estacionarias/

Golyandina, N., Korobeynikov, A. & Zhigljavsky, A. 2018. Singular Spectrum Analysis with R. Springer

Hyndman, R.J., & Athanasopoulos, G. (2018) ARIMA models. En R.J & G. Forecasting: principles and practice, 2nd edition, OTexts: Melbourne, Australia. OTexts.com/fpp2. https://otexts.com/fpp2/

Jurgen, E. (2019, 1 mayo). RPubs - Estacionariedad débil y Fuerte. Estacionariedad Fuerte y Débil. https://rpubs.com/elias_jurgen/492089

Rodó, P. (2020a, febrero 5). Modelo GARCH. Economipedia. [*https://economipedia.com/definiciones/modelo-garch.html*](https://economipedia.com/definiciones/modelo-garch.html)

Rodó, P. (2020b, febrero 6). Modelo ARMA. Economipedia. [*https://economipedia.com/definiciones/modelo-arma.html*](https://economipedia.com/definiciones/modelo-arma.html)

Tsay, R. S. (2005). Analysis of financial time series (Vol. 543). John Wiley & sons. Chicago, Estados Unidos.

Tsay, R. S., and Tiao, G. C. (1984). Consistent Estimates of Autoregressive Parameters and Extended Sample Autocorrelation Function for Stationary and Nonstationary ARMA Models. Journal of the American Statistical Association, 79, 84–96