Cadenas de Markov

Objetivos de aprendizaje

Determinar los estados o las condiciones futuras utilizando el análisis de Markov.

Calcular las condiciones a largo plazo o de estado estable, usando únicamente la matriz de probabilidades de transición.

Entender el uso del análisis de estado absorbente en la predicción de condiciones futuras.

Introducción

- El *análisis de Markov* es una técnica que maneja las probabilidades de ocurrencia futura, mediante el análisis de las probabilidades conocidas en el presente.
- Tiene diversas aplicaciones en los negocios.
- El análisis de Markov supone que el sistema comienza en un estado o condición inicial.
- Las probabilidades de cambio de un estado a otro se conocen como matriz de probabilidades de transición.
- La solución de problemas con el análisis de Markov tan solo requiere un manejo básico de martrices.

Introducción

- Este análisis se limita a problemas que siguen cuatro supuestos:

  1. Existe un número limitado o finito de estados posibles.
  2. La probabilidad de cambiar de estado permanece igual con el paso del tiempo.
  3. Podemos predecir cualquier estado futuro a partir del estado anterior y la matriz de probabilidades de transición.
  4. El tamaño y la composición del sistema no cambia durante el análisis.

Estados y probabilidades de los estados

- Los estados se utilizan para identificar todas las condiciones posibles de un proceso o sistema.
- Es posible identificar los estados específicos de muchos procesos o sistemas.
- En el análisis de Markov suponemos que los estados son tanto *colectivamente exhaustivos* como *mutuamente excluyentes*.
- Después de identificar los estados, el siguiente paso consiste en determinar la probabilidad de que el sistema esté en dicho estado.

La información se coloca en un vector de probabilidades de estado:

Estados y probabilidades de los estados

$\pi(i)$ = vector de probabilidades de estado para el periodo i

$= (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \ldots, \pi_n)$

Donde:

n = número de estados

$\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ = probabilidad de estar en el estado 1, estado 2, …, estado n

- En algunos casos, es posible saber con total certidumbre en qué estado se encuentra el artículo:

- Entonces, el vector de estado se representa como:

$$\pi(1) = (1, 0)$$

donde

$\pi(1)$ = vector de estado para la máquina en el periodo 1

π_1 = 1 = probabilidad de estar en el primer estado

π_2 = 0 = probabilidad de estar en el segundo estado

Vector de probabilidades de estado

- Veamos el vector de estados para los clientes en un pequeño pueblo con tres tiendas.
- Un total de 100,000 personas compran en las tres tiendas durante un mes dado:
  - Cuarenta mil compran en American Food Store: estado 1.
  - Treinta mil compran en Food Mart: estado 2.
  - Treinta mil compran en Atlas Foods: estado 3.

Vector de probabilidades de estado

La probabilidad de que una persona compre es:

Estado 1: American Food Store	**40,000/100,000 = 0.40 = 40%**
Estado 2: Food Mart	**30,000/100,000 = 0.30 = 30%**
Estado 3: Atlas Foods	**30,000/100,000 = 0.30 = 30%**

Estas probabilidades se colocan en el vector de probabilidades de estado como

$$\pi(1) = (0.4, 0.3, 0.3)$$

donde

$\pi(1)$=vector de probabilidades de estado para las tres tiendas en el periodo 1

π_1= 0.4 = probabilidad de que una persona compre en American Food, estado 1

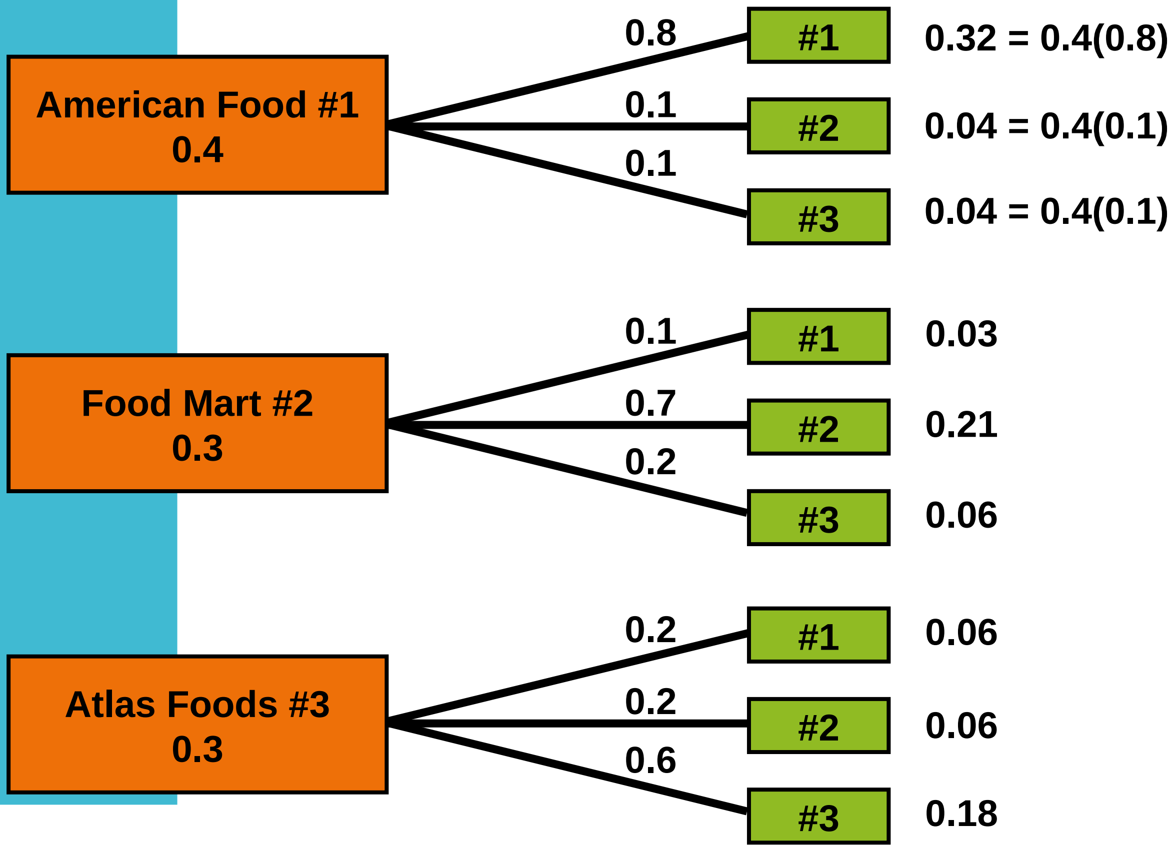
π_2= 0.3 = probabilidad de que una persona compre en Food Mart, estado 2

π_3= 0.3 = probabilidad de que

Vector de probabilidades de estado para el ejemplo de tres tiendas de abarrotes

- Las probabilidades en el vector de estado representan la *participación en el mercado* de las tres tiendas.
- La gerencia de las tres tiendas estará interesada en la manera en que cambia su participación en el mercado con el tiempo.
- La figura muestra un diagrama de árbol de la participación en el mercado del mes próximo.

Diagrama de árbol para el ejemplo de las tres tiendas



Matriz de probabilidades de transición

La matriz de probabilidades de transición nos permite ir de un estado actual a un estado futuro:

Sea P_{ij} = probabilidad condicional de estar en el estado j en el futuro, dado el estado actual i

Por ejemplo, P_{12} es la probabilidad de estar en el estado 2 en el futuro, dado que el evento estaba en el estado 1 en el periodo anterior:

Matriz de probabilidad es de transición

Sea P = la matriz de probabilidades de transición:

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & \cdots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & \cdots & P_{2n} \\ \vdots & & \cdots & & \vdots \\ P_{m1} & & & & P_{mn} \end{pmatrix}$$

- **Los valores individuales de P_{ij} se determinan empíricamente**
- **Las probabilidades en cada renglón sumarán 1**

Probabilidades de transición para las tres tiendas

Usamos los datos históricos para desarrollar la siguiente matriz:

$$P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{pmatrix}$$

Renglón 1

0.8 = P_{11} = probabilidad de estar en el estado 1, después de estar en el estado 1 en el periodo anterior

0.1 = P_{12} = probabilidad de estar en el estado 2, después de estar en el estado 1 en el periodo anterior

0.1 = P_{13} = probabilidad de estar en el estado 3, después de estar en el estado 1 en el periodo anterior

Probabilidades de transición para las tres tiendas

Renglón 2

0.1 = P_{21} = = probabilidad de estar en el estado 1, después de estar en el estado 2 en el periodo anterior

0.7 = P_{22} = = probabilidad de estar en el estado 2, después de estar en el estado 2 en el periodo anterior

0.2 = P_{23} = probabilidad de estar en el estado 3, después de estar en el estado 2 en el periodo anterior

Renglón 3

0.2 = P_{31} = = probabilidad de estar en el estado 1, después de estar en el estado 3 en el periodo anterior

0.2 = P_{32} = = probabilidad de estar en el estado 2, después de estar en el estado 3 en el periodo anterior

0.6 = P_{33} = = probabilidad de estar en el estado 3, después de estar en el estado 3 en el periodo anterior

Predicción de la participación futura en el mercado

- Uno de los propósitos del análisis de Markov es predecir el futuro.
- Dado el vector de probabilidades de estado y la matriz de probabilidades de transición, no es muy difícil determinar las probabilidades de estado en una fecha futura.
- Este tipo de análisis permite el cálculo de la probabilidad de que una persona compre en alguna de las tiendas en el futuro.
- Como esta probabilidad es igual a la participación en el mercado, es posible determinar la participación futura en el mercado de las tiendas de abarrotes.

Predicción de la participación futura en el mercado

Cuando el periodo actual es 0, las probabilidades de estado del siguiente periodo 1 se determinan como sigue:

$$\pi(1) = \pi(0)P$$

Para cualquier periodo n calculamos las probabilidades de estado del periodo $n + 1$ como sigue:

$$\pi(n+1) = \pi(n)P$$

Predicción de la participación futura en el mercado

Los cálculos para la participación en el mercado del periodo siguiente son:

$$\pi(1) = \pi(0)P$$

$$= (0.4, 0.3, 0.3)\begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} = \; & [(0.4)(0.8) + (0.3)(0.1) + (0.3)(0.2), \\ & (0.4)(0.1) + (0.3)(0.7) + (0.3)(0.2), \\ & (0.4)(0.1) + (0.3)(0.2) + (0.3)(0.6)] \end{aligned}$$

$$= (0.41, 0.31, 0.28)$$

Predicción de la participación futura en el mercado

- **La participación de mercado para American Food y Food Mart aumenta, en tanto que para Atlas Foods disminuye.**
- **Podemos determinar si esto continuará, observando las probabilidades de estado en el futuro.**
- **Si consideramos dos periodos a partir de ahora:**

$$\pi(2) = \pi(1)P$$

Predicción de la participación futura en el mercado

Como sabemos que:

$$\pi(1) = \pi(0)P$$

Tenemos:

$$\pi(2) = \pi(1)P = [\pi(0)P]P = \pi(0)PP = \pi(0)P^2$$

En general:

$$\pi(n) = \pi(0)P^n$$

La cuestión de si American y Food Mart continuarán ganando participación en el mercado y Atlas continuará perdiendo es mejor abordarla en términos de condiciones de equilibrio o de estado estable.

Análisis de Markov en operación de maquinaria

- El dueño de Tolsky Works registró durante varios años la operación de sus fresadoras.
- En los dos últimos años, 80% de las veces la fresadora funcionaba correctamente en el mes en curso, si había funcionado correctamente en el mes anterior.
- 90% de las veces la máquina estaba mal ajustada, si se había ajustado incorrectamente el mes anterior.
- 10% de las veces la máquina operaba correctamente en un mes dado, cuando había operado incorrectamente el mes anterior.

La matriz de probabilidades de transición para esta máquina es:

Ejemplo de Tolsky Works

$$P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}$$

donde

$P_{11} = 0.8 =$	**probabilidad de que la máquina funcione *correctamente* este mes, dado que funcionaba *correctamente* el mes pasado**
$P_{12} = 0.2 =$	**probabilidad de que la máquina *no* funcione correctamente este mes, dado que funcionaba *correctamente* el mes pasado**
$P_{21} = 0.1 =$	**probabilidad de que la máquina funcione *correctamente* este mes, dado que *no* funcionaba correctamente el mes pasado**
$P_{22} = 0.9 =$	**probabilidad de que la máquina *no* funcione correctamente este mes, dado que *no* funcionaba correctamente el mes pasado**

¿Cuál es la probabilidad de que la máquina funcione correctamente dentro de uno y dos meses a partir de ahora?

Ejemplo de Tolsky Works

$$\pi(1) = \pi(0)P$$

$$= (1, 0)\begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}$$

$$= [(1)(0.8) + (0)(0.1), (1)(0.2) + (0)(0.9)]$$

$$= (0.8, 0.2)$$

¿Cuál es la probabilidad de que la máquina funcione correctamente dentro de uno y dos meses a partir de ahora?

Ejemplo de Tolsky Works

$$\pi(2) = \pi(1)P$$

$$= (0.8,\ 0.2)\begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}$$

$$= [(0.8)(0.8) + (0.2)(0.1),\ (0.8)(0.2) + (0.2)(0.9)]$$

$$= (0.66,\ 0.34)$$

Estado de probabilidades para el ejemplo de la máquina con 15 periodos

Periodo	Estado 1	Estado 2
1	1.000000	0.000000
2	0.800000	0.200000
3	0.660000	0.340000
4	0.562000	0.438000
5	0.493400	0.506600
6	0.445380	0.554620
7	0.411766	0.588234
8	0.388236	0.611763
9	0.371765	0.628234
10	0.360235	0.639754
11	0.352165	0.647834
12	0.346515	0.653484
13	0.342560	0.657439
14	0.339792	0.660207
15	0.337854	0.662145

Tabla 15.1

Condiciones de equilibrio

- Es fácil pensar que con el paso del tiempo todas las participaciones de mercado serán 0 o 1.
- Pero es normal encontrar un *porcentaje de equilibrio* de los valores o las probabilidades de mercado.
- Se presenta una *condición de equilibrio* cuando las probabilidades de estado no cambian después de muchos periodos.
- Entonces, en equilibrio, las probabilidades de estado para un periodo futuro deben ser iguales a las probabilidades de estado del periodo actual.
- Las probabilidades de estado en equilibrio se calculan repitiendo el análisis de Markov para un gran número de periodos.

Condiciones de equilibrio

Siempre es cierto que

$$\pi\,(\text{siguiente periodo}) = \pi\,(\text{este periodo})P$$

- **O bien,**

$$\pi(n+1) = \pi(n)P$$

- **En equilibrio,**

$$\pi(n+1) = \pi(n)$$

- **Por lo tanto, en equilibrio**

$$\pi(n+1) = \pi(n)P = \pi(n)$$

- **O bien,**

$$\pi = \pi P$$

Para la máquina de Tolsky,

Condiciones de equilibrio

$$\pi = \pi P$$

$$(\pi_1, \pi_2) = (\pi_1, \pi_2)\begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}$$

- **Aplicando la multiplicación de matrices:**

$$(\pi_1, \pi_2) = [(\pi_1)(0.8) + (\pi_2)(0.1), (\pi_1)(0.2) + (\pi_2)(0.9)]$$

- El primero y segundo términos del lado izquierdo, π_1 y π_2, son iguales a los primeros términos del lado derecho:

$$\pi_1 = 0.8\pi_1 + 0.1\pi_2$$
$$\pi_2 = 0.2\pi_1 + 0.9\pi_2$$

Condiciones de equilibrio

- **Las probabilidades de estado deben sumar 1:**

$$\pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_n = 1$$

- **Para la máquina de Tolsky:**

$$\pi_1 + \pi_2 = 1$$

De manera arbitraria, decidimos resolver las siguientes dos ecuaciones:

Condiciones de equilibrio

$$\pi_2 = 0.2\pi_1 + 0.9\pi_2$$

$$\pi_1 + \pi_2 = 1$$

Reagrupando y sustituyendo, obtenemos

$$0.1\pi_2 = 0.2\pi_1$$

$$\pi_2 = 2\pi_1$$

$$\pi_1 + \pi_2 = 1$$

$$\pi_1 + 2\pi_1 = 1$$

$$3\pi_1 = 1$$

$$\pi_1 = {}^{1}/_{3} = 0.33333333$$

$$\pi_2 = {}^{2}/_{3} = 0.66666667$$

Ejemplo de cuentas por pagar

Estados absorbentes y matriz fundamental

- En los ejemplos estudiados hasta ahora, se supone que es posible pasar de un estado a otro.
- Esto no siempre es posible.
- Cuando se permanece en un estado, esto se conoce como *estado absorbente*.
- Un sistema de cuentas por cobrar generalmente ubica las deudas en cuatro estados posibles:

Estado 1 (π_1): pagadas, todas las cuentas

Estado 2 (π_2): deuda incobrable, atrasada por más de tres meses

Estado 3 (π_3): atrasada menos de un mes

Estado 4 (π_4): atrasada entre uno y tres meses

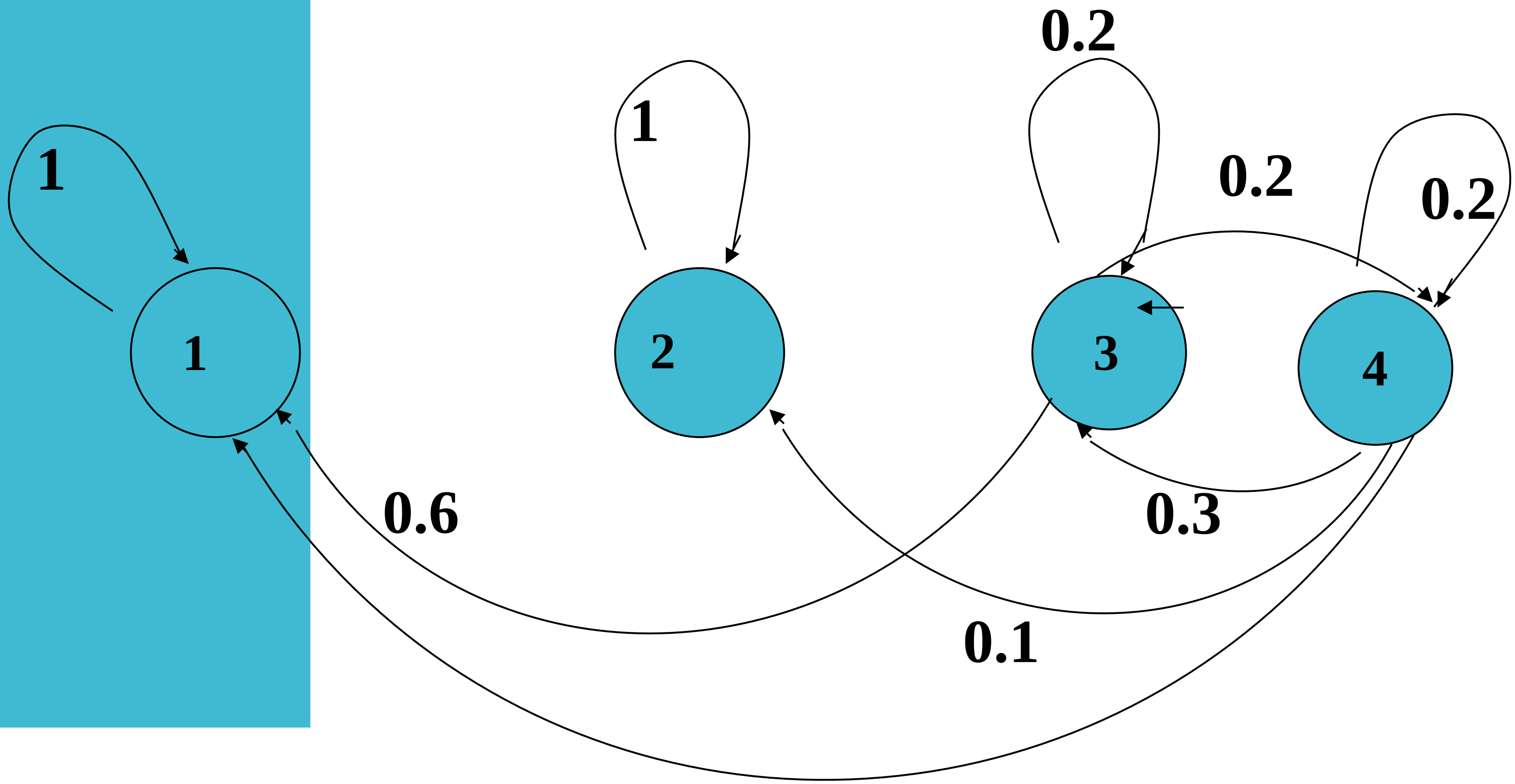
Matriz de probabilidades de transición de este problema

Estados absorbentes y matriz fundamental

	SIGUIENTE MES			
ESTE MES	**PAGADA**	**DEUDA INCOBRABLE**	**<1 MES**	**1 A 3 MESES**
Pagada	**1**	**0**	**0**	**0**
Deuda incobrable	**0**	**1**	**0**	**0**
Menor de 1 mes	**0.6**	**0**	**0.2**	**0.2**
1 a 3 meses	**0.4**	**0.1**	**0.3**	**0.2**

Por lo tanto:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0.2 & 0.2 \\ 0.4 & 0.1 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix}$$


0.2
1
1
0.2
0.2
1
2
3
4
0.6
0.3
0.1
0.4

Estados absorbentes y matriz fundamental

Para obtener la matriz fundamental, es necesario hacer una partición de la matriz de probabilidades de transición como sigue:

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} I \qquad\qquad & \qquad\qquad 0 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0.6 & 0 & 0.2 & 0.2 \\ 0.4 & 0.1 & 0.3 & 0.2 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cc} A \qquad\qquad & \qquad\qquad B \end{array} \end{array}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0.6 & 0 \\ 0.4 & 0.1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 \end{pmatrix}$$

donde

I = matriz identidad

0 = matriz solo con ceros

La matriz fundamental se calcula como:

Estados absorbentes y matriz fundamental

$$F = (I - B)^{-1}$$

$$F = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

$$F = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.2 \\ -0.3 & 0.8 \end{bmatrix}^{-1}$$

El inverso de la matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ **es** $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{d}{r} & \frac{-b}{r} \\ \frac{-c}{r} & \frac{a}{r} \end{bmatrix}$

donde

$$r = ad - bc$$

Para obtener la matriz F calculamos:

$$r = ad - bc = (0.8)(0.8) - (-0.2)(-0.3) = 0.64 - 0.06 = 0.58$$

Estados absorbentes y matriz fundamental

Con esto tenemos:

$$F = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.2 \\ -0.3 & 0.8 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{0.8}{0.58} & \dfrac{-(-0.2)}{0.58} \\ \dfrac{-(-0.3)}{0.58} & \dfrac{0.8}{0.58} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.38 & 0.34 \\ 0.52 & 1.38 \end{pmatrix}$$

Podemos usar la matriz *FA* para contestar preguntas como cuánto de la deuda en la categoría de menos de un mes se pagará, y cuánto se convertirá en deuda incobrable:

Estados absorbentes
y matriz fundamental

$$\boldsymbol{M = (M_1, M_2, M_3, \ldots , M_n)}$$

donde

n = número de estados no absorbentes
M_1 = cantidad en el primer estado o categoría
M_2 = cantidad en el segundo estado o categoría
M_n = cantidad en el *n*-ésimo estado o categoría

Si se supone que hay \$2,000 en la categoría de menos de un mes y \$5,000 en la de uno a tres meses, M sería:

$$M = (2{,}000,\ 5{,}000)$$

Estados absorbentes y matriz fundamental

Cantidad pagada y cantidad de deuda incobrable

$$= MFA$$

$$= (2{,}000,\ 5{,}000) \begin{pmatrix} 0.97 & 0.03 \\ 0.86 & 0.14 \end{pmatrix}$$

$$= (6{,}240,\ 760)$$

Entonces, del total de \$7,000, \$6,240 se pagarán al final y \$760 terminarán como deuda incobrable.