

# Contenidos

## **I. Introducción a la Investigación de Operaciones**

## **II. Modelos de Programación Matemática**

Programación Lineal

Programación Entera

Programación No- lineal

## **III. Modelos Probabilísticos**

Procesos Estocásticos y Cadenas de Markov

Sistemas de Espera

# I. Introducción a la Investigación de Operaciones

## I.1. Introducción.

El principal objetivo de esta área de conocimientos consiste en formular y resolver diversos problemas orientados a la toma de decisiones.

La naturaleza de los problemas abordados puede ser determinística, como en los **Modelos de Programación Matemática**, donde la teoría de probabilidades no es necesaria, o bien de problemas donde la presencia de incertidumbre tiene un rol preponderante, como en los **Modelos Probabilísticos**.

## I. Introducción a la Investigación de Operaciones

Hoy en día, la toma de decisiones abarca una gran cantidad de problemas reales cada más complejos y especializados, que necesariamente requieren del uso de metodologías para la formulación matemática de estos problemas y, conjuntamente, de métodos y herramientas de resolución, como los que provee la Investigación de Operaciones.

# I. Introducción a la Investigación de Operaciones

## I.2 Elementos de un modelo de optimización.

Supongamos que se dispone de determinadas piezas para la elaboración de dos productos finales. Se dispone de 8 “piezas pequeñas” y 6 “piezas grandes”, que son utilizadas para elaborar sillas (usando 2 piezas pequeñas y 1 pieza grande) y mesas (usando 2 piezas de cada tipo).

Interesa decidir cuántas sillas y mesas fabricar de modo de obtener la máxima utilidad, dado un beneficio neto de U\$ 15 por cada silla y de U\$20 por cada mesa fabricada.

# I. Introducción a la Investigación de Operaciones

Posibles soluciones factibles a considerar, esto es soluciones que respetan las restricciones del número de piezas disponibles, son por ejemplo, fabricar:

- 4 sillas, que reportan una utilidad de U\$60
- 1 sillas y 2 mesas , utilidad de U\$55
- 3 mesas, utilidad de U\$60
- 1 mesa y tres sillas, utilidad de U\$65
- 2 sillas y 2 mesas, utilidad de U\$70
- etc.

# I. Introducción a la Investigación de Operaciones

Un **modelo matemático** para hallar la mejor solución factible a este problema tiene tres componentes básicas:

i) **Las variables de decisión**, que consiste en definir cuáles son las decisiones que se debe tomar. En el ejemplo,

**x:** número de sillas elaboradas.

**y:** número de mesas elaboradas.

# I. Introducción a la Investigación de Operaciones

ii) **La función objetivo** del problema, que permita tener un criterio para decidir entre todas las soluciones factibles. En el ejemplo, maximizar la utilidad dada por:

$$z = f(x,y) = 15x + 20y$$

# I. Introducción a la Investigación de Operaciones

iii) **Restricciones del problema**, que consiste en definir un conjunto de ecuaciones e inecuaciones que restringen los valores de las variables de decisión a aquellos considerados como factibles. En el ejemplo, respetar la disponibilidad de piezas para la fabricación de sillas y mesas:

Piezas pequeñas:  $2x + 2y \leq 8$

Piezas grandes :  $x + 2y \leq 6$

También se impone restricciones de no – negatividad:

$$x, y \geq 0$$



# I. Introducción a la Investigación de Operaciones

En resumen:

$$\text{F.O. Max } Z=15x + 20y$$

$$\text{S.A. } 2x + 2y \leq 8$$

$$x + 2y \leq 6$$

$$x,y \geq 0$$

El ejemplo corresponde a un modelo de Programación Lineal. Si además restringimos los valores de  $x$  e  $y$  a números enteros, tendríamos un modelo de Programación Entera. Por otra parte, si hubiese retornos crecientes a escala, deberíamos emplear una función objetivo no lineal como  $f(x,y) = cx^a + dy^b$  con  $a,b > 1$ , y tendríamos un modelo de Programación No Lineal.

# I. Introducción a la Investigación de Operaciones

## **BIBLIOGRAFÍA EN INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES**

- 1. Introducción a la Investigación de Operaciones**, F.S. Hillier y G.J. Lieberman, McGraw Hill, Sexta Edición, 1997.
- 2. Investigación de Operaciones, una introducción**, H.A. Taha, Prentice Hall, México, Sexta Edición, 1998.
- 3. Introduction to Management Science**, F. Hillier, M. Hillier and G.J. Lieberman. Irwin McGraw-Hill, 1999.
- 4. Model Operations Research: A practical Introduction.** M.W. Carter and C.C.Price. CRC Press, 2000.
- 5. Practical Management Science: Spreadsheet Modeling and Applications**, Winston, W.L., Albright S.C. y Broadie M., International Thomson Publishing Company, 1997.

# Contenidos

- I. Introducción a la Investigación de Operaciones
- II. Modelos de Programación Matemática**
  - Programación Lineal
  - Programación Entera
  - Programación No- lineal
- III. Modelos Probabilísticos**
  - Procesos Estocásticos y Cadenas de Markov
  - Sistemas de Espera

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### **Temario:**

**II.1. Introducción y ejemplos de modelamiento.**

II.2. Resolución gráfica de problemas.

II.3. Análisis de Sensibilidad.

II.4. El Método Simplex.

II.5. Dualidad en Programación Lineal.

II.6. Análisis de Sensibilidad o Post-Optimal

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.1 Introducción y ejemplos de modelamiento.

i) **Problema de Transporte.** El problema consiste en decidir cuántas unidades trasladar desde ciertos puntos de origen (plantas, ciudades, etc.) a ciertos puntos de destino (centros de distribución, ciudades, etc..) de modo de minimizar los costos de transporte, dada la oferta y demanda en dichos puntos.

Se suponen conocidos los costos unitarios de transporte, los requerimientos de demanda y la oferta disponible.

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.1 Introducción y ejemplos de modelamiento.

Por ejemplo, suponga que una empresa posee dos plantas que elaboran un determinado producto en cantidades de 250 y 450 unidades diarias, respectivamente. Dichas unidades deben ser trasladadas a tres centros de distribución con demandas diarias de 200, 200 y 250 unidades, respectivamente. Los costos de transporte (en \$/unidad) son:

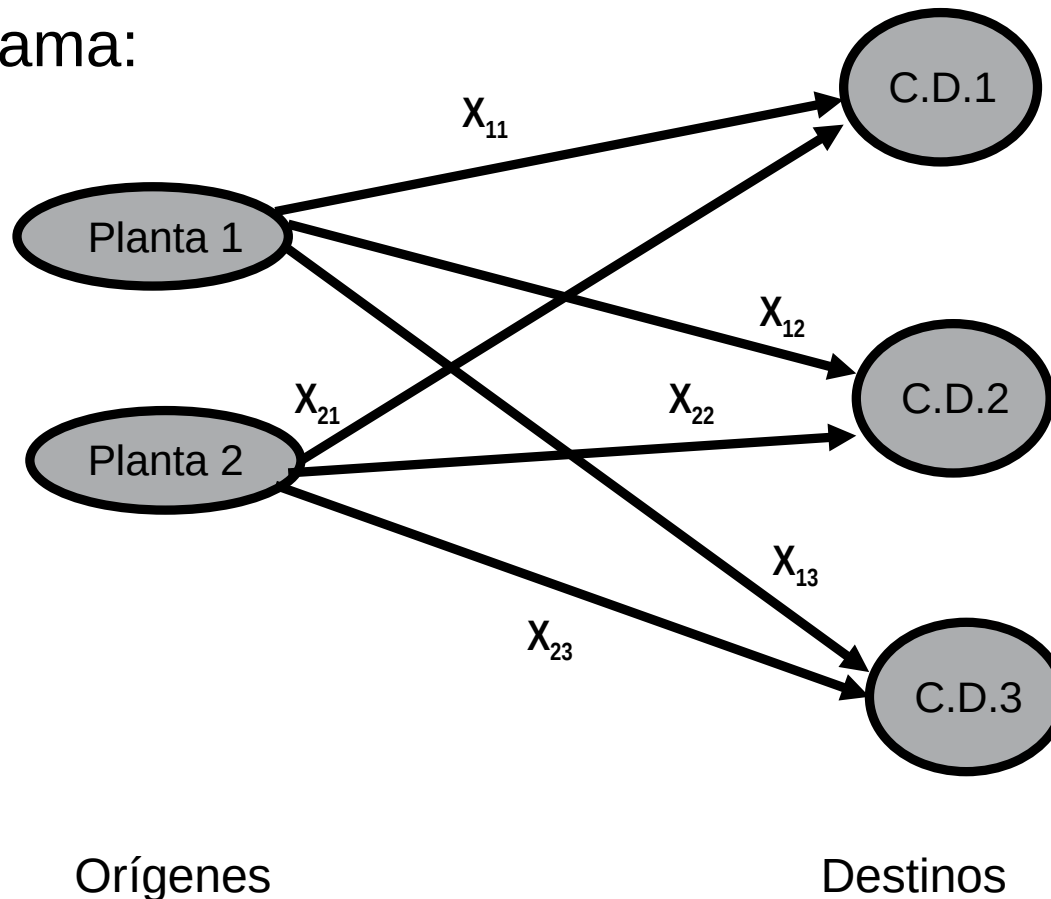
	C.Dist. 1	C.Dist.2	C.Dist.3
Planta 1	21	25	15
Planta 2	28	13	19

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.1 Introducción y ejemplos de modelamiento.

Diagrama:



## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.1 Introducción y ejemplos de modelamiento.

Variables de decisión:

$x_{ij}$  = Unidades transportadas desde la planta  $i$  ( $i=1,2$ ), hasta el centro de distribución  $j$  ( $j=1,2,3$ )

Función Objetivo:

Minimizar el costo total de transporte dado por la función:

$$21x_{11} + 25x_{12} + 15x_{13} + 28x_{21} + 13x_{22} + 19x_{23}$$



## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.1 Introducción y ejemplos de modelamiento.

Restricciones del problema:

1) No Negatividad:  $x_{ij} \geq 0$

2) Demanda:

$$CD_1 : x_{11} \quad \quad \quad + x_{21} \quad \quad \quad = 200$$

$$CD_2 : \quad \quad x_{12} \quad \quad \quad + x_{22} \quad \quad \quad = 200$$

$$CD_3 : \quad \quad \quad x_{13} \quad \quad \quad + x_{23} \quad \quad \quad = 250$$

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.1 Introducción y ejemplos de modelamiento.

3) Oferta :

$$P_1 : x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 250$$

$$P_2 : x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 450$$

Las variables de decisión deben aceptar soluciones como números reales para tener un modelo de P.L.

$$x_{i,j} \geq 0 ; i = 1,2 ; j = 1,2,3$$

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.1 Introducción y ejemplos de modelamiento.

ii) **Problema de la dieta**: este consiste en determinar una dieta de manera eficiente, a partir de un conjunto dado de alimentos, de modo de satisfacer ciertos requerimientos nutricionales.

Supongamos que se tiene la siguiente información:

	Leche (galon)	Legumbre (1 porción)	Naranjas (unidad)	Requerimientos Nutricionales
Niacina	3,2	4,9	0,8	13
Tianina	1,12	1,3	0,19	15
Vitamina C	32	0	93	45
Costo	2	0,2	0,25	

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.1 Introducción y ejemplos de modelamiento.

Variables de decisión:

$x_1$  : galones de leche utilizados en la dieta.

$x_2$  : porciones de legumbre utilizadas en la dieta.

$x_3$  : unidades de naranja utilizadas en la dieta.

Función Objetivo:

Minimizar el costo total de la dieta, dado por:

$$2 x_1 + 0.2 x_2 + 0.25 x_3$$

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.1 Introducción y ejemplos de modelamiento.

Restricciones del problema:

Requerimientos mínimos de los nutrientes considerados:

$$3.2 x_1 + 4.9 x_2 + 0.8 x_3 \geq 13$$

$$1.12 x_1 + 1.3 x_2 + 0.19 x_3 \geq 15$$

$$32 x_1 + \quad + \quad 93 x_3 \geq 45$$

$$x_1 \geq 0 ; x_2 \geq 0 ; x_3 \geq 0$$

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.1 Introducción y ejemplos de modelamiento.

**iii) Problema de dimensionamiento de lotes:** este consiste en hallar una política óptima de producción para satisfacer demandas fluctuantes en el tiempo, de modo de minimizar costos de producción e inventario, considerando la disponibilidad de diversos recursos escasos.

Supongamos que una fabrica puede elaborar hasta 150 unidades en cada uno de los 4 periodos en que se ha subdividido el horizonte de planificación y se tiene adicionalmente la siguiente información:

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.1 Introducción y ejemplos de modelamiento.

Periodos	Demandas (unidades)	Costo Prod. (US\$/unidad)	Costo de Inventario (US\$/unidad)
1	130	6	2
2	80	4	1
3	125	8	2.5
4	195	9	3

Supuestos adicionales:

- 1) Existe un inventario inicial de 15 unidades.
- 2) No se acepta demanda pendiente o faltante (es decir, se debe satisfacer toda la demanda del periodo).

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.1 Introducción y ejemplos de modelamiento.

Variables de decisión:

$x_t$  : número de unidades elaboradas en el periodo t.

$I_t$  : número de unidades de inventario al final del periodo t.

Función objetivo:

Consiste en minimizar los costos de producción y el costo de mantenimiento de inventario.

$$6x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 9x_4 + 2I_1 + I_2 + 2.5I_3 + 3I_4$$



## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.1 Introducción y ejemplos de modelamiento.

Notar que en el óptimo  $I_4$  va a ser 0, así que incluso podríamos no incluirla, pero de todos modos la consideramos.

Restricciones del problema:

1) Restricciones de cotas, que reflejan la capacidad de producción.

$$x_t \leq 150 ; t=1,2,3,4$$

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.1 Introducción y ejemplos de modelamiento.

2) Restricciones de no negatividad

$$\mathbf{x_t \geq 0}$$

3) Restricciones de demanda

$$\mathbf{x_1 + I_0 - I_1 = 130} \quad \text{Periodo 1} \quad \mathbf{I_0=15}$$

$$\mathbf{x_2 + I_1 - I_2 = 80} \quad \text{Periodo 2}$$

$$\mathbf{x_3 + I_2 - I_3 = 125} \quad \text{Periodo 3}$$

$$\mathbf{x_4 + I_3 - I_4 = 195} \quad \text{Periodo 4}$$

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.1 Introducción y ejemplos de modelamiento.

##### iv) Problema de planificación financiera:

Supongamos que un banco dispone de \$250 millones para destinar a 4 tipo de créditos ofrecidos, los cuales tienen las siguientes, tasas de crédito:

- Primer crédito corriente :12%
- Segundo crédito corriente :16%
- Crédito para el hogar :16%
- Crédito personal :10%

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### **II.1 Introducción y ejemplos de modelamiento.**

La asignación de estos créditos, debe satisfacer la siguiente política utilizada por la institución:

El monto asignado a los PCC, debe ser al menos, el 55% del monto asignado a los créditos corrientes, y al menos un 25% del total del dinero prestado.

El SCC, no puede exceder el 30% del total del dinero prestado, por políticas tributarias el interés recibido por el banco no debe exceder a un retorno del 14% sobre el capital prestado.

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.1 Introducción y ejemplos de modelamiento.

¿Cuánto asignar a cada tipo de crédito, de la manera más eficiente, respetando la política del banco?

Variables de decisión:

$x_1$  :Monto asignado al PCC.

$x_2$  : Monto asignado SCC.

$x_3$  : Monto asignado al crédito para el hogar.

$x_4$  : Monto asignado al crédito personal.

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.1 Introducción y ejemplos de modelamiento.

Función Objetivo:

Se propone maximizar los retornos recibidos en la asignación, dados por:

$$\text{F. O. Max } Z = 0.12 x_1 + 0.16 x_2 + 0.16 x_3 + 0.10 x_4$$

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.1 Introducción y ejemplos de modelamiento.

Restricciones del problema:

$$x_1 \geq 0.55 (x_1 + x_2)$$

$$x_1 \geq 0.25 (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$$

$$x_2 \leq 0.30 (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$$

$$(0.12x_1 + 0.16x_2 + 0.16x_3 + 0.10x_4) \leq 0.14 (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$$

Adicionalmente:  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 250$

**Restricción de no negatividad**  $x_i \geq 0 ; i = 1, 2, 3, 4$

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.1 Introducción y ejemplos de modelamiento.

**v) Problema de mezcla de productos:** en este problema una refinería produce 4 tipos de gasolina (gas 1, gas 2, gas 3 y gas 4). Dos características importantes de cada gasolina son su número de performance (NP) y su presión de vapor (RVP), que están dados por:

	NP	RVP	Barriles diarios
gas 1	107	5	3814
gas 2	93	8	2666
gas 3	87	4	4016
gas 4	108	21	1300



## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.1 Introducción y ejemplos de modelamiento.

Estas gasolinas pueden ser vendidas directamente a un precio de \$24,83 por barril o bien mezcladas para obtener gasolinas de aviación (avgas A y avgas B). La calidad de estas dos últimas junto con sus precios de venta son:

	NP	RV	Precio por barril (US\$)
<b>avgas A</b>	Al menos 100	A lo más 7	26,45
<b>Avgas B</b>	Al menos 91	A lo más 6	25,91

## II. Modelos de Programación Matemática Programación Lineal

### **II.1 Introducción y ejemplos de modelamiento.**

El NP y RVP de cada mezcla es un promedio de los respectivos NP y RVP de las gasolinas empleadas.

Se desea obtener un plan de venta de las distintas gasolinas que maximice los retornos.

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.1 Introducción y ejemplos de modelamiento.

##### Variables de decisión:

$x_j$  : cantidad de barriles del gas  $j$  que son vendidos sin mezclar, con  $j = 1, 2, 3, 4$ .

$x_A$  : cantidad de barriles de avgas A.

$x_B$  : cantidad de barriles de avgas B.

$x_{jA}$ : cantidad de gas  $j$  usado en avgas A.

$x_{jB}$ : cantidad de gas  $j$  usado en avgas B.

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.1 Introducción y ejemplos de modelamiento.

Función objetivo:

$$\text{Max } 24,83 (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + 26,45x_A + 25,91x_B$$

Restricciones:

$$x_1 + x_{1A} + x_{1B} = 3814$$

$$x_2 + x_{2A} + x_{2B} = 2666$$

$$x_3 + x_{3A} + x_{3B} = 4016$$

$$x_4 + x_{4A} + x_{4B} = 1300$$

$$x_{1A} + x_{2A} + x_{3A} + x_{4A} = x_A$$

$$x_{1B} + x_{2B} + x_{3B} + x_{4B} = x_B$$

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.1 Introducción y ejemplos de modelamiento.

NP, avgas A: 
$$\frac{107x_{1A} + 93x_{2A} + 87x_{3A} + 108x_{4A}}{x_A} \geq 100$$

NP, avgas B: 
$$\frac{107x_{1B} + 93x_{2B} + 87x_{3B} + 108x_{4B}}{x_B} \geq 91$$

RVP, avgas A: 
$$\frac{5x_{1A} + 8x_{2A} + 4x_{3A} + 21x_{4A}}{x_A} \leq 7$$

RVP, avgas B:

Restricción de no negatividad 
$$\frac{5x_{1B} + 8x_{2B} + 4x_{3B} + 21x_{4B}}{x_B} \leq 7$$

$$x_{jA} \geq 0 ; x_{jB} \geq 0 ; j = 1,2,3,4 ; x_A \geq 0 ; x_B \geq 0$$

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.1 Introducción y ejemplos de modelamiento.

##### **vi) Problema de expansión de la capacidad de un Sistema de Potencia Eléctrica:**

En este problema se desea planificar la expansión de la capacidad de un sistema eléctrico para los siguientes  $T$  años. La demanda (estimada) para el año  $t$  corresponde a  $d_t$  MW para  $t = 1, 2, \dots, T$ . La capacidad existente del sistema corresponde a  $c_t$  MW para el año  $t = 1, 2, \dots, T$ .

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.1 Introducción y ejemplos de modelamiento.

Existen 2 alternativas para la expansión de la capacidad del sistema:

- Usar plantas térmicas a petróleo.
- Usar plantas térmicas a gas.

Se requiere una inversión  $p_t$  por MW instalado de una planta a petróleo que esté operativa al comienzo del año  $t$ , y el correspondiente costo para una planta a gas es  $g_t$ .

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### **II.1 Introducción y ejemplos de modelamiento.**

Por razones políticas y de seguridad, se ha decidido que no más del 30% de la capacidad instalada, corresponda a plantas a gas (nuevas).

Cada planta a petróleo tiene una vida de 20 años y una planta a gas una vida de 15 años.

Se desea proponer un plan de expansión al mínimo costo posible.



## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.1 Introducción y ejemplos de modelamiento.

##### Variables de decisión:

$x_t$  : cantidad de MW expandidos en planta a petróleo al inicio del año  $t$ , con  $t = 1, 2, \dots, T$ .

$y_t$  : cantidad de MW expandidos en planta a gas al inicio del año  $t$ , con  $t = 1, 2, \dots, T$ .

$z_t$  : cantidad total de MW disponible en plantas nuevas a petróleo al inicio del año  $t$ .

$w_t$  : cantidad total de MW disponible en plantas nuevas a gas al inicio del año  $t$ .

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.1 Introducción y ejemplos de modelamiento.

Función Objetivo:

$$\text{Min} \quad \sum_{t=1}^T [p_t x_t + g_t y_t]$$

Restricciones:

$$c_t + z_t + w_t \geq d_t$$

$$z_t = \sum_{k=1}^t x_k \quad t \leq 20$$

$$z_t = \sum_{k=t-19}^t x_k \quad t > 20$$

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.1 Introducción y ejemplos de modelamiento.

$$w_t = \sum_{k=1}^t y_k \quad t \leq 15$$

$$w_t = \sum_{k=t-14}^t y_k \quad t > 15$$

$$\frac{w_t}{c_t + z_t + w_t} \leq 0,30 \quad t = 1 \dots T$$

$$x_t, y_t, z_t, w_t \geq 0$$

## II. Modelos de Programación Matemática Programación Lineal

### **Temario:**

II.1. Introducción y ejemplos de modelamiento.

**II.2. Resolución gráfica de problemas.**

II.3. Análisis de Sensibilidad.

II.4. El Método Simplex.

II.5. Dualidad en Programación Lineal.

II.6. Análisis de Sensibilidad o Post-Optimal

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.2. Resolución gráfica de problemas.

Consideremos el siguiente problema a resolver gráficamente:

$$\text{Max } z = 3x_1 + 5x_2$$

$$\text{sa: } x_1 \leq 4$$

$$2x_2 \leq 12$$

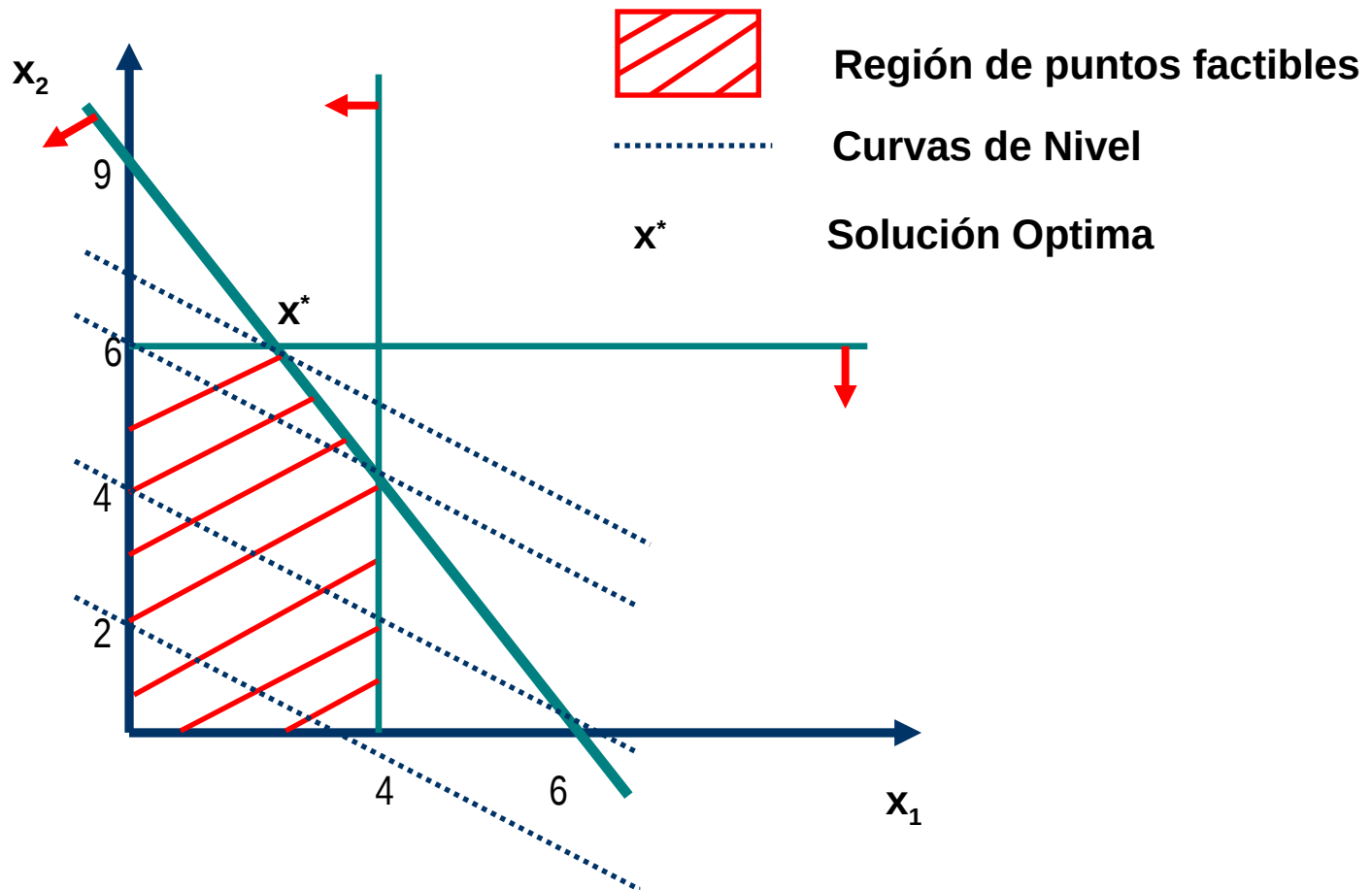
$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

### II.2. Resolución gráfica de problemas.



## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### **II.2. Resolución gráfica de problemas.**

En primer lugar, se debe obtener la región de puntos factibles en el plano, obtenida por medio de la intersección de todos los semi - espacios que determinan cada una de las inecuaciones presentes en las restricciones del problema.

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.2. Resolución gráfica de problemas.

Enseguida, con el desplazamiento de las curvas de nivel de la función objetivo en la dirección de crecimiento de la función (que corresponde a la dirección del vector gradiente de la función,  $\nabla z(x_1, x_2) = (3, 5)^T$ ), se obtiene la solución óptima del problema en la intersección de las rectas:  $2x_2 = 12$  y  $3x_1 + 2x_2 = 18$  (restricciones activas). Esto es:

$$x_1^* = 2 \quad x_2^* = 6$$

$$z^* = 3x_1^* + 5x_2^* = 36$$



## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.2. Resolución gráfica de problemas.

Notar que se pueden dar otras situaciones en la búsqueda de una solución óptima para esta clase de problemas:

- 1) La solución óptima exista pero haya más de una. En el ejemplo, considere la nueva función objetivo:  $z = 6x_1 + 4x_2$ .
- 2) El problema no tenga solución, dada una región de puntos factibles no - acotada. En el ejemplo, reemplace cada desigualdad  $\leq$  por una  $\geq$ .
- 3) El problema no tenga solución, porque no existen puntos factibles. En el ejemplo, suponga que agregamos la restricción:  $x_1 \geq 5$ .

## II. Modelos de Programación Matemática Programación Lineal



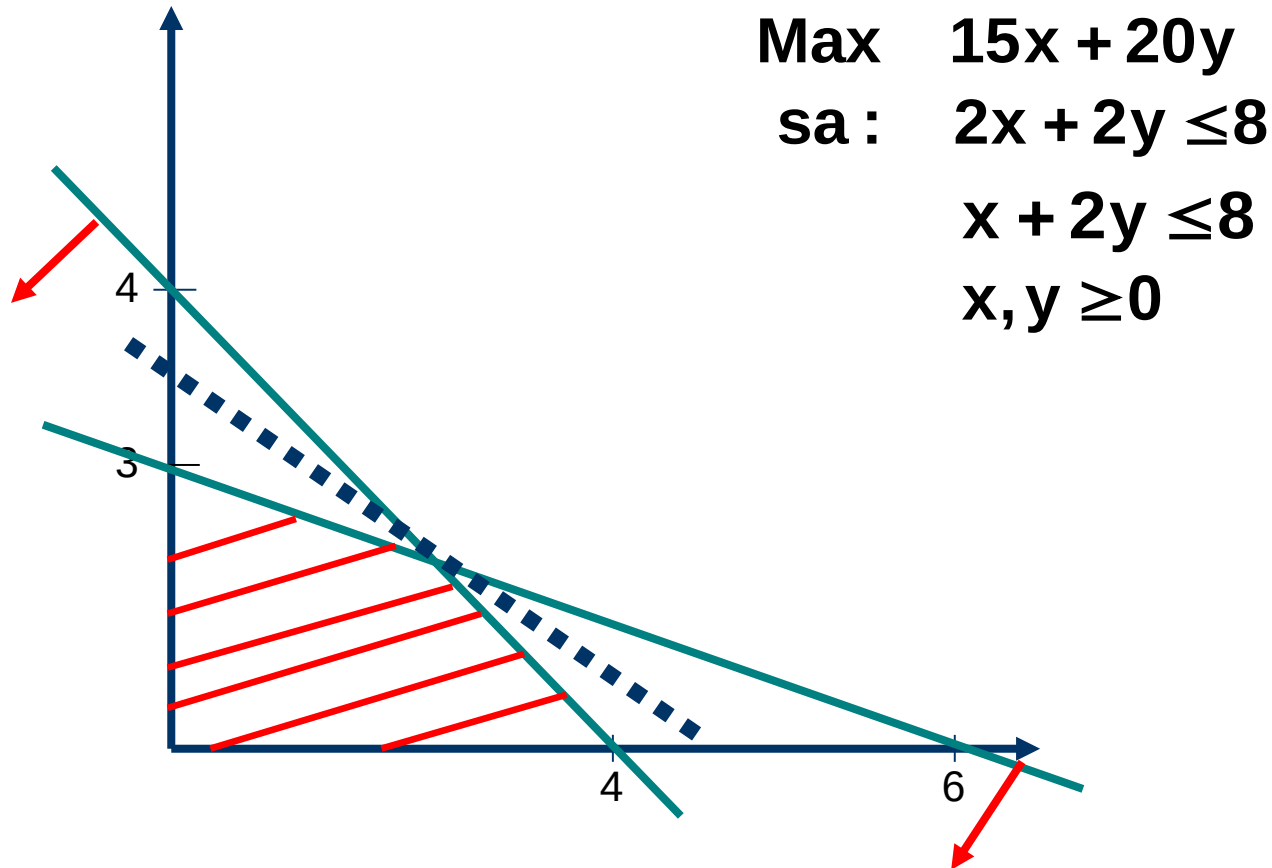
### Temario:

- II.1. Introducción y ejemplos de modelamiento.
- II.2. Resolución gráfica de problemas.
- II.3. Análisis de Sensibilidad.**
- II.4. El Método Simplex.
- II.5. Dualidad en Programación Lineal.
- II.6. Análisis de Sensibilidad o Post-Optimal

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.3. Análisis de sensibilidad.



## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.3. Análisis de sensibilidad.

A partir de la resolución gráfica del problema se tiene:

Solución óptima :  $x_1^* = 2$  ;  $x_2^* = 2$

Valor óptimo :  $z = z(2,2) = 70$

El análisis de sensibilidad permite responder, entre otras, las siguientes preguntas:

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.3. Análisis de sensibilidad.

1) ¿Cuál es el intervalo de variación de algún coeficiente de la función objetivo, de modo que la actual solución siga siendo la óptima?

Sea  $z = c_1x_1 + c_2x_2$

La solución óptima de la nueva función, seguirá siendo:  $x_1^* = 2$  ;  $x_2^* = 2$  ssi:

$$-1 \leq \frac{-c_1}{c_2} \leq -\frac{1}{2}$$

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.3. Análisis de sensibilidad.

También podemos estudiar el intervalo de un sólo coeficiente, dejando el resto de los parámetros fijos:

$$\text{Para } C_1: \quad -1 \leq \frac{-C_1}{20} \leq -\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 10 \leq C_1 \leq 20$$

$$\text{Para } C_2: \quad -1 \leq \frac{-15}{C_2} \leq -\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 15 \leq C_2 \leq 30$$

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.3. Análisis de sensibilidad.

2) ¿Cuál es la variación del actual valor óptimo de la función objetivo, si cambamos en una unidad algún coeficiente del lado derecho de las restricciones ?

Estudiaremos por separado las variaciones de cada uno de los coeficientes del lado derecho de las restricciones, de modo preservar la geometría del problema, esto es, que se conserven las mismas restricciones activas de la solución óptima inicial.

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

### II.3. Análisis de sensibilidad.

#### Primera restricción.

La mayor variación del coeficiente del lado derecho se alcanza en  $x_1 = 0$  y  $x_2 = 4$ , de donde se obtiene:

$$z(0,4) = 15 \times 0 + 20 \times 4 = 80 \quad \text{y} \quad b_1^* = 0 + 2 \times 4 = 8$$

La menor variación del coeficiente del lado derecho se alcanza en:  $x_1 = 4$  ;  $x_2 = 0$ , de donde se obtiene:

$$z(4,0) = 15 \times 4 + 20 \times 0 = 60 \quad \text{y} \quad b_1 = 4 + 2 \times 0 = 4$$



## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.3. Análisis de sensibilidad.

De aquí, se calcula el **precio sombra**  $\Pi_1$ , que indica la razón o tasa de cambio de la función objetivo con respecto al cambio en una unidad del lado derecho:

$$\Pi_1 = \frac{z(0,4) - z(4,0)}{b_1^* - b_1} = \frac{80 - 60}{8 - 4} = 5$$

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.3. Análisis de sensibilidad.

##### Segunda restricción.

La mayor variación del coeficiente del lado derecho se alcanza en  $x_1 = 6$  y  $x_2 = 0$ , de donde se obtiene:

$$z(0,4) = 15 \times 6 + 20 \times 0 = 90 \quad \text{y} \quad b_1^* = 2 \times 6 + 2 \times 0 = 12$$

La menor variación del coeficiente del lado derecho se alcanza en:  $x_1 = 0$  ;  $x_2 = 3$ , de donde se obtiene:

$$z(4,0) = 15 \times 0 + 20 \times 3 = 60 \quad \text{y} \quad b_1 = 2 \times 0 + 2 \times 3 = 6$$

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.3. Análisis de sensibilidad.

De aquí, se calcula el **precio sombra**  $P_2$ , que indica la razón o tasa de cambio de la función objetivo con respecto al cambio en una unidad del lado derecho:

$$\Pi_2 = \frac{z(6,0) - z(0,3)}{b_2^* - b_2} = \frac{90 - 60}{12 - 6} = 5$$

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### **Temario:**

II.1. Introducción y ejemplos de modelamiento.

II.2. Resolución gráfica de problemas.

II.3. Análisis de Sensibilidad.

**II.4. El Método Simplex.**

II.5. Dualidad en Programación Lineal.

II.6. Análisis de Sensibilidad o Post-Optimal

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.4. El Método Simplex.

En lo que sigue consideremos el siguiente problema de programación lineal en su forma estándar.

$$\begin{array}{ll}\text{Min} & \mathbf{c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n} \\ \text{sa} & \mathbf{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1} \\ & \mathbf{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2} \\ & \dots \qquad \qquad \dots \qquad \qquad \dots \\ & \mathbf{a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m}\end{array}$$

$$\mathbf{x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad y \quad m \leq n}$$

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.4. El Método Simplex.

Matricialmente escrito como:

$$\begin{array}{ll}\text{Min} & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{sa} & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\end{array}$$

No existe pérdida de la generalidad al suponer que un problema viene dado en la forma estándar. En efecto, si tuviésemos el siguiente problema:

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.4. El Método Simplex.

**P)      Max     $9u + 2v + 5z$**   
**sa       $4u + 3v + 6z \leq 50$**   
**$u + 2v + 3z \geq 8$**   
**$2u - 4v + z = 5$**   
**$u, v \geq 0$**   
**$z \in \mathbb{R}$**

Es posible reformular de manera equivalente el problema anterior usando que:

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.4. El Método Simplex.

1) Siempre es posible llevar un problema de maximización a uno de minimización. Si  $f(\mathbf{x})$  es la función objetivo a maximizar y  $\mathbf{x}^*$  es la solución óptima:

$$f(\mathbf{x}^*) \geq f(\mathbf{x}) , \quad \forall \mathbf{x} \text{ factible}$$

$$- f(\mathbf{x}^*) \leq - f(\mathbf{x}) , \quad \forall \mathbf{x} \text{ factible}$$

$\therefore \mathbf{x}^*$  es también mínimo de  $- f(\mathbf{x})$



## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.4. El Método Simplex.

2) Cada restricción del tipo  $\leq$  puede ser llevada a una ecuación de igualdad usando una (nueva) variable de **holgura** no negativa, con un coeficiente nulo en la función objetivo.

3) De igual modo, cada restricción del tipo  $\geq$  puede ser llevada a una ecuación de igualdad usando una variable de **exceso** no negativa.

4) Siempre es posible escribir una variable libre de signo como la diferencia de dos variables no negativas.

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.4. El Método Simplex.

En resumen el problema **P)** puede ser escrito de manera equivalente como:

$$\begin{array}{ll}\text{Min} & - 9x_1 - 2x_2 - 5x_3 + 5x_4 + 0x_5 + 0x_6 \\ \text{sa:} & 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 6x_4 + x_5 = 50 \\ & x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 - x_6 = 8 \\ & 2x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 = 5 \\ & x_i \geq 0, \quad i=1,2,3,4,5,6.\end{array}$$

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.4. El Método Simplex.

Con

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{v} &= \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{z} &= \mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_4 \\ \mathbf{s}_1 &= \mathbf{x}_5 \quad (\text{HOLGURA}) \\ \mathbf{s}_2 &= \mathbf{x}_6 \quad (\text{EXCESO}) \end{aligned}$$

La búsqueda de la solución óptima se restringe a encontrar un vértice óptimo y cada vértice del conjunto de las restricciones del problema, llamado **región de puntos factibles**, corresponde a una **solución básica factible** del sistema  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ .

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.4. El Método Simplex.

Esta solución básica factible, corresponde a su vez a aquellas soluciones que resultan de resolver el sistema para exactamente **m** variables, fijando las restantes **n-m** en **cero**, llamadas respectivamente variables básicas y no-básicas, que además deben satisfacer condiciones de no-negatividad.

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.4. El Método Simplex.

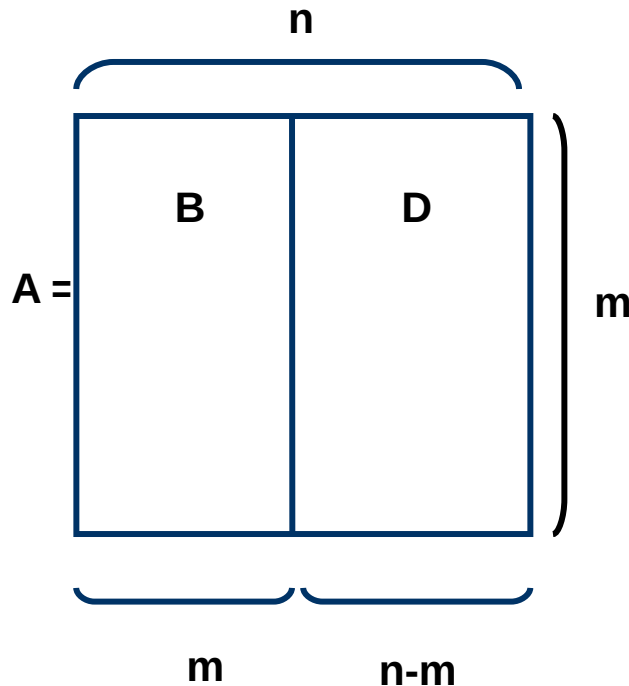
##### Teorema Fundamental de la Programación Lineal:

Si un problema tiene solución óptima, tiene una solución básica factible óptima.

Dada una matriz **B** de  $\mathbf{m} \times \mathbf{m}$  invertible, esta induce una partición de las variables y parámetros del modelo como lo muestra la siguiente diapositiva.

## II. Modelos de Programación Matemática Programación Lineal

### II.4. El Método Simplex.



$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_B \\ \vdots \\ x_D \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} m \\ n-m \end{matrix} \quad c = \begin{bmatrix} c_B \\ \vdots \\ c_D \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} m \\ n-m \end{matrix}$$

$x_B$  :variables básicas.

$x_D$  :variables no básicas.

$c_B$  :costos básicos.

$c_D$  :costos no básicos.

$B$  : es llamada una matriz de base

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.4. El Método Simplex.

Criterio de Optimalidad:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{c}^T \mathbf{x} &= \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B + \mathbf{c}_D^T \mathbf{x}_D \\
 &= \mathbf{c}_B^T (\mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1} \mathbf{D} \mathbf{x}_D) + \mathbf{c}_D^T \mathbf{x}_D \\
 &= \underbrace{\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}}_{\text{valor actual de la función obj.}} + \underbrace{(\mathbf{c}_D^T - \mathbf{c}_D^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{D} \mathbf{x}_D)}_{\text{vector de costos reducidos.}} \mathbf{x}_D
 \end{aligned}$$

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.4. El Método Simplex.

La ecuación que define cada uno de los costos reducidos es:

$$r_j = c_j - c_B^T B^{-1} A_j$$

Donde  $j$  es el índice de variable no-básica y  $A_j$  la respectiva columna en  $A$  de esa variable.

La actual solución básica factible es óptima ssi  $r_j \geq 0 \forall j$ , existe una variable no básica  $x_p$  con costo reducido negativo, que entra a la nueva base.



## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.4. El Método Simplex.

Para decidir quién deja la base, es necesario calcular el mayor valor que puede tomar la variable entrante que garantiza la factibilidad de la nueva solución básica, con:

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} y_{10} \\ x_{20} \\ \vdots \\ x_{m0} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j = \begin{bmatrix} y_{1p} \\ y_{2p} \\ \vdots \\ y_{mp} \end{bmatrix}$$

y se debe calcular:

$$\frac{y_{k0}}{y_{kp}} = \text{Min} \left\{ \frac{y_{i0}}{y_{ip}} / y_{ip} > 0 \right\} \Rightarrow x_k \text{ deja la base}$$

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.4. El Método Simplex.

Ejemplo.

Resolver el siguiente problema de P.L.

$$\begin{array}{ll}\text{Max} & 40x + 60y \\ \text{sa:} & 2x + y \leq 70 \\ & x + y \leq 40 \\ & x + 3y \leq 90 \\ & x, y \geq 0\end{array}$$

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.4. El Método Simplex.

Se deben agregar 3 variables de holgura (  $x_1$  ,  $x_2$  ,  $x_3$  var.básicas), y llevar a forma estándar ( $x_4 = x$  y  $x_5 = y$ ).

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & -40x_4 - 60x_5 \\ \text{sa:} & x_1 + 2x_4 + x_5 = 70 \\ & x_2 + x_4 + x_5 = 40 \\ & x_3 + x_4 + 3x_5 = 90 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5 \end{array}$$

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.4. El Método Simplex.

Tabla inicial:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
1	0	0	2	1	70
0	1	0	1	1	40
0	0	1	1	3	90
0	0	0	-40	-60	0

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.4. El Método Simplex.

Usamos como variable entrante a la base  $x_5$  (pues  $r_5 < 0$ ).

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
1	0	0	2	1	70
0	1	0	1	1	40
0	0	1	1	3	90
0	0	0	-40	-60	0

Se calcula  $\text{Min} \{ 70/1, 40/1, 90/3 \} = 30$ , por lo tanto sale  $x_3$ .

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.4. El Método Simplex.

Actualizando, queda la siguiente tabla (no óptima), donde la variable entrante a la base es  $x_4$  (pues  $r_4 < 0$ ).

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
1	0	-1/3	5/3	0	40
0	1	-1/3	2/3	0	10
0	0	1/3	1/3	1	30
0	0	20	-20	0	1800

Se calcula  $\text{Min} \{ 40/(5/3), 10/(2/3), 30/(1/3) \} = 15$ , por lo tanto  $x_2$  deja la base actual.

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.4. El Método Simplex.

Actualizando, queda la siguiente tabla final:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
1	$-5/2$	$1/2$	0	0	15
0	$-1/3$	$-1/2$	1	0	15
0	$1/3$	$1/2$	0	1	25
0	20	10	0	0	2100

Como todos los costos reducidos son mayores o iguales que cero nos encontramos en la **solución óptima**.

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.4. El Método Simplex.

$$\mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_4 \\ \mathbf{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 15 \\ 25 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_D = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{z}^* = - 40 \times 15 - 60 \times 25 = - 2100$$

En la formulación inicial, tenemos como solución óptima  $\mathbf{x}^*=15$ ,  $\mathbf{y}^*=25$ , con valor óptimo **2.100**.



## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.4. El Método Simplex.

##### Resumen del Método Simplex:

**Paso 0** : Escribir el problema de programación lineal en su forma estándar.

**Paso 1** : Escoger una solución básica factible inicial.

**Paso 2** : Escoger una variable no - básica con costo reducido negativo que determina la variable entrante y seguir al paso tres. Sin embargo, si todos los costos reducidos son mayores que cero , parar, ya que la actual solución es la óptima.

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.4. El Método Simplex.

**Paso 3 :** Calcular el criterio de factibilidad que determina que variable deja la base. Si todos los cuocientes son negativos: problema no - acotado, parar.

**Paso 4 :**Actualizar la tabla de modo de despejar el valor de las nuevas variables básicas, los costos reducidos y el valor de la función objetivo. Volver al Paso 2.

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.4. El Método Simplex.

No siempre es fácil obtener una solución básica factible inicial, en las variables originales del modelo. Para conseguir esto existen varios procedimientos como son:

- **Método Simplex de dos fases.**
- **Método de la M – grande.**

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.4. El Método Simplex.

##### Método Simplex de dos Fases.

**Fase 1:** Se considera un problema auxiliar que resulta de agregar tantas variables auxiliares a las restricciones del problema, de modo de obtener una solución básica factible. Resolver por Simplex un nuevo problema que considera como función objetivo la suma de las variables auxiliares. Si el valor óptimo es cero ir a la Fase 2. En caso contrario, no existe solución factible.

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.4. El Método Simplex.

##### Método Simplex de dos Fases.

**Fase 2:** Resolver por Simplex el problema original a partir de la solución básica factible hallada en la Fase1.

Ejemplo:

$$\begin{array}{ll}\text{Max} & 2x_1 + x_2 \\ \text{sa:} & 10x_1 + 10x_2 \leq 9 \\ & 10x_1 + 5x_2 \geq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{array}$$

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.4. El Método Simplex.

##### Método Simplex de dos Fases.

Se debe agregar una variable de holgura ( $x_3$ ) y una variable de exceso ( $x_4$ ), y llevarlo a su forma estándar.

$$\text{Min} \quad -2x_1 - x_2$$

$$\text{sa:} \quad 10x_1 + 10x_2 + x_3 = 9$$

$$10x_1 + 5x_2 - x_4 = 1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.4. El Método Simplex.

##### Método Simplex de dos Fases.

Aplicamos Simplex de dos Fases :

Fase 1:            **Min**     $x_5$

**sa:**     $10x_1 + 10x_2 + x_3 \qquad \qquad \qquad = 9$

$10x_1 + 5x_2 \qquad \qquad - x_4 + x_5 = 1$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.4. El Método Simplex.

##### Método Simplex de dos Fases.

Quedando la siguiente tabla:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
10	10	1	0	0	9
10	5	0	-1	1	1
0	0	0	0	1	0

donde:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \end{bmatrix} \quad x_D = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.4. El Método Simplex.

##### Método Simplex de dos Fases.

Luego se hace cero el costo reducido de la variable  $x_5$  de la tabla anterior, y queda la siguiente tabla inicial.

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
10	10	1	0	0	9
10	5	0	-1	1	1
-10	-5	0	1	0	-1

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.4. El Método Simplex.

##### Método Simplex de dos Fases.

La variable entrante a la base es  $x_1$  ( pues  $r_1 < 0$  ).

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
10	10	1	0	0	9
<b>10</b>	5	0	-1	1	1
-10	-5	0	1	0	-1

Calculamos  $\text{Min} \{ 9/10, 1/10 \} = 1/10$ , por lo tanto sale  $x_5$ .

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.4. El Método Simplex.

##### Método Simplex de dos Fases.

Obteniéndose la siguiente tabla final:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
0	5	1	1	-1	8
1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$
0	0	0	0	1	0

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/10 \\ 8 \end{bmatrix} \quad x_D = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.4. El Método Simplex.

##### Método Simplex de dos Fases.

Donde, al anterior, corresponde a la solución óptima del problema en la Fase 1, con valor óptimo 0. De aquí entonces tomamos  $x_1$  y  $x_3$  como variables básicas.

Fase 2:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
0	5	1	1	8
1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$
-2	-1	0	0	0

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.4. El Método Simplex.

##### Método Simplex de dos Fases.

En la tabla hacemos 0 los costos reducidos de variables básicas

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
0	5	1	<b>1</b>	8
1	$\frac{1}{2}$	0	-1/10	1/10
0	0	0	-1/5	1/5

Luego la variable entrante a la base es  $x_4$  (pues  $r_4 < 0$ ). Y calculando  $\text{Min} \{ 8/1, (-1/10)/(1/10) \} = 8$ , se tiene que sale  $x_3$ .

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.4. El Método Simplex.

##### Método Simplex de dos Fases.

Quedando:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
0	5	1	1	8
1	1	0	1/10	9/10
0	1	1/5	0	9/5

donde la solución óptima del problema resulta ser:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9/10 \\ 8 \end{bmatrix} \quad x_D = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.4. El Método Simplex.

##### Método Simplex de dos Fases.

##### Algunos casos especiales

- 1) **Problema Infactible.** Esta situación se detecta cuando el valor óptimo del problema de la Fase 1 da mayor que cero.
- 2) **Múltiples soluciones óptimas.** Esta situación se detecta cuando existen costos reducidos iguales a cero en una o más de las variables básicas óptimas.

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.4. El Método Simplex.

##### Método Simplex de dos Fases.

3) **Problema no acotado.** Esta situación se detecta cuando al realizar el cálculo de la variable que deja la base, todos los elementos  $y_{kj}$  de la columna  $j$  en la tabla, son negativos para  $j$  el índice de una variable no básica con costo reducido negativo.



## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### **Temario:**

- II.1. Introducción y ejemplos de modelamiento.
- II.2. Resolución gráfica de problemas.
- II.3. Análisis de Sensibilidad.
- II.4. El Método Simplex.
- II.5. Dualidad en Programación Lineal.**
- II.6. Análisis de Sensibilidad o Post-Optimal

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.5. Dualidad en Programación Lineal.

Consideremos un ejemplo de producción de 2 productos finales que hacen uso de tres recursos escasos (máquinas), cuyas disponibilidades en horas corresponden a los lados derechos de las restricciones.

$$\text{P)} \quad \text{Max} \quad 40x_1 + 60x_2$$

$$\text{sa:} \quad 2x_1 + 2x_2 \leq 70$$

$$x_1 + x_2 \leq 40$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 90$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.5. Dualidad en Programación Lineal.

La solución óptima y el valor óptimo del problema P) esta dada por:

$$x_1^* = 5$$

$$x_2^* = 25$$

$$z = v(p) = 2100$$

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.5. Dualidad en Programación Lineal.

En lo que sigue, combinaremos las distintas restricciones del problema, ponderando por los valores  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  y  $\pi_3$  cada una, respectivamente, de modo de obtener la mejor cota superior del valor óptimo del problema P). Vale decir:

$$\pi_1(2x_1+2x_2) + \pi_2(x_1+x_2) + \pi_3(x_1+3x_2) \leq 70 \pi_1 + 40 \pi_2 + 90 \pi_3$$

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.5. Dualidad en Programación Lineal.

Para garantizar que el lado derecho de esta última desigualdad sea una cota superior de la función objetivo se debe cumplir que :

$$2 \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 \geq 40$$

$$2\pi_1 + \pi_2 + 3 \pi_3 \geq 60$$

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.5. Dualidad en Programación Lineal.

La mejor elección de esta cota se obtendría al resolver:

$$\begin{array}{ll} \text{D)} & \text{Min} \quad 70 \pi_1 + 40 \pi_2 + 90 \pi_3 \\ & \text{sa:} \quad 2 \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 \geq 40 \\ & \quad \quad 2\pi_1 + \pi_2 + 3 \pi_3 \geq 60 \\ & \quad \quad \pi_1, \pi_2, \pi_3 \geq 0 \end{array}$$

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### **II.5. Dualidad en Programación Lineal.**

Este problema se conoce como el problema “Dual” D) asociado al problema “Primal” P).

También resulta que al formular el problema dual de D) se obtiene el problema primal (o uno equivalente).

Cualquiera de los dos entrega la misma información y el valor óptimo alcanzado es el mismo.

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.5. Dualidad en Programación Lineal.

Más generalmente, si el problema primal es:

$$\begin{aligned} \text{P)} \quad & \text{Max} \quad \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{sa :} \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1, 2, \dots, m \\ & x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$



## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.5. Dualidad en Programación Lineal.

su dual resulta el problema:

$$\begin{aligned} \text{D) } \quad & \text{Min} \quad \sum_{i=1}^m b_i \pi_i \\ \text{sa :} \quad & \sum_{i=1}^m a_{ij} \pi_i \geq c_j \quad j = 1, 2, \dots, n \\ & \pi_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.5. Dualidad en Programación Lineal.

Lo que se puede expresar en forma matricial como:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{P)} & \text{Max} \quad \mathbf{c^T x} \\ & \text{sa:} \quad \mathbf{Ax \leq b} \\ & \quad \mathbf{x \geq 0} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \mathbf{D)} & \text{Min} \quad \mathbf{b^T \pi} \\ & \text{sa:} \quad \mathbf{A^T \pi \geq c} \\ & \quad \mathbf{\pi \geq 0} \end{array}$$

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.5. Dualidad en Programación Lineal.

Si el problema primal corresponde a:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{P)} & \mathbf{Max} \quad -\mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ & \mathbf{sa:} \quad \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \\ & \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

Su dual resulta ser:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{D)} & \mathbf{Min} \quad -\mathbf{b}^T \boldsymbol{\pi} \\ & \mathbf{sa:} \quad \mathbf{A}^T \boldsymbol{\pi} \leq \mathbf{c} \\ & \quad \boldsymbol{\pi} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

Es decir, el dual del dual es el problema primal

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.5. Dualidad en Programación Lineal.

Teorema de dualidad débil:

Si  $\mathbf{x} \in \mathbf{IR}^n$ , es una solución factible del problema primal P) y  $\boldsymbol{\pi} \in \mathbf{IR}^m$ , una solución factible del problema dual D), entonces:

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x} = \sum_{j=1}^n \mathbf{c}_j \mathbf{x}_j \leq \sum_{i=1}^m \mathbf{b}_i \pi_i = \mathbf{b}^T \boldsymbol{\pi}$$

En particular, si ambas soluciones son los óptimos de sus respectivos problemas, sus valores óptimos cumplen que :

$$\mathbf{v}(\mathbf{P}) \leq \mathbf{v}(\mathbf{D})$$

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.5. Dualidad en Programación Lineal.

Teorema de dualidad fuerte:

Si  $\mathbf{x}^* = (\mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*, \dots, \mathbf{x}_n^*)^T$ , es una solución óptima problema primal P), entonces el problema dual D) tiene solución óptima  $\pi^* = (\pi_1^*, \pi_2^*, \dots, \pi_m^*)^T$  que satisface:

$$\mathbf{v}(\mathbf{P}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^* = \sum_{j=1}^n \mathbf{c}_j \mathbf{x}_j^* = \sum_{i=1}^m \mathbf{b}_i \pi_i^* = \mathbf{b}^T \pi = \mathbf{v}(\mathbf{D})$$

Además:

- i) Si P) es no-acotado entonces D) es infactible.
- ii) Si D) es no-acotado entonces P) es infactible.

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.5. Dualidad en Programación Lineal.

Ejemplo:

**P)**      **Min**     $3x_1 + 4x_2 + 5x_3$   
              **sa:**     $x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 5$   
                       $2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6$   
                       $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

**D)**      **Max**     $5 \pi_1 + 6 \pi_2$   
              **sa:**     $\pi_1 + 2\pi_2 \leq 3$   
                       $2\pi_1 + 2\pi_2 \leq 4$   
                       $3\pi_1 + \pi_2 \leq 5$   
                       $\pi_1, \pi_2 \geq 0$

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.5. Dualidad en Programación Lineal.

Resolvemos D) por Simplex, en su forma estándar:

$\pi_1$	$\pi_2$	$\pi_3$	$\pi_4$	$\pi_5$	
1	<b>2</b>	1	0	0	3
2	2	0	1	0	4
3	1	0	0	1	5
-5	-6	0	0	0	0

$$x_B = \begin{bmatrix} \pi_3 \\ \pi_4 \\ \pi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$x_D = \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Luego la variable entrante a la base es  $\pi_2$  (pues  $r_2 < 0$ ). Y calculando  $\text{Min} \{ 3/2, 4/2, 5/1 \} = 3/2$ , se tiene que sale  $\pi_3$

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.5. Dualidad en Programación Lineal.

$\pi_1$	$\pi_2$	$\pi_3$	$\pi_4$	$\pi_5$	
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{3}{2}$
<b>1</b>	0	-1	1	0	1
$\frac{5}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{7}{2}$
-2	0	3	0	0	9

$$\mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} \pi_2 \\ \pi_4 \\ \pi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1 \\ 7/2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_D = \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Luego la variable entrante a la base es  $\pi_1$  (pues  $r_2 < 0$ ). Y calculando  $\text{Min} \{ (3/2)/(1/2), 1/1, (7/2)/(5/2) \} = 1$ , se tiene que sale  $\pi_4$



## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.5. Dualidad en Programación Lineal.

$\pi_1$	$\pi_2$	$\pi_3$	$\pi_4$	$\pi_5$	
0	1	1	-1/2	0	1
1	0	-1	1	0	1
0	0	2	-5/2	1	1
0	0	1	2	0	11

$$\mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_D = \begin{bmatrix} \pi_3 \\ \pi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sol. óptima de D):

$$\pi_1^* = 1; \pi_2^* = 1;$$

$$v(D) = 11$$

Sol. óptima de P):

$$x_1^* = 1; x_2^* = 2; x_3^* = 0; \quad v(P) = 11$$

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.5. Dualidad en Programación Lineal.

##### Método Simplex Dual:

La idea de este método consiste en resolver de alguna manera el problema dual asociado a P) en la tabla y variables del problema primal P), según veremos en su aplicación a un problema primal (ejercicio anterior).

$$\text{Min} \quad 3x_1 + 4x_2 + 5x_3$$

$$\text{sa:} \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 5$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.5. Dualidad en Programación Lineal.

##### Método Simplex Dual:

$$\text{Min} \quad 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\text{sa:} \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 \geq 5 \quad x(-1)$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_5 \geq 6 \quad x(-1)$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
-1	-2	-3	1	0	-5
-2	-2	-1	0	1	-6
3	4	5	0	0	0

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.5. Dualidad en Programación Lineal.

##### Método Simplex Dual:

En la tabla anterior se toman dos variables de exceso  $x_4$  y  $x_5$  , y se multiplica por un número negativo con la finalidad de encontrar la matriz identidad  $IR^n$ , además es necesaria la condición de que los costos reducidos de la tabla sean mayores que cero ( lo que en este caso se cumple).

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.5. Dualidad en Programación Lineal.

##### Método Simplex Dual:

En la tabla anterior se escoge, usando el lado derecho, alguna variable con valor negativo.

Escogemos  $x_5$  , variable que dejará la base. Enseguida , se obtiene la variable entrante calculando:

$$\text{Min } \{ (-3/-2) , (-4/-2), (-5/-1) \} = 3/2.$$

De donde resulta que  $x_1$  entra a la base.

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.5. Dualidad en Programación Lineal.

##### Método Simplex Dual:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
0	-1	-5/2	1	-1/2	-2
1	1	1/2	0	-1/2	3
0	1	7/2	0	3/2	-9

La tabla posee aún un lado derecho negativo (costos reducidos negativos del problema dual), por lo cual no es factible en P).

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.5. Dualidad en Programación Lineal.

##### Método Simplex Dual:

$x_4$  ( $=-2$ ) deja la base, luego calculamos :

$\text{Min } \{(-1/-1),((-7/2)/(-5/2)),((-3/2)/(-1/2))\} = 1$ , por lo que  $x_2$  entra a la base.

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
0	1	5/2	-1	1/2	2
1	0	-2	1	-1	1
0	0	1	1	1	-11

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.5. Dualidad en Programación Lineal.

##### Método Simplex Dual:

La tabla posee lados derechos no-negativos (costos reducidos positivos del problema dual) y también los costos reducidos de las variables no básicas  $x_3$ ,  $x_4$  y  $x_5$  son no-negativos , por lo que tenemos una solución factible en P) que es la solución óptima del problema.

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v(P) = 11$$



## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### **Temario:**

- II.1. Introducción y ejemplos de modelamiento.
- II.2. Resolución gráfica de problemas.
- II.3. Análisis de Sensibilidad.
- II.4. El Método Simplex.
- II.5. Dualidad en Programación Lineal.
- II.6. Análisis de Sensibilidad o Post-Optimal**

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.6. Análisis de Sensibilidad o Post-Optimal

1) ¿Qué ocurre con las actuales variables básicas si se cambia algún coeficiente del lado derecho (**b**)?

Si calculamos:  $\overline{x_B} = B^{-1}\overline{b}$  y se cumple:  $\overline{x_B} \geq 0$

Las mismas variables básicas lo son también de la nueva solución óptima, calculada con el nuevo  $\overline{b}$ .

Si lo anterior no se cumple, se puede aplicar el Método Simplex Dual.

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.6. Análisis de Sensibilidad o Post-Optimal

2) ¿ Qué ocurre con la actual solución óptima si se agrega una nueva variable al problema ?

Para decidir si la actual solución básica es óptima para el nuevo problema, calculamos el costo reducido de la nueva variable mediante la formula:

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{c}_k - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_k$$

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.6. Análisis de Sensibilidad o Post-Optimal

donde  $k$  es el índice de la nueva variable y  $A_k$  su respectiva columna en la matriz de coeficientes. Si se cumple que  $r_k \geq 0$  se conserva la actual solución óptima. En caso contrario, se sigue con el Simplex.

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.6. Análisis de Sensibilidad o Post-Optimal

3) ¿ Que ocurre con la actual solución óptima del problema P) si se cambian los coeficientes que definen la función objetivo ?

Supongamos que el vector de coeficientes en la función objetivo cambia a un vector  $\bar{\mathbf{c}} \in \mathbb{R}^n$

La actual solución óptima también lo es para  $\bar{\mathbf{P}}$

con:

$$\bar{\mathbf{P}}) \quad \text{Min } \bar{\mathbf{c}}^T \mathbf{x}$$

$$\text{sa : } \mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.6. Análisis de Sensibilidad o Post-Optimal

Siempre que los nuevos costos reducidos sean mayores o iguales a cero (notar que también cambia el valor de la función objetivo en la actual solución óptima). Es decir se debe cumplir que:

$$\bar{r}_D = \bar{c}_D - \bar{c}_B^T B^{-1} D \geq 0 \quad \text{o equivalentemente}$$

$$\bar{r}_j = \bar{c}_j - \bar{c}_B^T B^{-1} A_j \geq 0 \quad \forall j$$

En caso contrario, se aplica el Simplex a partir de la tabla final de P) con los nuevos costos reducidos y nuevo valor de la actual solución básica.

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.6. Análisis de Sensibilidad o Post-Optimal

Veamos los cambios que tienen lugar cuando sólo varía un coeficiente del vector  $\mathbf{c}$  de la función obj.

a) Cambio de un coeficiente asociado a una variable no-básica  $\mathbf{x}_j$ :

Se conserva la misma solución óptima del problema P) ssi. para esa variable  $\mathbf{x}_j$ :

$$\bar{r}_j = \bar{c}_j - \bar{\mathbf{c}}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_j \geq 0 \quad \forall j$$

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.6. Análisis de Sensibilidad o Post-Optimal

Consideremos :

$$\overline{c_j} = c_j + \Delta j$$

Por lo tanto se conserva la misma solución ssi:

$$\Delta j \geq -r_j \quad \Rightarrow \quad \overline{c_j} \geq c_j - r_j$$



## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.6. Análisis de Sensibilidad o Post-Optimal

b) Cambio en un coeficiente de la función objetivo asociado a una variable básica:

En este caso para tener la misma solución óptima, se debe cumplir que el costo reducido de todas las variables.

$$\bar{r}_j = \bar{c}_j - \bar{c}_B^T B^{-1} A_j \geq 0$$

$$\bar{c}_i = c_i + \Delta i \quad \bar{c}_B = c_B + \Delta i \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = c_B + \Delta i e_i$$

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.6. Análisis de Sensibilidad o Post-Optimal

Si el incremento es cualquiera en el siguiente intervalo, se conserva la misma solución óptima:

$$\text{Max} \left\{ \frac{r_j}{y_{ij}} / y_{ij} < 0 \right\} \leq \Delta i \leq \text{Min} \left\{ \frac{r_j}{y_{ij}} / y_{ij} > 0 \right\}$$

donde  $r_j$  es el costo reducido de la respectiva variable no básica en la actual solución óptima y los coeficientes  $y_{ij}$  denotan las entradas en la tabla final del Simplex asociadas a la variable básica  $x_i$  (cuyo costo cambia) y la respectiva variable no básica  $x_j$

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.6. Análisis de Sensibilidad o Post-Optimal

Ejemplo:

La siguiente tabla, es la tabla final de un problema de programación lineal.

1,00	2,33	1,67	0,00	0,27	-0,07	1333,33
0,00	-0,03	0,03	1,00	-0,01	0,03	66,67
0,00	6,67	3,33	0,00	2,93	0,27	18666,67

Con esta tabla realizaremos un análisis de sensibilidad:

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.6. Análisis de Sensibilidad o Post-Optimal

a) Variar los recursos ( lado derecho):

Las  $\mathbf{x}_B$  del problema primal no cambian como base óptima, si los valores asociados a estas variables.

$$\overline{\mathbf{x}}_B = \mathbf{B}^{-1}\overline{\mathbf{b}} \quad \text{y se cumple} \quad \overline{\mathbf{x}}_B \geq 0$$

Para calcular estos intervalos de recursos, se necesita la matriz inversa asociada a las variables básicas del tabla final.

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.6. Análisis de Sensibilidad o Post-Optimal

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 1 & 40 \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 4/15 & -1/15 \\ -1/150 & 2/75 \end{bmatrix}$$

Intervalo recurso 1:

$$\begin{bmatrix} 4/15 & -1/15 \\ -1/150 & 2/75 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 6000 + \Delta b_1 \\ 4000 \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\frac{20000}{15} + \frac{4\Delta b_1}{15} \geq 0 \quad \wedge \quad \frac{10000}{150} - \frac{\Delta b_1}{150} \geq 0$$

$$\Delta b_1 \geq -5000 \quad \wedge \quad \Delta b_1 \leq 10000$$

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.6. Análisis de Sensibilidad o Post-Optimal

$$- 5000 \leq \Delta b_1 \leq 10000$$

$$1000 \leq b_1 \leq 16000$$

Intervalo recurso 2:

$$\begin{bmatrix} 4/15 & -1/15 \\ -1/150 & 2/75 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 6000 \\ 4000 + \Delta b_2 \end{bmatrix} \geq 0$$

$$- 2500 \leq \Delta b_2 \leq 20000$$

$$1500 \leq b_2 \leq 24000$$

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.6. Análisis de Sensibilidad o Post-Optimal

Variable  $x_1$ :

$$\text{Max } \{0\} \leq C_1 \leq \text{Min } \{((20/3)/(7/3)), ((10/3)/(5/3))\}$$

$$0 \leq D_1 \leq 2 \quad 10 \rightarrow C_1^* \leq 12$$

Variable  $x_4$ :

$$\text{Máx } \{((20/3)/(-1/30))\} \leq D_4 \leq \text{Min } \{((10/3)/(1/30))\}$$

$$-200 \leq D_4 \leq 100 \Rightarrow -60 \leq C_4^* \leq 240$$

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### II.6. Análisis de Sensibilidad o Post-Optimal

Variable  $x_2$ :

$$C_2^* = C_2 + \Delta_2 \quad C_2 = -20$$

$$\Delta_2 \geq -r_2 \quad C_2^* \geq -20 - (20/3)$$

$$C_2^* \geq -80/3$$

Variable  $x_3$ :

$$C_3^* = C_3 + \Delta_3 \quad C_3 = -18$$

$$\Delta_3 \geq -r_3 \quad C_3^* \geq -18 - (10/3)$$

$$C_3^* \geq -64/3$$



## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### **BIBLIOGRAFÍA EN PROGRAMACIÓN LINEAL**

- 1. Linear Programming and Network Flow**, M.Bazaraa, J.Jarvis and H.Sherali. John Wiley & Sons, Inc., New York, Second Edition 1990.
- 2. Introduction to Linear Optimization**, D.Bertsekas and J.Tsitsiklis. Athena Scientific USA, 1997.
- 3. Linear Programming**, V.Chvátal. W.H. Freeman and Company, New York, 1983.
- 4. Linear Programming and Extensions**, G. Dantzig. Princeton University Press, New Jersey, tenth printing, 1993.
- 5. Introducción a la Programación Lineal y No Lineal**, D.Luenberger. Adisson Wesley Iberoamericana, 1989.
- 6. Linear and Combinatorial Programming**, K. Murty. John Wiley & Sons, Inc., New York, Second Edition 1976.
- 7. Model Building in Mathematical Programming**, H.P. Williams. John Wiley & Sons, Inc., New York, 4rd Edition 1999.

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Lineal

#### **DIRECCIONES ELECTRÓNICAS EN PROGRAMACIÓN LINEAL**

- Preguntas de consulta frecuente en Programación Lineal:  
<http://www-unix.mcs.anl.gov/otc/Guide/faq/linear-programming-faq.html>
- Servidor NEOS, guía de software de Programación Lineal:  
<http://www-fp.mcs.anl.gov/otc/Guide/SoftwareGuide/Categories/linearprog.html>
- Servidor NEOS, ejemplo problema de la dieta:  
<http://www-fp.mcs.anl.gov/otc/Guide/CaseStudies/diet/index.html>
- Guía de software de Programación Lineal en revista OR&MS Today (INFORMS Magazine):  
<http://lionhrtpub.com/software-surveys.shtml>

# Contenidos

**I. Introducción a la Investigación de Operaciones**

**II. Modelos de Programación Matemática**

Programación Lineal

**Programación Entera**

Programación No- lineal

**III. Modelos Probabilísticos**

Procesos Estocásticos y Cadenas de Markov

Sistemas de Espera

## II. Modelos de Programación Matemática Programación Entera

### **Temario:**

**III.1. Introducción y ejemplos de modelamiento.**

III.2. Resolución de problemas de P. E.

III.3. Método de Branch and Bound.

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Entera

### III.1. Introducción y ejemplos de modelamiento.

#### a) Problema de la mochila.

Una empresa está pensando invertir en cuatro proyectos diferentes, cada proyecto se finaliza a lo más en 3 años. Los flujos de caja requeridos en cada año junto con el Valor Presente Neto de cada proyecto, concluídos los años de ejecución, y las disponibilidades de recursos financieros se resumen en la siguiente tabla:

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Entera

### III.1. Introducción y ejemplos de modelamiento.

	Proy 1	Proy 2	Proy 3	Proy 4	Disp. Recursos
Año 1	10	8	6	12	30
Año 2	8	15	4	0	15
Año 3	18	0	16	0	12
V.P.N.	35	18	24	16	

Interesa determinar en cuáles proyectos invertir de modo de conseguir el mayor V.P.N. de la inversión.

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Entera

#### III.1. Introducción y ejemplos de modelamiento.

Variables de decisión:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{si se invierte en el proyecto } i \\ 0, & \text{sino} \end{cases} \quad \text{con } i = 1, 2, 3, 4$$

Función objetivo:

$$\text{Max } 35x_1 + 18x_2 + 24x_3 + 16x_4$$

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Entera

#### III.1. Introducción y ejemplos de modelamiento.

Restricciones (tres alternativas):

1) Reinvirtiendo el dinero no utilizado en un período:

$$\text{Año1: } 10x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 12x_4 + s_1 = 30$$

$$\text{Año2: } 8x_1 + 15x_2 + 4x_3 + s_2 = 15 + s_1$$

$$\text{Año3: } 18x_1 + 16x_3 \leq 12 + s_2$$

$$x_i \in \{0,1\} \quad i = 1,2,3,4$$



## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Entera

#### III.1. Introducción y ejemplos de modelamiento.

2) Sin invertir el dinero no utilizado en un período, pero utilizando el retorno de los proyectos concluidos:

$$\text{Año1: } 10x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 12x_4 \leq 30$$

$$\text{Año2: } 8x_1 + 15x_2 + 4x_3 \leq 15 + 16x_4$$

$$\text{Año3: } 18x_1 + 16x_3 \leq 12 + 18x_2$$

$$x_i \in \{0,1\} \quad i = 1,2,3,4$$

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Entera

#### III.1. Introducción y ejemplos de modelamiento.

3) Reinvirtiendo el dinero no utilizado en un período y, también el retorno de proyectos concluídos:

$$\text{Año1: } 10x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 12x_4 + s_1 = 30$$

$$\text{Año2: } 8x_1 + 15x_2 + 4x_3 + s_2 = 15 + s_1 + 16x_4$$

$$\text{Año3: } 18x_1 + 16x_3 \leq 12 + s_2 + 18x_2$$

$$x_i \in \{0,1\} \quad i = 1,2,3,4$$

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Entera

#### III.1. Introducción y ejemplos de modelamiento.

Notar que el conjunto de las soluciones factibles es finito. Esto ocurrirá generalmente con los problemas de Programación Entera (puros). En el ejemplo, el número de soluciones factibles no supera el número de las soluciones binarias del problema (variables restringidas sólo a valores 0 o 1) que son  $2^4 = 16$ , dado el número de variables utilizadas, de hecho las soluciones factibles son menos de 16 pues en particular  $x_i=1$  para  $i=1,2,3,4$  no satisface las disponibilidades de capital en cualquiera de las tres alternativas.

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Entera

#### III.1. Introducción y ejemplos de modelamiento.

Supongamos que adicionalmente la inversión efectuada requiera nuevas restricciones.

i) Se debe invertir en al menos 1 de los 3 primeros proyectos:

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 1$$

i) El proyecto 2 no puede ser tomado a menos que el proyecto 3 si sea tomado:

$$x_2 \leq x_3$$

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Entera

#### III.1. Introducción y ejemplos de modelamiento.

iii) Se puede tomar el proyecto 3 o 4 pero no ambos:

$$x_3 + x_4 \leq 1$$

iv) No se puede invertir en más de dos proyectos:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 2$$

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Entera

#### III.1. Introducción y ejemplos de modelamiento.

**b) Cumplimiento de un subconjunto de las restricciones de un problema.**

Consideremos un problema que posee las siguientes restricciones:

$$12x_1 + 24x_2 + 18x_3 \leq 2400$$

$$15x_1 + 32x_2 + 12x_3 \leq 1800$$

$$20x_1 + 15x_2 + 20x_3 \leq 2000$$

## II. Modelos de Programación Matemática Programación Entera

### III.1. Introducción y ejemplos de modelamiento.

Supongamos además, que nos basta con obtener alguna solución óptima que verifique el cumplimiento de al menos 2 de las 3 restricciones anteriores.

Variables de decisión:

$$y_j = \begin{cases} 1, & \text{si la restricción } j \text{ se satisface} \\ 0, & \text{sino} \end{cases}$$

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Entera

#### III.1. Introducción y ejemplos de modelamiento.

Cada inecuación anterior la reemplazamos por:

$$12x_1 + 24x_2 + 18x_3 \leq 2400 + M_1(1 - y_1)$$

$$15x_1 + 32x_2 + 12x_3 \leq 1800 + M_2(1 - y_2)$$

$$20x_1 + 15x_2 + 20x_3 \leq 2000 + M_3(1 - y_3)$$

Además, debemos agregar la restricción que permita que a lo más una de las restricciones no se cumpla:

$$y_1 + y_2 + y_3 \leq 2$$

$$M_i = \text{constante lo suf. grande}$$



## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Entera

#### III.1. Introducción y ejemplos de modelamiento.

##### c) Inclusión de costos fijos.

Supongamos que se desea tener lotes de compra de un producto dado, para satisfacer demandas que fluctúan en el tiempo sobre un horizonte de planificación dividido en  $T$  períodos.

Asumimos conocidos: una estimación de la demanda  $d_t$ , con  $t = 1, 2, \dots, T$ , los costos fijos asociados a la compra de una unidad  $p_t$ ,

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Entera

#### III.1. Introducción y ejemplos de modelamiento.

los costos asociados al mantenimiento de una unidad en inventario de cada período  $h_t$  y los costos fijos asociados a la gestión de compra en el período  $t$ ,  $s_t$ .

Observación: no se permite unidades de faltante.

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Entera

### III.1. Introducción y ejemplos de modelamiento.

#### Variables de decisión

$x_t$ : número de unidades compradas en t.

$I_t$  : nivel de inventario al final del período t.

$y_t = \begin{cases} 1, & \text{si se hace una compra en el periodo } t \\ 0, & \text{si no} \end{cases}$

con t: 1, 2, ..., T

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Entera

### III.1. Introducción y ejemplos de modelamiento.

Función objetivo

$$\text{Min} \quad \sum_{t=1}^T s_t y_t + p_t x_t + h_t I_t$$

Restricciones

$$x_t + I_{t-1} - I_t = d_t \quad t = 1, 2, \dots, T$$

$$I_0 = \text{inventario inicial}$$

$$x_t \leq M_t y_t \quad t = 1, 2, \dots, T$$

$$M_t = \text{cte. grande}$$

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Entera

### III.1. Introducción y ejemplos de modelamiento.

#### d) Problema de cobertura:

Dado un número de regiones o zonas, en las cuales se ha subdividido una comuna, ciudad, país, etc., digamos que un total de  $m$ , se desea instalar un cierto número de servidores (escuelas, centros de atención primaria de salud, compañías de bomberos, etc.) de entre un conjunto de  $n$  potenciales servidores ubicados en alguna de las zonas dadas.

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Entera

#### III.1. Introducción y ejemplos de modelamiento.

Se conoce la información relativa a que zonas pueden ser atendidas por cada uno de los  $n$  potenciales servidores, es decir, se conoce la matriz de incidencia  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  donde :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si la zona } i \text{ puede ser atendida por el servidor } j \\ 0, & \text{sino} \end{cases}$$

con  $i = 1, 2, \dots, m$  y  $j = 1, 2, \dots, n$

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Entera

#### III.1. Introducción y ejemplos de modelamiento.

Se desea determinar cuáles son los servidores que deben ser instalados de modo de dar cobertura a cada zona, dados los costos de instalación  $c_j$  del servidor  $j$ .

Variables de decisión:

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{si se instala el servidor } j \\ 0, & \text{sin o} \end{cases}$$

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Entera

#### III.1. Introducción y ejemplos de modelamiento.

Función objetivo:

$$\text{Min } \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

Restricciones: Para cada zona  $i$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq 1$$

Se agrega la siguiente restricción, si adicionalmente, hay algún límite en el número de servidores que se pueden instalar (digamos  $k$ ) :

$$\sum_{j=1}^m x_j \leq k$$



## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Entera

#### III.1. Introducción y ejemplos de modelamiento.

##### e) Problema de transporte y localización :

Si se tiene un conjunto de  $m$  clientes que demandan  $d_i$  unidades de un producto determinado. Una compañía desea satisfacer esas demandas desde un cierto conjunto de plantas elegidas de  $n$  potenciales lugares donde se instalarán.

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Entera

#### III.1. Introducción y ejemplos de modelamiento.

Sean  $c_j$  los costos asociados a la instalación de la planta  $j$ ,  $v_j$  el costo unitario de producción de la planta  $j$  y  $t_{ij}$  el costo de transporte de una unidad desde la planta  $j$  al cliente  $i$ .

Se desea decidir cuáles plantas abrir y el tamaño de cada una de modo de satisfacer las demandas estimadas.

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Entera

#### III.1. Introducción y ejemplos de modelamiento.

Variables de decisión:

$$y_j = \begin{cases} 1, & \text{si se abre la planta } j \\ 0, & \text{sino} \end{cases}$$

$x_{ij}$  = el número de unidades elaboradas en la **planta j** para satisfacer el **cliente i**, con  $j = 1, \dots, n$  y  $i = 1, \dots, m$ .

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Entera

### III.1. Introducción y ejemplos de modelamiento.

Función objetivo:

$$\text{Min} \quad \sum_{j=1}^n c_j y_j + \sum_{j=1}^n v_j \left( \sum_{i=1}^m x_{ij} \right) + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m t_{ij} x_{ij}$$

Costo de  
Instalación

Costo de  
Producción

Costo de  
Transporte

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Entera

#### III.1. Introducción y ejemplos de modelamiento.

##### Restricciones:

1) Demanda cliente i:

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \geq d_i$$

2) Relacionar variables de producción con las asociadas a la apertura de plantas (variables binarias):

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq M_j y_j$$

donde  $M_j$  es una constante grande (por ejemplo, capacidad máxima de producción de la planta  $j$ ), con  $x_{ij} \geq 0$  e  $y_j \in \{0,1\}$ .

## II. Modelos de Programación Matemática Programación Entera

### **Temario:**

III.1. Introducción y ejemplos de modelamiento.

**III.2. Resolución de problemas de P. E.**

III.3. Método de Branch and Bound.

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Entera

### III.2. Resolución de problemas de P. E.

Supongamos que tenemos el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{array}{ll}\text{PL)} & \text{Max } c^T x \\ & \text{s.a. } A x = b \\ & x \geq 0\end{array}$$

Pero todas o una parte de las variables deben restringir su valor a números enteros, dando origen a un problema de **Programación Entera (puro)** o de **Programación Entera- Mixta**, respectivamente.

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Entera

### III.2. Resolución de problemas de P. E.

Por ejemplo:

$$\text{PLE) Max } c^T x$$

$$\text{s.a. } A x = b$$

$$x \geq 0, x_j \text{ entero}$$

El problema PL) corresponde a la relajación continua del problema PLE), que resulta de eliminar las condiciones de integralidad de las variables de decisión en PLE).



## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Entera

### III.2. Resolución de problemas de P. E.

El valor óptimo de PL) provee sólo una cota superior del valor óptimo de PLE). Notar sin embargo, que si la solución óptima de PL) cumple con la integralidad de los valores requeridos, entonces esta solución es también solución óptima de PLE).

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Entera

### III.2. Resolución de problemas de P. E.

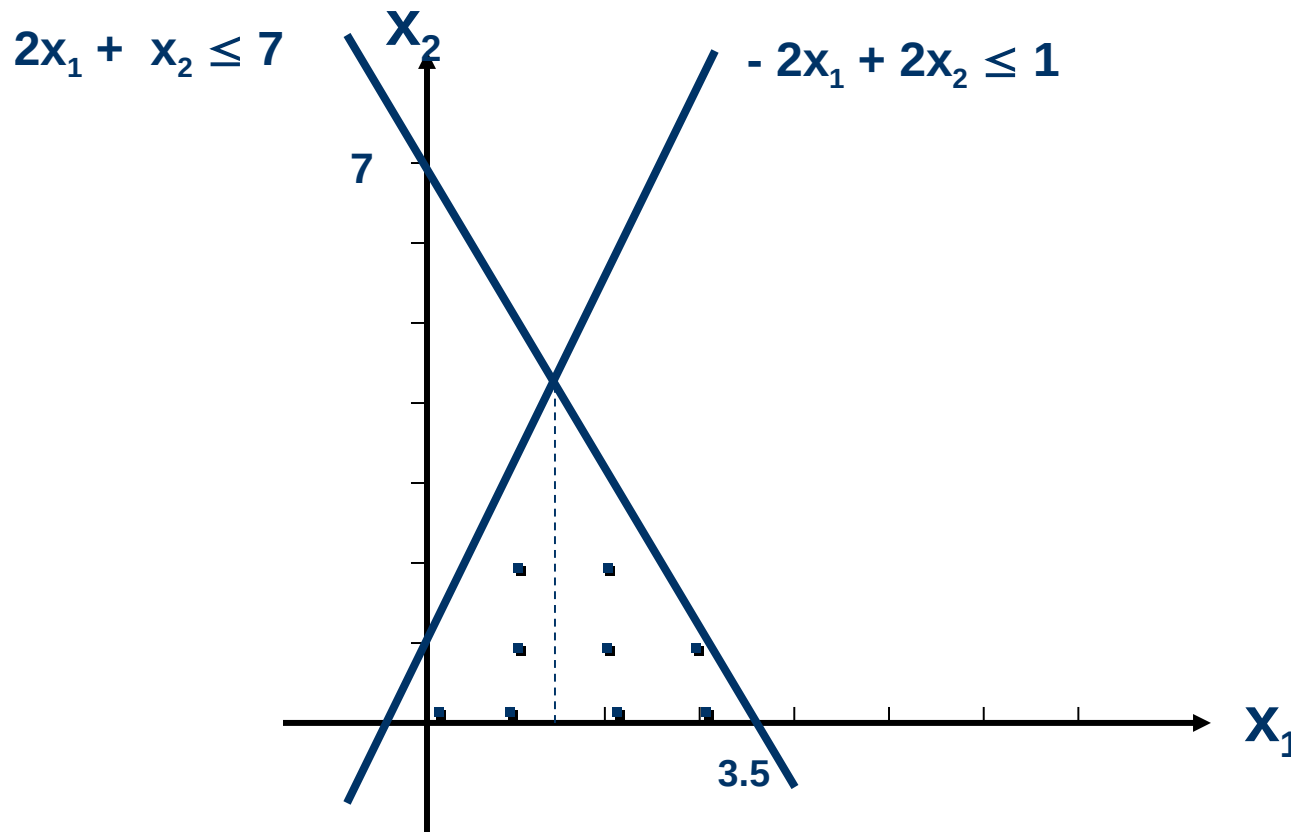
Ejemplo

$$\begin{array}{ll}\text{PLE) Max} & x_2 \\ \text{s.a.} & -2x_1 + 2x_2 \leq 1 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 7 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \quad \text{enteros}\end{array}$$

## II. Modelos de Programación Matemática Programación Entera



### III.2. Resolución de problemas de P. E.



## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Entera



### III.2. Resolución de problemas de P. E.

Notar que en el ejemplo la solución óptima puede ser hallada por simple enumeración de todas las soluciones factibles. Aquí las soluciones óptimas son:

$$x_1^* = 1 \text{ o } x_1^* = 2$$

$$x_2^* = 1 \text{ o } x_2^* = 1$$

Esta alternativa de enumeración queda naturalmente restringida a problemas muy pequeños.



## II. Modelos de Programación Matemática Programación Entera



### III.2. Resolución de problemas de P. E.

Alternativamente, podemos resolver la relajación continua asociada al problema PLE). Si la solución óptima de la relajación continua da una solución entera, esa es la solución óptima no solo del problema lineal sino que también lo es del problema lineal entero.

En el ejemplo, la solución de la relajación continua es:

$$x_1 = 3/2$$

$$x_2 = 2$$

## II. Modelos de Programación Matemática

### Programación Entera



### III.2. Resolución de problemas de P. E.

A partir de esta última solución podemos redondear o truncar los valores que no salieron enteros, obteniendo respectivamente en el ejemplo:

$$x_1 = 2$$

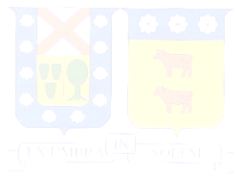
$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 2$$

$$x_2 = 2$$

las cuales no son soluciones factibles de PLE), de modo que desde el punto de vista de una resolución numérica no es suficiente con resolver la relajación continua.

## II. Modelos de Programación Matemática Programación Entera



### III.2. Resolución de problemas de P. E.

Todavía podrían resultar soluciones factibles de PLE), pero no necesariamente óptimas. Por ejemplo:

$$\text{PLE) Max } f(x_1, x_2) = x_1 + 5x_2$$

$$\text{s.a. } x_1 + 10x_2 \leq 10$$

$$x_1 \leq 1$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \quad \text{enteros}$$

## II. Modelos de Programación Matemática Programación Entera



### III.2. Resolución de problemas de P. E.

Solución óptima de PL)

$$x_1 = 1 \quad f(1, 9/10) = 5,5$$

$$x_2 = 9/10$$

Redondeando o truncando los valores

$$x_1 = 1 \quad \text{infactible} \quad x_1 = 1 \quad f(1, 0) = 1$$

$$x_2 = 1 \quad x_2 = 0$$

Pero la solución óptima de PLE) es:

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 1; \quad v(\text{PLE}) = 5$$



## II. Modelos de Programación Matemática Programación Entera



### III.3. Método de Branch and Bound.

Si el problema  $P_i$ ) resulta agotado y da solución entera, mejorar el valor de la cota inferior de  $v(\mathbf{PLE})$ .

Si todos los problemas están agotados, parar.

Solución óptima de  $\mathbf{PLE}$ ), la solución entera asociada a la actual cota inferior de  $v(\mathbf{PLE})$ , si existe (si no existe entonces  $\mathbf{PLE}$ ) es infactible)

Si el problema no está agotado pasar al paso 2.

## II. Modelos de Programación Matemática Programación Entera



### III.3. Método de Branch and Bound.

#### Paso 2

Seleccionar una variable  $x_j = \hat{u}_j$ , cuyo valor en la solución óptima de  $P_i$  no es entero.

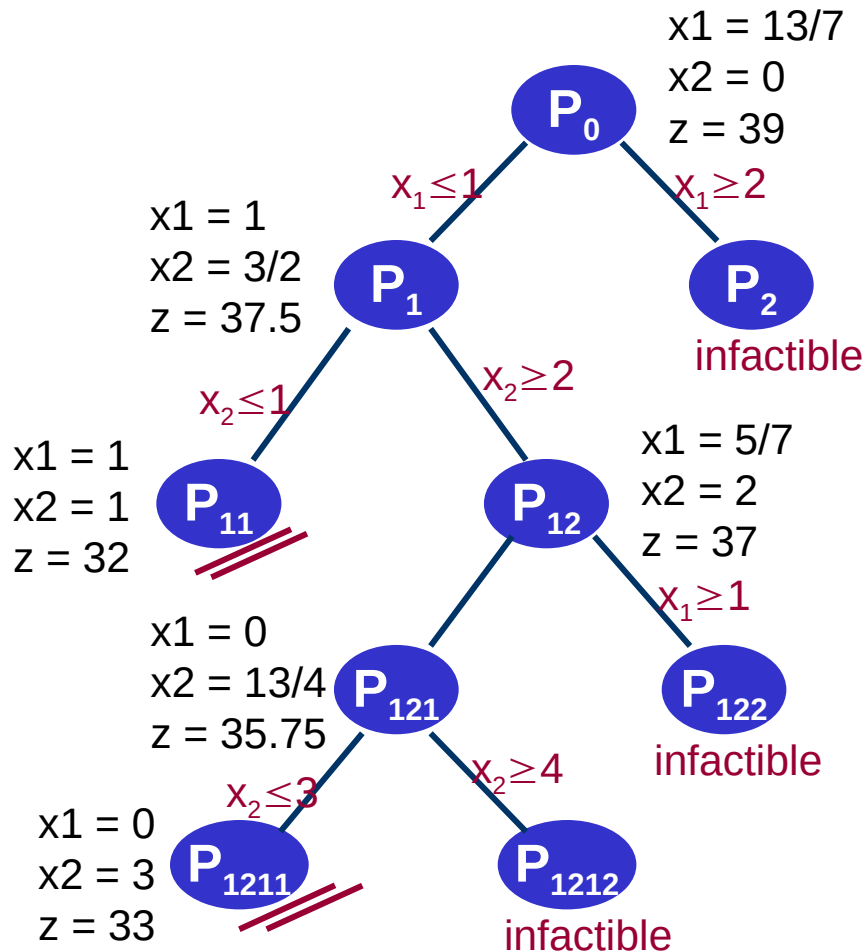
Eliminar la región correspondiente a

$$[\hat{u}_j] < \hat{u}_j < [\hat{u}_j] + 1$$

Crear dos nuevos problemas de programación lineal que incorporen a  $P_i$  dos restricciones mutuamente excluyentes:  $x_j \leq [\hat{u}_j]$ ,  $x_j \geq [\hat{u}_j] + 1$  una en cada problema y volver al paso 1.

## II. Modelos de Programación Matemática Programación Entera

### III.3. Método de Branch and Bound.



$P_0$ ) Relajación continua

$$-\infty < z \leq 39$$

$P_1$ ) Max  $21x_1 + 11x_2$

s.a.  $7x_1 + 4x_2 \leq 13$

$$x_1 \leq 1$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$P_2$ ) Max  $21x_1 + 11x_2$

s.a.  $7x_1 + 4x_2 \leq 13$

$$x_1 \leq 1$$

$$x_2 \leq 1$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

De donde  $32 \leq z \leq$

39



Solución óptima

## II. Modelos de Programación Matemática Programación Entera



### BIBLIOGRAFÍA EN PROGRAMACIÓN ENTERA

- 1) Integer Programming**, L.A.Wolsey. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1998.
- 2) Combinatorial Optimization** C.H.Papadimitriou and K.Steiglitz. Prentice Hall Inc., USA, 1982.
- 3) Linear and Combinatorial Programming**, K. Murty. John Wiley & Sons, Inc., New York, Second Edition 1976.
- 4) Integer and Combinatorial Optimization**, George L. Nemhauser and Laurence A. Wolsey. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999.
- 5) Model Building in Mathematical Programming**, H.P. Williams. John Wiley & Sons, Inc., New York, 4rd Edition 1999.

## II. Modelos de Programación Matemática Programación Entera



### DIRECCIONES ELECTRÓNICAS EN PROGRAMACIÓN ENTERA

- Preguntas de consulta frecuente en Programación Lineal:  
<http://www-unix.mcs.anl.gov/otc/Guide/faq/linear-programming-faq.html>
- Servidor NEOS, guía de software de Programación Entera:  
<http://www-fp.mcs.anl.gov/otc/Guide/SoftwareGuide/Categories/intprog.html>
- Servidor NEOS, ejemplo problema corte de rollos:  
<http://www-fp.mcs.anl.gov/otc/Guide/CaseStudies/cutting/index.html>
- Guía de software de Programación Lineal en revista OR&MS Today (INFORMS Magazine):  
<http://lionhrtpub.com/software-surveys.shtml>