JUEGOS ESTÁTICOS
INFORMACIÓN INCOMPLETA

- Estudiaremos aquellos juegos estáticos con una particularidad: por lo menos uno de los jugadores desconoce el pago que recibirá algún otro jugador.
- Los juegos con información incompleta se denominan JUEGOS BAYESIANOS.

Ejemplo: (Duopolio de Cournot bajo Información Incompleta)

Dos empresas, $E_1\ y\ E_2$, producen un único bien (homogéneo) en cantidades q_1 y q_2. La demanda inversa del mercado es: $P(Q) = a - bQ$, donde $Q = q_1 + q_2$. Las funciones de costo serán las siguientes

- La función de costos para la empresa 1: $C_1(q_1) = cq_1$
- La función de costos para la empresa 2: $C_2(q_2) = \begin{cases} c_A q_2, & con\ probabilidad\ \ \theta \\ c_B q_2, & con\ probabilidad\ 1-\theta \end{cases}$

Donde $c_B < c_A$, $A = Alto$ y $B = Bajo$.

En este caso la información es asimétrica porque E_2 conoce tanto sus costes propios como los costos de fabricación de E_1. En cambio, E_1 solo conoce sus costes propios y el costo marginal de E_2 en cada caso (c_A, c_B).

Solución

Considere que la cantidad producida por E_1 será q_1^*. Entonces E_2 resolverá su problema:

- Si el costo de E_2 es alto, E_2 elegirá $q_2^*(c_A)$ que solucione: $\underset{q_2}{Máx}[(a - q_1^* - q_2) - c_A]q_2$
- Si el costo de E_2 es bajo, E_2 elegirá $q_2^*(c_B)$ que solucione: $\underset{q_2}{Máx}[(a - q_1^* - q_2) - c_B]q_2$

Como E_1 sabe que el costo de E_2 es alto con probabilidad θ elegirá una cantidad óptima que satisfaga sus conjeturas. Entonces E_1 elegirá q_1^* que solucione:

$$\underset{q_1}{Máx}\, \theta\big[\big(a - q_1 - q_2^*(c_A)\big) - c\big]q_1 + (1-\theta)\big[\big(a - q_1 - q_2^*(c_B)\big) - c\big]q_1$$

Resolviendo las condiciones de primer orden para los problemas de E_2 y E_1, tenemos:

$$q_2^*(c_A) = \frac{a - q_1^* - c_A}{2} \quad \wedge \quad q_2^*(c_B) = \frac{a - q_1^* - c_B}{2}$$

$$q_1^* = \frac{\theta[a - q_2^*(c_A) - c] + (1-\theta)[a - q_2^*(c_B) - c]}{2}$$

Metiendo $q_2^*(c_A)$ y $q_2^*(c_B)$ en q_1^* se tiene:

$$q_2^*(c_A) = \frac{a - 2c_A + c}{3} + \frac{1-\theta}{6}(c_A - c_B)$$

$$q_2^*(c_B) = \frac{a - 2c_B + c}{3} - \frac{\theta}{6}(c_A - c_B)$$

$$q_1^* = \frac{a - 2c + \theta c_A + (1-\theta)c_B}{3}$$

Debido a que la información es imperfecta, E_2 tiene una ventaja sobre E_1. Por lo tanto, E_1 debe elegir la mejor estrategia, considerando tanto la posibilidad de ambos escenarios (que E_2 tenga costos bajos como la posibilidad de que tenga costos altos), para evitar posibles

Tipos, conjeturas y pagos

- Cada jugador i tiene, además de acciones A_i y pagos u_i, un conjunto de tipos T_i y una suposición o conjetura p_i sobre el tipo de los otros jugadores. Resumiendo:

$$G_B = \{J; A_1, A_2, \dots, A_n; T_1, T_2, \dots, T_n; p_1, p_2, \dots, p_n; u_1, u_2, \dots, u_n\}$$

- La estructura temporal del juego es:
    - Natura determina un vector de tipos $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$, donde t_i pertenece a T_i, de acuerdo con una probabilidad a priori $p(t)$, es de dominio público.
    - Solo el jugador i observa su tipo t_i, revelado por Natura.
    - Los jugadores toman en simultáneo sus decisiones (el jugador elige a_i).
    - Reciben los pagos. Cada jugador i recibe $u_i(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n; t_1, \dots, t_i, \dots, t_n)$.

Observaciones

- Hay juegos en los que el jugador i tiene información privada no solo sobre su propia función de pagos, sino también sobre la función de ganancias de otro jugador.
- Acerca de las conjeturas $p_i(t_{-i}/t_i)$. Asumimos que es de dominio público que Natura elija un vector de tipos $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$, de acuerdo con la distribución a priori de probabilidad $p(t)$.

$t_i = (t_1, \dots, t_{i-1}, t_i, t_{i+1}, \dots, t_n)$

$t_{-i} = (t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n)$

Tal como se indica en la definición, estamos suponiendo que los jugadores se **forman conjeturas consistentes**, es decir, condicionadas a sus propios tipos efectivos, pero sobre una misma distribución de probabilidad a priori $p(t)$.

- Cuando Natura revela t_i al jugador i, este puede calcular la conjetura $p_i(t_{-i}/t_i)$ usando la Regla de Bayes:

$$p_i(t_{-i}/t_i) = \frac{p_i(t_{-i}/t_i)}{p(t_i)} = \frac{p_i(t_{-i}/t_i)}{\sum_{t_{-i} \in T_{-i}} p_i(t_{-i}/t_i)}$$

- Son de dominio público las distintas conjeturas que podría formarse i. Se asumirá que los tipos de los jugadores son independientes, con lo que $p_i(t_{-i})$ no depende de t_i, pero se obtiene a partir de la distribución a priori $p(t)$.

Equilibrio Bayesiano

- El perfil de estrategias s^* forma un equilibrio Bayesiano de Nash si para cada jugador i y para cada uno de sus tipos t_i la estrategia $s_i^*(t_i)$ es una solución de:

$$\underset{a_i \in A_i}{Máx} \sum_{t_{-i} \in T_{-i}} p_i(t_{-i}/t_i) u_i(s_i^*(t_1), \dots, s_{i-1}^*(t_{i-1}), a_i, s_{i+1}^*(t_{i+1}), \dots, s_n^*(t_n); t_1, \dots, t_n)$$

- Un equilibrio Bayesiano de Nash es un equilibrio de Nash en un juego bayesiano.

Dado un jugador cualquiera i, y un tipo t_i cualquiera de éste, la estrategia s_i^* especificada para este jugador en el perfil s^*, ha de asignar a ese tipo una acción $s_i^*(t_i)$ que sea respuesta óptima, en términos esperados, al conjunto de combinaciones de acciones asignadas a los tipos posibles de los otros jugadores por sus respectivas estrategias en s_{-i}^*.

Ideas importantes:

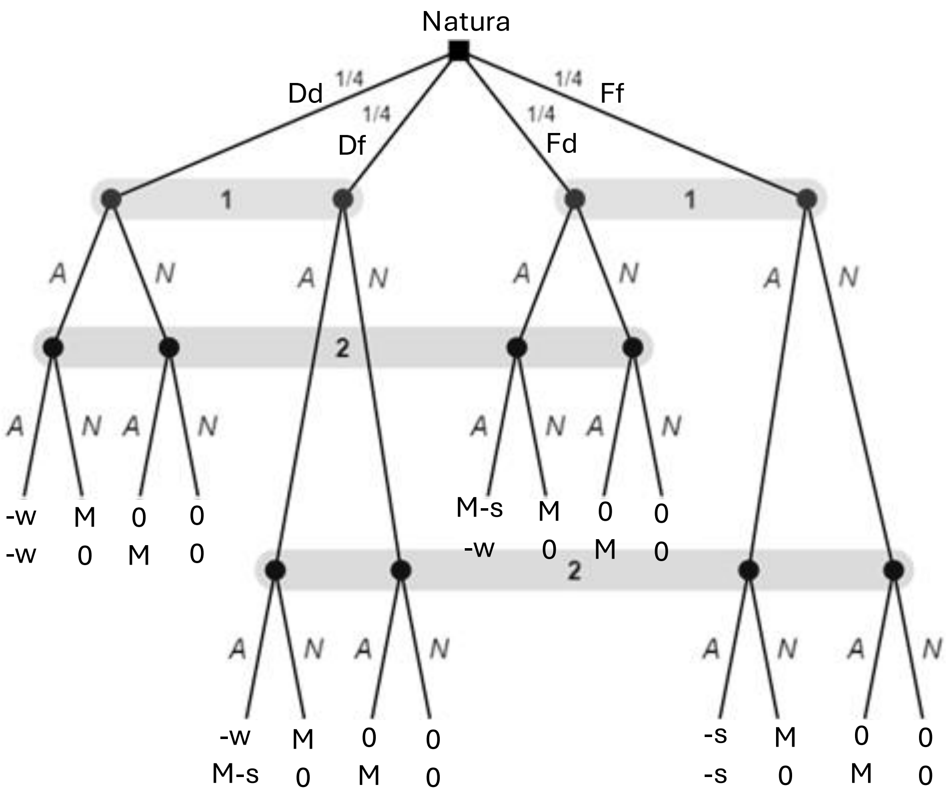
- Como Natura empieza el juego eligiendo los tipos de los jugadores, una estrategia (pura) de i debe establecer una acción posible para cada uno de los tipos posibles de jugador i.
- Dos tipos de estrategias:
    - Estrategia de separación: cada tipo $t_i \in T_i$ elige una acción diferente $a_i \in A_i$.

Ejemplo: (Dos ejércitos)

Dos ejércitos oponentes están listos para apoderarse de una isla. El comandante general de cada ejército tiene dos opciones atacar (A) o no atacar (N). Asimismo, cada ejército es de dos tipos "débil" o "fuerte" con igual probabilidad (siendo el resultado independiente de un ejército a otro), y el tipo de cada ejército solo es conocido por su comandante general. Los pagos son los siguientes: La isla es valorada en M, si es capturada. Un ejército puede apoderarse de la isla atacando cuando su oponente no lo hace, o atacando cuando su rival también ataca, siempre que en este último caso sea un ejército fuerte y se enfrente a un ejército rival débil. Si dos ejércitos de idéntica fuerza atacan, ninguno conquista la isla. Además, un ejército también tiene un costo por luchar, que es s si es fuerte y w si es débil, siendo $s < w$. No se incurre en costos por atacar si el rival no lo hace.

a. Represente el juego con sus características (estados, probabilidades, jugadores, tipos, acciones, pagos), mediante un diagrama de árbol (forma extensiva).
b. Represente el juego en forma normal o estratégica con sus características (estados, probabilidades, jugadores, tipos, acciones, pagos), mediante un diagrama de árbol o matricialmente.

Más ejemplos:
Teoría de Juegos – Emilio Cerdá



F

	A	N
A	-s,-s	M,0
N	0,M	0,0

Ff

	A	N
A	M-s,-w	M,0
N	0,M	0,0

Fd

(1/2)

f (1/2) d (1/2)

D

	A	N
A	-w,M-s	M,0
N	0,M	0,0

Df

	A	N
A	-w,-w	M,0
N	0,M	0,0

Dd

(1/2)

- En el juego descrito intervienen dos ejércitos: Ejército 1 y Ejército 2.
- F y D denotan los tipos fuerte y débil para el Ejército 1. Análogamente, f y d para el Ejército 2.
- Las acciones disponibles para ambos son A atacar o no atacar N.
- Hay cuatro estados posibles, todos con probabilidad 1/4: *Ff*, *Fd*, *Df* y *Dd*.