Modelos de redes

Contenido del capítulo

Introducción

- Este capítulo cubre tres modelos de redes que se usan para resolver problemas diversos.
- La *técnica del árbol de expansión mínima* determina el camino a través de la red que conecta todos los puntos, al tiempo que minimiza la distancia total.
- La *técnica del flujo máximo* encuentra el máximo flujo de cualquier cantidad o sustancia que pasa por la red.
- La *técnica de la ruta más corta* calcula la trayectoria más corta a través de una red.

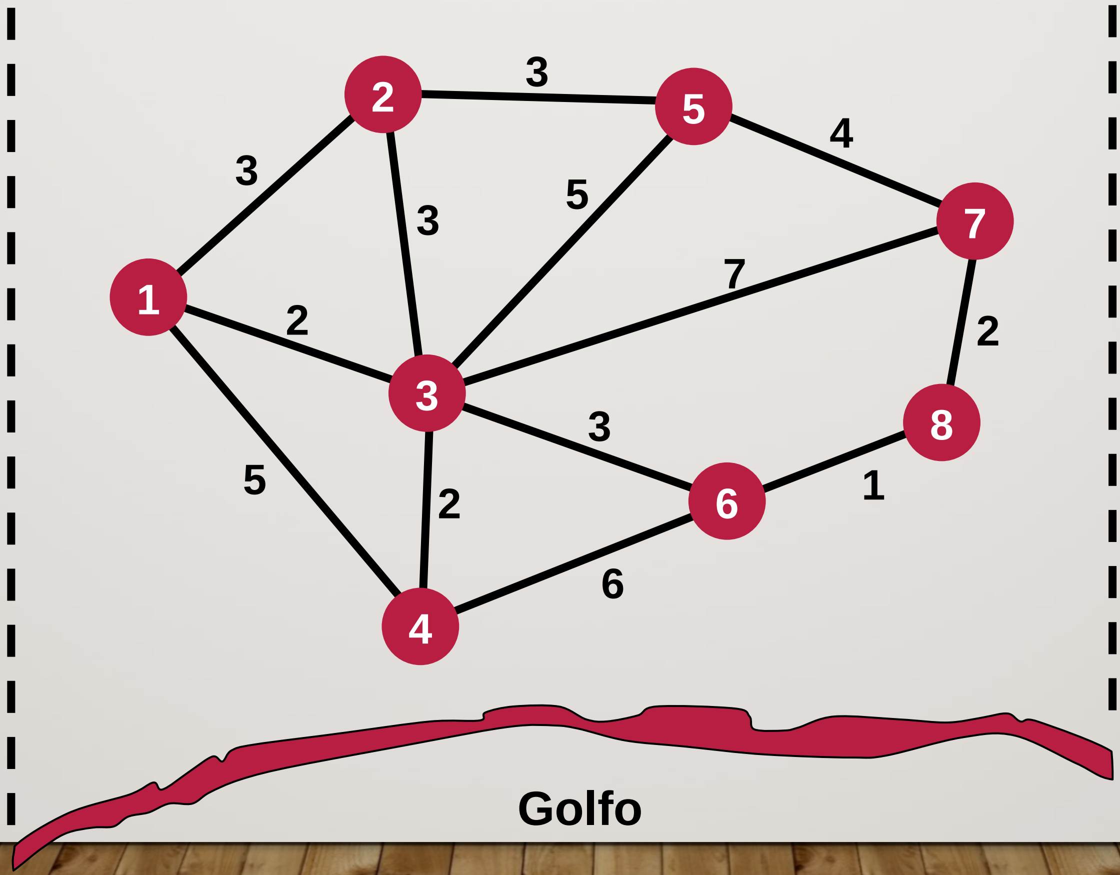
Introducción

- Los problemas más grandes quizá requieran cientos o miles de iteraciones, exigiendo el uso de programas de software eficientes.
- Todos los tipos de redes usan una terminología común.
- Los puntos en una red se conocen como *nodos* y se representan como círculos o cuadrados.
- Las líneas que unen los nodos se llaman *arcos*.

Técnica del árbol de expansión mínima

- La técnica del árbol de expansión mínima implica conectar todos los puntos de una red, al tiempo que minimiza la distancia entre ellos.
- La compañía Lauderdale Construction está desarrollando un proyecto habitacional.
- Quiere determinar la forma menos costosa de suministrar agua y electricidad a cada vivienda.
- Hay ocho casas en el proyecto y la distancia entre ellas se muestra en la figura.

Red para Lauderdale Construction



Pasos de la técnica del árbol de expansión mínima

1. Seleccionar cualquier nodo en la red.
2. Conectar este nodo con el nodo más cercano que minimice la distancia total.
3. Considerar todos los nodos que están conectados, encontrar y conectar el nodo más cercano que no está conectado. Si hay un empate en el nodo más cercano, elegir uno de manera arbitraria. Un empate sugiere que existe más de una solución óptima.
4. Repetir el paso tres hasta que todos los nodos estén conectados.

Compañía Lauderdale Construction

- Iniciar con la selección arbitraria del nodo 1.
- Como el nodo más cercano es el nodo 3 a una distancia de 2 (200 pies) conectamos dichos nodos.
- Consideramos los nodos1 y 3, y buscamos el siguiente nodo más cercano.
- El nodo 4 es el más cercano al nodo 3.
- Conectamos esos nodos.
- Buscamos ahora el nodo desconectado más cercano a los nodos 1, 3 y 4.
- Es el nodo 2 o el nodo 6.
- Elegimos el nodo 2 y lo conectamos al nodo 3.

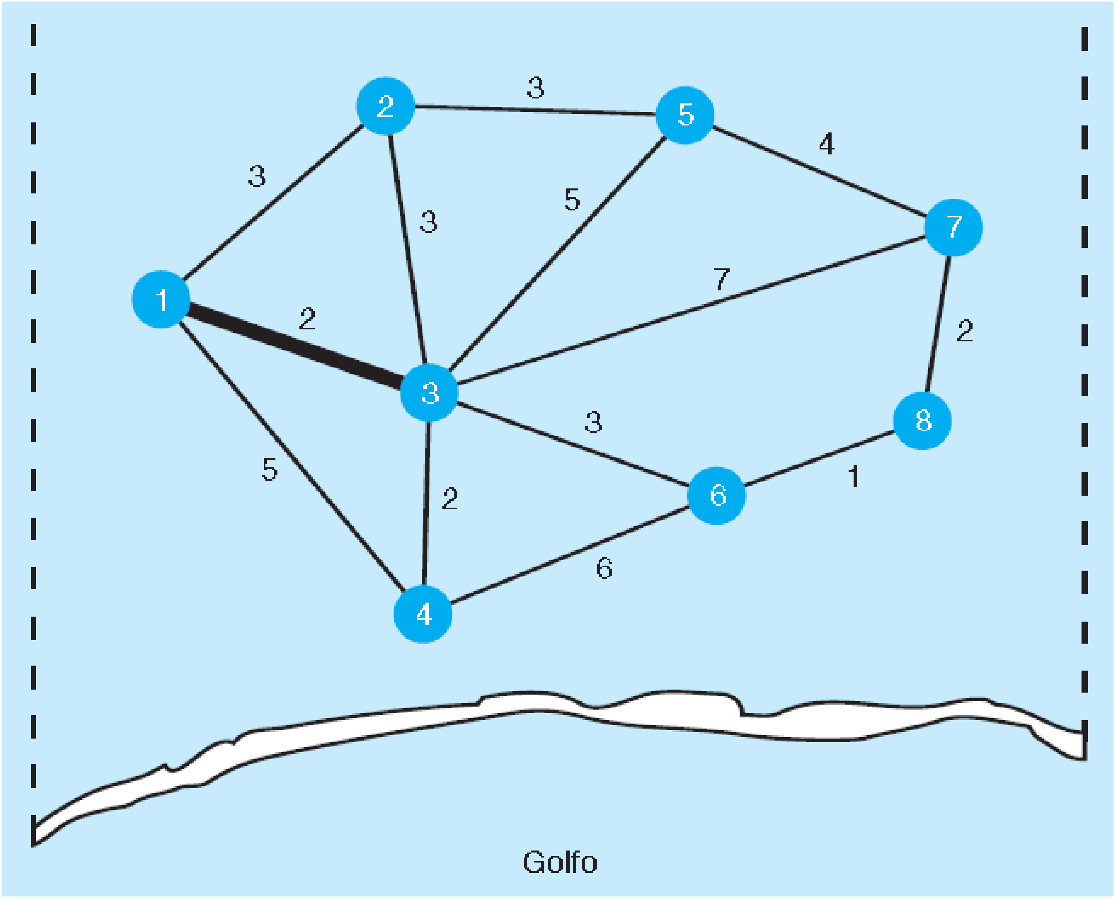
Técnica del árbol de expansión mínima

- Repitiendo el mismo proceso conectamos el nodo 2 al nodo 5.
- Luego, conectamos el nodo 3 al nodo 6.
- El nodo 6 se conecta al nodo 8.
- La última conexión es el nodo 8 al nodo 7.
- La distancia total se encuentra sumando las distancias de los arcos utilizados en el árbol de expansión:

$2 + 2 + 3 + 3 + 3 + 1 + 2 = 16$ (o 1,600 pies)

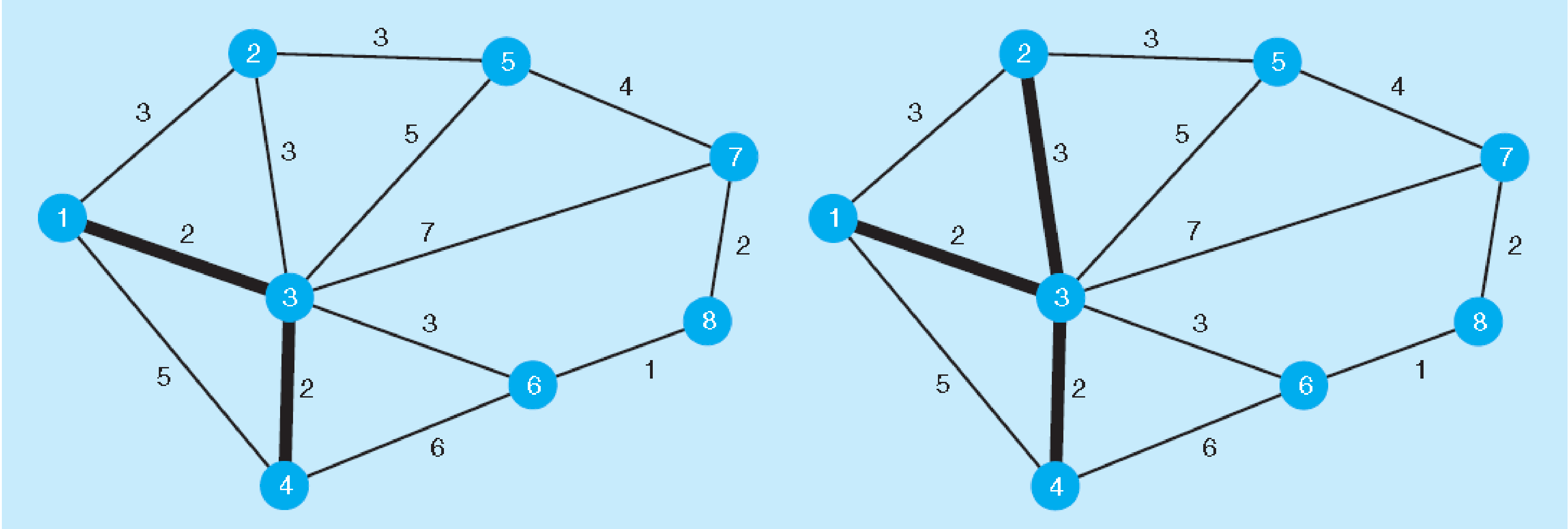
Técnica del árbol de expansión mínima

Primera iteración para Lauderdale Construction



Técnica del árbol de expansión mínima

Segunda y tercera iteraciones para Lauderdale Construction

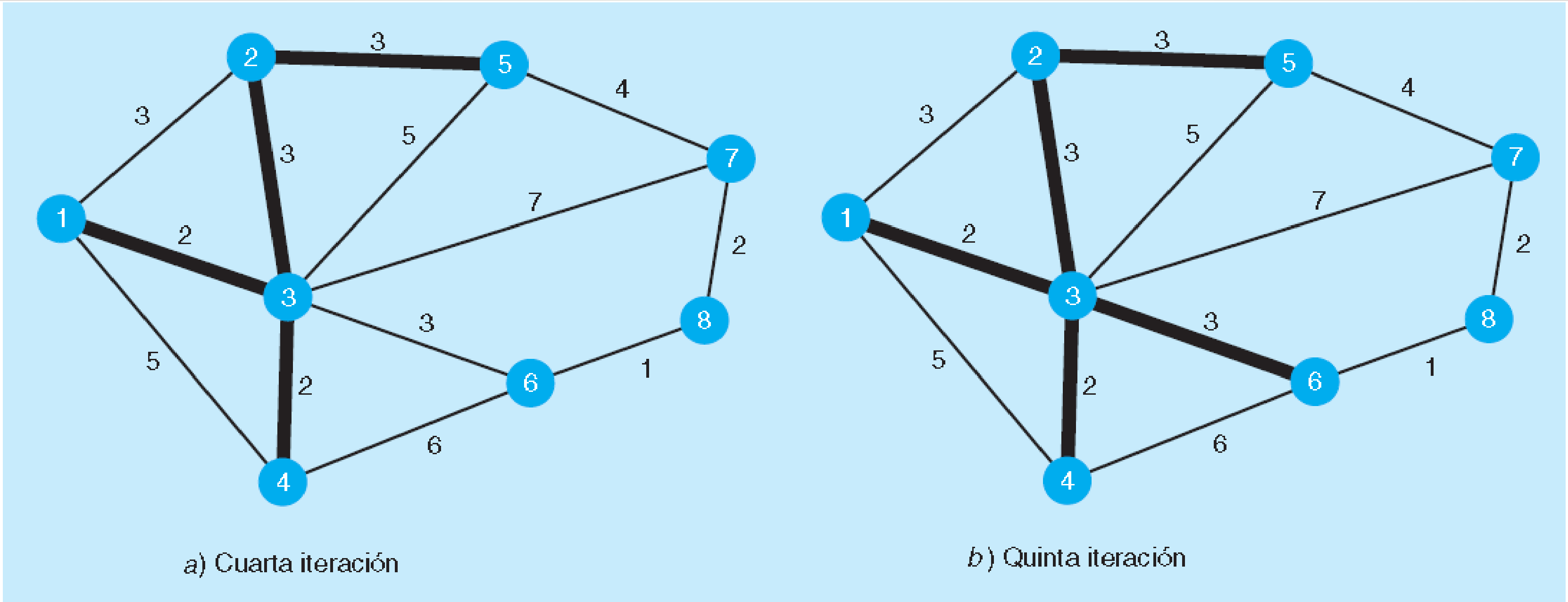


a) Segunda iteración

b) Tercera iteración

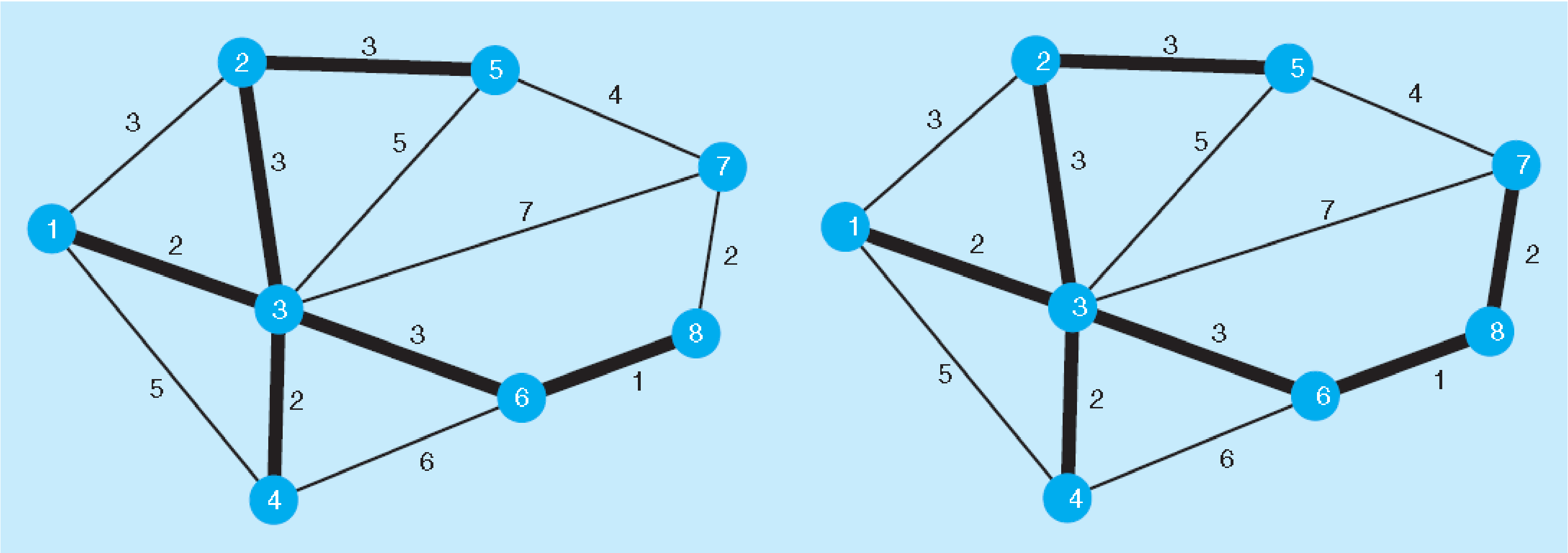
Técnica del árbol de expansión mínima

Cuarta y quinta iteraciones para Lauderdale Construction



Técnica del árbol de expansión mínima

Sexta y séptima iteraciones (finales) para Lauderdale Construction



a) Sexta iteración

b) Séptima iteración

Resumen de pasos en el problema del árbol de expansión mínima de Lauderdale Construction

Paso	Nodos conectados	Nodos no conectados	Nodo no conectado más cercano	Arco seleccio-nado	Longitud del arco	Distan-cia total
1	1	2,3,4,5,6,7,8	3	1-3	2	2
2	1,3	2,4,5,6,7,8	4	3-4	2	4
3	1,3,4	2,5,6,7,8	2 o 6	2-3	3	7
4	1,2,3,4	5,6,7,8	5 o 6	2-5	3	10
5	1,2,3,4,5	6,7,8	6	3-6	3	13
6	1,2,3,4,5,6	7,8	8	6-8	1	14
7	1,2,3,4,5,6,8	7	7	7-8	2	16

Solución de QM para Windows para el problema del árbol de expansión mínima de la compañía Lauderdale Construction

Starting node for iterations: 1

Note: Multiple optimal solutions exist

Networks Results

Lauderdale Construction Company Solution

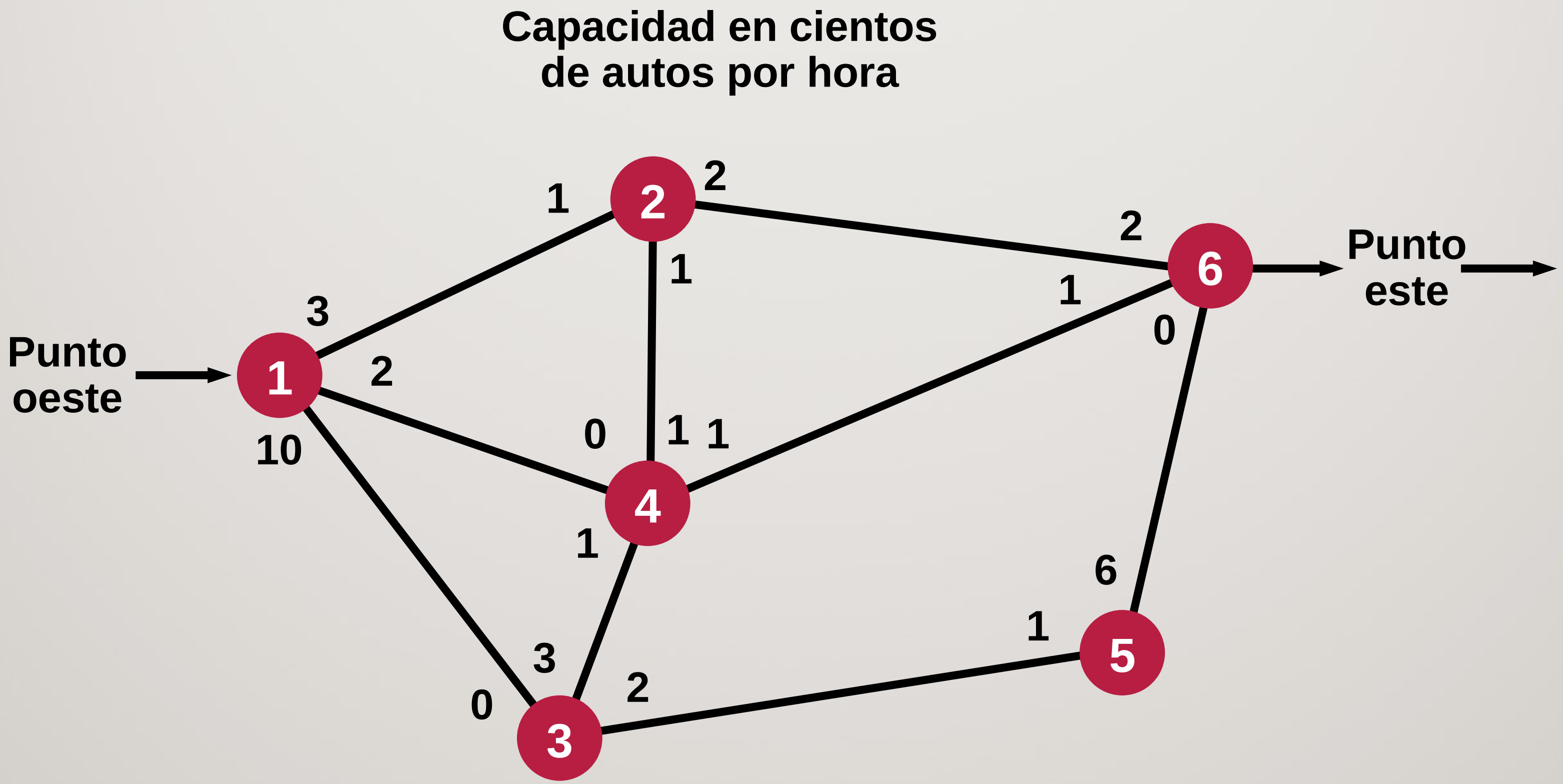
Branch name	Start node	End node	Cost	Include	Cost
Branch 1	1	2	3	Y	3
Branch 2	1	3	2	Y	2
Branch 3	1	4	5		
Branch 4	2	3	3		
Branch 5	2	5	3	Y	3
Branch 6	3	4	2	Y	2
Branch 7	3	5	5		
Branch 8	3	6	3	Y	3
Branch 9	3	7	7		
Branch 10	4	6	6		
Branch 11	5	7	4		
Branch 12	6	8	1	Y	1
Branch 13	7	8	2	Y	2
Total					16

Técnica del flujo máximo

- La técnica del flujo máximo permite determinar la cantidad máxima de material que puede fluir en una red.
- Waukesha, un pequeño pueblo de Wisconsin, está en el proceso de desarrollar un sistema de caminos en el área del centro.
- Los planificadores de la ciudad quieren determinar el número máximo de automóviles que pueden fluir por el pueblo de oeste a este.
- La red de caminos se ilustra en la figura 11.6.
- Los números al lado de los nodos indican el número de automóviles que pueden fluir *desde* los diferentes nodos.

Técnica del flujo máximo

Red de caminos para Waukesha



Técnica del flujo máximo

Cuatro pasos de la técnica del flujo máximo

1. Elegir cualquier ruta del inicio (*origen*) al final (*destino*) con algún flujo. Si no existe una trayectoria con flujo, entonces, se encontró la solución óptima.
2. Determinar el arco en esta ruta con la menor capacidad de flujo disponible. Llamar C a esta capacidad, que representa la capacidad adicional máxima que puede asignarse a esta ruta.

Técnica del flujo máximo

Cuatro pasos de la técnica del flujo máximo

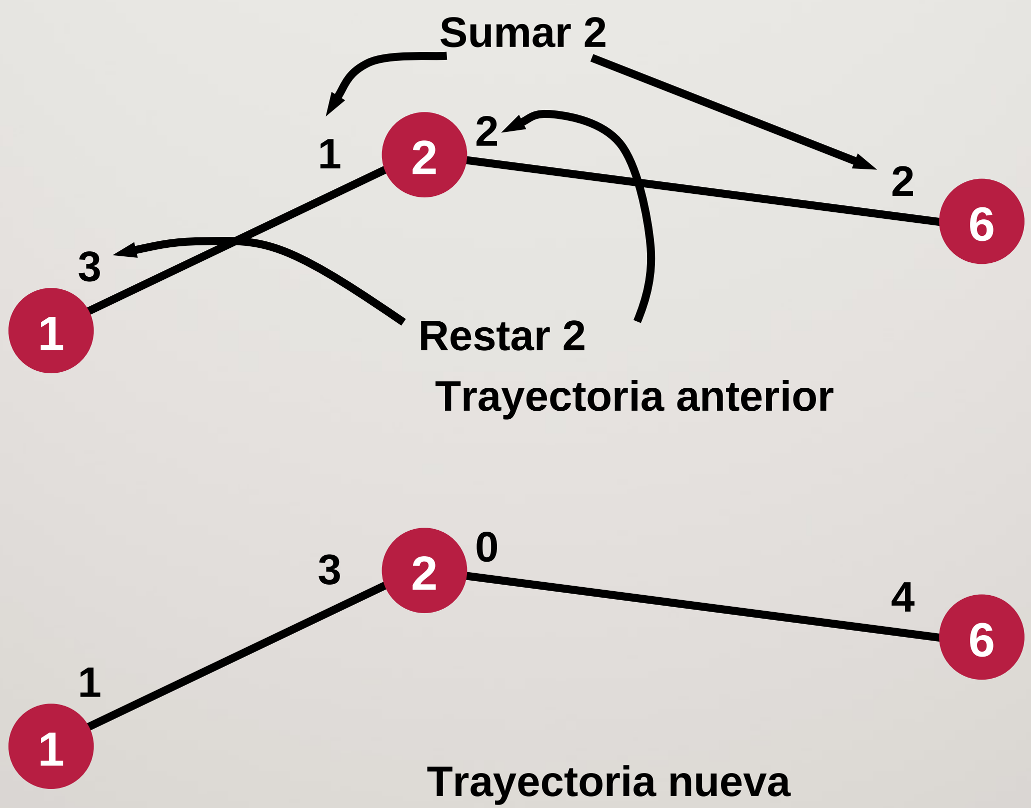
3. Para cada nodo en esta ruta, disminuir en la cantidad C la capacidad del flujo en la dirección del flujo. Para cada nodo en esta ruta, incrementar la capacidad del flujo en la cantidad C en la dirección contraria.
4. Repetir los pasos anteriores hasta que no sea posible aumentar el flujo.

Técnica del flujo máximo

- Comenzamos eligiendo arbitrariamente la trayectoria 1-2-6 en la parte superior de la red.
- El flujo máximo es de 2 unidades del nodo 2 al nodo 6.
- La capacidad de flujo se ajusta sumando 2 a la trayectoria hacia el oeste y restamos 2 a la trayectoria hacia el este.
- El resultado es la nueva ruta de la figura 11.7 la cual refleja la nueva capacidad relativa en esta etapa.

Técnica del flujo máximo

Ajuste de capacidad para la trayectoria 1-2-6, iteración 1

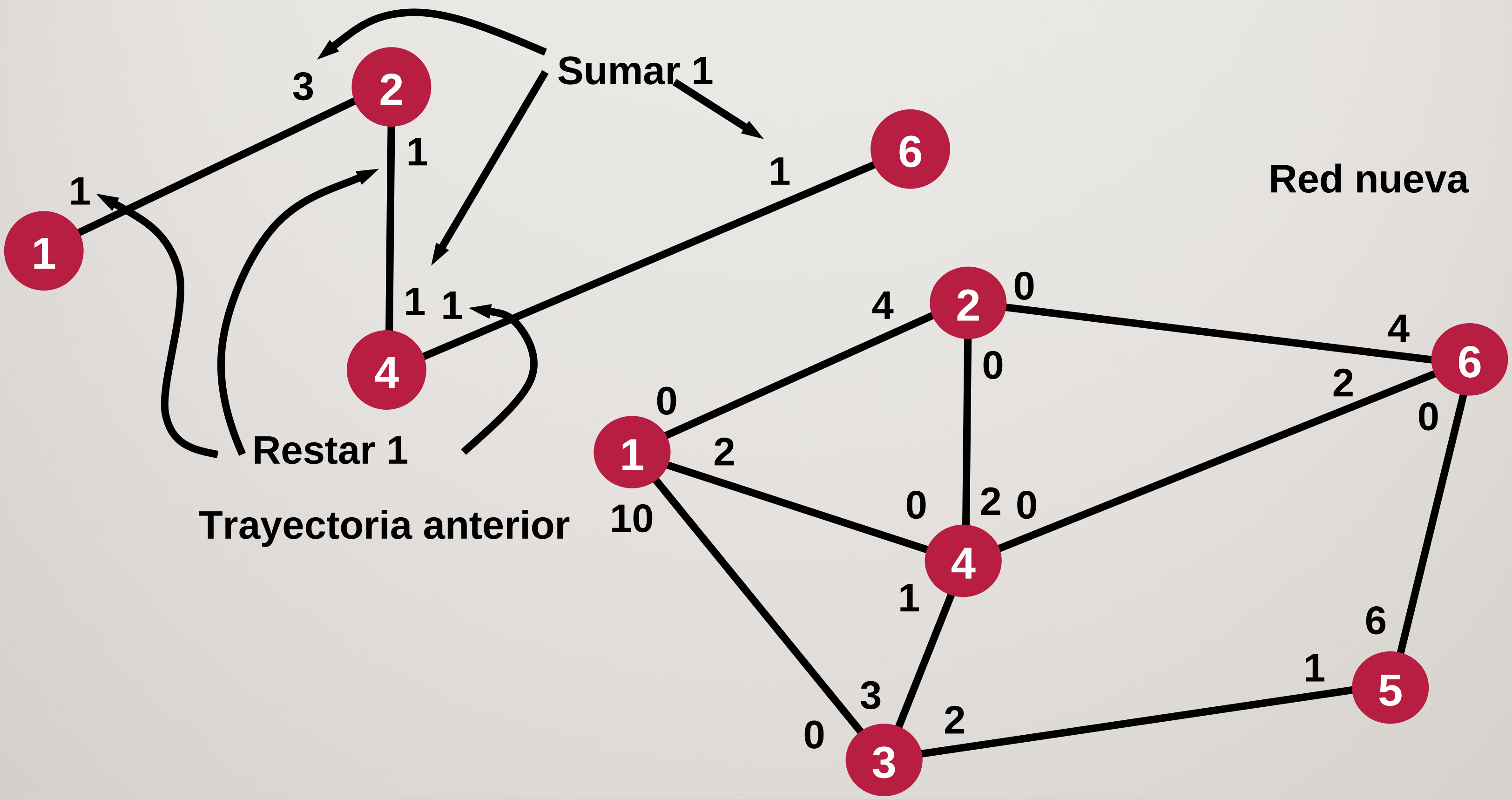


Técnica del flujo máximo

- Repetimos este proceso eligiendo la trayectoria 1-2-4-6.
- La capacidad máxima en este trayectoria es 1.
- La capacidad de la trayectoria se ajusta sumando 1 en los flujos hacia el oeste, y restando 1 a los flujos hacia el este.
- El resultado es la trayectoria nueva de la figura 11.8.
- Repetimos este proceso eligiendo la trayectoria 1-3-5-6.
- La capacidad máxima de esta trayectoria es 2.
- La figura siguiente muestra esta trayectoria ajustada.

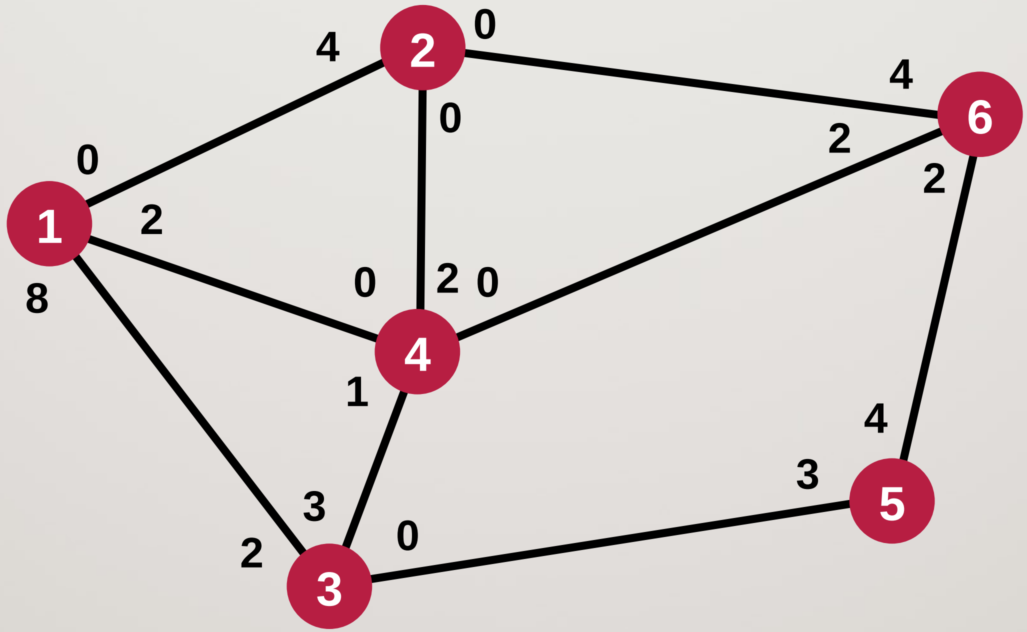
Técnica del flujo máximo

Segunda iteración para el sistema de caminos de Waukesha



Técnica del flujo máximo

Tercera y última iteración para el sistema de caminos de Waukesha



Técnica del flujo máximo

- No hay más trayectorias del nodo 1 al 6 con capacidad sin usar, de modo que esta representa la iteración final.
- El flujo máximo en esta red es de 500 automóviles.

RUTA		FLUJO (AUTOS POR HORA)
1–2–6		200
1–2–4–6		100
1–3–5–6		200
	Total	500

Programación lineal para flujo máximo

- Las variables se definen como:
  - X_{ij} = *flujo del nodo i al nodo j.*

- *Objetivo: maximizar el flujo* = X_{61}

Programación lineal para flujo máximo

Restricciones

$X_{12} \leq 3$	$X_{13} \leq 10$	$X_{14} \leq 2$
$X_{21} \leq 1$	$X_{24} \leq 1$	$X_{26} \leq 2$
$X_{34} \leq 3$	$X_{35} \leq 2$	$X_{42} \leq 1$
$X_{43} \leq 1$	$X_{46} \leq 1$	$X_{53} \leq 1$
$X_{56} \leq 1$	$X_{62} \leq 2$	$X_{64} \leq 1$

Programación lineal para flujo máximo

Continuación de restricciones:

$X_{61} = X_{12} + X_{13} + X_{14}$ o $X_{61} – X_{12} – X_{13} – X_{14} = 0$

$X_{12}+X_{42}+X_{62} = X_{21}+X_{24}+X_{26}$ o $X_{12}+X_{42}+X_{62}-X_{21}-X_{24}-X_{26} = 0$

$X_{13}+X_{43}+X_{53} = X_{34} +X_{35}$ o $X_{13}+X_{43}+X_{53}-X_{34}-X_{35} = 0$

$X_{14}+X_{24}+ X_{34}+X_{64} = X_{42} + X_{43} + X_{46}$ o

$X_{14}+X_{24} +X_{34}+X_{64} – X_{42} – X_{43} – X_{53} = 0$

$X_{35} = X_{56} + X_{53}$ o $X_{35} – X_{53} – X_{56} = 0$

$X_{26}+X_{46}+X_{56} = X_{61}$ o $X_{26} + X_{46} + X_{56} – X_{61} = 0$

$X_{ij} \geq 0$ and integer

Ahora estos problemas se pueden resolver con QM para Windows o usando Solver de Excel.

Solución de QM para Windows para el problema de flujo máximo en el

Source 1

Sink 6

Networks Results

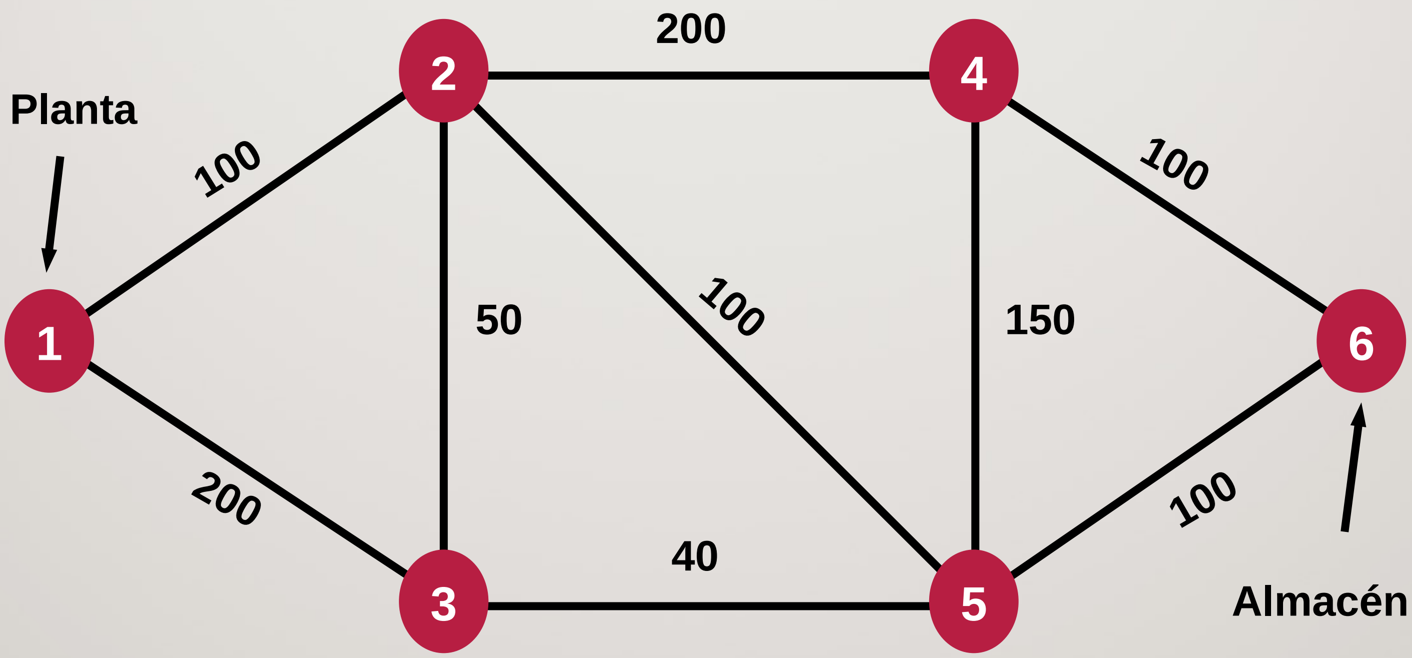
Waukesha Road Network Solution					
Branch name	Start node	End node	Capacity	Reverse capacity	Flow
Maximal Network Flow	5				
Branch 1	1	2	3	1	3
Branch 2	1	3	10	0	2
Branch 3	1	4	2	0	0
Branch 4	2	4	1	1	1
Branch 5	2	6	2	2	2
Branch 6	3	4	3	1	0
Branch 7	3	5	2	1	2
Branch 8	4	6	1	1	1
Branch 9	5	6	6	0	2

Problema de la ruta más corta

- La *técnica de la ruta más corta* identifica cómo una persona o un artículo puede viajar de un punto a otro minimizando la distancia total recorrida.
- Determina la ruta más corta para una serie de destinos.
- Ray Design, Inc. transporta camas, sillas y otros muebles de la fábrica al almacén.
- La compañía desea encontrar la ruta con la distancia más corta.
- La red de carreteras se muestra en la figura 11.10.

Problema de la ruta más corta

Carreteras de la planta de Ray al almacén



Problema de la ruta más corta

Pasos de la técnica de la ruta más corta:

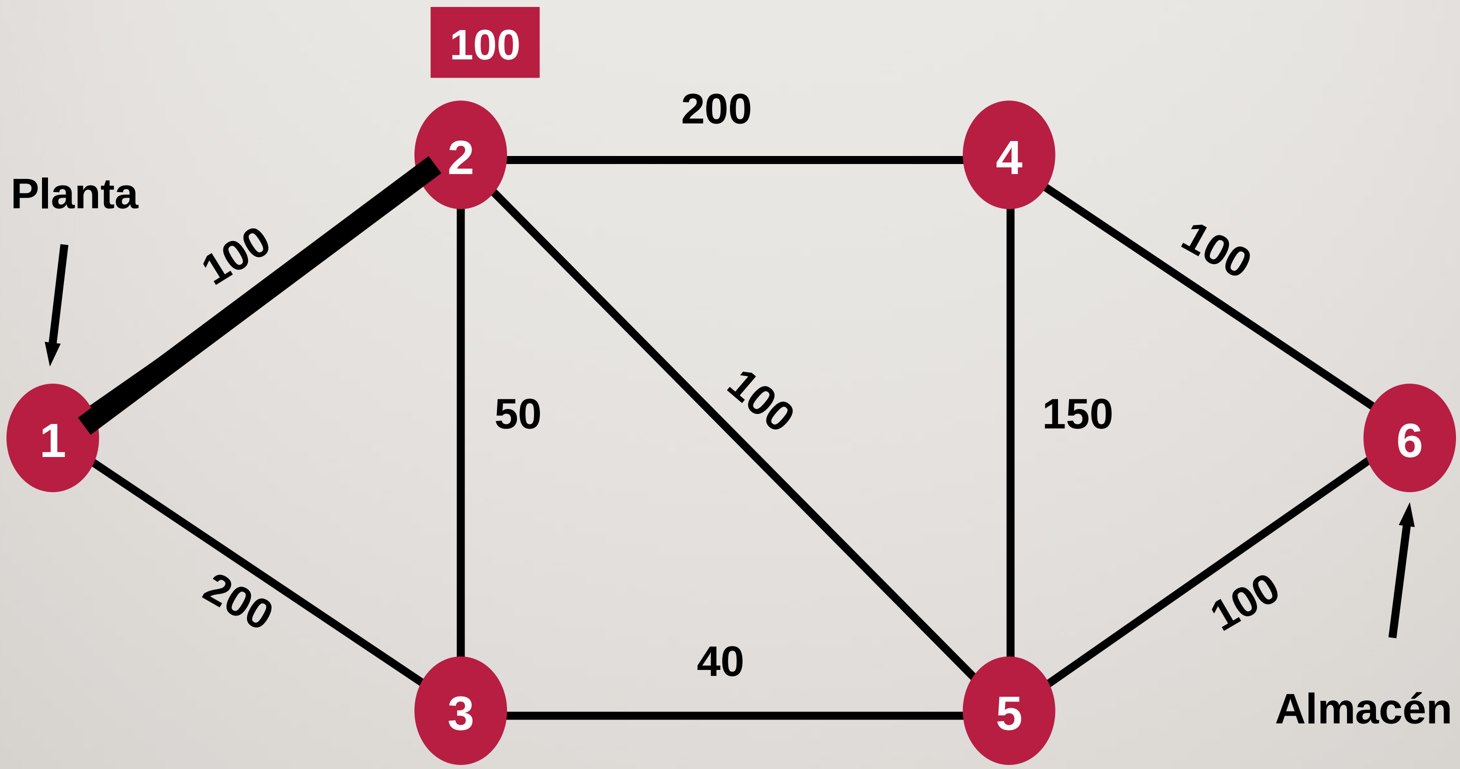
1. Encontrar el nodo más cercano al origen (planta). Colocar la distancia en un cuadro al lado del nodo.
2. Encontrar el siguiente nodo más cercano al origen y poner la distancia en un cuadro al lado del nodo. En algunos casos, deberán revisarse varias rutas para encontrar el nodo más cercano.
3. Repetir este proceso hasta que se haya revisado la red completa. La última distancia en el nodo final será la distancia con la ruta más corta.

Técnica de la distancia más corta

- Se puede ver que el nodo más cercano a la planta es el nodo 2.
- Se conectan entonces los dos nodos.
- Encontramos que el nodo 3 es el siguiente nodo más próximo pero hay dos trayectorias posibles.
- La ruta 1-2-3 es la más corta con una distancia de 150 millas.
- Repetimos el proceso y encontramos que el siguiente nodo más cercano es el nodo 5 pasando por el nodo 3.
- El siguiente nodo más cercano es el 4 o el 6, y el 6 es el más cercano.
- La ruta más corta es 1-2-3-5-6 con una distancia mínima de 290 millas.

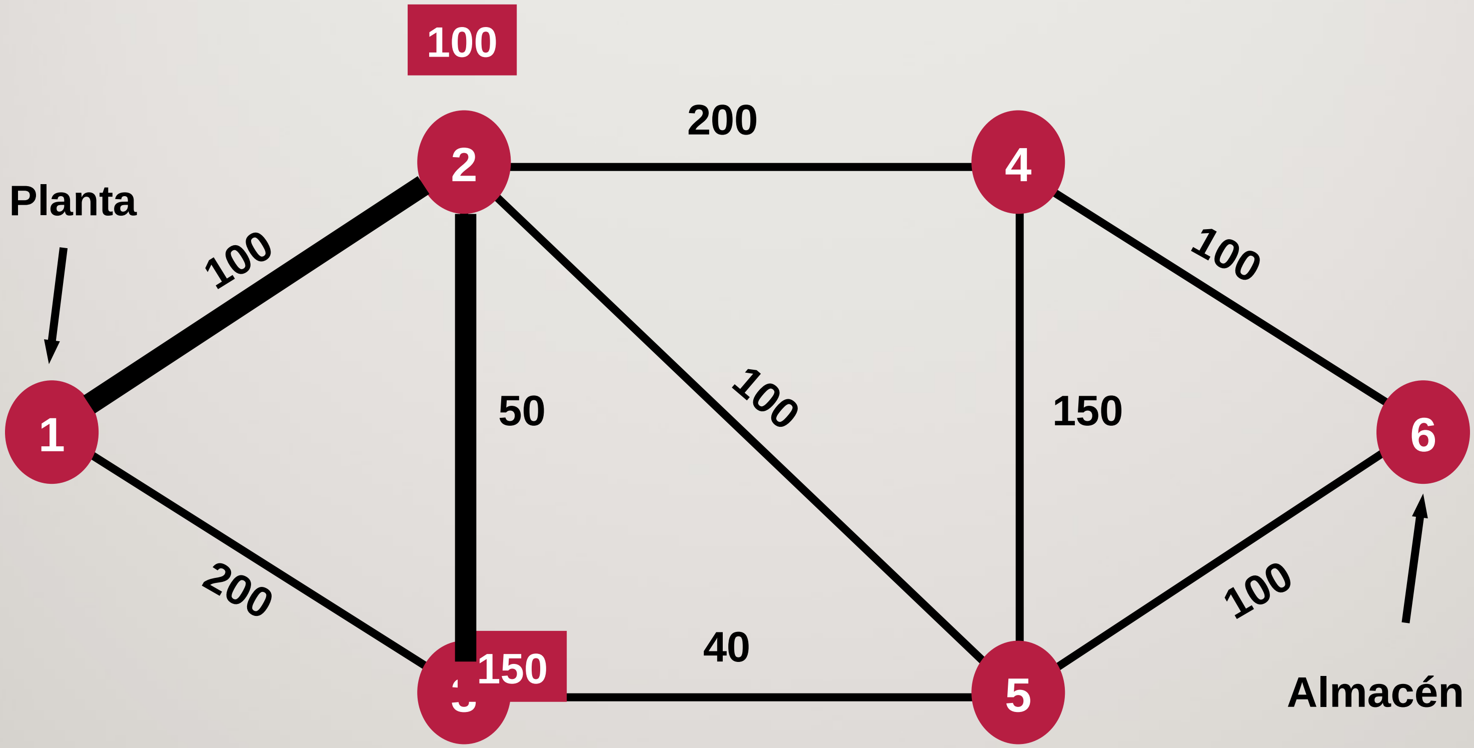
Problema de la ruta más corta

Primera iteración para Ray Design



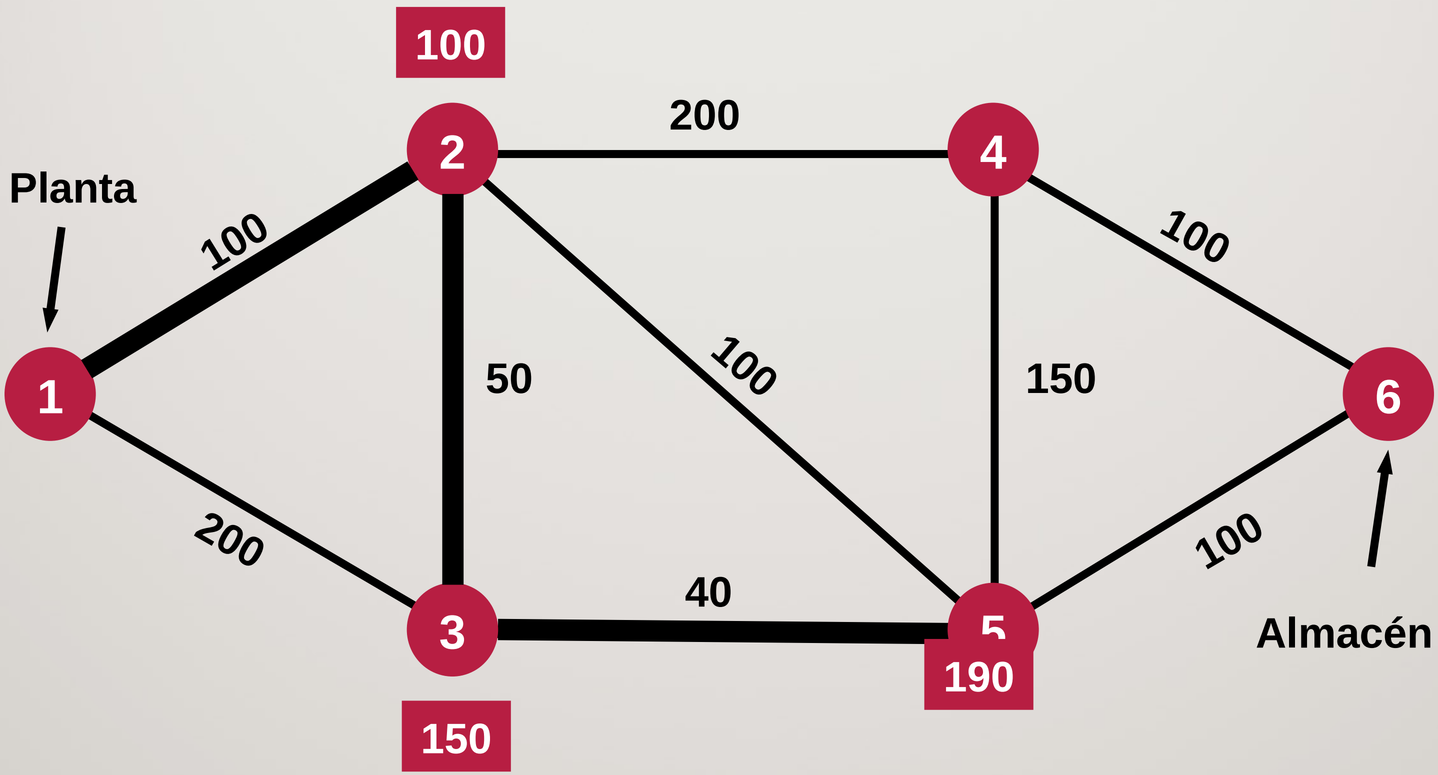
Técnica de la distancia más corta

Segunda iteración para Ray Design



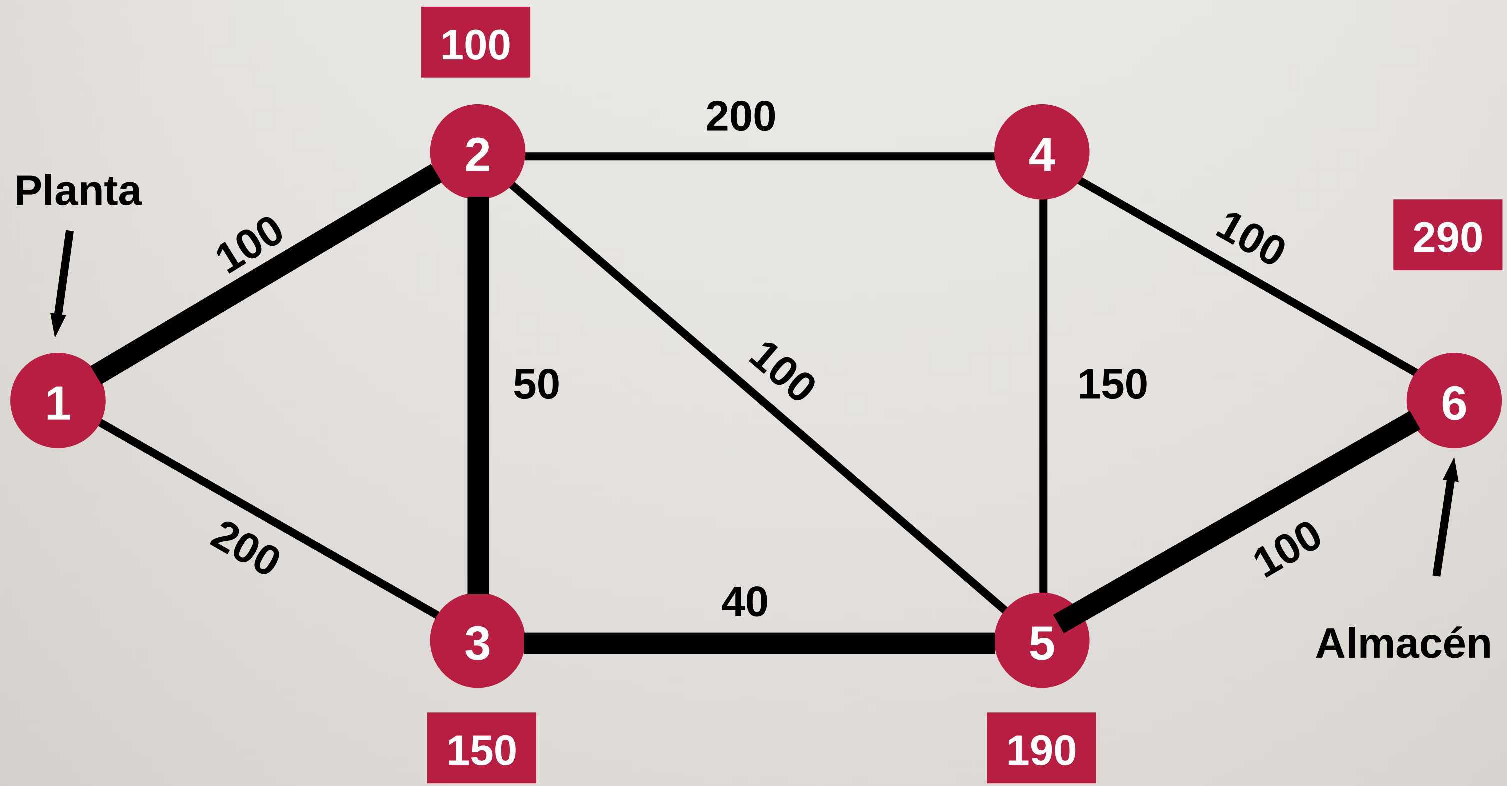
Técnica de la distancia más corta

Tercera iteración para Ray Design



Técnica de la distancia más corta

Cuarta y última iteración para Ray Design



Programación lineal para el problema de la ruta más corta

- El objetivo es minimizar la distancia

  (el costo) total de inicio a fin.

- La variables son:

  X_{ij} = 1 si se elige el arco del nodo *i* al nodo *j*

  = 0 de otra manera.

- Es útil visualizar esto como un problema de transbordo.

Programación lineal para el problema de la ruta más corta

Minimizar la distancia =

$100X_{12} + 200X_{13} + 50X_{23} + 50X_{32} + 200X_{24} + 200X_{42} + 100X_{25} + 100X_{52} + 40X_{35} + 40X_{53} + 150X_{45} + 150X_{54} + 100X_{46} + 100X_{56}$

Sujeta a:

$X_{12} + X_{13}$	$= 1$	**Nodo 1**
$X_{12} + X_{32} - X_{23} - X_{24} - X_{25}$	$= 0$	**Nodo 2**
$X_{13} + X_{23} - X_{32} - X_{35}$	$= 0$	**Nodo 3**
$X_{24} + X_{54} - X_{42} - X_{45} - X_{46}$	$= 0$	**Nodo 4**
$X_{25} + X_{35} + X_{45} - X_{52} - X_{53} - X_{54} - X_{56}$	$= 0$	**Nodo 5**
$X_{46} + X_{56}$	$= 1$	**Nodo 6**
Todas las variables	$= 0$ **o**	**bien 1**

Ahora estos problemas se pueden resolver con QM-Windows o Solver-Excel.

Ventana de entrada de QM para Windows para el problema de la ruta más corta de Ray Design

Network type
- (•) Undirected
- ( ) Directed

Origin: 1

Destination: 6

Ray Design, Inc.			
	Start node	End node	Distance
Branch 1	1	2	100
Branch 2	1	3	200
Branch 3	2	3	50
Branch 4	2	4	200
Branch 5	2	5	100
Branch 6	3	5	40
Branch 7	4	5	150
Branch 8	4	6	100
Branch 9	5	6	100

Ventana de solución de QM para Windows para el problema de la ruta más corta de Ray Design

Network type
- Undirected
- Directed

Origin: 1

Destination: 6

Networks Results

Ray Design, Inc. Solution				
Total distance = 290	Start node	End node	Distance	Cumulative Distance
Branch 1	1	2	100	100
Branch 3	2	3	50	150
Branch 6	3	5	40	190
Branch 9	5	6	100	290