ELECCIÓN BAJO INCERTIDUMBRE

Lotería Simple

- Denotemos con C el espacio de todas las consecuencias.
- Asumamos que C es finito y cardinal N.

$$C = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$$

  Cada consecuencia la indexamos con n y le asignaremos una probabilidad.
- Una lotería simple L es una distribución de probabilidad sobre el espacio C.

$$L = (p_1, p_2, \ldots, p_N).$$

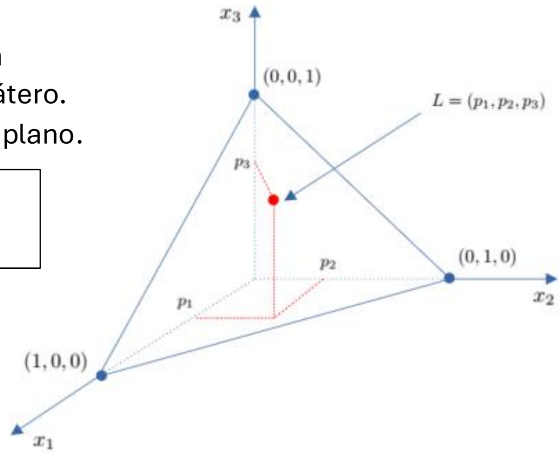
- Técnicamente:

$$L \in \Delta^{N-1}\{p \in \mathbb{R}_+^N : p_1 + p_2 + \cdots + p_N = 1\}$$

  Al conjunto Δ^{N-1} se le denomina simplex de dimensión $(N-1)$.

Interpretación geométrica en $\mathbb{R}_+^3$:

- Gráficamente los puntos de corte con los ejes coordenados se corresponden con las denominadas loterías degeneradas.
- Uniendo estos tres puntos de corte se forma una región plana determinada por un triángulo equilátero.
- Una lotería L será cualquier punto ubicado en el plano.



Lotería degenerada: Cuando con certeza se tiene el resultado de la lotería.

- Condición de lotería:

  $L = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}_+^3 : p_1 + p_2 + p_3 = 1.$

Lotería compuesta.

- Sea $C = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$. Teniendo k loterías simples $L_k = (p_1^k, p_2^k, \ldots, p_N^k), donde$ $k = 1, 2, \ldots, K$ y probabilidades $\alpha_k \geq 0$ con $\sum_k \alpha_k = 1$.
- La lotería compuesta es el riesgo alternativo que produce la lotería simple L_k con probabilidad α_k para $k = 1, 2, \ldots, K$.

$$(L_1, L_2, \ldots, L_K; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$$

- La lotería reducida, generada por la lotería compuesta, es:

$$L_R = (p_1, p_2, \ldots, p_N), \text{ donde } p_n = \alpha_1 p_n^1 + \cdots + \alpha_k p_N^K$$

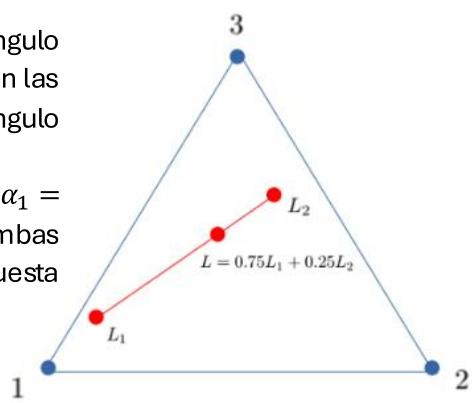
- Podemos denotar L_R del siguiente modo:

$$L = \alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \cdots + \alpha_k L_k$$

Interpretación geométrica en R_+^3:

- Representación simplificada: los vértices del triángulo equilátero 1, 2 y 3 se corresponden, respectivamente, con las loterías degeneradas (1, 0, 0), (0, 1, 0) y (0, 0, 1). Este triángulo representa el simplex de dimensión 2.
- Del gráfico L_1 y L_2 son dos loterías simples. Además, $\alpha_1 = 0.75$ y $\alpha_2 = 0.25$ La combinación lineal convexa entre ambas loterías permite establecer la lotería compuesta $(L_1, L_2; 0.75, 0.25)$.
- Finalmente, la Lotería reducida L_R será:

$$L_R = 0.75L_1 + 0.25L_2$$



Preferencias sobre loterías

- Un agente deberá elegir sobre un conjunto de alternativas.
- Denotamos con $\mathcal{L}$, el conjunto de todas las loterías simples sobre el conjunto C.

$$\mathcal{L}: L_k = \left\{(p_1, p_2, \dots, p_N) \in \mathbb{R}^N : p_n \geq 0, para\ cada\ n = 1, 2, \dots, N, y \sum_{n=1}^{N} p_n = 1\right\}$$

- Sobre $\mathcal{L}$ definimos una relación de preferencias $\succsim$ racional (completa | transitiva).
- Definimos dos propiedades adicionales a considerar:

✓ Axioma de continuidad: Se dice que es continua si para todo $L, L', L'' \in L_k$, los conjuntos

$$\{\alpha \in [0,1] : \alpha L + (1-\alpha)L' \geq L''\} \subseteq [0,1]$$

Y

$$\{\alpha \in [0,1] : L'' \geq \alpha L + (1-\alpha)L'\} \subseteq [0,1]$$

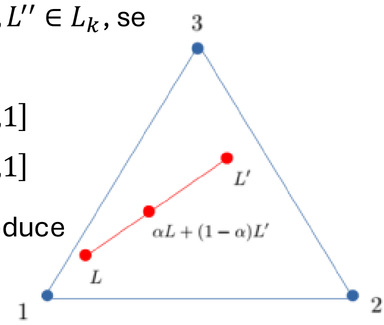
son cerrados.

A. de continuidad significa que pequeños cambios en las probabilidades no alteran las preferencias entre dos loterías.

✓ Axioma de independencia: Se dice que lo verifica si para todo $L, L', L'' \in L_k$, se tiene que:

$$L \succsim L' \quad \leftrightarrow \quad \alpha L + (1-\alpha)L'' \succsim \alpha L' + (1-\alpha)L'', \forall \alpha \in [0,1]$$
$$L \sim L' \quad \leftrightarrow \quad \alpha L + (1-\alpha)L'' \sim \alpha L' + (1-\alpha)L'', \forall \alpha \in [0,1]$$

En particular, tomando la relación de indiferencia, si $L' = L''$, se deduce que las curvas de indiferencia sobre $\mathcal{L}$, son lineales:



$$\alpha L + (1-\alpha)L' \sim \alpha L' + (1-\alpha)L' = L', \quad \forall \alpha \in [0,1]$$

Utilidad esperada de Von Neumann-Morgenstern

- Se dice que la función de utilidad $U: \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ es una función de utilidad esperada Von Neumann-Morgenstern (VN-M) si existe una asignación de números $(u_1, u_2, \dots, u_N)$ asociados respectivamente al conjunto de consecuencias $C = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, tales que para cada lotería $L = (p_1, p_2, \dots, p_N) \in \mathcal{L}$, se tiene:

$$U(L) = u_1 p_1 + u_2 p_2 + \cdots + u_N p_N$$

- Para que una función de utilidad $U: \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ sea una función de utilidad esperada VN-M sí o sí debe cumplir:

$$\forall L_1, L_2, \dots, L_k \in \mathcal{L}, \forall \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in [0,1] \; con \sum_{k=1}^{K} \alpha_k = 1, se \; verfica \; que:$$

$$U\left(\sum_{k=1}^{K} \alpha_k L_k\right) = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k U(L_k)$$

¿Cómo podríamos asignar un número u_n a cada consecuencia x_n?

- Se lo asignamos a través de una función de utilidad de Bernoulli sobre las consecuencias.

$$u \; : \; C \to \mathbb{R}$$
$$x_n \to u(x_n) = u_n$$

Ejemplo:

Sean $C = \{x_1, x_2, x_3\}$ y $u(x_n) = \sqrt{x_n}$. Entonces, para la lotería $L = (p_1, p_2, p_3)$, la función de utilidad esperada es:

$$U(L) = p_1 u(x_1) + p_2 u(x_2) + p_3 u(x_3)$$
$$U(L) = p_1\sqrt{x_1} + p_2\sqrt{x_2} + p_3\sqrt{x_3}$$

- Entonces la función de utilidad de von Neumann-Morgenstern sería el valor esperado de

Teorema de la utilidad esperada

- Supongamos que la relación de preferencias $\succsim$ sobre $\mathcal{L}$ es racional (completa y transitiva) y satisface los axiomas de continuidad y de independencia. Entonces $\succsim$ admite una representación en forma de utilidad esperada de VN-M
- En otros términos, se puede asignar un número u_n a cada consecuencia x_n, de modo que para dos loterías $L, L' \in \mathcal{L}$ se tiene que:

$$L = (p_1, p_2, \dots, p_N) \succsim L'(p_1', p_2', \dots, p_N') \leftrightarrow \sum_{n=1}^{N} u_n p_n \geq \sum_{n=1}^{N} u_n p_n'$$

$$U(L) \succsim U(L')$$

Transformación monótona creciente (positiva, afín)

- Las preferencias se preservan solo si aplicamos a la utilidad esperada $U(.)$ una transformación monótona afín.
- Sea $U: \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ una función de utilidad que representa a $\succsim$. Entonces, $V: \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ también representa a la misma $\succsim$, sí y solo sí existen $a, b \in \mathbb{R}, con \; a > 0,$ que:

$$V(L) = aU(L) + b, \text{ para cada } L \in \mathcal{L}$$

Permite cierta interpretación cardinal

Teniendo $C=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ y dos $L'=\left(\frac{1}{2},0,0,\frac{1}{2}\right)$ y $L''=\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$. $U(L)=u_1,p_1+u_2p_2$.

¿Se puede afirmar que la diferencia entre la utilidad de las consecuencias x_1 y x_2 es mayor a la diferencia entre la utilidad de las consecuencias x_3 y x_4?

$$u_1-u_2>u_3-u_4$$

$$u_1+u_4>u_2+u_3$$

$$\frac{1}{2}u_1+\frac{1}{2}u_4>\frac{1}{2}u_2+\frac{1}{2}u_3$$

$$U\left(\frac{1}{2},0,0,\frac{1}{2}\right)>U\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$$

Es decir, $U(L)\gtrsim U(L')$

No siempre cumple con lo que se espera (PARADOJA DE ALLAIS)

- Existen 3 posibles premios monetarios:

$$x_1=2\ 500\ 000 \mid x_2=500\ 000 \mid x_3=0$$

- El agente debe decidir entre dos opciones:
  - Opción 1: $L_1=(0,1,0)$ y $L_1'=(0.10,0.89,0.01)$
  - Opción 2: $L_2=(0,0.11,0.89)$ y $L_1'=(0.10,0,0.90)$
- La elección común sería:
- Opción 1: $L_1=(0,1,0)$ y $L_1'=(0.10,0.89,0.01)$
- Opción 2: $L_2=(0,0.11,0.89)$ y $L_2'=(0.10,0,0.90)$
- La elección común sería $L_1\succ L_1'$ y $L_2'\succ L_2$, pero estas no son consistentes con la teoría de la utilidad esperada.

Comprobación:

Sea $L=(p_1,p_2,p_3)$, tal que $U(L)=p_1u_{x_1}+p_2u_{x_2}+p_3u_{x_3}$. La elección $L_1\succ L_1'$ implica:

$$0u_{x_1}+1u_{x_2}+0u_{x_3}>0.10u_{x_1}+0.89u_{x_2}+0.10u_{x_3}$$

Ahora sumemos en ambos lados $(0.89u_{x_3}-0.89u_{x_2})$

$$1u_{x_2}+0.89u_{x_3}-0.89u_{x_2}>0.10u_{x_1}+0.89u_{x_2}+0.01u_{x_3}+0.89u_{x_3}-0.89u_{x_2}$$

$$0.11u_{x_2}+0.89u_{x_3}>0.10u_{x_1}+0.90u_{x_3}$$

Tendríamos que $L_2\succ L_2'$, lo que contradeciría la situación común $L_2'\succ L_2$.

Ejemplo:

Sea el espacio de consecuencia $X=\{\$1,\$16\}$, con una lotería $L=\left(\frac{4}{5},\frac{1}{5}\right)$ y, además, tenga $u(x)=4\sqrt{x}$. Halle la utilidad esperada.

$$u(x_1)=u(1)=4\sqrt{1}=4 \mid u(x_2)=u(16)=4\sqrt{16}=16$$

$$U(L)=p_{x_1}.u(x_1)+p_{x_2}.u(x_2)$$

$$U(L)=\frac{4}{5}(4)+\frac{1}{5}(16)$$

$$U(L)=\frac{32}{5}=6.4$$

Loterías monetarias

- Las consecuencias denotadas por el espacio C son cantidades monetarias, entonces la podemos representar por una variable continua $x \in \mathbb{R}$.
- Desde ahora consideramos loterías representadas por funciones de densidad o funciones de distribución.

Caso 1 (Lotería por función de densidad)

- Sea una lotería en $\mathbb{R}$ caracterizada por una función de densidad f. Además, $\mathcal{L}$ el conjunto de todas las funciones de densidad en $\mathbb{R}$.
- Una función de utilidad esperada Von Neumann-Morgenstern en $\mathcal{L}$ verifica que:

$$U(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x).f(x)\,dx, \qquad \forall f \in \mathcal{L}$$

Caso 2 (Lotería por función de distribución)

- Si la lotería en $\mathbb{R}$ se caracteriza por una función de distribución F. Además, $\mathcal{L}$ el conjunto de todas las funciones de distribución en $\mathbb{R}$.
- Una función de utilidad esperada Von Neumann-Morgenstern se caracteriza por:

$$U(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\,dF(x) = \mathbb{E}_F[u(x)]$$

Ejemplo:

Sea $X = [0, \infty]$. Consideremos tres agentes cuyas funciones de utilidad sobre cantidades no negativas de dinero son $u_1(x) = 4\sqrt{x}$, $u_2(x) = 3x$, $u_3(x) = x^2$. Para $x_1 = 1$, $x_2 = 16 \in [0, \infty]$, se considera la lotería $L = (4/5, 1/5)$. Vamos a calcular el valor esperado de L y comparar la utilidad esperada con la utilidad del valor esperado.

El valor esperado es

$$E(L) = \frac{4}{5} \times 1 + \frac{1}{5} \times 16 = \frac{20}{5} = 4$$

- Para el primer agente se tiene que la utilidad esperada de Von Neumann-Morgenstern es igual a:

$$U_1(L) = \frac{4}{5}\,u_1(1) + \frac{1}{5}\,u_1(16) = \frac{4}{5}\,(4\sqrt{1}) + \frac{1}{5}\,(4\sqrt{16}) = \frac{32}{5} = 6{,}4$$

  Para este primer agente, la utilidad del valor esperado es

$$u_1[E(L)] = u_1(4) = 4\sqrt{4} = 8$$

  por lo que este agente prefiere el valor esperado antes que la lotería L.
- Para el segundo agente, la utilidad esperada y la utilidad del valor esperado son

$$U_2(L) = \frac{4}{5}\,u_2(1) + \frac{1}{5}\,u_2(16) = \frac{4}{5}\,(3) + \frac{1}{5}\,(48) = 12$$

$$u_2[E(L)] = 3 \times 4 = 12$$

  por lo que al segundo agente le da igual el valor esperado que la lotería L.
- Para el tercer agente se tiene que

$$U_3(L) = \frac{4}{5}\,u_3(1) + \frac{1}{5}\,u_3(16) = \frac{4}{5}\,(1^2) + \frac{1}{5}\,(16^2) = 52$$

$$u_3[E(L)] = u_3(4) = 4^2 = 16$$

  por lo que este agente prefiere la lotería L antes que el valor esperado.

Actitud frente al riesgo

- Para empezar, supones que la función de utilidad u de un agente cualquiera es estrictamente creciente $u'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (prefiere una renta mayor a una menor).
- Tendremos tres distintos agentes:
  - ✓ Averso al riesgo
  - ✓ Amante o propenso al riesgo
  - ✓ Neutral al riesgo
- Antes de comentar cada uno, sepamos dos conceptos antes:

Equivalente cierto

- El equivalente cierto de $F(.)$, está denotado por $c(F,u)$.
- Es la cantidad de dinero para la cual el agente es indiferente entre la lotería $F(.)$ y el equivalente cierto $c(F,u)$. Esto es:

$$u\big(c(F,u)\big) = \int u(x)\,dF(x) = \mathbb{E}_F[u(x)]$$

Prima por riesgo

- Es la cantidad que un agente está dispuesto a pagar para librarse del riesgo.
- Fórmula:

$$\rho = \int x\,dF(x) - c(F,u)$$

$$\rho = \mathbb{E}_F(x) - c(F,u)$$

Ejemplo:

Sea $X = [0,\infty]$. Consideremos los dos agentes cuyas funciones de utilidad son $u_1(x) = 4\sqrt{x}, u_2(x) = 3x, u_3(x) = x^2$ y la lotería $L = \left(\frac{4}{5},\frac{1}{5}\right)$ para $x_1 = 1$ y $x_2 = 16$. Calcule sus equivalentes ciertos y sus primas de riesgo.

$$E(x) = \frac{4}{5}(1) + \frac{1}{5}(16) = 4$$

$$u_1\big(E(x)\big) = \frac{4}{5}u_1(x_1) + \frac{1}{5}u_1(x_2) = \frac{4}{5}(4) + \frac{1}{5}(16) = 6.4$$

$$u_2\big(E(x)\big) = \frac{4}{5}u_2(x_1) + \frac{1}{5}u_2(x_2) = \frac{4}{5}\big(3(1)\big) + \frac{1}{5}\big(3(16)\big) = 12$$

$$u_3\big(E(x)\big) = \frac{4}{5}u_3(x_1) + \frac{1}{5}u_3(x_2) = \frac{4}{5}(1^2) + \frac{1}{5}(16^2) = 52$$

Agente 1:

$$u\big(c(F,u_1)\big) = u_1\big(E(x)\big)$$

$$4\sqrt{c(F,u_1)} = 6.4$$

$$c(F,u_1) = 2.56$$

$$\rho = E(x) - c(F,u_1)$$

$$\rho = 4 - 2.56$$

$$\rho = 1.44$$

Agente 2:

$$u\big(c(F,u_2)\big) = u_2\big(E(x)\big)$$

$$3c(F,u_1) = 12$$

$$c(F,u_1) = 4$$

$$\rho = E(x) - c(F,u_2)$$

$$\rho = 4 - 4$$

$$\rho = 4$$

Agente 3:

$$u\big(c(F,u_1)\big) = u_3\big(E(x)\big)$$

$$c(F,u_1)^2 = 52$$

$$c(F,u_1) = 7.21$$

$$\rho = E(x) - c(F,u_3)$$

$$\rho = 4 - 7.21$$

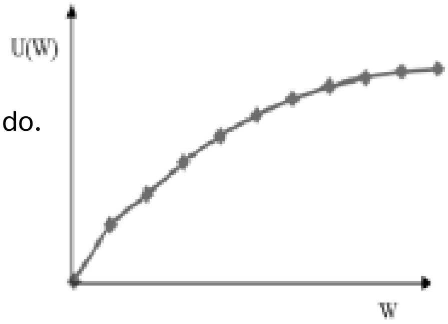
$$\rho = -3.21$$

Averso al riesgo

- Si en el intervalo $[x_1,x_0]$, el valor esperado de la lotería en $[x_0,x_1]$ es al menos tan preferida como dicha lotería.
- Su utilidad es cóncava. Es decir, su $u''(x) < 0, \forall x \in [x_0,x_1]$.
- Es averso al riesgo si cumple:

$$\int u(x)\, dF(x) \le u\left(\int x\, dF(x)\right), \forall F(.)$$

$$\mathbb{E}_F[u(x)] \le u(\mathbb{E}_F[x])$$



Individuo adverso al riesgo

- El equivalente cierto es menor o igual que al valor esperado.

$$c(F,u) \le \int x\, dF(x)$$

- La prima por riesgo es mayor o igual a cero

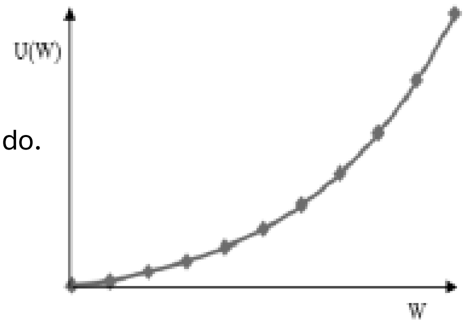
$$\rho = \mathbb{E}_F(x) - c(F,u) \ge 0$$

Propenso al riesgo

- Si en el intervalo $[x_1,x_0]$, la lotería es al menos tan preferida como el valor esperado de la lotería.
- Su utilidad es convexa. Es decir, su $u''(x) > 0, \forall x \in [x_0,x_1]$
- Es propenso al riesgo si cumple:

$$\int u(x)\, dF(x) \ge u\left(\int x\, dF(x)\right), \forall F(.)$$

$$\mathbb{E}_F[u(x)] \ge u(\mathbb{E}_F[x])$$



Individuo afecto al riesgo

- El equivalente cierto es mayor o igual que al valor esperado.

$$c(F,u) \ge \int x\, dF(x)$$

- La prima por riesgo es menor o igual a cero.

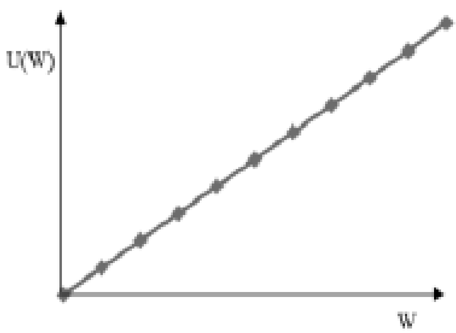
$$\rho = \mathbb{E}_F(x) - c(F,u) \le 0$$

Neutral al riesgo

- Si en el intervalo $[x_1,x_0]$, la lotería es indiferente a su valor esperado de la lotería.
- Su utilidad es lineal. Es decir, su $u''(x) = 0, \forall x \in [x_0,x_1]$
- Es neutral al riesgo si cumple, $\forall F(.)$:

$$\int u(x)\, dF(x) = u\left(\int x\, dF(x)\right),$$

$$\mathbb{E}_F[u(x)] = u(\mathbb{E}_F[x])$$



Individuo neutral al riesgo

- El equivalente cierto es igual que al valor esperado.

$$c(F,u) = \int x\, dF(x)$$

- La prima por riesgo es nula.

$$\rho = \mathbb{E}_F(x) - c(F,u) = 0$$

Medidas de aversión al riesgo

- Medida de torsión.

Medida de aversión absoluta al riesgo

- Coeficiente de Arrow-Pratt de aversión absoluta al riesgo:

$$r_A(x,u) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$$

- Cuan sensible es el individuo frente a situaciones de riesgo.
- El agente 2 es más averso al riesgo que el agente 1, si:
  - $r_A(x,u_2) \geq r_A(x,u_1)$, para todo x.
  - $u_2(.)$ es una transformación cóncava de $u_1(.)$.
    Es decir, existe una función creciente y cóncava $\varphi(.)$ tal que $u_2 = \varphi\big(u_1(x)\big)$, para todo x ($u_2$ *es más cóncava que* u_1)
  - $c(F,u_2) \leq c(F,u_1)$, para toda F.
- Más propiedades:
  - $r_A(x,u_2)$ es decreciente en x (averso - DARA), $r_A(x,u_2)$ es creciente en x (propenso - IARA), $r_A(x,u_2)$ es constante (neutral - CARA).
  - Para cada x_1, x_2 con $x_1 < x_2$, la función z, $u(x_2+z)$ es una transformación cóncava de $u(x_1+z)$.
  - Si $u(c_x) = \int u(x+z)\,dF(z)$, entonces $x - c_x$ decrece con x.
  - Si $\int u(x_2+z)\,dF(z) \geq u(x_2)$, entonces $\int u(x_1+z)\,dF(z) \geq u(x_1)$,

Medida de aversión relativa al riesgo

- Coeficiente de Arrow-Pratt de aversión absoluta al riesgo:

$$r_A(x,u) = -\frac{xu''(x)}{u'(x)}$$

- Cuan sensible es el individuo frente a situaciones de riesgo ante cambios en la riqueza.
- Se puede utilizar las mismas propiedades que en la medida de aversión absoluta.

---

c. $u_1(x) = 3 - e^{-2x}$.

$$u_1'(x) = 2e^{-2x} \quad | \quad u_1''(x) = -4e^{-2x}$$

$$r_A = -\frac{(-4e^{-2x})}{2e^{-2x}}$$

$$r_A = 2$$

Concluimos que es $CARA$ y averso al riesgo ($u_1''(x) < 0$)

d. $u_2(x) = \sqrt{2x-1}$. $x > 5$

$$u_2'(x) = (2x-1)^{-\frac{1}{2}} \quad | \quad u_2''(x) = -(2x-1)^{-\frac{3}{2}}$$

$$r_A = -\frac{-(2x-1)^{-\frac{3}{2}}}{(2x-1)^{-\frac{1}{2}}}$$

$$r_A = \frac{1}{2x-1}$$

Concluimos que es $DARA$ y averso al riesgo ($u_1''(x) < 0$)

a. $u_3(x) = 16x - 2x^2$, $x < 4$

$$u_2'(x) = 16 - 4x \quad | \quad u_2''(x) = -4$$

$$r_A = -\frac{-4}{16-4x}$$

$$r_A = \frac{1}{4-x}$$

Concluimos que es $IARA$ y averso al riesgo ($u_2'' < 0$)

b. $u_4(x) = \ln(x)$, $x \geq 1$.

$$u_3'(x) = \tfrac{1}{x} \quad | \quad u_2''(x) = -\tfrac{1}{x^2}$$

$$r_A = -\frac{-1/x^2}{1/x}$$

$$r_A = \frac{1}{x}$$

Concluimos que es $DARA$ y averso al riesgo ($u_2'' < 0$)

Dominancia estocástica

- Seguimos comparando loterías monetarias.
- Compararemos funciones de distribución de pago:
  - De acuerdo con los niveles de retorno (DE – primer orden).
  - De acuerdo con la dispersión de los retornos (DE – segundo orden).
- En adelante, consideraremos funciones de distribución $F(.)$ tal que $F(0) = 0$ y $F(x) = 1,\ para\ algún\ x.$

Dominancia estocástica de primer orden

- ¿Cuándo una lotería es preferible a otra lotería?
- Una lotería F domina estocásticamente en primer orden a una lotería G, si se cumple:

$$\int u(x)\,dF(x) > \int u(x)\,dG(x)$$

Denotado por: $F\ \ DEPO\ \ G$

- Si $F\ DEPO\ G$, entonces:

$$\int x\,dF(x) \geq \int x\,dG(x)$$

$$\mathbb{E}_F[x] \geq \mathbb{E}_G[x]$$

- Si para cada x,

$$F(x) \leq G(x)$$

$$P_F[X \leq x_0] \leq P_G[X \leq x_0]$$

$$1 - P_F[X > x_0] \leq 1 - P_G[X > x_0]$$

$$P_G[X > x_0] \leq P_F[X > x_0]$$

F le da una mayor probabilidad de obtener una riqueza mínima de x_0 en comparación de G.

Dominancia estocástica de segundo orden

- ¿Cuándo una lotería es menos riesgosa que otra? Comparamos áreas.
- Nos concentramos solo en el caso de que las loterías tengan igual valor esperado, entonces:

$$\int x\,dF(x) = \int x\,dG(x)$$

- Si para la función de utilidad $u(.)$:

$$\int u(x)\,dF(x) \geq \int u(x)\,dG(x)$$

- En tal caso denotaremos F *DESO* G.
- Una lotería F domina estocásticamente en segundo orden a una lotería G, si y solo si para cada x,

$$\int_0^x G(s)ds > \int_0^x F(s)ds$$

- Si domina en primer orden, entonces también en segundo orden (al contrario, no necesariamente).

1. Considere el siguiente conjunto de posibles pagos monetarios, $X = \{20, 40, 60, 80\}$

   - La lotería F asigna una probabilidad 0.1 si $x = 20$, 0.2 si $x = 40$, 0.3 si $x = 60$ y 0.4 se $x = 80$.
   - La lotería G asigna una probabilidad 1 si $x = 60$

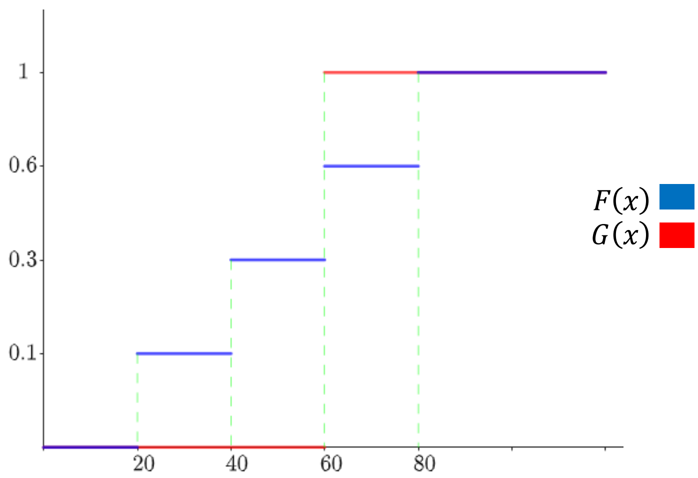
   a. Grafique la distribución acumulada de ambas funciones.

   b. Determine si F domina estocásticamente a G en primer orden.

   c. Determine si F domina estocásticamente a G en segundo orden.

X	20	40	60	80
$p(x)$	0.1	0.2	0.3	0.4
$F(x)$	0.1	0.3	0.6	1

X	60
$p(x)$	1
$G(x)$	1



Dominancia estocástica de primer orden:

$$\int x\,dF(x) - \int x\,dG(x)$$

$$20(0.1) + 40(0.2) + 60(0.3) + 80(0.4) = 60(1)$$

$$2 + 8 + 18 + 32 = 60$$

$$60 = 60$$

No domina estocásticamente en primer orden ni uno a otro

Dominancia estocástica de segundo orden:

Si $x \in [0, 60[$, entonces:

$$\int_0^{60} F(s)\,ds > \int_0^{60} G(s)\,ds$$

$$8 > 0$$

Si $x \in [0, 80[$, entonces:

$$\int_0^{80} F(s)\,ds = \int_0^{80} G(s)\,ds$$

$$20 = 20$$

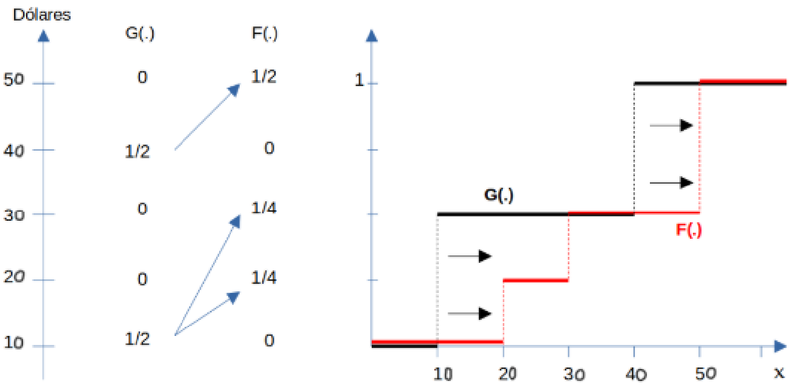
$$\int F(s)\,ds \geq \int G(s)\,ds$$

Entonces G DESO F

a) Considere un conjunto de pagos monetarios $X = \{10, 20, 30, 40, 50\}$. Construya una lotería G sobre X, y a partir de ella, construya otra lotería F que represente un desplazamiento creciente en probabilidad, de tal manera que F domine estocásticamente en primer orden a G. **(3,00 pt)**

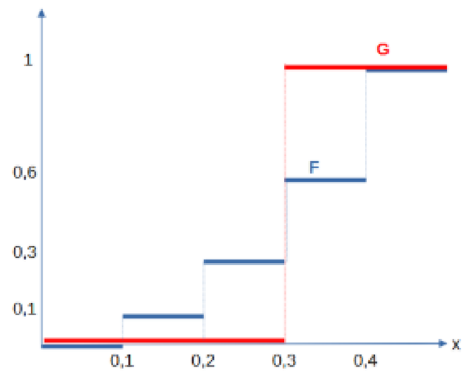
Considere la lotería $G(.)$ que asigna probabilidad $1/2$, si $x = 10$, y probabilidad $1/2$, si $x = 40$. A partir de ella construimos la lotería $F(.)$ que representa un desplazamiento creciente en probabilidad:

- Si el resultado es 10 dólares, añadimos 10 o 20 dólares con probabilidad $1/4$.
- Si el resultado es 40 dólares, añadimos 10 dólares, con probabilidad $1/2$.



b) Considere el siguiente conjunto de pagos monetarios (en millones de soles): $X = \{0{,}1,\ 0{,}2,\ 0{,}3,\ 0{,}4\}$. La lotería F asigna probabilidad 0,1, si $x = 0{,}1$; probabilidad 0,2, si $x = 0{,}2$; probabilidad 0,3, si $x = 0{,}3$ y probabilidad 0,4, si $x = 0{,}4$. Por otra parte, una segunda "lotería" G, asigna probabilidad 1, si $x = 0{,}3$.

- Grafique las loterías F y G en un solo cuadro. **(1,00 pt)**



- ¿Alguna de las loterías domina estocásticamente en segundo orden a la otra? Cualquiera que sea su respuesta, justifique. **(2,00 pt)**

  G domina estocásticamente en segundo orden a F. En efecto, es suficiente observar que

  - Si $x \in [0,\ 0{,}3)$, entonces $0{,}04 = \int_0^{0,3} F(s)ds > \int_0^{0,3} G(s)ds = 0$
  - Si $x \in [0,\ 0{,}4)$, entonces $0{,}1 = \int_0^{0,4} F(s)ds = \int_0^{0,3} G(s)ds = 0{,}1$