JUEGOS ESTÁTICOS
INFORMACIÓN COMPLETA

Teoría de Juegos

- Estudio formal de las situaciones de conflicto que enfrentan diversos agentes (jugadores: empresas, trabajadores, gobiernos, entre otros).
- Tipos: Juegos cooperativos y no cooperativos (Juegos no cooperativos - JYC).
- Importa no solamente lo que un jugador decida sino también los de los demás.

Notaciones y especificaciones:

Jugador 1: jugador fila
Jugador 2: jugador columna

Y suponemos, en este caso, que la información es de dominio público.

- La representación de un juego finito G está representado en forma normal o estratégicamente por:
  - El conjunto de jugador, $J = \{1,2,\dots,n\}$
  - El espacio (conjunto) de estrategias de cada jugador: S_i finito con $i \in J$
    - La combinación o perfil de estrategias:

      A cada n-upla $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$, donde cada s_i pertenece a S_i

      El conjunto de todos los perfiles s es:

$$S = S_i * S_2 * S_3 * \dots * S_n$$

    - La combinación de estrategias jugadas por los demás jugadores es:

$$s_{-i} = (s_1, s_2, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$$

      El conjunto de todas las combinaciones s_{-i} es:

$$S = S_1 * S_2 * \dots * S_{i-1} * S_{i+1} * \dots * S_n$$

  - La función de pagos (utilidad, beneficio) de cada uno

$$u_i : S_1 * S_2 * \dots * S_n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(s_1, \dots, s_n) \rightarrow u_i(s_1, \dots, s_n)$$

    Es la utilidad que al jugador i le reporta el resultado del juego cuando se juega la jugada $(s_1, \dots, s_n)$.

  - El juego especificado puede denotarse $G = \{S_1, S_2, \dots, S_n; u_1, u_2, \dots, u_n\}$

Información de dominio público

- Decimos que una información es de dominio público o que es conocimiento común de un conjunto de jugadores si ocurre lo siguiente:
  - Todos los jugadores saben o conocen la información.
  - Todos los jugadores saben que todos ellos saben la información.
  - Todos los jugadores saben que todos ellos saben que todos ellos saben la

Ejemplo 1: (Dilema del prisionero)

La policía arresta a dos sospechosos de un delito. No cuentan con evidencia suficiente para condenarlos, salvo que uno de ellos confiese. Asimismo, les encierran en celdas separadas e informan las consecuencias de las decisiones que adopten:

- Si ninguno confiesa, se les condenará por un delito menor y a una pena de 1 mes.
- Si ambos confiesan: pena de 6 meses en cárcel.
- Si uno confiesa y el otro no: el que confiesa será liberado y el otro se va 9 meses de prisión efectiva.

Representación en forma normal

- Jugadores: Preso 1 y Preso 2. $\rightarrow, J = \{1, 2\}$.
- Estrategias puras de los jugadores:
  - Preso 1: no confesar, confesar. Denotemos $S_1 = \{nc, co\}$
  - Preso 2: no confesar, confesar. Denotemos $S_2 = \{nc, co\}$
- Pagos:

Para preso 1:	Para preso 2:
$u_1(nc, nc) = -1$	$u_2(nc, nc) = -1$
$u_1(nc.co) = -9$	$u_2(nc.co) = 0$
$u_1(co, nc) = 0$	$u_2(co, nc) = -9$
$u_1(co, co) = -6$	$u_2(co, co) = -6$

Especificando todo esto, podemos representar el juego estático en forma normal:

En cada recuadro se ubica un par ordenado de números, que se corresponden con los pagos para el Preso 1 y el Preso 2. Por ejemplo, el par de números (−9,0) indica que el pago para el Preso 1 por *no confesar* es -9, mientras que el del Preso 2 que

		Preso 2	
		No confesar	*Confesar*
Preso 1	*No confesar*	$-1,-1$	$-9,0$
	Confesar	$0,-9$	$-6,-6$

Ejemplo 2: (La caza del ciervo)

Cada miembro de un grupo de cazadores tiene dos opciones: cazar un ciervo o una liebre. Si todos van tras el ciervo y lo cazan, se lo repartirán en partes iguales. Si algún cazador dedica su energía en cazar la liebre, el ciervo escapa y la liebre le pertenecerá solo a quien la cazó. Cada cazador prefiere una porción del ciervo a tener una liebre.

Representación en forma normal

- Jugadores: los cazadores.
- Conjunto de estrategias para cada jugador: {Ciervo, Liebre}.
- Preferencias: Para cada jugador, el perfil de estrategias para el cual todos eligen es *Ciervo*, seguido de cualquier perfil en el cual ellos eligen *Liebre* y este es seguido por cualquier perfil en el cual un cazador elige *Ciervo* y otro elige *Liebre*.

En cada recuadro se ubica un par ordenado de números, que se corresponden con la satisfacción para cada cazador. Por ejemplo, el par de números (1,0) indica que la satisfacción para el cazador 1 por cazar la *Liebre* es 0, mientras que al otro por cazar el

		J_2	
		Ciervo	*Liebre*
J_1	*Ciervo*	$2,2$	$0,1$
	Liebre	$1,0$	$1,1$

Idea

En casos como el ejemplo 2, donde no se proporcionan los pagos exactos, podemos deducir los pagos basándonos en las preferencias descritas en la explicación del juego. Es decir, podemos asignar valores de pago que sean consistentes con el sentido general del

¿Cómo solucionamos estos juegos?

Funciones de mejor respuesta – Dominancia Estratégica

Funciones de mejor respuesta

- La estrategia $s_i \in S_i$ es la mejor respuesta para el jugador i a las estrategias de sus oponentes $s_{-i} \in S_{-i}$, si para cada $s_i \in S_i$ se cumple:

$$u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i', s_{-i})$$

Un jugador racional que cree que sus oponentes están jugando algún $s_{-i} \in S_{-i}$ siempre elegirá una mejor respuesta a s_{-i}.

- La función B_i, dada por:

$$B_i(s_{-i}) = \{s_i \in S_i : u_i(s_i, s_{-i}) \geq u(s_i', s_{-i}), \forall\ s_i' \in S_i\}$$

Se denomina la mejor respuesta del jugador i.

Dominancia estratégica: estricta o débil

- Un jugador racional no jugará una estrategia que esté estrictamente dominada.
- Sea G un juego de forma normal y un jugador i con estrategias $s_i{}'$ y s_i'':

▪ Una estrategia s_i' está estrictamente dominada por la estrategia s_i'', si se cumple:

$$u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, s_i', s_{i+1}, \dots, s_n) < u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, s_i'', s_{i+1}, \dots, s_n)$$

Para cada $(s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n) \in S_1 * \dots * S_{i-1} * S_{i+1} * \dots * S_n$.

▪ Una estrategia s_i' está débilmente dominada por la estrategia s_i'', si se cumple:

$$u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, s_i', s_{i+1}, \dots, s_n) \leq u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, s_i'', s_{i+1}, \dots, s_n)$$

Para cada $s_{-i} \in S_{-i}$, pero con desigualdad para algún $s_{-i} \in S_{-i}$.

Eliminación iterativa

1. Eliminación Iterativa Estricta (EIE):
    - De cada uno de los jugadores, y a la vez, se eliminan todas las estrategias que estén estrictamente dominadas en el juego inicial G. Se construye el juego reducido G_1 que resulta de tal eliminación. Después hacemos lo mismo para G_1 y así sucesivamente.
2. Eliminación Iterativa Débil (EID):
    - De cada uno de los jugadores, y a la vez, se eliminan todas las estrategias que estén débilmente dominadas en el juego inicial G. Se construye el juego reducido G_1 que resulta de tal eliminación. Después hacemos lo mismo para G_1 y así sucesivamente.

Observaciones:

- Que los jugadores sean racionales es información de dominio público.
- Consecuencia: No podemos dar predicciones acerca de la evolución del juego.
- Posible solución: Equilibrio de Nash.

Halle las funciones de mejor respuesta para cada jugador

Ejemplo 5: (U-M-D vs. L-C-R)

		J_2		
		L	C	R
J_1	U	7, 7	4, 2	1, 8
	M	2, 4	5, 5	2, 3
	D	8, 1	3, 2	0, 0

Para J_1:

$$B_1(L) = \{D\}$$
$$B_1(C) = \{M\}$$
$$B_1(R) = \{M\}$$

Para J_2:

$$B_2(U) = \{R\}$$
$$B_2(M) = \{C\}$$
$$B_2(D) = \{C\}$$

Ejemplo 6: (Batalla de los sexos)

		$Hombre$	
		C	F
$Mujer$	C	2, 1	0, 0
	F	0, 0	1, 2

Para $Mujer$:

$$B_M(C) = \{C\}$$
$$B_M(F) = \{F\}$$

Para $Hombre$:

$$B_H(C) = \{C\}$$
$$B_H(F) = \{F\}$$

Halle las estrategias estricta y débilmente dominadas

Ejemplo 7: (Dilema del Prisionero)

		$Preso\ 2$	
		$Callar$	$Confesar$
$Preso\ 1$	~~$Callar$~~	~~-1, -1~~	~~-5, 0~~
	$Confesar$	0, -5	-4, -4

- Para el Preso 1, la estrategia "Callar" está dominada estrictamente por la estrategia "Confesar":

$$u_1(callar, s_2) < u_1(Confesar, s_2), para\ cada\ s_2 \in S_2$$

- Para el Preso 2, la estrategia "Callar" está dominada estrictamente por la estrategia "Confesar":

$$u_2(s_1, callar) < u_2(s_1, Confesar), para\ cada\ s_1 \in S_1$$

- Por *eliminación Iterativa estricta* tenemos:

		Preso 2
		Confesar
Preso 1	Confesar	$-4,\ -4$

- La solución del juego es la estrategia $(Confesar, Confesar)$.

Ejemplo 8: (U-M-D vs. L-C-R)

			J2	
		L	C	R
	U	~~6,8~~	~~2,6~~	~~8,2~~
J1	M	8,2	4,4	9,5
	D	~~8,10~~	~~4,6~~	~~6,7~~

Para el jugador 1:

- La estrategia U, está dominada estrictamente por M.
- La estrategia D, está dominada débilmente por M.

Para el jugador 2:

- La estrategia L y C, están dominadas estrictamente por R.

-

		J2
		R
J1	M	9,5

Equilibrio de Nash – Estrategias Puras

- Sea $G = \{S_1, \dots, S_n; u_1, \dots, u_n\}$ un juego en forma normal.
- El perfil de estrategias $(s_1^*, \dots, s_n^*)$ es un Equilibrio de Nash (EN), si para cada jugador i:

$$u_i(s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*) \geq (s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*)$$

  para todo $s_i \in S_i$.

  En otros términos, s_i^* es una solución de

$$\underset{s_i \in S_i}{Máx}\, u_i(s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*)$$

- Así el Equilibrio de Nash sería un perfil de estrategias $s^*(s_1^*, \dots, s_n^*) \in S$, s i para cada jugador i, s_i^* es la mejor respuesta a s_{-i}^*

$$u_i(s_1^*, s_{i-1}^*) \geq u_i(s_1, \dots, s_{i-1}^*), \text{para cada } s_i \in S_i$$

Correspondencia de respuesta óptima (mejor respuesta)

- En el juego $G = \{S_1, \dots, S_n; u_1, \dots, u_n\}$, y para cada jugador i.
- Llamamos correspondencia de respuesta óptima de dicho jugador a la regla o correspondencia que asigna el conjunto $R_i(s_{-i})$ de estrategia i que son respuesta óptima a s_{-i}. Es decir, que cumplen:

$$s_i' \in R_i(s_{-i}) \text{ sí y solo sí}$$

$$u_i(s_1, s_2, \dots, s_{i-1}, s_i', s_{i+1}, \dots, s_n) \geq (s_1, s_2, \dots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \dots, s_n) \text{ para todo } s_i \in S_i$$

- Podemos ahora automatizar el cálculo de los EN mediante un proceso en dos etapas:
  1. Para cada jugador i, y para cualquier conjetura que pueda formarse sobre la actuación de los demás jugadores (o lo que es lo mismo, para cualquier combinación de estrategias de éstos) se calcula la estrategia de respuesta óptima de i. De este modo tenemos la correspondencia de respuesta óptima de cada jugador.
  2. Identificamos los EN como los perfiles estratégicos que son puntos de intersección de todas las correspondencias de respuesta óptima.

Comentarios

- Si analizamos detenidamente la definición de equilibrio de Nash, veremos que incluye dos requisitos indispensables:
  1. Cada jugador debe jugar una respuesta óptima ante una conjetura (o creencia) relativa al comportamiento del resto de jugadores.
  2. Las conjeturas de cada jugador sobre el comportamiento del resto de jugadores han de ser correctas (en el sentido de ser compartidas por todos los jugadores).

Dicho con otras palabras, el EN requiere que la estrategia de cada jugador sea una respuesta que maximice los pagos de dicho jugador dadas las estrategias que prediga que van a ser usadas por el resto de jugadores, y además que esas predicciones sean correctas. Además, debe de ser consistente en sus predicciones sobre la manera en que se jugará el juego, es decir, si todos los jugadores predicen que un determinado EN va a ser jugado, entonces ningún jugador debe tener incentivos para jugar de un modo diferente, ningún jugador debe tener interés en

Halle el/los Equilibrio de Nash

Ejemplo 7: (U-M-D vs. L-C-R)

		J_2		
		L	C	R
J_1	U	7, 7	4, 2	1, 8
	M	2, 4	5, 5	2, 3
	D	8, 1	3, 2	0, 0

Para J_1:

$B_1(L) = \{D\}$
$B_1(C) = \{M\}$
$B_1(R) = \{M\}$

Para J_2:

$B_2(U) = \{R\}$
$B_2(M) = \{C\}$
$B_2(D) = \{C\}$

Intersección

Para J_1:

$B_1(C) = \{M\}$

Para J_2:

$B_2(M) = \{C\}$

Entonces:

$EN = (M, C)$

Ejemplo 7: (Batalla de los sexos)

		$Hombre$	
		C	F
$Mujer$	C	2, 1	0, 0
	F	0, 0	1, 2

Para $Mujer$:

$B_M(C) = \{C\}$
$B_M(F) = \{F\}$

Para $Hombre$:

$B_H(C) = \{C\}$
$B_H(F) = \{F\}$

Intersección

Para $Mujer$:

$B_M(C) = \{C\}$
$B_M(F) = \{F\}$

Para $Hombre$:

$B_H(C) = \{C\}$
$B_H(F) = \{F\}$

Entonces:

$EN = \{(C, C), (F, F)\}$

Ejemplo 8: (El Dilema del prisionero)

		$Preso\ 2$	
		$Callar$	$Confesar$
$Preso\ 1$	$Callar$	-1, -1	-5, 0
	$Confesar$	0, -5	-4, -4

Para $Preso\ 1$:

$B_1(Ca) = \{Co\}$
$B_1(Co) = \{Co\}$

Para $Preso\ 2$:

$B_2(Ca) = \{Co\}$
$B_2(Co) = \{Co\}$

Intersección

Para $Preso\ 1$:

$B_1(Co) = \{Co\}$

Para $Preso\ 2$:

$B_2(Co) = \{Co\}$

Entonces:

$EN = (Co, Co)$

Ejemplo 9: (La casa del ciervo)

		J_2	
		$Ciervo$	$Liebre$
J_1	$Ciervo$	2, 2	0, 1
	$Liebre$	1, 0	1, 1

Para $Jugador\ 1$:

$B_1(C) = \{C\}$
$B_1(L) = \{L\}$

Para $Jugador\ 2$:

$B_2(C) = \{C\}$
$B_2(L) = \{L\}$

Intersección

Para $Jugador\ 1$:

$B_1(C) = \{C\}$
$B_1(L) = \{L\}$

Para $Jugador\ 2$:

$B_2(C) = \{C\}$
$B_2(L) = \{L\}$

Entonces:

$EN = \{(C, C), (L, L)\}$

Ejemplo 10: (Up-Down | Left-Center-Right)

		J_2		
		L	C	R
$J1$	U	1, 0	1, 2	0, 1
	D	0, 3	0, 1	2, 0

Para $Jugador\ 1$:

$B_1(L) = \{U\}$
$B_1(C) = \{U\}$
$B_1(R) = \{D\}$

Para $Jugador\ 2$:

$B_2(U) = \{C\}$
$B_2(D) = \{L\}$

Intersección

Para $Jugador\ 1$:

$B_1(C) = \{U\}$

Para $Jugador\ 2$:

$B_2(U) = \{C\}$

Entonces:

$EN = (U, C)$

Equilibrio de Nash y EIE

1. **Proposición 1**. Sea G un juego en forma normal con n jugadores. Si la eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas elimina todas las estrategias, excepto el perfil de estrategias $s^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*)$, entonces s^* constituye el único *EN* del juego.
2. **Proposición 2**. Sea G un juego en forma normal con n jugadores. Si el perfil de estrategias $s^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*)$ constituye un *EN* del juego, entonces sobreviven a la eliminación iterativa de las estrategias estrictamente dominadas.

APLICACIÓN

Duopolio de Cournot

Dos empresas, E_1 y E_2, producen un único bien (homogéneo) en cantidades q_1 y q_2. La demanda inversa del mercado es:

$$P(Q) = \begin{cases} a - Q & , \quad Q < a \\ 0 & , \quad Q \geq a \end{cases}, \text{ siendo } Q = q_1 + q_2$$

Asunciones:

- $q_1, q_2 \in [0, \infty >$ (el juego no es finito)
- El costo total para producir es: $C(q_i) = cq_i,\ i = 1{,}2,\ c < a$
- Las empresas eligen las cantidades de forma simultánea.

Comparación con Monopolio:

$$q_1 + q_2 = Q^C > Q^M$$

Solución

Para solucionar eso cada empresa va a solucionar su problema que le permita maximizar sus beneficios. Cada empresa solucionará $Máx\ \pi_i(q_i^*, q_j^*)$. Entonces:

$$Máx\ \pi_i = Pq_i - cq_i = [a - (q_i + q_j)]q_i - cq_i$$

$$[q_i] \rightarrow a - 2q_i - q_j - c = 0$$

$$q_i = \frac{a - c - q_j}{2}$$

Por lo tanto:

$$q_1 = \frac{a - c - q_2}{2} \wedge q_2 = \frac{a - c - q_1}{2}$$

Metiendo q_2 en q_1 y resolviendo:

$$q_1^* = q_2^* = \frac{a - c}{}$$

Podemos hallar el beneficio para cada empresa:

$$\pi_i = \left[a - \left(\frac{a-c}{3} + \frac{a-c}{3}\right)\right]\left(\frac{a-c}{3}\right) - c\left(\frac{a-c}{3}\right)$$

$$\pi_i = \left(\frac{a-c}{3}\right)^2$$

Entonces:

$$\pi_1 = \pi_2 = \left(\frac{a-c}{3}\right)^2$$

Gráfica

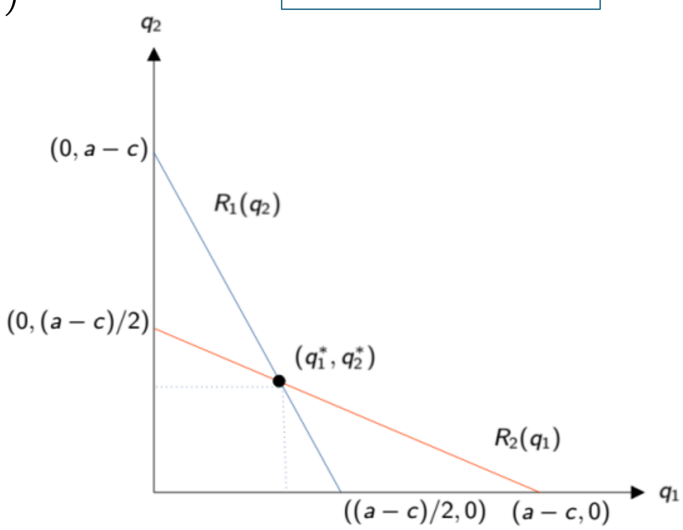
Observamos que la mejor respuesta de i para la estrategia de j es:

$$q_i = \frac{a - c - q_j^*}{2}$$

En general, entonces podemos indicar que la mejor respuesta a cualquier estrategia de j es:

$$B_i(q_j) = \frac{a - c - q_j^*}{2}$$

Estas funciones se denominan funciones de reacción o funciones de mejor respuesta.



Equilibrio de Nash – Estrategias Mixtas

Ejemplo: (Juego de las Monedas)

- Consideremos el juego en el que dos jugadores tienen cada uno una moneda.
- Simultáneamente deben mostrar un lado de la moneda: cara (C) o sello (S).

	C	S
C	$1,-1$	$-1,1$
S	$-1,1$	$1,-1$

Juego de suma cero

¿Este juego presentará algún equilibrio de Nash?

- Si resolvemos este juego por algún método antes visto podemos ver que no tiene solución en estrategias puras.
- Por lo tanto, para poder darle solución debemos ampliar el

El concepto de estrategia se puede ampliar permitiendo que los jugadores tomen decisiones inciertas asignando diferentes probabilidades a cada opción. Por ejemplo, en el juego de las monedas, el jugador 1 podría decidir jugar Cara con una probabilidad de 1/4 y jugar Cruz con una probabilidad de 3/4.

Definición

- Sea $S_i = \{s_{i1}, \dots, s_{im}\}$ el conjunto de estrategias del jugador i y ΔS_i el simplex de S_i.
- Una estrategia mixta para el jugador i es un elemento $\sigma_i \in \Delta S_i$, tal que $\sigma_i = \big(\sigma_i(s_{i1}), \sigma_i(s_{i2}), \dots, \sigma_i(s_{im})\big)$ es una distribución de probabilidad sobre S_i, siendo $\sigma_i(s_i)$ la probabilidad de que el jugador i juegue la estrategia s_i.
- Siendo $\sigma_i(s_i)$ una distribución de probabilidad sobre S_i, se debe satisfacer:

$$\sigma_i(s_i) \geq 0, \text{ para cada } s_i \in S_i$$

$$\sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) = 1$$

- Al conjunto de estrategias mixtas del jugador i lo denotaremos por $\Delta(S_i)$, indicando con ello que el conjunto de estrategias mixtas de un jugador está formado por todas las loterías sobre S_i.

$$\Delta(S_i) = \left\{ \sigma_i = \left(s_i^1, s_i^2, \dots, s_i^m\right) : \sigma_i^j \geq 0, para\ j = 1,2, \dots, m\ y \sum_{j=1}^{m} \sigma_i^j = 1 \right\}$$

Soporte

- Sea $\sigma_i(.)$ una estrategia mixta para el jugador i. Diremos que la estrategia pura $s_i \in S_i$ está en el soporte de $\sigma_i(.)$, siempre y cuando $\sigma_i(.) > 0$.
  - Una estrategia mixta es completa si asigna una probabilidad estrictamente positiva a cada estrategia pura de S_i.
  - Una estrategia mixta es propia si cuyo soporte es un conjunto formado por un solo elemento.

Creencias

- Una creencia para el jugador i es dada por una distribución de probabilidad $\pi_i \in \Delta S_{-i}$ sobre las estrategias de sus oponentes.
- $\pi_i(s_{-i})$ será la probabilidad de que el jugador i asignará a la estrategia de sus rivales.

Pagos esperados

- **Definición 1.** El pago esperado del jugador i, cuando elige la estrategia pura $s_i \in S_i$ y sus oponentes juegan la estrategia mixta $\sigma_{-i} \in S_{-i}$ es:

$$u_i(s_i,\sigma_{-i}) = \sum_{s_{-i}\in S_{-i}} \sigma_{-i}(s_{-i})u_i(s_i,s_{-i})$$

- **Definición 2.** El pago esperado del jugador i, cuando elige la estrategia mixta $\sigma_i \in \Delta S_i$ y sus oponentes juegan la estrategia mixta $\sigma_{-i} \in S_{-i}$ es:

$$u_i(\sigma_i,\sigma_{-i}) = \sum_{s_i\in S_i} \sigma_i(s_i)u_i(s_i,\sigma_{-i})$$

$$= \sum_{s_i\in S_i}\left[\sum_{s_{-i}\in S_{-i}} \sigma_i(s_i)\sigma_{-i}(s_{-i})u_i(s_i,s_{-i})\right]$$

Equilibrio de Nash

El perfil de estrategias mixtas $\sigma^* = (\sigma_1^*, \sigma_2^*, \dots, \sigma_n^*)$ es un Equilibrio de Nash, si para cada i, σ_i^* es una mejor respuesta a σ_{-i}^*. Es decir:

$$U_i(\sigma_i^*,\sigma_{-i}^*) \geq U_i(\sigma_i,\sigma_{-i}^*), \text{ para cada } \sigma_i \in \Delta S_i$$

Principio de Inferencia

Si σ^* es un equilibrio de Nash, y si tanto s_i y s_i' están en el soporte de σ_i^*, entonces:

$$U_i(s_i,\sigma_{-i}^*) = U_i(s_i',\sigma_{-i}^*) = U_i(\sigma_i^*,\sigma_{-i}^*)$$

Ejemplo 1: (Juego de las monedas)

Una estrategia mixta del jugador 1: $\sigma_1^*: \big(\sigma(c),\sigma(s)\big) = (p, 1-p)$

Una estrategia mixta del jugador 2: $\sigma_2^*: \big(\sigma(c),\sigma(s)\big) = (q, 1-q)$

	c	s
c	$1,-1$	$-1,1$
s	$-1,1$	$1,-1$

Mejor respuesta si el jugador tiene una estrategia pura y el uso de una estrategia mixta por parte de su rival:

Mejor respuesta del jugador 1

Si J_1 eligiera cara, entonces tendríamos:

$$U_1(c,\sigma_2) > U_1(s,\sigma_2)$$
$$1(q) + (1-q)(-1) > -1(q) + (1)(1-q)$$
$$2q - 1 > -2q + 1$$
$$4q > 2$$
$$q > \frac{1}{2}$$

Si J_1 eligiera sello, entonces tendríamos:

$$U_1(c,\sigma_2) < U_1(s,\sigma_2)$$
$$q < \frac{1}{2}$$

Si J_1 es indiferente, entonces tendríamos:

$$U_1(c,\sigma_2) = U_1(s,\sigma_2)$$
$$q = \frac{1}{2}$$

Mejor respuesta del jugador 2

Si J_2 eligiera cara, entonces tendríamos:

$$U_2(\sigma_1, c) > U_2(\sigma, c)$$
$$-1(p) + (1-p)(1) > 1(p) + (-1)(1-p)$$
$$-2p + 1 > 2p - 1$$
$$2 > 4p$$
$$\frac{1}{2} > p$$

Si J_2 eligiera sello, entonces tendríamos:

$$U_2(\sigma_1, c) < U_2(\sigma, c)$$
$$\frac{1}{2} < p$$

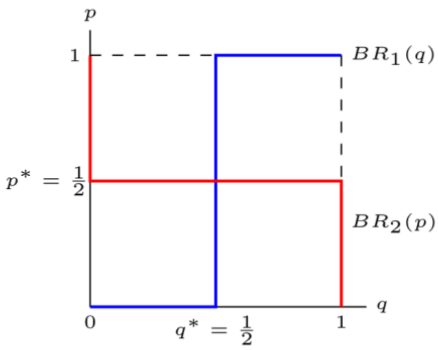
Si J_2 es indiferente, entonces tendríamos:

$$U_2(\sigma_1, c) = U_2(\sigma, c)$$
$$\frac{1}{2} = p$$

Correspondencia de mejor respuesta

$$R_1(q) = \begin{cases} p = 1 \ \ ; \quad q > \dfrac{1}{2} \\ p \in (0,1) \ \ ; \quad q = \dfrac{1}{2} \\ p = 0 \ \ ; \quad q < \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$R_2(p) = \begin{cases} q = 1 \ \ ; \quad p < \dfrac{1}{2} \\ p \in (0,1) \ \ ; \quad p = \dfrac{1}{2} \\ q = 0 \ \ ; \quad p > \dfrac{1}{2} \end{cases}$$



El equilibrio de Nash será el perfil de estrategias

$$\sigma^* = (\sigma_1^*, \sigma_2^*),$$

donde:

$$\sigma_1^* = (\sigma_1^*(c), \sigma_1^*(s)) = (p, 1-p)$$
$$= (1/2, 1/2)$$
$$\sigma_2^* = (\sigma_2^*(c), \sigma_2^*(s)) = (q, 1-q)$$
$$= (1/2, 1/2)$$

Ejemplo 2: (Guerra de sexos)

Una estrategia mixta del jugador 1: $\sigma_1^*: (\sigma(b), \sigma(f)) = (p, 1-p)$

Una estrategia mixta del jugador 2: $\sigma_2^*: (\sigma(b), \sigma(f)) = (q, 1-q)$

		Hombre	
		Ballet	*Fútbol*
Mujer	*Ballet*	2,1	0,0
	Fútbol	0,0	1,2

Mejor respuesta si el jugador tiene una estrategia pura y el uso de una estrategia mixta por parte de su rival:

Mejor respuesta de la Mujer

Si J_1 eligiera ballet, entonces tendríamos:

$$U_1(b, \sigma_2) > U_1(f, \sigma_2)$$
$$2(q) + (0)(1-q) > (0)(q) + 1(1-q)$$
$$2q > 1 - q$$
$$3q > 1$$
$$q > \frac{1}{3}$$

Si J_1 eligiera futbol, entonces tendríamos:

$$U_1(b, \sigma_2) < U_1(f, \sigma_2)$$
$$q < \frac{1}{3}$$

Si J_1 es indiferente, entonces tendríamos:

$$U_1(b, \sigma_2) = U_1(f, \sigma_2)$$
$$q = \frac{1}{3}$$

Mejor respuesta del Hombre

Si J_2 eligiera ballet, entonces tendríamos:

$$U_2(\sigma_1, b) > U_2(\sigma_1, f)$$
$$1(p) + (0)(1-p) > (0)(p) + 2(1-p)$$
$$p > 2 - 2p$$
$$3p > 2$$
$$p > \frac{2}{3}$$

Si J_2 eligiera futbol, entonces tendríamos:

$$U_2(\sigma_1, b) < U_2(\sigma_1, f)$$
$$p < \frac{2}{3}$$

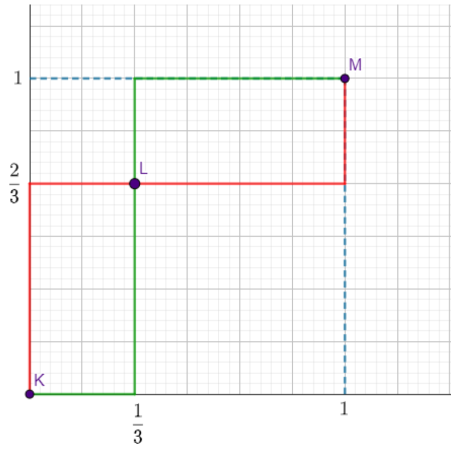
Si J_2 es indiferente, entonces tendríamos:

$$U_2(\sigma_1, b) = U_2(\sigma_1, f)$$
$$p = \frac{2}{3}$$

Correspondencia de mejor respuesta

$$R_1(q) = \begin{cases} p = 1 \ ; \quad q > \frac{1}{3} \\ p \in (0{,}1) \ ; \quad q = \frac{1}{3} \\ p = 0 \ ; \quad q < \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$R_2(p) = \begin{cases} q = 1 \ ; \quad p > \frac{2}{3} \\ p \in (0{,}1) \ ; \quad p = \frac{2}{3} \\ q = 0 \ ; \quad p < \frac{2}{3} \end{cases}$$



Hallamos las intersecciones:

Punto K:

$$p = 0, 1 - p = 1 \rightarrow \sigma_1^* = (0,1)$$

$$q = 0, 1 - q = 1 \rightarrow \sigma_2^* = (0,1)$$

$$\therefore \sigma^* = (\sigma_1^*, \sigma_2^*) = \big((0,1),(0,1)\big)$$

Punto M:

$$p = 1, 1 - p = 0 \rightarrow \sigma_1^* = (1,0)$$

$$q = 1, 1 - q = 0 \rightarrow \sigma_2^* = (1,0)$$

$$\therefore \sigma^* = (\sigma_1^*, \sigma_2^*) = \big((1,0),(1,0)\big)$$

Punto L:

$$p = \frac{1}{3}, 1 - p = \frac{2}{3} \rightarrow \sigma_1^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$q = \frac{2}{3}, 1 - q = \frac{1}{3} \rightarrow \sigma_2^* = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$\therefore \sigma^* = (\sigma_1^*, \sigma_2^*) = \left(\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)\right)$$

Ejemplo 3: Dilema del prisionero

Una estrategia mixta del preso 1: $\sigma_1^*: \big(\sigma(nc), \sigma(co)\big) = (p, 1-p)$

Una estrategia mixta del preso 2: $\sigma_2^*: \big(\sigma(nc), \sigma(co)\big) = (q, 1-q)$

El pago esperado para preso 1:

$$E(A) = p.q.1 + p.(1-q).4 + (1-p).q.0 + (1-p).(1-q)3$$

$$E(A) = pq + 4p(1-q) + 3(1-p)(1-q)$$

Lo mismo para B. Sin embargo, si calculamos las derivadas para maximizar el pago esperado de A y B respecto a p y q, encontraríamos que la mejor opción para ambos sigue siendo confesar con probabilidad 1, es decir, $p = 0$ y $q = 0$.

Tarea: Desarrollar mediante el método del ej. 1 y 2 y deducir.

Equilibrio de Nash y Óptimo de Pareto

- Comparamos perfiles de estrategia para hallar el beneficio máximo para todos.
- El perfil de estrategias $s = (s_1, s_2, s_3, \dots, s_n)$ está dominado en el sentido de Pareto por el perfil de estrategias $s' = (s_1', s_2', s_3', \dots, s_n')$, si cumple:

1. Para cada jugador la estrategia s' le dará un mayor o igual beneficio que s.

$$u_i(s_1, s_2, s_3, \dots, s_n) \leq u_n(s_1', s_2', s_3', \dots, s_n'), \text{ para cada } i$$

Es decir:

$$u_1(s_1, s_2, s_3, \dots, s_n) \leq u_i(s_1', s_2', s_3', \dots, s_n')$$
$$u_2(s_1, s_2, s_3, \dots, s_n) \leq u_2(s_1', s_2', s_3', \dots, s_n')$$
$$u_n(s_1, s_2, s_3, \dots, s_n) \leq u_3(s_1', s_2', s_3', \dots, s_n')$$
$$\vdots$$
$$u_n(s_1, s_2, s_3, \dots, s_n) \leq u_n(s_1', s_2', s_3', \dots, s_n')$$

2. Hay algún jugador que s' le da estrictamente un beneficio mayor que s.

$$u_i(s_1, s_2, s_3, \dots, s_n) < u_n(s_1', s_2', s_3', \dots, s_n'), \text{ para algún } i$$

Si no está dominado en el sentido de Pareto por ningún otro perfil, es ESP.
Será ineficiente en el sentido de Pareto, si algún otro lo domina.

¿Habrá algún perfil de estrategia que es Pareto Óptimo? Se evalúan todas las estrategias.

¿Será el perfil de estrategia s_1 un Pareto Óptimo? Se evalúa s_1 con cada uno.

Si s' fuera Pareto Óptimo, no hay ningún perfil que lo domine.

Ejemplo 1: (Dilema del prisionero)

		Preso 2	
		No confesar	*Confesar*
Preso 1	*No confesar*	$-1,-1$	$-9,0$
	Confesar	$0,-9$	$-6,-6$

¿La estrategia $(No\ confesar, No\ confesar)$ es ESP?

¿La estrategia (co, co) la domina en sentido de Pareto?

$$-1 = u_1(nc, nc) > u_1(co, co) = -6$$
$$-1 = u_2(nc, nc) > u_2(co, co) = -6$$

No lo domina

¿La estrategia (nc, co) la domina en sentido de Pareto?

$$-1 = u_1(nc, nc) > u_1(nc, co) = -9$$
$$-1 = u_2(nc, nc) < u_2(nc, co) = 0$$

No lo domina

¿La estrategia (co, nc) la domina en sentido de Pareto?

$$-1 = u_1(nc, nc) < u_1(co, nc) = 0$$
$$-1 = u_2(nc, nc) > u_2(co, nc) = -9$$

No lo domina

Como no está dominada por nadie en sentido de Pareto podemos concluir que es una estrategia Pareto Eficiente

Ejercicio: (Equilibrio de Nash y Eficiencia de Pareto)

- Considere el siguiente juego, con parámetros $m, n \in \mathbb{R}$:

		Jugador 2		
		I	C	D
Jugador 1	A	$4, m$	$3, 1$	$2, 2$
	B	$2, 0$	$1, -3$	$n, 1$

¿Para qué valoras de m y n el perfil (A, I) sobrevivirá a la eliminación estricta? Sustente.

Sabemos que D domina estrictamente a C.

		Jugador 2		
		I	C	D
Jugador 1	A	$4, m$	$3, 1$	$2, 2$
	B	$2, 0$	$1, -3$	$n, 1$

		Jugador 2	
		I	D
Jugador 1	A	$4, m$	$2, 2$
	B	$2, 0$	$n, 1$

		Jugador 2	
		I	D
Jugador 1	A	$4, m$	$2, 2$

Para J_1:

- La estrategia B esté dominada por A.

$$u_1(A, s_2) > u_1(B, s_2)$$

$$u_1(A, I) > u_1(B, I) \to 4 > 2$$

$$U_1(A, D) > u_1(B, D) \to 2 > n$$

Entonces $n < 2$.

Para J_2:

- La estrategia I esté dominada por D.

$$u_2(A, I) > u_2(A, D) \to m > 2$$

Entonces $m > 2$

Conclusión:

Entonces $m > 2, n < 2$

¿Para qué valores de m y n existirá un equilibrio de Nash en estrategias puras? Sustente.

Sabemos que D domina estrictamente a C.

Para que (A, I) sea un equilibrio de Nash

$m > 2$ y $n < 2$

Para que (A, D) sea un equilibrio de Nash:

$n < 2$ y $m < 2$

Para que (B, D) sea un equilibrio de Nash:

$m < 2$ y $n > 2$

Para que (B, I) sea un equilibrio de Nash:

No se puede

Si $n < 2$ halle el rango de variación de m para que el perfil (A, I) sea ESP

- (A, I) no está dominada por $(A, C), (A, D), (B, I), (B, C)$ porque los pagos para J_1 son menores.
- Como $n < 2$, tampoco (B, D) domina a (A, I).

Por lo tanto, m puede tomar cualquier valor.

$m \in \mathbb{R}$

Ideas importantes

- Dominancia en el sentido de Pareto: Análisis de eficiencia social.
- Dominancia (estricta) de estrategias: Análisis de eficiencia