TEORÍA DE CONTRATOS – RIESGO MORAL

Información Simétrica (Modelo Base)

- El contrato entre el principal y el agente llevan a un cierto resultado. El resultado depende del esfuerzo que incorpora el agente a su labor (e).
    - x: valor monetario del resultado.
    - X: conjunto de todos los resultados posibles.
    - Si $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}, \rightarrow Prob\{x = x_i \mid e\} = p_i(e)$.
      Es la probabilidad de tener un resultado x, condicionado al esfuerzo e.
    - Asumimos que siempre $p_i(e) > 0$.
      Esto implica que solo estudiamos casos donde existe probabilidad de ocurrir.
- Trama: el conflicto de intereses:
    - Al principal le interesa el resultado, al agente no le preocupa directamente.
    - El principal no le interesa directamente el esfuerzo del agente, pero a este sí porque le resulta costoso.
    - Presunción: mayor esfuerzo conduce a un mejor resultado.
    - ¿Cómo lo solucionan? Mediante un contrato.

Funciones de Utildad

- Para el principal $\rightarrow B(x, w)$

$$B'(.) > 0 \ \wedge \ B''(.) < 0$$

- Para el agente $\rightarrow U(w, e) = u(w) - v(e)$

$$u'(.) > 0 \wedge u''(.) \leq 0$$
$$v'(.) < 0 \wedge v''(.) \geq 0$$

Características

- Si la información es simétrica, ambas partes poseen la misma información.
- Siendo el principal quien diseña el contrato, decidirá el esfuerzo e que pedirá al agente y decidirá los pagos $w(x_i), con\ i = 1, \ldots, n$.
- El principal selecciona, en función del esfuerzo que le pide al agente, qué contratos son aceptables por el agente. Luego, el principal elige el contrato que le sea más barato.

Solución

- La solución eficiente (Pareto), deberá resolver el problema:

Restricción de participación

$$\underset{e,w(x_i)}{Máx} \sum_{i=1}^{n} p_i(e)B\big(x_i - w(x_i)\big) \qquad (1)$$

$$s.a. \rightarrow \sum_{i=1}^{n} p_i(e)u\big(w(x_i)\big) - v(e) \geq \underline{U} \qquad (2)$$

$\underline{U}$: Utilidad de reserva

- Sea e^0 el nivel de esfuerzo eficiente y $w^0(x_i)$ el salario asociado, por KKT es:

$$\frac{\partial L}{\partial w(x_i)}\Big(\big(w^0(x_i)\big), e^0, \lambda^0\Big) = -p_i(e^0)B'\big(x_i - w^0(x_i)\big) + \lambda^0 p_i(e^0)u'\big(w^0(x_i)\big) = 0 \qquad (3)$$

Por lo tanto:

$$\lambda^0 = \frac{B'\big(x_i - w^0(x_i)\big)}{u'\big(w^0(x_i)\big)} > 0, \quad i = 1,2,3, \dots, n \qquad (4)$$

Para el problema planteado, variando $\underline{U}$, se halla toda la frontera de asignaciones eficientes, de modo que la solución está parametrizada por U.

- De acuerdo con lo anterior, el reparto óptimo del riesgo implica que se cumpla la condición:

$$\frac{B'\big(x_i - w^0(x_i)\big)}{u'\big(w^0(x_i)\big)} = constante \qquad (5)$$

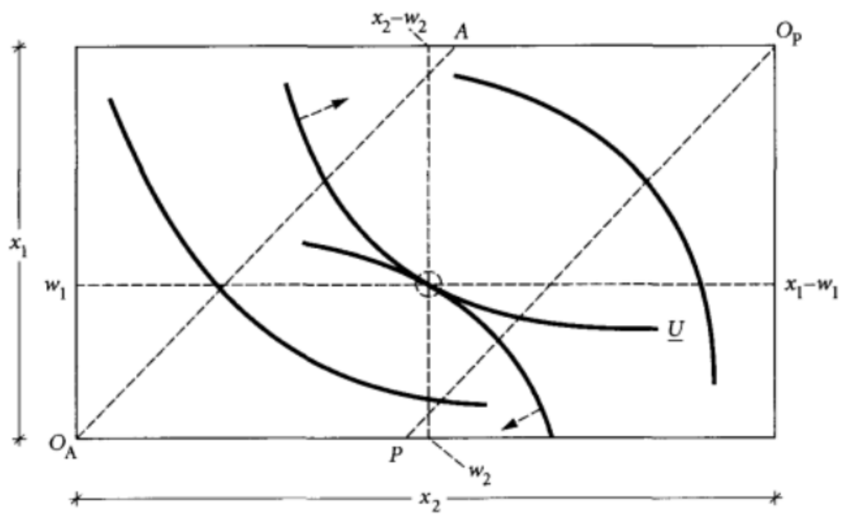
Para dos posibles resultados x_1 y x_2 $(x_1 < x_2)$.
Denotando $w_i = w(x_i)$, tenemos:

$$\frac{B'(x_2 - w_2)}{B'(x_1 - w_1)} = \frac{u'(w_2)}{u'(w_1)} \qquad (6)$$

Y la restricción de participación se satura:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(e)u\big(w(x_i)\big) - v(e) = \underline{U} \qquad (7)$$

- Determinamos el punto óptimo (w_1, w_2).



Caja de Edgeworth

Casos de actitudes frente al riesgo

Caso 1 (Principal neutral – Agente averso):

- Si $B'(.) = cte$ (principal es neutral). Deducimos que $u'\left(w^0(x_i)\right) = cte$.
- Y si el agente es averso al riesgo, entonces:

$$w^0(x_1) = w^0(x_2) = \cdots = w^0(x_n)$$

El principal asume todo el riesgo y asegura completamente al agente. Así, el agente recibe un pago w^0 en toda contingencia, y solo será dependiente del esfuerzo exigido:

$$w^0 = u^{-1}\left(\underline{U} + v(e)\right)$$

Caso 2 (Principal averso – Agente neutral):

- Si $u(x) = x, u'(.) = cte$ (agente es neutral) y $B''(.) < 0$ (principal averso). Se deduce que el beneficio del principal es independiente del resultado:

$$x_1 - w^0(x_1) = x_2 - w^0(x_2) = \cdots = x_n - w^0(x_n)$$

El agente asume todo el riesgo, asegurando al principal ante las variaciones del resultado. El contrato óptimo toma la forma:

$$w^0(x_i) = x_i - k$$

Este contrato es como un contrato de franquicia: independientemente del resultado, el agente paga una cantidad fija k al principal, al llevarse el resultado x. Además, k satisface:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(e^0)[x_i - k] = \underline{U} + v(e) \leftrightarrow k = \sum_{i=1}^{n} p_i(e^0)x_i - \underline{U} - v(e)$$

Caso 3 (Principal averso – Agente averso):

- Si los dos son aversos al riesgo, compartirán el riesgo del resultado. Depende del grado de aversión al riesgo.
- Analizamos esta situación diferenciando (3) respecto a x_i:

$$-B''\left[1 - \frac{dw^0}{dx_i}\right] + \lambda^0 u'' \frac{w^0}{dx_i} = 0$$

Reemplazando λ, obtenido en (4), tenemos:

$$-\frac{B''}{B'}\left[1 - \frac{dw^0}{dx_i}\right] + \frac{u''}{u'}\frac{w^0}{dx_i} = 0$$

Sean r_p y r_a, las medidas de aversión para cada uno, tenemos:

$$\frac{dw^0}{dx_i} = \frac{r_p}{r_p + r_a}$$

S

¿Cuál será el esfuerzo exigido al agente?

- Simplificación del problema y nos centramos en los dos primeros casos:
  - El principal es neutral y el agente es averso.
  - El principal es averso y el agente es neutral.

Caso 1 (Principal neutral – Agente averso):

- El contrato óptimo establece que el salario no depende del resultado, pero sí del esfuerzo exigido.

$$w^0 = u^{-1}\left(\underline{U} + v(e)\right)$$

- El problema será:

$$\underset{e}{Máx}\left[\sum_{i=1}^{n} p_i(e)B\left(x_i - w(x_i)\right)\right]$$

$$\underset{e}{Máx}\left[\sum_{i=1}^{n} p_i(e)[x_i - w(x_i)]\right]$$

$$\underset{e}{Máx}\left[\sum_{i=1}^{n} p_i(e)x_i - u^{-1}\left(\underline{U} + v(e)\right)\right]$$

- La condición de primer orden:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i'(e)x_i - (u^{-1})'\left(\underline{U} + v(e^0)\right) v'(e^0) = 0 \quad \rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} p_i'(e)x_i = \frac{v'(e^0)}{u'(w^0)}$$

- La condición de segundo orden:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i''(e^0)x_i + \frac{u''}{(u')^3}(w^0)v'(e^0)^2 = -\frac{v''(e^0)}{u'(w^0)} \leq 0$$

Una condición suficiente para un máximo local es que la restricción precedente se cumpla de forma estricta (< 0).

Una condición suficiente para que e^0 sea un máximo global, es que la desigualdad precedente se verifique para todo nivel de esfuerzo, si $\sum_{i=1}^{n} p_i''(e^0)x_i \leq 0$

Caso 2 (Principal averso – Agente neutral):

- El contrato óptimo establece que sea una franquicia:

$$w^0(x_i) = x_i - k$$

- El principal decide el nivel de esfuerzo que maximiza, del mismo modo lo hace el agente si firma este tipo de contrato. Así, el nivel de esfuerzo óptimo es solución:

$$\underset{e}{Máx}\sum_{i=1}^{n} p_i(e)x_i - v(e)$$

- La condición de primer orden:

$$\underset{e}{Máx}\sum_{i=1}^{n} p_i'(e^0)x_i = v'(e^0)$$

- La condición de segundo orden (satisface un máximo local):

$$\underset{e}{Máx}\sum_{i=1}^{n} p_i'(e^0)x_i - v'(e^0) \leq 0$$

Una condición suficiente para que se trate de un máximo global es que se verifique, para todo nivel de esfuerzo e, si $\sum_{i=1}^{n} p_i''(e^0)x_i \leq 0$.

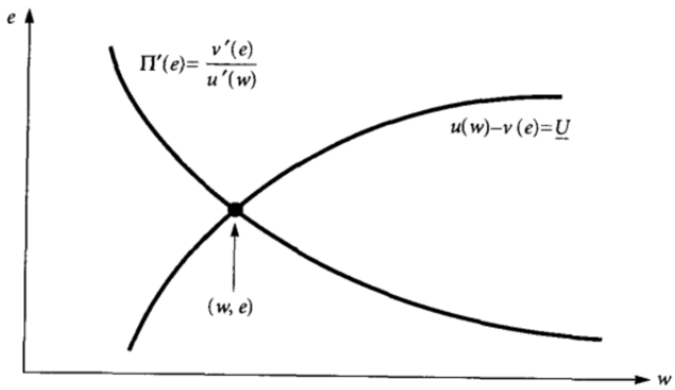


Fig. 2: $\Pi_i(e) = \sum_{i=1}^{n} p_i(e)x_i$ son los ingresos brutos del principal, por lo que $\Pi_i'(e) = \sum_{i=1}^{n} p_i'(e)x_i$

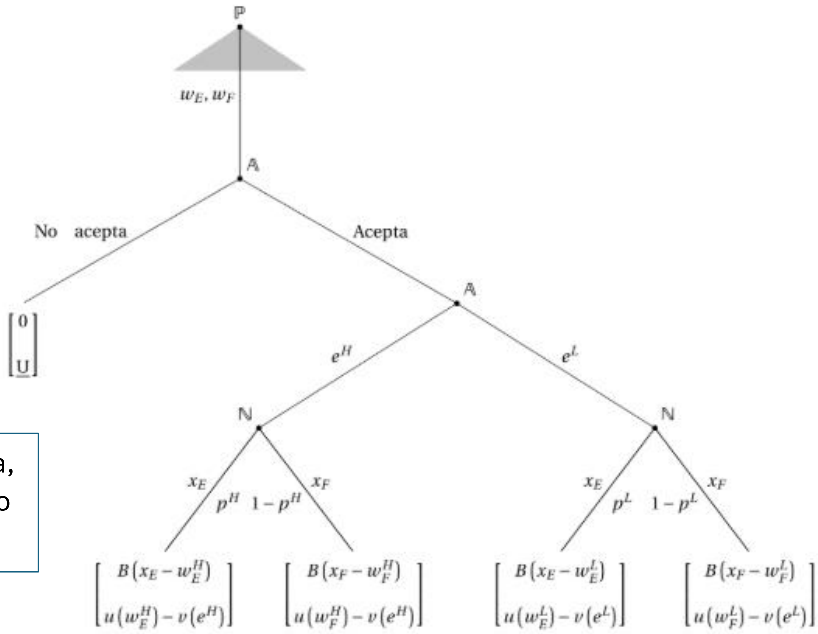
Información asimétrica

Riesgo moral

- Ahora el comportamiento el esfuerzo no es observable para el principal, o aun siendo observable, no es verificable.
- No verificabilidad del esfuerzo implica que este no puede ser añadido entre los términos del contrato.

Planteamiento del problema

El principal estudia qué esfuerzos desea que incorpore el agente (pero no puede incorporarlos a los términos del contrato, ya que no es observable)



Debe resolverse el juego de la Figura, cuya solución natural es el equilibrio bayesiano perfecto en subjuegos.

Etapas

1. En la última etapa del juego, el agente decide el esfuerzo que va a realizar:

Restricción de incentivos

$$e \in arg\ \underset{e}{Máx} \left[\sum_{i=1}^{n} p_i(\hat{e}) u\big(w(x_i)\big) - v(\hat{e}) \right]$$

Esfuerzo que va a realizar el agente para maximizar su utilidad esperada.

Esta restricción caracteriza el problema de riesgo moral: una vez aceptado el contrato y dado que el esfuerzo no es verificable, el agente elige aquel que maximiza su función objetivo.

2. En la segunda etapa, dado el esfuerzo que realizará según el contrato que firme, el agente decide si aceptar o no el contrato que el principal le propone:

Restricción de participación

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(e) u\big(w(x_i)\big) - v(e) \geq \underline{U}$$

El agente siempre puede rechazar el contrato si lo que consigue en la relación no es por lo menos igual a lo que puede obtener en el mercado (racionalidad individual).

3. En la primera etapa, el principal diseña el contrato anticipando el comportamiento del agente. Es decir, el contrato que propone el principal es la solución al problema:

$$\underset{e, w(x_i)}{Máx} \sum_{i=1}^{n} p_i(e) B\big(x_i - w(x_i)\big)$$

$$s.a. \rightarrow \sum_{i=1}^{n} p_i(e) u\big(w(x_i)\big) - v(e) \geq \underline{U}$$

$$e \in arg \underset{\text{e}}{Máx}\left[\sum_{i=1}^{n} p_i(\hat{e})u(w(x_i)) - v(\hat{e})\right]$$

Problema

- Simplificaciones del modelo:
  - $\mathbb{A}$ solo puede elegir entre esfuerzo alto (H) o bajo (L): $e \in \{e^H, e^L\}$
  - La desutilidad del esfuerzo satisface: $v(e^H) > v(e^L)$.
  - Dos posibles resultados: $x_E(éxito)$ o $x_F(fracaso)$, donde $x_E > x_F$.
  - Principal paga al agente una cantidad w, dependiente del x_i y del e.
  - $p_i^H = p_i(e^H) > 0$, es la probabilidad de que se obtenga el resultado x_i cuando el esfuerzo incorporado por el agente es alto. Asumimos que: $p^H > p^L$.

FUNCIONES PARA CADA INDIVIDUO

- Funciones del tipo Bernoulli:
- $\mathbb{P} \rightarrow B(x - w)$; con $B' > 0$ y $B'' \leq 0$
- $\mathbb{A} \rightarrow u(w) - v(e)$; con $u' > 0, u'' \leq 0$ y $v' > 0, v'' > 0$
- Funciones de utilidad esperada:

Para el principal $\mathbb{P}$:

- $U_{\mathbb{P}}(X, w \mid e^H) = p^H B(x_E - w_E^H) + (1 - p^H)B(x_F - w_F^H)$
- $U_{\mathbb{P}}(X, w \mid e^L) = p^L B(x_E - w_E^L) + (1 - p^L)B(x_F - w_F^L)$

Para el agente $\mathbb{A}$:

- $U_{\mathbb{A}}(w \mid e^H) = p^H u(w_E^H) + (1 - p^H)u(w_F^H) - v(e^H)$
- $U_{\mathbb{A}}(w \mid e^L) = p^L u(w_E^L) + (1 - p^L)u(w_F^L) - v(e^L)$

Estructura de resolución según la INFORMACIÓN

Información Simétrica

- Simétrica ($\mathbb{P}$ $observa\ o\ verifica\ e^H\ o\ e^L\ de\ \mathbb{A}$):
  - $\mathbb{P}$ prefiere e^H.
  - $\mathbb{P}$ prefiere e^L.
  - Decisión $\mathbb{P}$.

    Casos particulares:
    - $\mathbb{P}$ neutral al riesgo – $\mathbb{A}$ averso al riesgo
    - $\mathbb{P}$ averso al riesgo – $\mathbb{A}$ neutral al riesgo
- Asimétrica ($\mathbb{P}$ $no\ observa\ o\ verifica\ e^H\ o\ e^L\ de\ \mathbb{A}, pero\ sí\ x_E\ o\ x_F$):
  - $\mathbb{P}$ prefiere e^H.
  - $\mathbb{P}$ prefiere e^L.
  - Decisión $\mathbb{P}$.

    Casos particulares:
    - $\mathbb{P}$ neutral al riesgo – $\mathbb{A}$ averso al riesgo

CASO: SIMÉTRICA

Si $\mathbb{P}$ prefiere que $\mathbb{A}$ elija e^H. De este modo, $\mathbb{P}$ ofrece un contrato (w_E^H, w_F^H) tal que:

$$\Psi_{\mathbb{P}}(w_E^H, w_F^H \mid e^H) = \max_{w_E^H, w_F^H} p^H B(x_E - w_E^H) + (1 - p^H) B(x_F - w_F^H)$$

$$s.a. \rightarrow p^H u(w_E^H) + (1 - p^H) u(w_F^H) - v(e^H) \geq \underline{U}$$

Demostración

$$L = [p^H B(x_E - w_E^H) + (1 - p^H) B(x_F - w_F^H)] + \lambda\left(p^H u(w_E^H) + (1 - p^H) u(w_F^H) - v(e^H) - \underline{U}\right)$$

$$C.P.O$$

$$[w_E^H] \rightarrow -p^H B'(x_E - w_E^H) + p^H \lambda u'(w_E^H) = 0 \rightarrow \lambda = \frac{B'(x_E - w_E^H)}{u'(w_E^H)} \qquad (1)$$

$$[w_F^H] \rightarrow -(1 - p^H) B'(x_F - w_F^H) + (1 - p^H) \lambda u'(w_F^H) = 0 \rightarrow \lambda = \frac{B'(x_F - w_F^H)}{u'(w_F^H)} \qquad (2)$$

$$[p] \rightarrow p^H u(w_E^H) + (1 - p^H) u(w_F^H) - v(e^H) \geq \underline{U} \qquad (3)$$

- Igualando (1) y (2):

$$\lambda = \frac{B'(x_E - w_E^H)}{u'(w_E^H)} = \frac{B'(x_F - w_F^H)}{u'(w_F^H)} > 0 \qquad (4)$$

- La restricción activa se satura (pasa a igualdad):

$$p^H u(w_E^H) + (1 - p^H) u(w_F^H) - v(e^H) = \underline{U} \qquad (5)$$

- De (4) y (5), se obtiene w_E^H, w_F^H.

Si $\mathbb{P}$ prefiere que $\mathbb{A}$ elija e^L. De este modo, $\mathbb{P}$ ofrece un contrato (w_E^L, w_F^L) tal que:

$$\Psi_{\mathbb{P}}(w_E^L, w_F^L \mid e^L) = \max_{w_E^L, w_F^L} p^L B(x_E - w_E^L) + (1 - p^L) B(x_F - w_F^L)$$

$$s.a. \rightarrow p^L u(w_E^L) + (1 - p^L) u(w_F^L) - v(e^L) \geq \underline{U}$$

- De las *C.P.O.* e Igualando, tenemos:

$$\lambda = \frac{B'(x_E - w_E^L)}{u'(w_E^L)} = \frac{B'(x_F - w_F^L)}{u'(w_F^L)} > 0$$

- La restricción activa se satura (pasa a igualdad):

$$p^L u(w_E^L) + (1 - p^L) u(w_F^L) - v(e^L) = \underline{U}$$

- Se obtiene w_E^L, w_F^L-

Decisión de $\mathbb{P}$:

- Prefiere e^H, si $\Psi_{\mathbb{P}}(w_E^H, w_F^H \mid e^H) \geq \Psi_{\mathbb{P}}(w_E^L, w_F^L \mid e^L)$.
- Prefiere e^L, si $\Psi_{\mathbb{P}}(w_E^H, w_F^H \mid e^H) \leq \Psi_{\mathbb{P}}(w_E^L, w_F^L \mid e^L)$.

¿Qué contrato elegirá? Depende de la actitud frente al riesgo

SI $\mathbb{P}$ es neutral al riesgo y $\mathbb{A}$ es averso al riesgo:

$$B(x-w) = x - w$$
$$u'' < 0$$

a. Si $\mathbb{P}$ prefiere que $\mathbb{A}$ elija e^H, entonces:

$$w_E^H = w_F^H = u^{-1}\left(\underline{U} + v(e^H)\right)$$

$$\Psi_{\mathbb{P}}(w_E^H, w_F^H \mid e^H) = E[X \mid e^H] - w_{sim}^H$$

Demostración

De la restricción activa:

$$p^H u(w_E^H) + (1-p^H)u(w_F^H) - v(e^H) = \underline{U}$$
$$u\left(w_{sim}^H\right) = \underline{U} + v(e^H)$$
$$w_{sim}^H = u^{-1}\left(\underline{U} + v(e^H)\right)$$

La utilidad máxima:

$$\Psi_{\mathbb{P}}(w_E^H, w_F^H \mid e^H)$$
$$p^H B(x_E - w_E^H) + (1-p^H)B(x_F - w_F^H)$$
$$p^H (x_E - w_E^H) + (1-p^H)(x_F - w_F^H)$$
$$p^H x_E + (1-p^H)x_F - w_{sim}^H$$
$$= E[X \mid e^H] - w_{sim}^H$$

b. Si $\mathbb{P}$ prefiere que $\mathbb{A}$ elija e^L, entonces:

$$w_E^L = w_F^L = u^{-1}\left(\underline{U} + v(e^L)\right)$$

$$\Psi_{\mathbb{P}}(w_E^L, w_F^L \mid e^L) = E[X \mid e^L] - w_{sim}^L$$

Demostración

De la restricción activa:

$$p^L u(w_E^L) + (1-p^L)u(w_F^L) - v(e^L) = \underline{U}$$
$$u\left(w_{sim}^L\right) = \underline{U} + v(e^L)$$
$$w_{sim}^L = u^{-1}\left(\underline{U} + v(e^L)\right)$$

La utilidad máxima:

$$\Psi_{\mathbb{P}}(w_E^L, w_F^L \mid e^L)$$
$$p^L B(x_E - w_E^L) + (1-p^L)B(x_F - w_F^L)$$
$$p^L (x_E - w_E^L) + (1-p^L)(x_F - w_F^L)$$
$$p^L x_E + (1-p^L)x_F - w_{sim}^L$$
$$= E[X \mid e^L] - w_{sim}^L$$

Decisión de $\mathbb{P}$:

- Decisión de $\mathbb{P}$: prefiere e^H, si:

$$\Psi_{\mathbb{P}}(w_E^H, w_F^H \mid e^H) \geq \Psi_{\mathbb{P}}(w_E^L, w_F^L \mid e^L)$$
$$E[X \mid e^H] - w_{sim}^H \geq E[X \mid e^L] - w_{sim}^L$$
$$E[X \mid e^H] - E[X \mid e^L] \geq w_{sim}^H - w_{sim}^L$$
$$p^H x_E + (1-p^H)x_F - [p^L x_E + (1-p^L)x_F] \geq w_{sim}^H - w_{sim}^L$$
$$(p^H - p^L)(x_E - x_F) \geq w_{sim}^H - w_{sim}^L$$

El beneficio marginal que obtiene cubre por lo menos al costo marginal de inducir un mayor esfuerzo
beneficio marginal del principal cubre por lo menos costo marginal del principal

- Decisión de $\mathbb{P}$: prefiere e^L, si:

$$\Psi_{\mathbb{P}}(w_E^H, w_F^H \mid e^H) < \Psi_{\mathbb{P}}(w_E^L, w_F^L \mid e^L)$$
$$(p^H - p^L)(x_E - x_F) < w_{sim}^H - w_{sim}^L$$

El costo marginal de inducir un mayor esfuerzo es mayor al beneficio marginal que obtiene

Si $\mathbb{P}$ es averso al riesgo y $\mathbb{A}$ es neutral al riesgo:

$$\boxed{\begin{gathered} B''(x-w) < 0 \\ u(w) = w \end{gathered}}$$

a. Si $\mathbb{P}$ prefiere que $\mathbb{A}$ elije e^H:

$$x_E - w_E^H = x_F - w_F^H = k_{sim}^H$$

$$\Psi_{\mathbb{P}}(w_E^H, w_F^H \mid e^H) = p^H B(x_E - w_E^H) + (1-p^H)B(x_F - w_F^H) = B\left(k_{sim}^H\right)$$

¿Y cuánto vale k^H?

$$\boxed{\begin{gathered} x = w + k \\ w = x - k \end{gathered}}$$

B es monótona creciente

Veamos la restricción de participación del agente:

$$p^H u(w_E^H) + (1-p^H)u(w_F^H) - v(e^H) = \underline{U}$$

$$p^H(w_E^H) + (1-p^H)(w_F^H) - v(e^H) = \underline{U}$$

$$p^H\left(x_E - k_{sim}^H\right) + (1-p^H)\left(x_F - k_{sim}^H\right) - v(e^H) = \underline{U}$$

$$p^H x_E + (1-p^H)x_F - k_{sim}^H - v(e^H) = \underline{U}$$

$$\boxed{k_{sim}^H = E[X \mid e^H] - v(e^H) - \underline{U}}$$

b. Si $\mathbb{P}$ prefiere que $\mathbb{A}$ elije e^L:

$$x_E - w_E^L = x_F - w_F^L = k_{sim}^L$$

$$\Psi_{\mathbb{P}}(w_E^L, w_F^L \mid e^L) = p^L B(x_E - w_E^L) + (1-p^L)B(x_F - w_F^L) = B\left(k_{sim}^L\right)$$

¿Y cuánto vale k^L?

$$\boxed{k_{sim}^L = E[X \mid e^L] - v(e^L) - \underline{U}}$$

Decisión de $\mathbb{P}$:

- Decisión de $\mathbb{P}$: prefiere e^H, si:

$$\Psi_{\mathbb{P}}(w_E^H, w_F^H \mid e^H) \geq \Psi_{\mathbb{P}}(w_E^L, w_F^L \mid e^L)$$

$$E[X \mid e^H] - v(e^H) - \underline{U} \geq E[X \mid e^L] - v(e^L) - \underline{U}$$

$$E[X \mid e^H] - E[X \mid e^L] \geq v(e^H) - v(e^L)$$

$$p^H x_E + (1-p^H)x_F - [p^L x_E + (1-p^L)x_F] \geq v(e^H) - v(e^L)$$

$$(p^H - p^L)(x_E - x_F) \geq v(e^H) - v(e^L)$$

Si el beneficio marginal del principal cubre por lo menos al costo marginal para el agente.

- Decisión de $\mathbb{P}$: prefiere e^L, si:

$$\Psi_{\mathbb{P}}(w_E^H, w_F^H \mid e^H) < \Psi_{\mathbb{P}}(w_E^L, w_F^L \mid e^L)$$

$$(p^H - p^L)(x_E - x_F) < w_{sim}^H - w_{sim}^L$$

Si el beneficio marginal del principal es menor al costo marginal para el agente.

CASO: ASIMÉTRICA

- $\mathbb{P}$ no puede observar el esfuerzo ni verificarlo. En este caso $\mathbb{A}$ puede elegir libremente entre e^H o e^L.
    - $\mathbb{A}$ escogerá e^H:

$$p^H u(w_E) + (1-p^H)u(w_F) - v(e^H) \geq p^L u(w_E) + (1-p^L)u(w_F) - v(e^L)$$

$$(p^H - p^L)\left(u(w_E^H) - u(w_E^L)\right) \geq v(e^H) - v(e^L)$$

- $\mathbb{A}$ escogerá e^L:

$$p^H u(w_E) + (1-p^H)u(w_F) - v(e^H) < p^L u(w_E) + (1-p^L)u(w_F) - v(e^L)$$

$$(p^H - p^L)\left(u(w_E^H) - u(w_E^L)\right) < v(e^H) - v(e^L)$$

SI $\mathbb{P}$ es neutral al riesgo y $\mathbb{A}$ es averso al riesgo:

$$\boxed{\begin{array}{c} B(x-w) = x-w, B'(x) > 0, B'(x) = 0 \\ u'' < 0 \end{array}}$$

a. $\mathbb{P}$ prefiere e^H

$$\Psi_{\mathbb{P}}(w_E, w_F \mid e^H) = \max_{w_E^H, w_F^H} p^H(x_E - w_E) + (1-p^H)(x_F - w_F)$$

Participación

$$s.a. \rightarrow p^H u(w_E) + (1-p^H)u(w_F) - v(e^H) \geq \underline{U}$$

Incentivos

$$\rightarrow (p^H - p^L)\left(u(w_E) - u(w_F)\right) \geq v(e^H) - v(e^L)$$

Demostración

$$L = [p^H(x_E - w_E) + (1-p^H)(x_F - w_F)] + \lambda\left(p^H u(w_E) + (1-p^H)u(w_F) - v(e^H) - \underline{U}\right) + \mu\left((p^H - p^L)\left(u(w_E) - u(w_F)\right) - v(e^H) + v(e^L)\right)$$

$$C.P.O$$

$$[w_E] \rightarrow -p^H + \lambda p^H u'(w_E) + \mu(p^H - p^L)\left(u'(w_E)\right) = 0 \rightarrow p^H\lambda + \mu(p^H - p^L) = \frac{p^H}{u'(w_E)} \quad (1)$$

$$[w_F] \rightarrow -(1-p^H) + (1-p^H)\lambda u'(w_F) - \mu(p^H - p^L)\left(u'(w_F)\right) = 0 \rightarrow (1-p^H)\lambda - \mu(p^H - p^L) = \frac{(1-p^H)}{u'(w_F)} \quad (2)$$

$$[\lambda] \rightarrow p^H u(w_E^H) + (1-p^H)u(w_F^H) - v(e^H) \geq \underline{U} \quad (3)$$

$$[\mu] \rightarrow (p^H - p^L)\left(u(w_E) - u(w_F)\right) \geq v(e^H) - v(e^L) \quad (4)$$

- Teniendo las 2 primeras condiciones, eliminamos μ:

$$\lambda = \frac{p^H}{u'(w_E)} + \frac{(1-p^H)}{u'(w_F)} > 0 \quad (5)$$

- Sabiendo que $\lambda > 0$, tenemos:

$$p^H u(w_E) + (1-p^H)u(w_F) - v(e^H) = \underline{U} \quad (6)$$

- Sabiendo que $\mu > 0$, tenemos:

$$(p^H - p^L)\left(u(w_E) - u(w_F)\right) = v(e^H) - v(e^L) \quad (7)$$

¿$\mu \neq 0$?

De $(5) \rightarrow u(w_E) = u(w_F)$

De $(4) \rightarrow v(e^H) \leq v(e^L)$

Inconsistencia

- De (6) y (7), restando, se deduce:

$$\left(u(w_E) - u(w_F)\right) = \frac{1}{p^H}\left[\underline{U} + v(e^H) - u(w_F)\right] = \frac{1}{p^H - p^L}\left[v(e^H) - v(e^L)\right]$$

- Si $w_F \equiv w^H_{F,asim}$ (Estado: fracaso | Esfuerzo: alto | Información: asimétrica):

$$u\left(w^H_{F,asim}\right) = \underline{U} + v(e^H) - \frac{p^H}{p^H - p^L}\left[v(e^H) - v(e^L)\right]$$

- Si $w_E \equiv w^H_{E,asim}$ (Estado: éxito | Esfuerzo: alto | Información: asimétrica):

$$u\left(w^H_{E,asim}\right) = \underline{U} + v(e^H) + \frac{1 - p^H}{p^H - p^L}\left[v(e^H) - v(e^L)\right]$$

Por lo tanto:

$$w^H_{E,asim} > w^H_{sim} > w^H_{F,asim}$$

- Reemplazando en la función objetivo del principal:

$$\Psi_{\mathbb{P}}(w_E, w_F \mid e^H) = E[X \mid e^H] - \left[p^H w^H_{E,asim} + (1 - p^H) w^H_{F,asim}\right]$$

$$\Psi_{\mathbb{P}}(w_E, w_F \mid e^H) = \left[p^H x_E + (1 - p^H) x_F\right] - \left[p^H w^H_{E,asim} + (1 - p^H) w^H_{F,asim}\right]$$

---

b. $\mathbb{P}$ prefiere e^H

$$\Psi_{\mathbb{P}}(w_E, w_F \mid e^L) = \max_{w^H_E, w^H_F} p^L(x_E - w_E) + (1 - p^L)(x_F - w_F)$$

$$s.a. \rightarrow p^L u(w_E) + (1 - p^L) u(w_F) - v(e^L) \geq \underline{U}$$

$$\rightarrow (p^H - p^L)\left(u(w_E) - u(w_F)\right) < v(e^H) - v(e^L)$$

Aquí es suficiente con que $\mathbb{P}$ pague a $\mathbb{A}$ una cantidad fija, igual a la que le pagaría bajo información simétrica, garantizándole el nivel de utilidad de reserva, y así el agente elija e^L.

Ante un pago fijo, el agente escoge el mínimo esfuerzo porque maximiza su utilidad (minimiza la desutilidad del esfuerzo)

Así, el contrato óptimo en el caso simétrico para e^L satisface la restricción de incentivos:

$$w_E = w_F = w^L_E = w^L_F = u^{-1}\left(\underline{U} + v(e^L)\right)$$

$$w^L_{asim} = w^L_{sim} = u^{-1}\left(\underline{U} + v(e^L)\right)$$

- Reemplazando en la función objetivo del principal:

$$\Psi_{\mathbb{P}}(w_E, w_F \mid e^H) = E[X \mid e^L] - w^L_{sim} = \left[p^H x_E + (1 - p^H) x_F\right] - u^{-1}\left(\underline{U} + v(e^L)\right)$$

Decisión de $\mathbb{P}$:

- Decisión de $\mathbb{P}$: prefiere e^H, si:

$$\Psi_{\mathbb{P}}(w^H_E, w^H_F \mid e^H) \geq \Psi_{\mathbb{P}}(w^L_E, w^L_F \mid e^L)$$

$$(p^H - p^L)(x_E - x_F) \geq p^H\left(w^H_{E,asim} - w^L_{sim}\right) + (1 - p^H)\left(w^H_{F,asim} - w^L_{sim}\right)$$

Si el beneficio marginal del principal cubre por lo menos al costo marginal.