

1. La Simulación de Sistemas

1.1 Sistemas y Modelos

El término sistema se utiliza habitualmente con múltiples sentidos, tantos que resulta difícil dar una definición única que los abarque todos y al mismo tiempo sea lo suficientemente precisa para servir a propósitos específicos. Podemos partir de la definición de sistema como *conjunto de cosas que ordenadamente relacionadas entre si contribuyen a determinado objeto*. Se trata de una definición sencilla pero que pone de manifiesto los caracteres relevantes de lo que constituye el denominado enfoque sistémico: contemplación del todo y no de las partes aisladamente, acento en las relaciones entre las partes y consideración teleológica al tener en cuenta los propósitos u objetivos del sistema, especialmente válida para los sistemas creados por el hombre.

La orientación sistémica a la resolución de problemas reconoce que el comportamiento de cualquier parte tiene algún efecto sobre el comportamiento del sistema como un todo, en su desarrollo a partir de los años veinte ha ido solapando e interaccionando múltiples disciplinas, dando lugar a lo que hoy en día se conoce como **Investigación Operativa**, definida por Ackoff y Sasieni como “*la aplicación del método científico mediante equipos interprofesionales a los problemas de gobierno de sistemas organizados (hombre-máquina) para proporcionar soluciones que sirvan lo mejor posible a la organización considerada como un todo*”. Caracterizada metodológicamente por:

1. La aplicación del método científico a los problemas que se presentan en el diseño, construcción y gobierno de sistemas complejos en los que intervienen hombres y máquinas.
2. Enfoque global, es decir orientación sistémica
3. Construcción de modelos de los sistemas (Representación de los sistemas por medio de modelos)
4. Optimización: búsqueda de las mejores soluciones
5. Ayuda a los responsables de la gestión del sistema a la toma de decisiones

En el estudio de sistemas existentes, o en el diseño de sistemas que se han de construir, el primer paso lo constituye un proceso de adquisición de información sobre el sistema, qué elementos lo componen, o lo han de componer, que propiedades los caracterizan, o los han de caracterizar, que relaciones o interacciones existen, o se propone que existan, entre ellos, que cambios provocan en el sistema tales interacciones, etc..

Denominaremos *entidades* a los objetos de interés que constituyen el sistema, *atributos* a las propiedades que caracterizan a las entidades componentes del sistema, y *estado del sistema* a la caracterización de las entidades del sistema y sus atributos en un instante dado. Nos va a interesar el carácter dinámico de los sistemas, es decir sus cambios de estado a lo largo del tiempo dentro de un horizonte dado, y en consecuencia nos va a interesar identificar qué es lo que produce cambios en el estado del sistema, y por lo tanto, estudiar la evolución del sistema a partir del seguimiento de sus cambios de estado.

La forma primaria de realizar este estudio sería, evidentemente, la experimentación con el propio sistema. Esto no siempre es posible. En unos casos por imposibilidad física o económica manifiesta, basta pensar en lo que implicaría el experimentar con una fábrica. En otros porque el sistema existe

únicamente en forma hipotética y precisamente lo que nos interesa es saber como se comportará antes de que sea construido.

Como consecuencia lo que haremos será estudiar el comportamiento del sistema a través de una representación formal, o modelo, del mismo.

1.2 El Proceso de Construcción de Modelos: Modelos Matemáticos

El análisis del sistema a través de un modelo implica que la representación del sistema que constituye el modelo ha de ser una representación manipulable. El ejercicio de construcción del modelo del sistema comienza por la construcción de un **modelo conceptual** del sistema, representación equivalente lógica aproximada del sistema real que como tal constituye una abstracción simplificada del mismo, que a continuación se traduce en un modelo apto para su ejecución en un ordenador. El proceso de modelización o construcción del modelo implica:

- Identificación de las entidades principales del sistema y de sus atributos característicos.
- Identificación y representación de las reglas que gobiernan el sistema que se quiere simular.
- Captación de la naturaleza de las interacciones lógicas del sistema que se modeliza.
- Verificación de que las reglas incorporadas al modelo son una representación válida de las del sistema que se modeliza.
- Formulación de hipótesis de modelización que traduzcan adecuadamente la información sobre el sistema y las relaciones entre sus entidades, y su papel en los cambios de estado del sistema
- Representación del comportamiento aleatorio inherente a las componentes del sistema que lo exhiban.

Las etapas del proceso de construcción del modelo se sintetizan en la figura 1, [GAR].

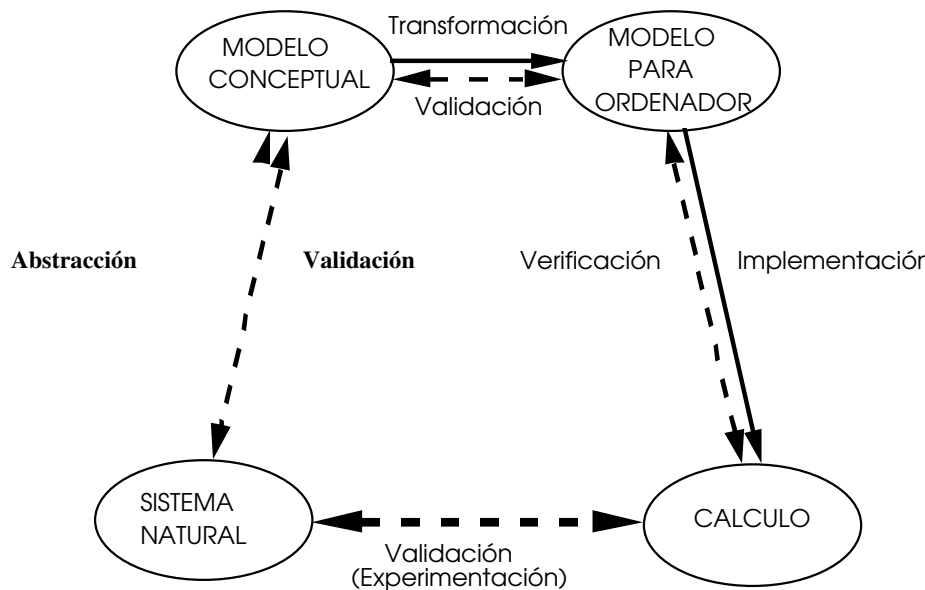


Figura 2. PROCESO DE MODELIZACION

Una precaución importante a tener en cuenta cuando se construye un modelo es que ningún modelo es mejor que las hipótesis que encierra. Traducir el modelo a un modelo específico para ordenador consiste en representar el modelo conceptual mediante un lenguaje apto para su ejecución en un ordenador. Este proceso se simplifica cuando la representación se hace utilizando un lenguaje especializado orientado a problemas específicos.

Tradicionalmente se han utilizado muchos tipos de modelos en el análisis de sistemas, clasificados de diferentes modos. Para los propósitos que nos interesan en esta descripción vamos a considerar únicamente los *modelos matemáticos* de los sistemas, es decir modelos en los que la representación formal del sistema que entendemos por modelo se hace en términos del formalismo de las matemáticas, los modelos matemáticos pueden ser a su vez *estáticos* o *dinámicos*. En el caso de los modelos matemáticos hemos de hacer referencia a la técnica utilizada para resolver el modelo, según la cual distinguiremos entre métodos *analíticos* y *numéricos*. **La simulación de sistemas es una técnica numérica que utiliza modelos matemáticos dinámicos.**

En un modelo matemático las entidades de un sistema y sus atributos se representan mediante variables matemáticas, clasificadas en *variables de control* y *variables no controlables*, según que los valores que puedan tomar puedan ser el resultado de una decisión o vengan determinados por las características del propio sistema. Las actividades que cambian el estado del sistema se describen por medio de funciones matemáticas que interrelacionan las variables. Los objetivos del sistema se representan mediante una *función de utilidad*, o *función objetivo*, que evalúa el rendimiento del sistema como una función de los dos tipos de variables controlables y no controlables.

La forma general de un modelo matemático propuesta por Ackoff, [ACK] es:

$$U = f(X, Y)$$

sometida a:

$$X \in W(Y)$$

donde U es la función de utilidad, dependiente de las variables de control $X=(X_1, X_2, \dots, X_n)$, y de la no controlables $Y=(Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$, donde las variables de control pueden tomar valores en el dominio de definición $W(Y)$, que depende de las variables no controlables.

Puesto que en la mayor parte de los casos el objetivo que se persigue es el de determinar cuáles son las mejores decisiones, o en otras palabras, que valores de las variables de decisión optimizan la función de utilidad, y dado que como hemos dicho en los modelos matemáticos las relaciones entre las variables son funciones matemáticas, la forma genérica que adoptaremos para los modelos matemáticos es:

$$[OPT]U = f(X, Y)$$

sometida a:

$$R_k(X, Y)(\leq, =, \geq) b_k$$

$$k = 1, 2, \dots, K$$

donde $R_k(X, Y)$ es la k-ésima ecuación o inecuación de condición que traduce las relaciones funcionales entre las variables, o en otras palabra la formalización en términos de una ecuación de las hipótesis de modelización.

Un modelo matemático de tipo dinámico permite que los cambios en los atributos del sistema sean expresados como una función del tiempo, bien mediante una solución analítica o por medio de una computación numérica, según sea la complejidad del modelo. Supongamos, por ejemplo, el sistema correspondiente a la suspensión de una rueda de automóvil cuando se supone que la carrocería permanece inmóvil en la dirección vertical. El sistema puede ser representado como el caso de una masa M , sometida a una fuerza $F(t)$, que varía con el tiempo, y ligada a un muelle cuya fuerza es proporcional a su extensión o contracción, y al efecto de un absorbente de los impactos que ejerce una fuerza de amortiguación proporcional a la velocidad de la masa. El movimiento del sistema puede describirse por medio de la siguiente ecuación diferencial:

$$M\ddot{x} + D\dot{x} + Kx = KF(t)$$

donde x es la distancia que se ha desplazado, M es la masa, K es la constante elástica del muelle, y D es el factor de amortiguación de los impactos. Las componentes del sistema son en este caso la rueda, el muelle y el sistema amortiguador, y las hipótesis de modelización son las de la dinámica de un cuerpo sometido a la acción de fuerzas elásticas. Esta ecuación es un ejemplo de modelo matemático dinámico; una ecuación que en este caso puede ser resuelta analíticamente.

En otros casos la naturaleza de las ecuaciones que constituyen el modelo continuo hace aconsejable recurrir a procedimientos numéricos para su integración. Un ejemplo interesante de esta situación lo constituyen los modelos utilizados para estudiar la dinámica de poblaciones. Un caso típico es el de la dinámica de la competición entre dos poblaciones una pasiva, que sirve de presa, y otra activa,

depredadora de la anterior. Modelos de este tipo fueron introducidos por Volterra, [VOL], en 1926 como modelo biológico para estudiar la evolución de la población piscícola en el Adriático.

Los resultados de la integración del modelo dinámico presa-depredador de Lotka-Volterra, han sido obtenidos mediante el software numérico MATLAB, [MAT].

Otro ejemplo típico de modelos dinámicos son los Modelos Macroscópicos de Simulación de Tráfico. La perspectiva de la modelización macroscópica de los flujos de tráfico es la de adoptar un símil hidráulico, es decir visualizar el flujo de vehículos como flujo o corriente de un fluido continuo, es una asociación natural bastante intuitiva, que de hecho ya se adopta cuando se tiende a describir el tráfico en términos de volúmenes (o flujos), concentraciones (o densidades) y velocidades. En la analogía como flujo de un fluido, el tráfico es tratado como un fluido unidimensional compresible, lo que conduce a dos hipótesis básicas de modelización:

- a. El flujo de tráfico se conserva
- b. Hay una relación en términos de una función univaluada entre la velocidad y la densidad, o entre el flujo y la densidad.

En el modelo matemático la primera hipótesis se traduce en la denominada ecuación de conservación o de continuidad, que implica que si el flujo disminuye con la distancia la densidad se incrementa con el tiempo. En términos prácticos de ingeniería de tráfico la ecuación de conservación implica que en cualquier sistema de tráfico el flujo de entrada es igual al de salida más el almacenado en el sistema. Esta hipótesis se acepta, en general, sin mayor controversia, como un supuesto obvio.

No ocurre lo mismo, sin embargo, con la segunda hipótesis, que ha levantado y sigue levantando una gran controversia, en parte porque no siempre se entiende y porque las medidas son contradictorias. Concretamente si la velocidad (u) es una función de la densidad como consecuencia los conductores ajustan su velocidad de acuerdo con la densidad, es decir cuando la densidad aumenta la velocidad disminuye. Esto es intuitivamente correcto pero teóricamente puede conducir a velocidades o densidades negativas. Por otra parte, se ha observado que para el mismo valor de la densidad pueden medirse muchos valores de la velocidad. Todo ello conduce a la necesidad de matizar esta hipótesis. La matización consiste en considerar que la velocidad (o el flujo) es una función de la densidad únicamente en el equilibrio, y puesto que es muy raro poder observar el equilibrio es difícil obtener una relación velocidad-densidad satisfactoria, lo que lleva en la práctica a proponer una relación teórica.

1.3 Simulación de Sistemas Continuos y Simulación de Sistemas Discretos

En general los modelos matemáticos de tipo dinámico representan sistemas continuos, es decir sistemas en los que las actividades predominantes del sistema causan pequeños cambios en los atributos de sus entidades, cuando las relaciones entre ellas describen las tasas o ratios de cambio de los atributos, por lo que, en general, tales modelos están definidos formalmente por ecuaciones diferenciales.

En muchos casos a partir del modelo matemático del sistema es posible obtener información sobre el mismo por medios analíticos, como pone de manifiesto el modelo del sistema de amortiguación de un automóvil, que acabamos de presentar como ejemplo de modelo dinámico. Cuando esto no es posible se recurre a procedimientos numéricos para resolver las ecuaciones del modelo, especialmente en el caso de los modelos dinámicos representados por ecuaciones o sistemas de ecuaciones diferenciales.

Con el tiempo se ha ido desarrollando una amplia variedad de métodos numéricos de cálculo para resolver las ecuaciones de los modelos, una técnica numérica particular es la que denominamos *Simulación de Sistemas*, que como veremos consiste en un **seguimiento a lo largo del tiempo de los cambios que tienen lugar en el modelo dinámico del sistema**. En el caso de los modelos estáticos las técnicas numéricas involucradas se conocen como **Simulación Determinista**, mientras que en los modelos dinámicos bien por la naturaleza del sistema modelizado, bien por las características del proceso numérico utilizado, la introducción de la aleatoriedad nos llevará a hablar de **Simulación Estocástica**, que es la que va a ser objeto de este artículo.

La manera de efectuar el seguimiento temporal de los cambios en el modelo, que supondremos en correspondencia con los cambios en el sistema representado por el modelo, nos lleva a la aparición de dos grandes categorías dentro de la Simulación de Sistemas según que los cambios sean continuos o discretos. En el primer caso se supone que la naturaleza del sistema permite cambios de estado continuos, determinados por cambios continuos en los valores de las variables que representan el estado del sistema, mientras que en el segundo los cambios solo pueden tener lugar en instantes discretos en el tiempo.

Para los sistemas con cambios continuos, dado que nuestro principal interés a la hora de simular su comportamiento será reproducirlos, los sistemas de ecuaciones diferenciales serán la forma mas adecuada de representarlos. Denominaremos *Simulación Continua* a la simulación basada en este tipo de modelos. Los simuladores analógicos han sido ampliamente utilizados en este tipo de simulación, aunque el desarrollo de las técnicas numéricas para la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales, el avance tecnológico en los ordenadores digitales, y la evolución de los lenguajes de programación les han hecho perder protagonismo. SIMULINK, software para la simulación de sistemas dinámicos integrado en el entorno de computación numérica MATLAB [MAT] es un buen ejemplo de esta tendencia.

Para los sistemas discretos, el seguimiento de los cambios de estado requiere la identificación de qué es lo que causa el cambio y cuando lo causa, lo que denominaremos un *suceso*, las ecuaciones del modelo se convierten entonces en las ecuaciones y relaciones lógicas que determinan las condiciones en que tiene lugar la ocurrencia de un suceso. Este tipo de simulación, conocida con el nombre de *Simulación Discreta*, consiste en el *seguimiento de los cambios de estado del sistema que tienen lugar como consecuencia de la ocurrencia de una secuencia de sucesos*.

1.4 La Simulación como Proceso Experimental: Experimentos y Ordenadores

La práctica de la simulación es una técnica que no realiza ningún intento específico para aislar las relaciones entre variables particulares, antes bien adopta un punto de vista global desde el que se intenta observar como cambian conjuntamente todas las variables del modelo con el tiempo. En todo caso, las relaciones entre las variables deben obtenerse a partir de tales observaciones. Esta concepción caracteriza la simulación como una técnica experimental de resolución de problemas, lo que comporta la necesidad de repetir múltiples ejecuciones de la simulación para poder entender las relaciones implicadas por el sistema, en consecuencia el uso de la simulación en un estudio debe planificarse como una serie de experimentos cuyo diseño debe seguir las normas del diseño de experimentos para que los resultados obtenidos puedan conducir a interpretaciones significativas de las relaciones de interés.

La simulación con computador es por lo tanto una técnica que realiza experimentos en un computador con un modelo de un sistema dado. El modelo es el vehículo utilizado para la experimentación en sustitución del sistema real. Los experimentos pueden llegar a tener un alto grado de sofisticación que requiera la utilización de técnicas estadísticas de diseño de experimentos. En la mayor parte de los casos los experimentos de simulación son la manera de obtener repuestas a preguntas del tipo ¿Qué pasaría sí?, preguntas cuyo objetivo suele ser evaluar el impacto de una posible alternativa que sirva de soporte a un proceso de toma de decisiones sobre un sistema, proceso que puede representarse esquemáticamente mediante el diagrama siguiente, figura 4, Pidd [PIDa]:

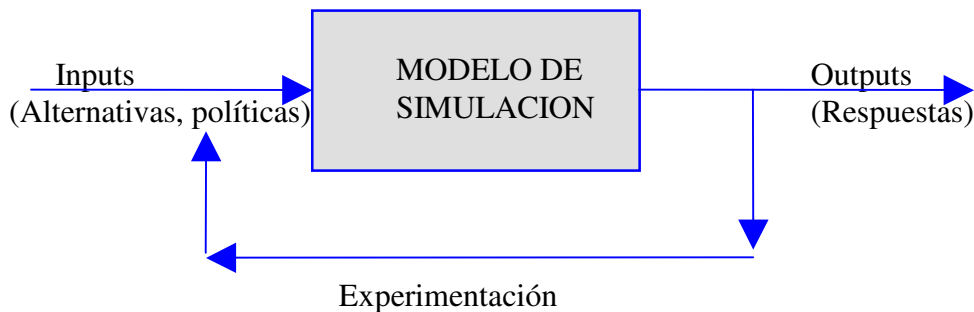


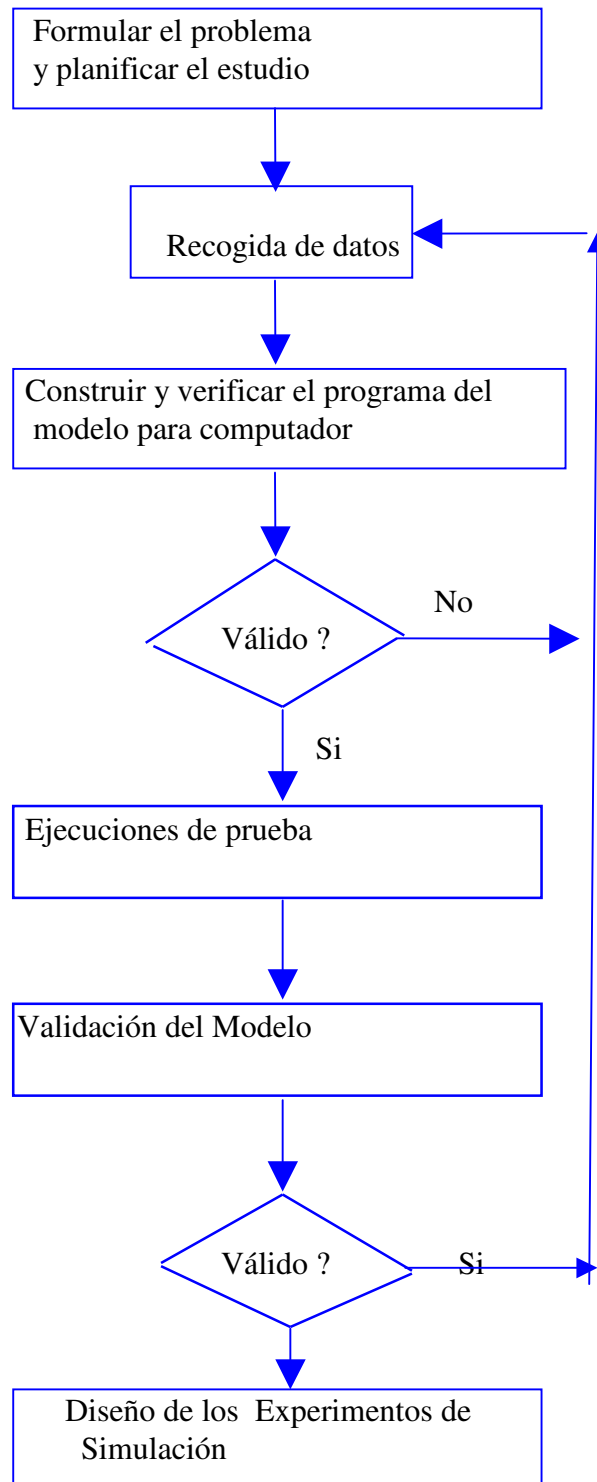
Figura 4. Esquema del proceso experimental de la simulación

La simulación, y los experimentos de simulación, se convierten así en una herramienta de **análisis de sistemas**, para entender cómo opera un sistema existente, o cómo puede operar uno propuesto. La situación ideal, en la cual el investigador realizaria los experimentos sobre el sistema real es sustituida por una en la que el investigador construye un modelo del sistema y experimenta sobre él mediante la simulación, utilizando un ordenador, para investigar el comportamiento del modelo e interpretar los resultados en términos del comportamiento del sistema objeto del estudio. La simulación, y el procedimiento experimental asociado, se convierten también en una herramienta de **diseño de sistemas**, cuyo objetivo es la producción de un sistema que satisfaga ciertas especificaciones. El diseñador puede seleccionar o planear como deben ser las componentes del sistema y concebir cual debe ser la combinación de componentes y relaciones entre ellas que determinan el sistema propuesto. El diseño se traduce en un modelo cuyo comportamiento permite inducir el del sistema previsto. El diseño se acepta cuando las previsiones se ajustan adecuadamente a los comportamientos deseados, en caso contrario se introducen las modificaciones pertinentes en el modelo y se repite el proceso.

Otra posibilidad es la que se da en estudios económicos, políticos, médicos, etc. en los que se conoce el comportamiento del sistema pero no los procesos que producen tal comportamiento. En este caso se formulan hipótesis sobre las entidades y actividades que pueden explicar la conducta. El estudio de simulación por medio del modelo correspondiente permite comparar las respuestas de un modelo basado en tales hipótesis con el comportamiento conocido, de manera que una concordancia adecuada lleva a suponer que la estructura del modelo se corresponde con la del sistema real. La aplicación de la simulación a diferentes tipos de sistemas combinada con las diferentes clases de estudio que se pueden realizar conduce a una gran cantidad de variantes de la manera en que se puede realizar un estudio de simulación. Sin embargo hay determinados pasos básicos del proceso que pueden identificarse como los constituyentes de lo que denominaremos la metodología de un estudio de simulación, y son los siguientes:

1. Definición del problema y planificación del estudio

2. Recogida de Datos
3. Formulación del modelo matemático
4. Construcción y verificación del programa para computador del modelo
5. Ejecuciones de prueba del modelo
6. Validación del modelo
7. Diseño de los experimentos de simulación
8. Ejecución de los experimentos.
9. Análisis de los resultados



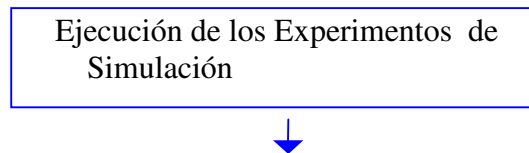


Figura 5. Etapas de un estudio de Simulación

El proceso no es, en general, secuencial, sino iterativo, en el que algunos de los pasos pueden tener que repetirse en función de los resultados intermedios tal como muestra la figura 5.

Ningún estudio de simulación puede llevarse a cabo sin establecer claramente una definición precisa del problema que se pretende resolver y los objetivos del estudio. Los diseños alternativos del sistema que se han de estudiar han de quedar claramente especificados, así como los criterios para evaluar dichos diseños. Criterios que servirán de base al proceso de toma de decisiones para elegir uno de los diseños. Para la formulación del modelo debe establecerse su estructura definiendo cuales son los aspectos del funcionamiento del sistema que son significativos para la resolución del problema que tenemos entre manos, y que datos es necesario recoger para proporcionar al modelo la información adecuada.

La construcción del modelo de simulación es en muchos casos más un arte que una ciencia, que combina aspectos matemáticos y lógicos. En general la experiencia recomienda empezar con modelos moderadamente detallados que paulatinamente se van haciendo más sofisticados. El modelo únicamente debe contener el nivel de detalle requerido por los objetivos del estudio. Dado un modelo matemático la construcción del programa para computador es el requisito imprescindible para poder manipular numéricamente el modelo para obtener las soluciones que respondan a las preguntas que el analista se formula sobre el sistema.

La validación del modelo es uno de los pasos cruciales del proceso, suele ser uno de los más difíciles, pero es un requisito indispensable para establecer si el modelo representa o no adecuadamente el sistema objeto del estudio, de manera que se puedan garantizar las inducciones y extrapolaciones sobre el comportamiento del sistema a partir de lo observado sobre el modelo.

Diseñar los experimentos comporta, como hemos comentado anteriormente, aplicar rigurosamente las técnicas observacionales de la estadística, propias del método científico, que permitan garantizar la significación de las respuestas producidas por la ejecución del programa que implanta el modelo en el computador.

1.5 Modelos de Simulación frente a Soluciones Analíticas

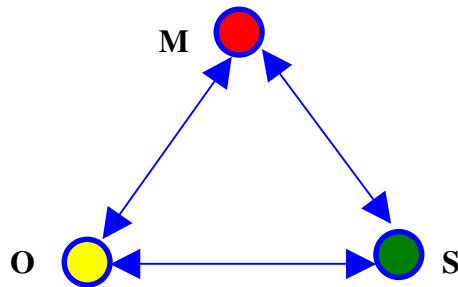
A pesar de su utilidad la simulación no puede considerarse como una panacea capaz de resolver todo tipo de situaciones, aún contando con la ayuda de los lenguajes especializados para la simulación, o de los avances que han representado los entornos software para simulación, Henrikssen [HEN], el desarrollo de los generadores de simuladores, Mathewson [MTH], o de los simuladores visuales, SIMFACTORY [SMF], WITNESS [WIT], etc., la realización de un estudio de simulación puede comportar un esfuerzo y un consumo de recursos no despreciable en cualquiera de las fases: definición del problema, recogida de información, construcción del modelo y programación del mismo, realización de los experimentos de simulación en computador. Especialmente en este último caso sistemas complejos pueden conducir a

programas largos y complejos que requieran cantidades importantes de recursos computacionales. Estas han sido algunas de las razones por las que en ciertos dominios de aplicación la simulación ha sido considerada como un último recurso al que acudir cuando todo lo demás falla.

Si embargo la simulación, por sus características, y por los desarrollos computacionales que se han conseguido en los últimos años, sigue presentando una serie de ventajas que no solo la convierten en el procedimiento mas adecuado en muchos casos, sino que hacen que sea la única alternativa tecnológica en muchos otros.

Esto resulta especialmente obvio en aquellos casos en los que las características del sistema que se pretende estudiar hacen inviable, por razones físicas o de coste, la experimentación directa sobre el sistema. El mundo de la producción industrial, del tráfico, la aeronáutica, la industria del automóvil, etc. son claros ejemplos de esta situación, en la que, si bien es cierto que en algunos casos se puede recurrir a modelos analíticos, también lo es que tales modelos no siempre son capaces de recoger todos los aspectos de interés del sistema, que conducirían a modelos inviables, o para los que no se dispone de herramientas adecuadas, obligando a introducir una serie de hipótesis simplicadoras que pueden resultar inadecuadas en función de los objetivos del estudio. Un ejemplo relativamente sencillo puede ilustrar esta afirmación. Los modelos de colas son analíticamente tratables bajo hipótesis de modelización relativamente simples: llegadas según distribuciones de Poisson, tiempos de servicio exponenciales, disciplinas FIFO, etc.. Aún en este caso las soluciones para los periodos transitorios pueden ser complicadas de obtener analíticamente, en contraste con la simplicidad de los procedimientos para obtener las soluciones estacionarias, sin embargo, basta introducir hipótesis adicionales aparentemente sencillas, que aproximan el modelo a otras situaciones reales, para entrar rapidamente en el terreno de las dificultades analíticas crecientes, los modelos con distribuciones de probabilidad de llegadas y servicios de tipo general, inclusión de impaciencias o políticas basadas en prioridades, etc., son un buen ejemplo de ello. Incluso en aquellos casos en los que es posible la experimentación directa la simulación puede ofrecer ventajas tales como un coste inferior, tiempo, repeticiones y seguridad. Aún siendo viables los experimentos directos con el sistema físico pueden con frecuencia tener un coste muy superior al de la simulación a pesar de los esfuerzos para construir el modelo y el tiempo y recursos computacionales requeridos para la ejecución de los experimentos. Aunque el desarrollo de un modelo adecuado y su programación para ser ejecutado en un ordenador puede requerir una cantidad de tiempo significativa, una vez construido y depurado el modelo de simulación representa una atractiva posibilidad para trabajar con las más variadas escalas de tiempo, minutos, horas, semanas, meses, años, etc., en unos pocos segundos de tiempo de computador, lo que permite comparar colecciones variadas de alternativas, a través de experimentos de simulación que siempre pueden repetirse en las más diversas condiciones, lo que no siempre es posible en los experimentos con el sistema real, basta pensar en sistemas de manufactura, gestión de empresas, o militares (es difícil pensar en una situación en la que el enemigo permite repetir una batalla). Finalmente, es frecuente que los experimentos persigan el objetivo de determinar la respuesta del sistema en condiciones extremas, lo que puede resultar peligroso o incluso ilegal en la vida real. Las aplicaciones de la simulación en aeronáutica, o en la gestión de aeropuertos constituyen buenos ejemplos de lo que queremos significar. El dilema modelos analíticos frente a modelos de simulación debe resolverse en cada caso ateniéndose al tiempo de sistema, los objetivos del estudio, las características del modelo, los costes, etc.. La cuestión clave es nuestra habilidad y capacidad para construir el modelo del sistema, si este es analítico y las hipótesis de modelización no obligan a simplificaciones que invaliden la capacidad del modelo para responder a las cuestiones de interés que nos planteamos sobre el sistema, entonces las soluciones analíticas del modelo matemático pueden ser suficientes. Si nuestro conocimiento del sistema no nos permite formular hipótesis que conduzcan a una completa formalización del modelo en términos

analíticos, o el requisito de no realizar hipótesis simplificadoras conduce a modelos matemáticos de difícil, o imposible, tratamiento matemático, entonces posiblemente la simulación será la alternativa válida, si no es la única posible. El analista del sistema no debe olvidar que un mismo sistema puede representarse formalmente mediante diversos modelos en función de los problemas que el analista se plantea sobre el sistema. De acuerdo con Minsky, un objeto matemático M es un modelo válido de un sistema S para un observador O, si M es capaz de proporcionar respuestas válidas a las preguntas que O formula sobre S.



Law [LAW], formaliza el proceso de decisión modelo matemático-modelo de simulación, experimentación sobre el sistema real o sobre un modelo del sistema, como formas de estudiar un sistema, por medio del diagrama de la figura 6.

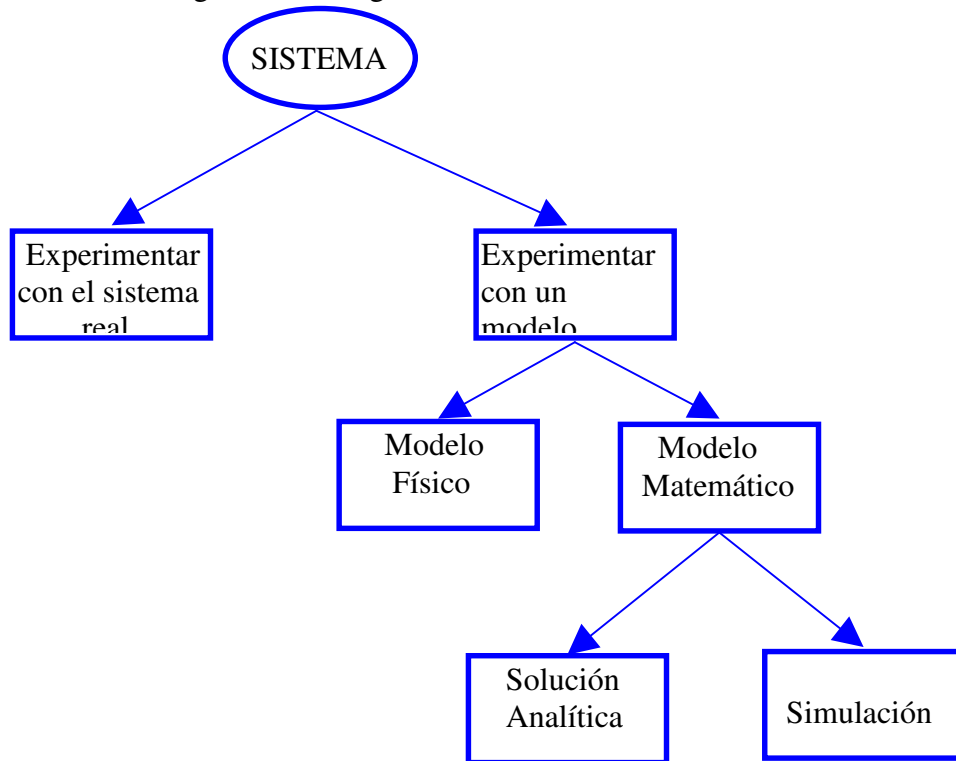


Figura 6. Formalización del proceso de decisión sobre el tipo de modelo según Law y Kelton

Al haberse hecho más fácil el uso de la simulación se ha incrementado notablemente su uso frente al de otros métodos para estudiar sistemas. De lo expuesto hasta aquí se desprende claramente que si bien la simulación tiene muchas ventajas, no deja de presentar algunos problemas, especialmente cuando se usa indebidamente, que cabe tener en cuenta para paliarlos o, si es posible, evitarlos, pues de lo contrario

pueden invalidar los resultados de un proyecto de simulación. Law y Kelton, [LAW], resumen en su texto la situación de la manera siguiente.

La simulación es recomendable, o incluso puede ser la única alternativa posible, para investigar sistemas complejos en los que estén presentes elementos estocásticos que difícilmente pueden ser tratados con la precisión adecuada en un modelo matemático. La simulación permite con relativa facilidad estimar el funcionamiento del sistema bajo condiciones de operación alternativas, o es la herramienta para comparar diseños alternativos de un sistema que tengan que satisfacer requerimientos específicos. La simulación permite mantener un mayor control sobre las condiciones experimentales que el que se puede mantener en la experimentación con el sistema físico. Por otra parte la simulación permite estudiar el comportamiento del sistema en periodos de tiempo de cualquier longitud, comprimidos a la duración de la ejecución del simulador en un computador.

Sin embargo, no se debe olvidar que la simulación de un modelo estocástico únicamente produce *estimaciones* de las características verdaderas del modelo para un conjunto particular de parámetros de entrada, lo que comporta la necesidad de diseñar adecuadamente los experimentos de simulación, y repetirlos en cantidad suficiente como para garantizar la calidad de las estimaciones. De ahí que los modelos de simulación no sean tan buenos cuando se pretende optimizar el rendimiento, como lo son cuando lo que se persigue es comparar entre sí diseños alternativos. En particular para sistemas para los que puede definirse un modelo analítico adecuado, que proporciona resultados exactos, este será preferible al modelo de simulación. No hay que olvidar en ningún caso que si un modelo no es una representación *válida* del sistema que se estudia la información que proporcione será de poca utilidad.

Modelos de simulación y modelos analíticos no deben considerarse siempre como distintos, en muchos casos pueden jugar un papel complementario sirviendo la simulación para verificar la validez de las hipótesis para el modelo analítico, o el modelo analítico para sugerir cuales son las alternativas razonables que hay que investigar por simulación.

Finalmente, suponiendo que se ha decidido proceder a un estudio de simulación, no hay que olvidar las recomendaciones metodológicas, que de no cumplirse pueden llevar al fracaso del estudio, como por ejemplo cuando no están bien definidos los objetivos del estudio, se construye un modelo con un nivel de detalle inadecuado, se concibe el estudio de simulación como una especie de ejercicio de programación de computadores, se utiliza inadecuadamente las capacidades de animación de resultados, no se identifican correctamente las fuentes de aleatoriedad del sistema, o se utilizan distribuciones de probabilidad que no se corresponden como es debido con dichas fuentes de aleatoriedad, o se utilizan métodos estadísticos incorrectos para analizar los resultados (por ejemplo los que suponen independencia), o se intenta extraer conclusiones de una única ejecución del simulador, etc.etc..

2. La Simulación de Sistemas Discretos: Lenguajes de Simulación de Sistemas Discretos

2.1 Metodología de la Construcción de Modelos de Simulación de Sistemas Discretos

Las ideas generales expuestas hasta aquí pueden resumirse en los términos siguientes, si las relaciones que constituyen el modelo matemático de un sistema lo permiten pueden obtenerse soluciones exactas de forma analítica que proporcionan respuestas a las cuestiones de interés sobre el sistema a través de las soluciones producidas por el modelo.

Cuando la complejidad de las ecuaciones del modelo hace inviables las soluciones analíticas hemos de recurrir a métodos numéricos para resolverlas. La Simulación se encuadra dentro de las técnicas numéricas a utilizar en estos casos.

Por *Simulación de Sistemas* entendemos el proceso de representar un sistema por medio de un modelo simbólico que puede manipularse por medio de un computador digital para que proporcione resultados numéricos. El computador permitirá evaluar numéricamente un modelo de simulación durante un intervalo de tiempo significativo para los objetivos del estudio, y recoger durante el mismo datos que posibiliten la estimación de las características deseadas del modelo.

Modelización y Simulación son pues los términos que utilizamos para designar el conjunto de actividades asociadas con la construcción de modelos de sistemas, y su utilización para realizar experimentos específicamente diseñados para estudiar aspectos concretos del comportamiento dinámico del sistema representado por el modelo. En particular el término *modelización* se refiere a las relaciones entre los sistemas reales y sus modelos, es decir el proceso a través del cual construimos el modelo que representa al sistema, mientras que *simulación* se refiere, sobre todo, a la manera en que el modelo es tratado en el computador.

La *Modelización por Simulación* ("Simulation Modelling") supone que podemos describir un sistema en unos términos que son aceptables para un computador para poder describir sus cambios. Para aquellos sistemas cuyos cambios son discretos el concepto clave es el de la *descripción del estado del sistema*. Si un sistema puede ser caracterizado por un conjunto de variables, de manera que cada combinación de valores de las variables represente un *estado* único, o condición del sistema, entonces la manipulación de las variables *simula* el movimiento del sistema de estado a estado.

En esto es precisamente en lo que consiste la Simulación: *la representación de la dinámica del sistema moviéndolo de un estado a otro de acuerdo con reglas de operación bien definidas*.

En el caso de los sistemas discretos, la simulación se refiere a la modelización en un computador digital de un sistema cuyos cambios de estado tienen lugar de manera discreta como consecuencia de la ocurrencia de agentes del cambio de estado denominados sucesos.

Simular es, pues, duplicar el comportamiento dinámico de algún aspecto de un sistema, real o propuesto, sustituyendo las propiedades esenciales del sistema simulado por las propiedades del sistema que lo simula, el modelo.

Una vez construido, el modelo de simulación actúa como un laboratorio en el que se pueden verificar, comparar y ajustar fácilmente las diferentes alternativas de diseño. Mediante la ejecución del modelo en un ordenador se imitan las acciones del sistema propuesto, permitiendo extraer inferencias sobre las prestaciones del sistema global. Estas inferencias se realizan en base a las numerosas medidas de las prestaciones proporcionadas por la simulación, tales como las utilidades de las máquinas, los inventarios durante el proceso, los tiempos de espera de las piezas, y el "throughput" total, en el caso de la simulación de sistemas de producción, por ejemplo. Mediante este proceso de experimentación se puede elegir el mejor diseño del sistema.

La popularidad creciente de la Simulación es debida en parte a su fiel adherencia a los detalles. Las formulaciones analíticas, aunque ofrecen soluciones rápidas "closed-forms", tienden a ser restrictivas incluso para el más simple de los sistemas. Los detalles complicados se omiten con frecuencia para poder acomodar la formulación. La Simulación, por el contrario, puede proporcionar tantos detalles complicados como desee el analista. Todas las características relevantes del sistema pueden ser tenidas en cuenta, tales como la variabilidad de los tiempos de proceso de las operaciones, la fiabilidad de los equipos, "fixture restrictions", restricciones de almacenamiento intermedio durante los procesos, decisiones complejas de enrutamiento, políticas de operación y restricciones de programación de operaciones. Las hipótesis restrictivas de simplificación, tales como las exigencias de linealidad o de tiempos constantes, no son necesarias. El resultado es un contexto experimental más realista en el cual verificar y comprobar las estrategias de diseño alternativas, lo cual, a su vez, añade seguridad a las conclusiones a que se llega mediante este planteamiento.

En general las condiciones de utilización de la simulación son las siguientes según Shannon, [SHA]:

1. No existe una formulación matemática completa del problema, o no se han desarrollado aún los métodos analíticos para resolver el modelo matemático.
2. Existen los métodos analíticos, pero las hipótesis simplificadoras, necesarias para su aplicación, desvirtúan las soluciones obtenidas y su interpretación.
3. Los métodos analíticos existen, y en teoría están disponibles, pero los procedimientos numéricos son tan arduos y complejos que la simulación constituye un método más sencillo para obtener una solución.
4. Es deseable observar una historia simulada del proceso dentro de un horizonte temporal dado para poder estimar ciertos parámetros.
5. La simulación constituye la mejor alternativa por la dificultad de realizar experiencias en el contexto real.
6. Es necesario realizar una *compresión temporal* para estudiar la evolución del sistema a largo plazo.

Un modelo de simulación describe pues el *comportamiento dinámico* de un sistema en el tiempo. En la terminología que hemos introducido, el sistema está formado por **entidades**, elementos componentes cuyo comportamiento es seguido a través del sistema. Las entidades pueden pertenecer a diferentes clases, y poseen **atributos** identificativos que caracterizan su comportamiento, y por ende el del sistema. Las entidades de una clase dada tienen el mismo conjunto de atributos, aunque sus valores no tengan por que ser idénticos, y tenderán a seguir pautas de comportamiento similares en el tiempo. Las entidades pueden intervenir en **actividades**, solas o conjuntamente con otras entidades.

En un instante determinado el sistema simulado tendrá una configuración dada, definida por las actividades de las entidades y los valores de sus atributos: *esta será la caracterización del estado del sistema*. El estado cambiará, discretamente, como consecuencia de la ocurrencia de un *suceso*.

La secuencia de sucesos y los cambios de estado que determinan representan el comportamiento dinámico del sistema.

De este planteamiento conceptual de la simulación se desprende que el control del flujo del tiempo en el proceso de simulación es el aspecto clave del proceso de simulación. Tradicionalmente se ha propuesto dos procedimientos, un tratamiento síncrono y uno asíncrono. El tratamiento síncrono o de reparto del tiempo a intervalos regulares, consiste en desplazar el tiempo hacia adelante a intervalos iguales, es decir actualizar y examinar el modelo a intervalos regulares. Así, por ejemplo, si el intervalo considerado es de amplitud Δt , el modelo se actualizará en el instante $t+\Delta t$ para los cambios ocurridos en el intervalo $(t, t+\Delta t)$. Este enfoque plantea el problema de decidir cuál es la longitud apropiada de la amplitud del intervalo Δt . Evidentemente si la amplitud del intervalo de referencia es muy grande el comportamiento del modelo será muy burdo en relación con el del sistema puesto que será imposible tener en cuenta alguno de los cambios de estado que pueden ocurrir, mientras que por el contrario si el intervalo de tiempo es muy pequeño el modelo será reexaminado innecesariamente con gran frecuencia y el consiguiente incremento del coste computacional. Las dificultades para decidir apropiadamente en muchos casos la longitud del intervalo Δt hacen preferible utilizar un planteamiento asíncrono, en el que la amplitud del intervalo de tiempo es variable. En este caso el estado del modelo es examinado y actualizado únicamente cuando tiene lugar un cambio de estado. Esta es la situación típica cuando el cambio de estado es producido por la ocurrencia de un suceso, y puesto que entonces el tiempo es movido de suceso a suceso este enfoque recibe el nombre de técnica del suceso siguiente o dirigida por sucesos.

2.2 Características Generales de los Lenguajes de Simulación de Sistemas Discretos: La “Visión del Mundo” de un Lenguaje de Simulación.

La codificación de un modelo de simulación, de un sistema con sucesos discretos, en términos de un lenguaje de programación, de tipo general o especial para simulación, pone de manifiesto una serie de características comunes a todos ellos, como por ejemplo, Fishman [FIS] :

1. La generación de muestras de números aleatorios uniformemente distribuidos en $(0,1)$
2. La generación de muestras de variables aleatorias con distribuciones específicas.
3. Los mecanismos de control y flujo del tiempo durante la simulación.
4. La determinación del suceso que ha de ser tratado a continuación del que lo está siendo (técnica next-event).
5. La adición, supresión o actualización de registros en estructuras de datos ad hoc, como por ejemplo listas que representan secuencias de sucesos.
6. La recolección y el análisis de los datos generados por la simulación.
7. La elaboración de informes sobre los resultados obtenidos.
8. La detección de condiciones de error.

La existencia de estos y otros factores comunes a la mayor parte de los programas de simulación es lo que ha conducido al desarrollo de los lenguajes de simulación de propósito general, cuyo perfeccionamiento, estandarización y accesibilidad han sido los principales factores del incremento que ha experimentado el uso de la simulación en los últimos años. Una de las decisiones más importantes que ha de tomar un modelizador o analista para la realización de un estudio de simulación es la selección del lenguaje de computador en que va a programar el modelo. Algunas de las ventajas de

programar el modelo de simulación en un lenguaje de simulación en vez de hacerlo en un lenguaje general como FORTRAN, PASCAL, o C, son las siguientes:

1. Los lenguajes de simulación proporcionan automáticamente muchas, si no todas, las características necesarias para la programación de un modelo de simulación, lo que redundará en una reducción significativa del esfuerzo requerido para programar el modelo.
2. Proporcionan un marco de trabajo natural para el uso de modelos de simulación. Los bloques básicos de construcción del lenguaje son mucho más afines a los propósitos de la simulación que los de un lenguaje de tipo general.
3. Los modelos de simulación son mucho más fácilmente modificables cuando están escritos en un lenguaje de simulación, y por consiguiente se pueden ejecutar con mayor facilidad y flexibilidad los cambios requeridos por los experimentos de simulación.
4. Muchos de los lenguajes de simulación proporcionan una asignación dinámica de memoria durante la ejecución, cosa que no ocurre con todos los lenguajes de propósito general.
5. Facilitan una mejor detección de los errores, especialmente los inherentes a la lógica del proceso de simulación.

Los lenguajes de simulación para la simulación de sistemas discretos se eligen en base a lo atractivo de sus características, aunque hay una de ellas que resulta determinante e impone la naturaleza del lenguaje, es la **estrategia**, enfoque o **visión del mundo** inherente al lenguaje, utilizada para la selección del “suceso siguiente” y la gestión del tiempo. Kiviat, [KIV], en un trabajo seminal, clasificó los procedimientos de control de tiempos de los lenguajes de simulación de sucesos discretos, según la estrategia seguida en la selección de sucesos, en:

1. Event Scheduling
2. Activity Scanning
3. Process Interaction

Estrategias que conducen a la siguiente clasificación de los lenguajes de simulación, Fishman [FIS], Kiviat [KIV] :

ESTRATEGIA		
EVENT SCHEDULING	ACTIVITY SCANNING	PROCESS INTERACTION
GASP (II, IV) SIMSCRIPT II.5 SLAM SLAM II SIMAN	AS CSL ECSL ESP SIMON	GPSS (V, /H) Q-GERT SIMSCRIPT II.5 SLAM SLAM II SIMAN SIMULA

El hecho de que algunos lenguajes, SIMSCRIPT II.5, SLAM, SLAM II y SIMAN aparezcan tanto como lenguajes según una estrategia “event scheduling”, como “process interaction”, responde a que su estructura y naturaleza permiten al usuario emplear ambas estrategias, lo que refleja la tendencia creciente a la incorporación de múltiples visiones del mundo en la estructura de un solo lenguaje.

Con cualquiera de estas estrategias, cuando se selecciona el “suceso siguiente” para que sea procesado, se ejecuta la correspondiente “rutina de modelización” (bloque de código), para modelizar los cambios apropiados en el estado del modelo. *Los conceptos de suceso condicional, o incondicional, son básicos para las estrategias.* Un suceso incondicional es elegible para ser ejecutado cuando se llega al instante de tiempo para el que ha sido programado: *depende totalmente del tiempo*. Un suceso condicional *puede depender de condiciones adicionales distintas del tiempo*. Las condiciones se refieren usualmente a valores descriptores del estado de las componentes del sistema, por ejemplo, la desocupación, o el fin de la ocupación de un dispositivo del sistema modelizado.

Una característica común a los tres planteamientos es que los programas a que dan lugar tienen una estructura jerárquica de tres niveles, [FIS]:

- Nivel ejecutivo, o del programa de control
- Nivel de operaciones (secuencia de sentencias que constituyen el programa de computador que constituyen el modelo propiamente dicho)
- Nivel de rutinas de detalle, que ejecutan las acciones implicadas por cada una de las operaciones del modelo

El usuario de un lenguaje de simulación basado en uno de estos planteamientos no necesita conocer con detalle como está programado el ejecutivo, sino como funciona, es decir, lo que hemos llamado visión del mundo del lenguaje correspondiente. El ejecutivo es el que se encarga de identificar cuando tiene que ocurrir el siguiente suceso y que se ejecuten correctamente las operaciones por él implicadas en los momentos adecuados.

La estrategia **event scheduling** (ES) implica una secuencia de sucesos incondicionales a lo largo del tiempo. Por lo tanto, la **visión del mundo** de un lenguaje, o modelo expresado en tal lenguaje, que incorpore la estrategia ES consiste en considerar la operación del sistema como una secuencia temporal, ordenada, de sucesos incondicionales, que se implanta de la manera siguiente:

*El procedimiento ES de control del tiempo **selecciona** de la lista de sucesos aquel cuyo tiempo de ocurrencia es el más próximo, resolviendo los empates por las prioridades asignadas o por defecto, **actualiza** el tiempo del reloj de simulación, igualando su valor al del instante en que ocurre el suceso, y **llama** a la rutina correspondiente al tratamiento del suceso.*

Cualquier verificación de una condición diferente de la del tiempo del reloj debe realizarse dentro de las rutinas de tratamiento de los diferentes sucesos. Los sucesos se eligen y progresan sucesivamente hasta el instante de terminación. La figura 7, Emshoff [EMS], ilustra gráficamente el esquema de la rutina ejecutiva para la estrategia event scheduling.

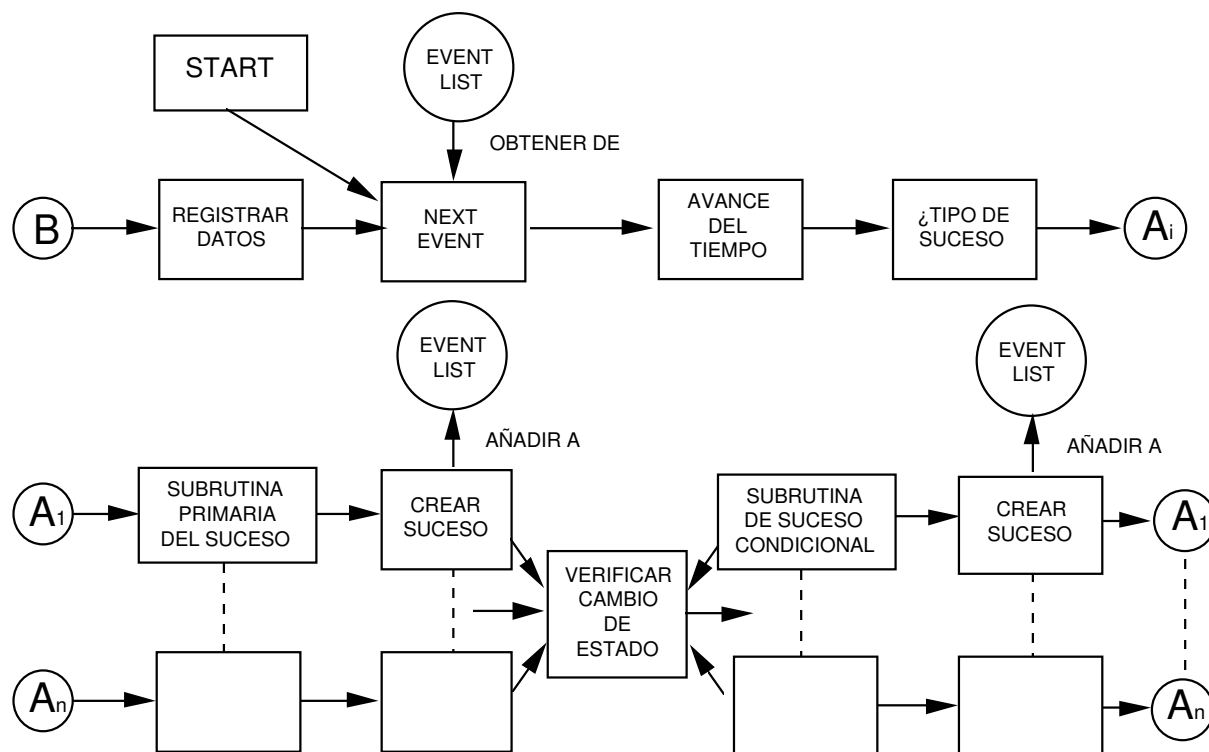


Figura 7. Estructura de la Estrategia ‘Event Scheduling’

La estrategia “**activity scanning**” (AS) elige el suceso siguiente basándose en ambos, el tiempo programado para la ocurrencia del suceso y la verificación de las condiciones. El concepto básico es la **actividad**, que conceptualmente es una transición de estado del sistema que requiere un periodo de tiempo. Una actividad se representa habitualmente mediante dos sucesos distintos que marcan respectivamente el principio y el final de la misma.

La visión del mundo que corresponde a un lenguaje, o modelo de simulación programado en un lenguaje, basado en la estrategia AS, considera que el sistema consta de componentes que desarrollan actividades sujetas a actividades específicas.

En la implantación de esta estrategia se particularizan las componentes de “tipo_activo”, o componentes “móviles” del sistema, que pueden tener asociada una rutina de actividad que cuando se ejecuta modela las fases de la componente; cada componente de “tipo_activo” tiene también asociado un reloj interno que indica en qué instante la componente vuelve a poder ser tenida en cuenta para ser activada de nuevo, y una rutina de condición para determinar si se reúnen las condiciones, distintas del tiempo, requeridas para su reactivación. *El procedimiento de control del tiempo AS explora las actividades en orden de prioridad para su elegibilidad en el tiempo y otras condiciones*

complementarias de activación, y ejecuta la rutina correspondiente a la actividad de la primera componente cuyas condiciones de activación se satisfacen.

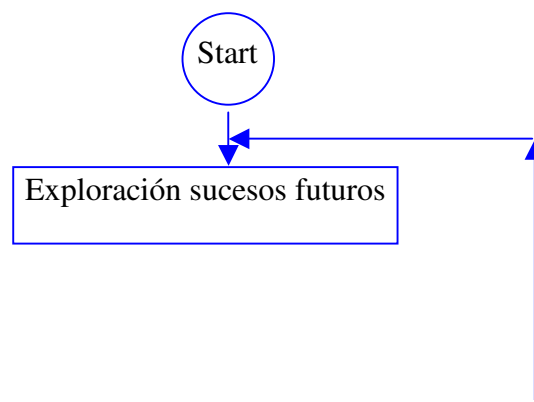
La estrategia “**Process Interaction**” (PI) tiene características híbridas que la relacionan tanto con la estrategia ES como con la AS

La visión del mundo de un lenguaje, o modelo de simulación programado en un lenguaje, basado en una estrategia PI contempla el progreso de las componentes del sistema a través de una secuencia de pasos, o procesos, cada uno de los cuales puede tener dos posibles componentes, un segmento de condición, cuya ejecución identifica si se puede pasar a ejecutar la segunda componente, un segmento de acción.

La implantación de la estrategia PI en un lenguaje como el GPSS, (General Purpose Simulation System, lenguaje pionero desarrollado por Gordon en 1964, Gordon [GRE], que a pesar de los años transcurridos mantiene su vigencia gracias a las continuas actualizaciones, Schriber [SCH]) se basa en un procedimiento de control del tiempo que utiliza dos listas de sucesos:

- Una lista de *sucesos futuros* (Future Events List, FEL), que contiene información sobre los eventos programados para ser ejecutados en un instante posterior.
- Una lista de *sucesos en curso* (Current Events List, CEL), que contiene información sobre los eventos que ya son elegibles desde el punto de vista del momento en que tienen que ser ejecutados, pero cuyas otras condiciones pueden no satisfacerse aún.

La información sobre cada suceso contiene una indicación sobre la localización del paso del proceso en curso en que se encuentra la componente. Con el avance del tiempo, (exploración de FEL para determinar en qué instante ocurrirá el siguiente suceso, y avanzar el reloj de simulación hasta ese instante) todos los sucesos programados para ese instante pasan de FEL a CEL, (movimientos entre listas, aquellas entidades de FEL cuya reactivación ha de tener lugar en ese instante del tiempo marcado por el reloj de simulación pasan de FEL a CEL) entonces tiene lugar una exploración de CEL, consistente en la evaluación de las condiciones de la rutina de entrada para determinar si la correspondiente componente puede proceder al paso siguiente, en caso afirmativo se ejecuta el segmento de acción del paso. Una componente se desplaza a lo largo de tantos pasos sucesivos del modelo como le sea posible, por ejemplo, en tanto en cuanto el tiempo no tenga que avanzar y sea afirmativa la respuesta a la evaluación de los segmentos de condición. Cuando una componente se “para”, debido al tiempo o a otras condiciones, entonces la exploración pasa a tener en cuenta el elemento siguiente de CEL; *cuando no se puede continuar moviendo ninguna de las componentes de CEL entonces se produce el siguiente avance en el flujo del tiempo*. La figura 9 esquematiza la estructura del ejecutivo para la estrategia de interacción de procesos.



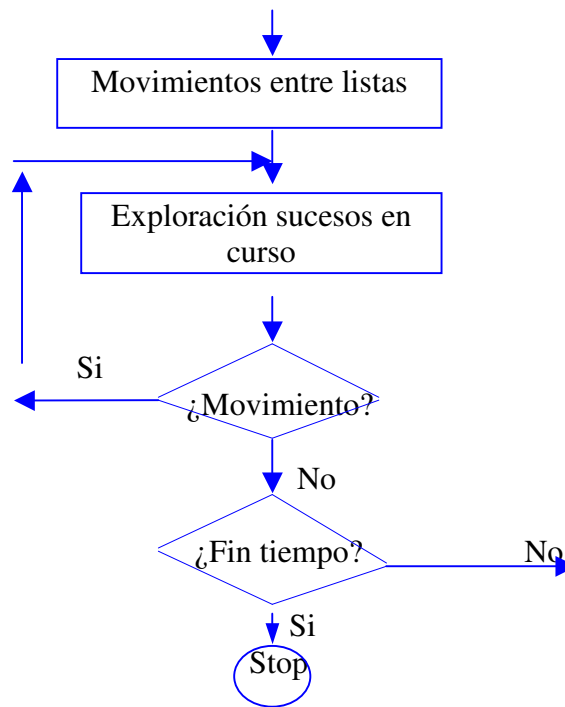


Figura 9: Ejecutivo de la estrategia de interacción de procesos

Si un lenguaje de simulación incluye más de una visión del mundo o estrategia, lo que cada vez es más corriente en el diseño de nuevos lenguajes o nuevas versiones de antiguos, el modelizador está aún constreñido por la estrategia elegida para representar una porción de su modelo, *de ahí la necesidad de una buena comprensión de los conceptos subyacentes a cada estrategia y el condicionamiento que imponen sobre la representación del modelo en sus términos.*

2.3 Análisis Algorítmico de las Estrategias de Simulación de Sistemas Discretos

Cada una de las estrategias de simulación que hemos propuesto son susceptibles de una representación algorítmica genérica, así como las rutinas para el tratamiento de sucesos de la estrategia ES, las rutinas de condición y las de actividades para la estrategia AS, y los segmentos de condición y acción para la estrategia PI.

En la representación algorítmica que vamos a dar se supone que los algoritmos utilizan algún conjunto de procedimientos de gestión de estructuras de datos (por ejemplo listas), para ayudar a la introducción y recuperación de las representaciones de la información sobre los sucesos.

En el planteamiento que vamos a proponer, y para mantener el carácter genérico de la representación, evitaremos suposiciones sobre las estructuras de datos que se pueden utilizar en las implantaciones específicas de las estrategias. La descripción algorítmica que vamos a hacer será, pues, precisa solo en la descripción de los aspectos esenciales de la gestión del tiempo, incluyendo las implicaciones correspondientes a las rutinas de modelización, aunque excluyendo los detalles que no dependen de la estrategia.

El punto de partida para esta representación algorítmica es un análisis de las características que dependen de la estrategia adoptada y de las que dependen del problema específico que se simula. De acuerdo con Kiviat [KIV], los lenguajes de simulación ofrecen, en general, las siguientes capacidades y características:

- 1.** Modelización del estado del sistema.
- 2.** Modelización de la dinámica del sistema.
- 3.** Herramientas para el muestreo estadístico.
- 4.** Especificaciones sobre el proceso de recogida de datos.
- 5.** Recogida de datos generados por la simulación.
- 6.** Análisis de los datos recogidos.
- 7.** Presentación de resultados
- 8.** Monitorización de la simulación y herramientas de depuración del modelo.
- 9.** Procedimientos de inicialización de la simulación.
- 10.** Herramientas auxiliares complementarias.

Las características 1, 2 y 9 son intrínsecas, dependen de la estrategia elegida y por lo tanto son las que pueden ser objeto de una descripción algorítmica genérica de la estrategia, mientras que las restantes son relativamente independientes de la estrategia. A partir de la identificación de los elementos intrínsecos podemos dar las siguientes descripciones de las estrategias en pseudocódigo, Hooper [HOO]: