Estimaciones de Riesgo Extremas

Fernando Cotrina

Marzo 2025

I. Supuesto de Normalidad en Retornos Financieros

Una suposición común en modelos financieros clásicos (como CAPM, Black-Scholes, etc.) es que los retornos de los activos financieros siguen una **distribución normal** o **gaussiana**. Esta hipótesis permite derivar fórmulas analíticas simples, pero no siempre se ajusta bien a los datos reales.

Implicaciones de normalidad:

- La mayoría de los retornos se concentran alrededor de la media.
- Eventos extremos (grandes ganancias o pérdidas) son poco frecuentes.
- La distribución es simétrica: Skewness = 0.
- La curtosis es 3: Kurtosis = 3.

Pero en los mercados financieros reales:

- Se observan **colas gruesas** (frecuencia alta de eventos extremos).
- La distribución puede ser **asimétrica** (skewed).
- Esto justifica el uso de modelos más flexibles y medidas de riesgo que no dependan exclusivamente de la normalidad.

II. Asimetría o Skewness

La **skewness** o **coeficiente de asimetría** mide la falta de simetría en una distribución de probabilidad respecto a su media:

$$S(X) = \frac{\mathbb{E}[(X-\mu)^3]}{\sigma^3}$$

Donde:

- $\mu = \mathbb{E}(X)$: media.
- $\sigma = \sqrt{\mathbb{E}[(X-\mu)^2]}$: desviación estándar.

Interpretación:

- $S = 0$: distribución simétrica (ej. normal).
- $S > 0$: cola más larga a la derecha (posibles ganancias extremas).
- $S < 0$: cola más larga a la izquierda (posibles pérdidas extremas).

III. Curtosis o Kurtosis

La **kurtosis** mide la propensión de una distribución a generar valores extremos. Está relacionada con la concentración de probabilidad en las colas:

$$K(X) = \frac{\mathbb{E}[(X-\mu)^4]}{\sigma^4}$$

Interpretación:

- $K = 3$: distribución normal (mesocúrtica).
- $K > 3$: **leptocúrtica** — colas más pesadas.
- $K < 3$: **platicúrtica** — colas más ligeras.

Para comparar con la normal, se utiliza la **exceso de curtosis**:

$$\text{Exceso} = K - 3$$

IV. Prueba de Jarque-Bera (JB)

Evalúa si una muestra de datos se ajusta a una distribución normal, combinando la skewness y la kurtosis:

$$JB = \frac{n}{6}\left(S^2 + \frac{(K-3)^2}{4}\right)$$

Donde:

- n: número de observaciones.
- S: skewness.
- K: kurtosis.

Hipótesis:

- H_0: los datos siguen una distribución normal.
- H_1: los datos no siguen una distribución normal.

Si JB excede el valor crítico (según la χ^2 con 2 grados de libertad), se rechaza H_0.

V. Semivolatilidad (o Semidesviación)

La **semivolatilidad** es la desviación estándar calculada sólo sobre los retornos que están por debajo de un umbral dado, reflejando la preocupación por pérdidas:

$$\sigma_{\text{semi}} = \sqrt{\frac{1}{N_{\text{semi}}} \sum_{R_t < \tau} (R_t - \mu)^2}$$

Donde:

- R_t: retorno observado.
- μ: media del retorno (o 0 si se desea riesgo absoluto).
- τ: umbral (puede ser μ o 0).
- N_{semi}: cantidad de R_t que cumplen $R_t < \tau$.

VI. Valor en Riesgo (VaR)

El **Value-at-Risk (VaR)** mide la pérdida máxima esperada para un nivel de confianza α durante un periodo de tiempo:

$$\mathrm{VaR}_\alpha = -\inf\{x \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(R \le x) \ge 1 - \alpha\}$$

Interpretación: Con probabilidad α, la pérdida no será peor que el VaR.

Ejemplo: Si $\mathrm{VaR}_{0.95} = 0.04$, entonces hay un 5% de probabilidad de perder más del 4% en el periodo.

Nota: el signo negativo se utiliza para reportar la pérdida como valor positivo.

VII. Valor en Riesgo Condicional (CVaR o Expected Shortfall)

El **Conditional VaR (CVaR)** estima la pérdida promedio *más allá del VaR*. También se conoce como **expected shortfall**:

$$\mathrm{CVaR}_\alpha = -\mathbb{E}[R \mid R < -\mathrm{VaR}_\alpha]$$

Ventajas:

- Mide tanto la frecuencia como la magnitud de las pérdidas extremas.
- Es coherente (en el sentido de las medidas de riesgo coherentes de Artzner et al.).

VIII. Métodos para Estimar VaR y CVaR

1. Método Histórico (no paramétrico)

- Ordenar los retornos históricos. Tomar el percentil $1 - \alpha$.
- El CVaR es el promedio de las observaciones que están por debajo del VaR.

Ventaja: no depende de suposiciones de distribución.

2. Método Paramétrico (Normal)

Asume $R \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Entonces:

$$\mathrm{VaR}_\alpha = -(\mu + z_\alpha \cdot \sigma)$$

$$\mathrm{CVaR}_\alpha = -\left(\mu + \frac{\phi(z_\alpha)}{1-\alpha} \cdot \sigma\right)$$

Donde:

- z_α: cuantil $1 - \alpha$ de la normal estándar.
- $\phi(\cdot)$: densidad de la normal estándar.

3. Método de Cornish-Fisher (semi-paramétrico)

Corrige los cuantiles de la normal para incorporar skewness S y kurtosis K:

$$\tilde{z}_\alpha = z_\alpha + \frac{1}{6}(z_\alpha^2 - 1)S + \frac{1}{24}(z_\alpha^3 - 3z_\alpha)(K - 3) - \frac{1}{36}(2z_\alpha^3 - 5z_\alpha)S^2$$

Luego:

$$\mathrm{VaR}_\alpha = -(\mu + \tilde{z}_\alpha \cdot \sigma)$$

Este método es útil cuando la distribución de retornos presenta colas gruesas o asimetría (por ejemplo, t-student).