Capítulo 3

Conceptos de Teoría de Probabilidad

Capítulo 3

Conceptos de Teoría de Probabilidad

Los objetivos de este capítulo son:

- Repasar los conceptos más importantes de las probabilidades.
- Reconocer que cada comportamiento estocástico de un sistema (o modelo) es una variable aleatoria con alguna distribución probabilística.
- Reconocer que las probabilidades juegan un papel importante en la simulación.

3.1 Introducción

Los sistemas con los que se trabajan están compuestos en general, de uno o más elementos que tienen una incertidumbre asociada a ellos, debido a que se desarrollan a través del tiempo, en una forma que no es completamente predecible. A este tipo de sistemas se les conoce como *sistemas estocásticos* o con *comportamiento no determinístico*.

Este capítulo revisa una serie de conceptos probabilísticos que son muy importantes y que tienen que ver con comportamientos aleatorios. Primeramente, se presentan una serie de definiciones para luego repasar algunos patrones aleatorios comunes conocidos como distribuciones probabilísticas. Si se desea ahondar en algunos de los temas aquí presentados, entonces se recomienda recurrir a un libro de probabilidades.

3.2 Definiciones

3.2.1 Espacio Muestral

El *espacio muestral* es el conjunto universal de un experimento formado por todos los posibles resultados de una población[1]. Cada uno de los resultados de un espacio muestral se denomina *elemento o miembro* del espacio muestral o, en forma más simple, punto muestral.

Este concepto es de singular importancia al estudiar la teoría de probabilidades, porque solamente se puede producir lo que es probable, cuando se conoce lo que es posible y el espacio muestral es la totalidad de las posibilidades de una situación dada. Se dice que el espacio muestral es *discreto* si es finito o contablemente infinito, de lo contrario es *continuo*.

[1] Conjunto de *todos* los posibles resultados.

Ejemplo:

Determine el espacio muestral de un experimento en el que se tira un par de dados de 6 caras cada uno.

Solución:

El espacio muestral de las combinaciones de dos dados de 6 caras cada uno:

Ω = {(x,y), x=1,2,3,...,6; y=1,2,3,...,6}

Donde *x* representa el número de puntos obtenidos con el dado 1 y *"y"* representa el número de puntos obtenidos con el segundo dado. Otra forma de presentar el espacio muestral podría escribirse como:

Ω = {(1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(1,5);(1.6);(2,2);(2,3);(2,4);(2,5);(2,6);(3,3);(3,4);(3,5);(3,6);(4,4;(4,5);(4,6);(5,5);(5,6);(6,6)}

Para mayor entendimiento podemos representar este ejemplo de una manera gráfica:

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	(1 1)	(1 2)	(1 3)	(1 4)	(1 5)	(1 6)
⚁	(2 1)	(2 2)	(2 3)	(2 4)	(2 5)	(2 6)
⚂	(3 1)	(3 2)	(3 3)	(3 4)	(3 5)	(3 6)
⚃	(4 1)	(4 2)	(4 3)	(4 4)	(4 5)	(4 6)
⚄	(5 1)	(5 2)	(5 3)	(5 4)	(5 5)	(5 6)
⚅	(6 1)	(6 2)	(6 3)	(6 4)	(6 5)	(6 6)

En gráfica presenta lo explicado anteriormente, que los resultados posibles son todas las parejas de números que puedas formarse usando los números {1, 2, 3, 4, 5, 6} al lanzar los dados.

Ejemplo:

El experimento de seleccionar una parte e inspeccionarla para determinar si está bien o defectuosa.

Solución:

Ω = {defectuosa, no defectuosa}

Ejemplo:

Tirar una moneda 10 veces al aire y anotar la cantidad de veces que cayó "cara".

Solución:

$\Omega = \{0,1,2, \ldots ,10\}$

3.2.2 Experimento

Un experimento es un proceso de observación o medida cualquiera en el que se realizan pruebas para comprobar y estudiar algún proceso antes de ejecutarlo. El mismo es un buen ejemplo de procedimientos o procesos cuyo efecto es observable, pero en el cual sus resultados no se conocen con certeza anticipadamente. El resultado de un experimento se denomina evento simple o evento.

En toda repetición única del experimento, sólo ocurrirá uno y sólo uno de los resultados experimentales posibles a fin de constatar la funcionalidad del objeto en estudio. A continuación, vemos algunos ejemplos de experimentos y sus resultados asociados:

Ejemplos:

Experimento	Resultados del experimento
Lanzar una moneda	Cara o sello
Seleccionar una parte para inspeccionarla	Defectuosa, no defectuosa
Llamada de ventas	Compra, no compra
Tirar un dado de 6 caras	1,2,3,4,5,6
Jugar un partido de fútbol	Ganar, perder, empatar

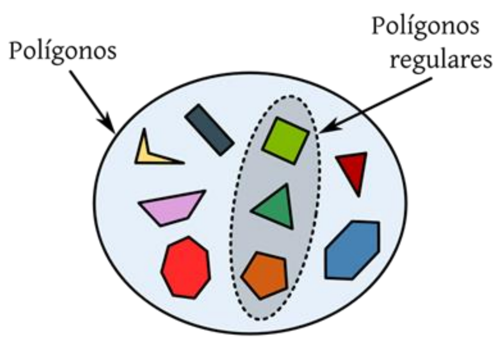
3.2.3 Conjunto

Grupo de objetos o elementos que tienen ciertas características comunes. Es importante definir cuidadosamente que constituye el conjunto de interés para estar en condiciones de decidir si un objeto es o no un elemento del conjunto.

Un requisito clave para que una agrupación de objetos pueda ser llamada conjunto, es que se pueda determinar si un objeto especifico pertenece o no a él.

Ejemplo:

Los habitantes de San José, las estaciones de ferrocarril de España, los ríos de África, las farmacias del Estado de Jalisco, los planetas del sistema solar, los polígonos regulares dentro de un conjunto de polígonos son ejemplos de conjuntos.



Observación importante;
Se debe tener cuidado con generalizar ya que esto puede hacer que sea muy difícil especificar el conjunto de objetos sobre el cual se trabaja por ejemplo la agrupación de cosas bonitas, este no podría ser separado mediante la teoría de conjuntos ya que habrá cosas que para algunos son bonitas, pero para otros no, este ejemplo nos sirve de guía para diferenciar el manejo de los elementos referente a un conjunto en específico, en él no podemos definir si es parte de un conjunto ya que no puede determinarse si los objetos llamados cosas bonitas pertenece o no a él.

3.2.4 Evento Simple

Un *evento simple* es cada uno de los resultados posibles de un experimento aleatorio, se le conoce también con el nombre de *punto muestral* o *suceso elemental*. Es un resultado posible de una sola acción o prueba de un experimento y este consta de un solo elemento del espacio muestral (E).
Son mutuamente excluyentes y equiprobables (no pueden aparecer dos a la vez y la probabilidad de ocurrencia de cada uno de ellos es la misma).

De manera más sencilla y puntual podemos definir que un evento simple es un evento con un solo resultado. Por lo tanto, no puede ser descompuestos en eventos más simples o elementales.

Ejemplo:

El resultado de tirar una moneda al aire y que caiga mostrando sello.

Solución:

Ω = {cara, sello} E_s = {sello}

Ejemplo:

El resultado de tirar dos dados al aire y que salga una suma de 12 puntos.

Solución:

$\Omega = \{(x,y), x=1,2,3,...,6; y=1,2,3,...,6\}$ $E_s = \{6,6\}$

Cada evento simple tiene una probabilidad de ocurrencia. Si no se especifica, entonces se asume que todos los eventos simples son equiprobables.

Ejemplo:

Sacar un 1 sería un evento simple, porque existe sólo un resultado que funciona: 1.

Sacar más que 5 también sería un evento simple, porque el evento incluye sólo al 6 como un resultado válido.

3.2.5 Evento Compuesto

Con frecuencia lo que interesa no es un suceso elemental en particular, sino más bien la categoría del resultado que representa una observación, es decir, que lo que se estudia sea un conjunto de sucesos elementales llamados sucesos o eventos compuestos. Cada evento tiene una probabilidad de ocurrencia.

Evento compuesto, es pues, un subconjunto del espacio de sucesos elementales de un experimento aleatorio y es denotado con *E*. La observación de un elemento cualquiera de un suceso *E* lleva a la conclusión de que ha ocurrido el suceso.

De manera más sencilla y puntual podemos definir que un evento compuesto es un evento con más de un resultado. Este puede ser descompuesto en eventos más simples, de forma que la unión de éstos sea precisamente el evento considerado.

Ejemplo:

Lanzar un dado de 6 lados y sacar un número par: 2, 4, y 6.

Ejemplo:

Sea *E* el evento de observar todos los valores pares en el experimento de lanzar un par de dados de 6 caras:

Solución:

$\Omega = \{(x,y),\ x=1,2,3,...,6;\ y=1,2,3,...,6\}$

$E = \{(1,1);(1,3);(1,5);(2,2);(2,4);(2,6);(3,3);(3,5);(4,4);(4,6);(5,5);(6,6)\}$

3.3 Operaciones con eventos simples y compuestos

3.3.1 Complemento de un Evento

Es el conjunto de elementos que no pertenecen al espacio de eventos de E. En otras palabras, el complemento de un evento, denotado por $\bar{E}$, es el evento que sucede si y sólo si E no sucede.
Se denota con $\bar{E}$.

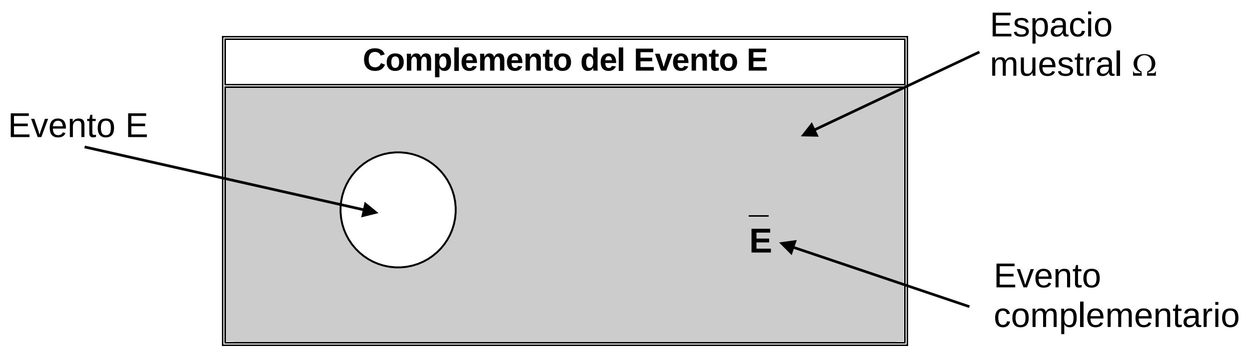


Figura 3.1 Complemento de un Evento

Dado un evento A, su complemento se define como el evento formado por todos los puntos muestrales que no están en A, por lo tanto, el complemento seria otro evento que ocurre siempre que no ocurre A y se representaría por el símbolo $\bar{A}$.

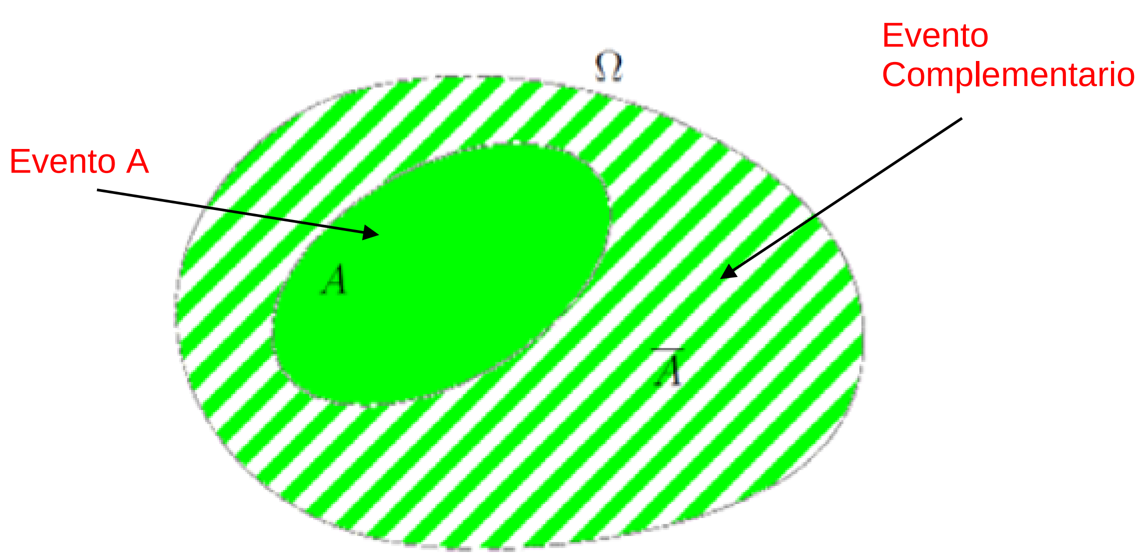


Figura 3.2 Complemento de un Evento

Cálculo de la probabilidad mediante el complemento:
La regla complementaria establece que la suma de las probabilidades de un evento y su complemento debe ser igual a 1, para un evento E en específico, definido por la siguiente ecuación $P(E) + P(\bar{E}) = 1$. Por lo tanto, la probabilidad de que ocurra un evento E (P(E)), podría ser determinado realizando un simple despeje matemático de la regla complementaria, dando como resultado la siguiente ecuación:

$$P(E) = 1 - P(\bar{E})$$

Ejemplo:

El experimento consiste en el lanzamiento de un dado de 6 caras.

Espacio muestral $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

El evento o suceso compuesto E es la salida de un número par.

Evento $E = \{2,4,6\}$

Si en un momento dado ocurre la salida 2. Se dice que ha ocurrido el suceso *E* o que ha sido un éxito.

Punto Muestral $E_s = \{2\}$

El *complemento* de E serán los números impares, ya que son los números que forman parte del evento que suceden siempre que no ocurre el evento E, el cual está definido por el símbolo $\bar{E}$:

$$\bar{E} = \{1,3,5\}$$

Ejemplo:

Veamos el caso de un gerente de ventas que, después de revisar los informes de ventas dice que el 80% de los contactos con nuevos clientes no resultan en venta alguna.

Si se define a E como elemento de una “venta” y $\bar{E}$ el de “no venta”, lo que el gerente dice es que $P(\bar{E})=0.80$. Encontrar la probabilidad de que se haga una venta al entrar en contacto con un nuevo cliente.

Solución:

$$P(E) = 1 - P(\bar{E})$$
$$P(E) = 1 - 0.8$$
$$\boxed{P(E) = 0.2} \text{ Respuesta.}$$

3.3.2 Intersección de Eventos

Podemos combinar diferentes eventos para formar nuestros eventos, utilizando las diferentes operaciones en conjunto.

Se denota por $A \cap B$ y es el conjunto de los elementos que pertenecen tanto a *A* como a *B*.

Estos eventos suceden si y sólo si A y B suceden simultáneamente. También se denota como $A \cdot B$ y la misma cumple todos los parámetros de una propiedad conmutativa ($A \cap B = B \cap A$).

Otra forma de definir estos eventos seria de la siguiente manera dados dos eventos A y B, de cierto experimento aleatorio, se define la intersección de A y B, que se representa por $A \cap B$, a otro suceso que se denota por D, que ocurre siempre que ocurran A y B simultáneamente: dando una representación general tal como así $A \cap B = D$

El diagrama de Venn que muestra la intersección de los dos eventos es el siguiente:

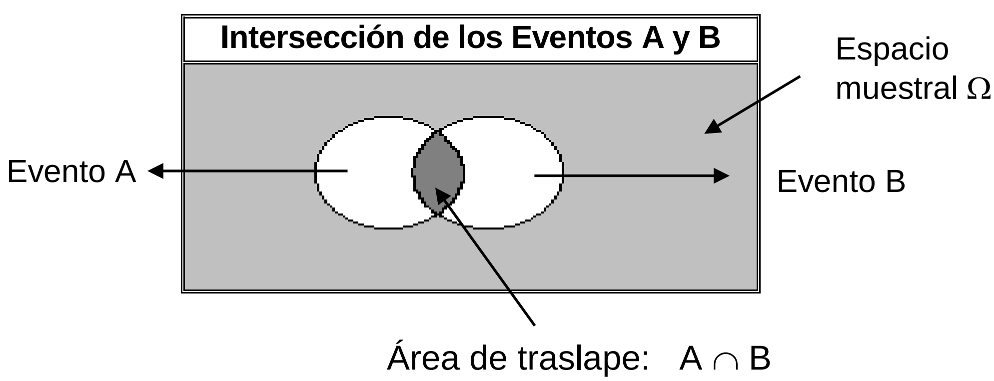


Figura 3.3 Intersección de 2 Eventos

El área donde se traslapan los dos círculos en la intersección de A y B (Figura 3.3 color Gris | Figura 3.4 la zona rayada de verde y amarillo) es el evento que contiene los puntos muestrales que están en A y también en B.

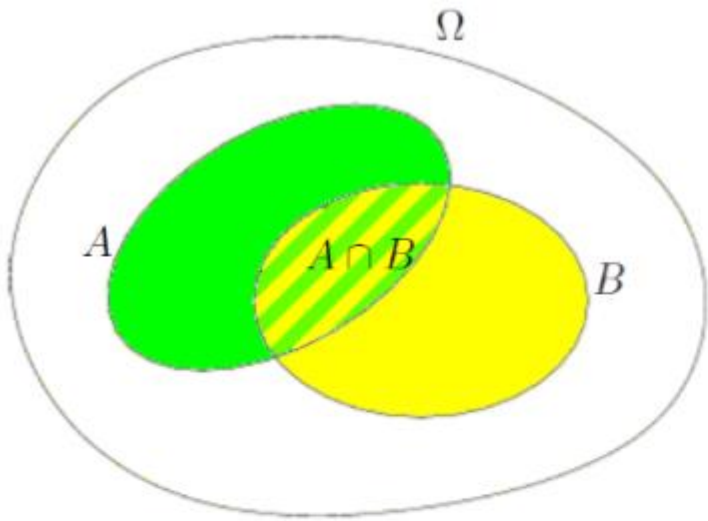


Figura 3.4 Intersección de 2 Eventos

Ejemplo:

Se toma un dado del cual se sacarán las siguientes salidas de datos:

A = {2,4,6} salida de números pares.
B = {4,5,6} salida de números mayores a tres.

Solución:

A B o $A \cap B$ o $A \cdot B = \{4,6\}$ ocurrencia de valores pares mayores que tres.

Se toman los números que se repiten en *A* y *B*, los cuales son los números 4 y 6.

Ejemplo:

X = {Juan, Pedro, Pablo, José}

Y = {María, Pablo, David, Pedro}

Solución:

$X \cap Y$ o $X \cdot Y$ = {Pablo, Pedro}

Los nombres que se repiten en los eventos X y Y fueron Pablo y Pedro.

Ejemplo:

Sea P el evento de que una persona elegida al azar de entre las que cenan en una cafetería sea un ingeniero y Q el evento de que la persona tenga más de 65 años.

Solución:

El evento $P \cap Q$ es el conjunto de todos los ingenieros que se encuentran en la cafetería y que tienen más de 65 años.

3.3.3 Unión de Eventos

Denotado por $A \cup B$ o $A + B$, es el evento que ocurre cuando A o B o ambas ocurren. La mismo cumple con la forma de una propiedad conmutativa por ende ($A \cup B = B \cup A$).

La probabilidad de la unión de dos sucesos incompatibles es la suma de las probabilidades de cada uno de ellos.

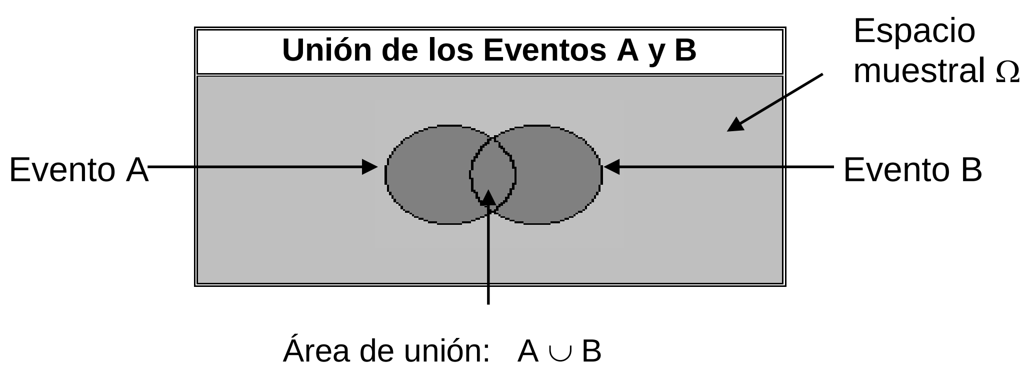


Figura 3.5 Unión de 2 Eventos

Observe que los dos círculos contienen todos los puntos muestrales del evento A y los puntos muestrales del evento B. El hecho de que los círculos se traslapen indica que algunos puntos muestrales están contenidos tanto en A como en B al mismo tiempo.

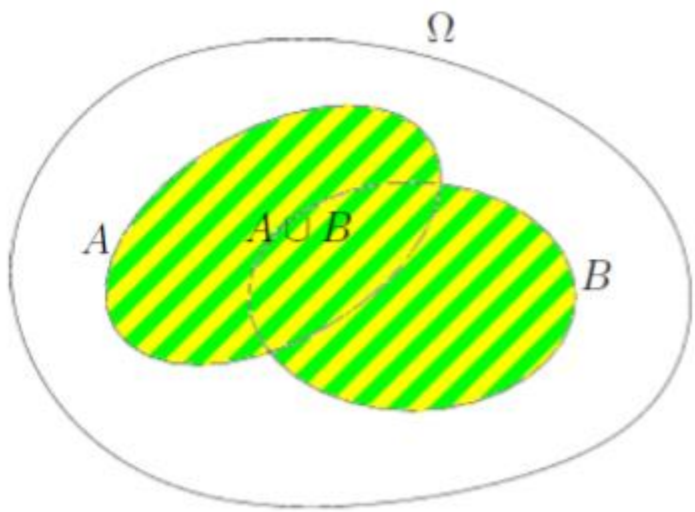


Figura 3.6 Unión de 2 Eventos

Ejemplo:

Se tomarán los mismos valores del ejemplo anterior, para:

A = {2,4,6}
B = {4,5,6}

Solución:

Entonces A ∪ B o A + B = {2,4,5,6} ocurrencia de todos los valores.

La unión de eventos es el conjunto de todos los elementos de los eventos **sin repetir elementos,** aunque se encuentren en ambos eventos.

Ejemplo:

Eventos

X = {negro, rojo, azul, amarillo}

Y = {rojo, verde, blanco}

Solución:

Entonces: *X* ∪ *Y* o *X* + *Y* = {negro, rojo azul, amarillo, verde, blanco}

Ejemplo:

Sea P el evento de que un empleado seleccionado al azar de una compañía de perforación petrolera fume y Q el evento que un empleado seleccionado ingiera bebidas alcohólicas.

Solución:

Entonces, el evento $P \cup Q$ es el conjunto de todos los empleados que beben o fuman, o hacen ambas cosas.

3.4 Propiedades de los eventos

3.4.1 Evento Mutuamente Exclusivo

Dos eventos se dice que son *mutuamente exclusivos* cuando no pueden suceder simultáneamente. Es decir, no tienen puntos muestrales en común, esto se puede denotar simbólicamente como $A \cap B = \emptyset$ o $A \cap B = \{\ \}$.

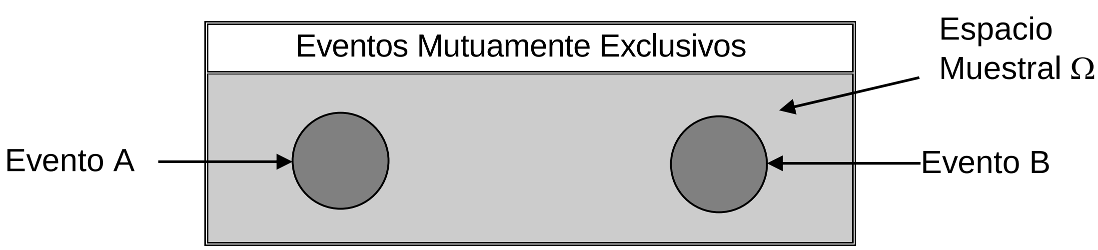


Figura 3.7 Eventos Mutuamente Exclusivos

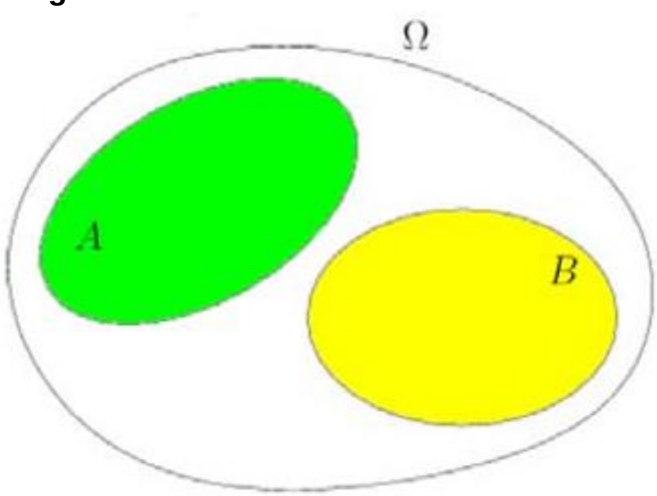


Figura 3.8 Eventos Mutuamente Exclusivos

Se denota de la siguiente manera[2]:

[2] Significa "vacío". Algunos autores utilizan 0.

$A \cap B = \{\ \}$ cuando no pueden suceder
o $A \cap B = \emptyset$ simultáneamente.

Ejemplo:

Estos eventos son tomados de un dado de 6 caras:

$A = \{1,2\}$ ocurrencia de números menores a tres.

$B = \{4,5,6\}$ ocurrencia de números mayores a tres.

Solución:

$$A \cap B = \{\ \}$$

Ejemplo:

Una compañía de televisión por cable ofrece programas en 8 canales diferentes, tres de los cuales están afiliados a la ABC, dos a la NBC y 1 a la CBS. Los otros dos son un canal educativo y el canal de deportes ESPN. Suponga que una persona inscrita en este servicio enciende un televisor sin elegir primero el canal. Sea A el evento de que el programa pertenezca a la red NBC y B el evento de que pertenezca a la red CBS.

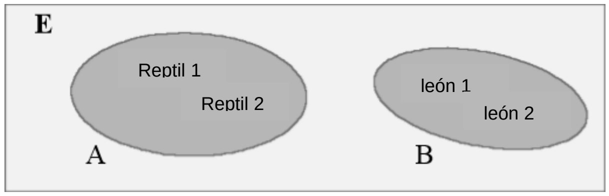
Solución:

Puesto que un canal de televisión no puede pertenecer a más de una red, los eventos A y B no tiene programas en común. Por lo tanto, la intersección $A \cap B$ no contiene ningún programa y, en consecuencia, los eventos A y B son mutuamente exclusivos[3].

[3] Excluyentes.

Ejemplo:

A: “Ser un reptil”, B: “Ser un león”.



Solución:

Los sucesos A y B son mutuamente excluyentes si no pueden ya que son dos especies distintas, por ende, no se mezclan como podemos ven en el diagrama de Venn anterior.

3.4.2 Evento Colectivamente Exhaustivo

Dos eventos son colectivamente exhaustivos cuando su unión nos da el espacio muestral. Se denota de la siguiente forma $A \cup B = \Omega$. Este nos dice que por lo menos uno de los eventos debe ocurrir cuando se realiza un experimento. Dicho en otras palabras, deberá cumplirse que la suma de las probabilidades de todos los sucesos siendo esta igual a 1.

Ejemplo:

Utilizando nuevamente un dado de 6 caras donde: los números pares $A = \{2,4,6\}$ y los números impares $B = \{1,3,5\}$

Solución:

La unión de ambos eventos nos da el espacio muestral:
$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

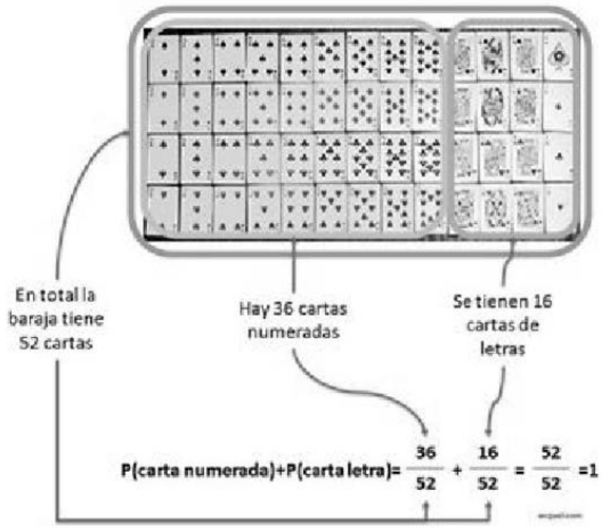
Ejemplo:

Sacar una carta numerada o sacar una carta de letras.

Solución:

Son eventos colectivamente exhaustivos ya que las cartas o son numeradas o son cartas con letra y así estamos considerando todos los eventos o resultados posibles. Al sumar la probabilidad de obtener una carta numerada y la probabilidad de sacar una carta de letra obtendremos una probabilidad de 1, consideremos que el “as” pertenece a las cartas literales:

P (carta numerada) + P (carta letra) = (36/52) + (16/52) = (52/52) = 1



3.5 Probabilidad

La Probabilidad es la mayor o menor posibilidad de que ocurra un determinado suceso y surge de la necesidad de medir o determinar cuantitativamente la certeza o duda de que un suceso dado ocurra o no.

En el estudio de "lo que es posible", existen dos tipos de problemas. El primero es el de citar todo lo que pueda suceder en una situación dada y el segundo es el de determinar cuántas cosas diferentes pueden suceder sin tener que construir una lista completa.

La probabilidad de un evento A es la suma de las probabilidades de todos los puntos muestrales que se encuentran en A. Si un experimento es repetido n veces bajo las mismas condiciones, y el evento A ocurre m veces, entonces la probabilidad que “el evento A ocurra”, denotada por P(A) es:

$$P(A)=m/n$$

Ejemplo:

Para cumplir con un requisito de graduación, cada uno de dos estudiantes debe estudiar un idioma extranjero: francés, alemán o inglés. Cite las diferentes formas en que pueden hacer ellos su elección, si sólo nos interesa cuántos de ellos, no cuáles, estudiarán francés, cuántos, alemán y cuántos, inglés.

Solución:

Es claro, que hay muchas posibilidades: Ambos estudiantes pueden decidir estudiar alemán; uno de ellos puede decidir estudiar francés mientras el otro decide estudiar inglés; quizás uno de ellos opte por el alemán y el otro decida estudiar un idioma extranjero que no sea el francés, alemán ni inglés; ambos pueden decidir estudiar un idioma extranjero que no sea el francés, el alemán ni el inglés; y así sucesivamente quizás podamos completar la lista, pero las oportunidades son que omitiremos cuando menos una de las posibilidades.
Para manejar este tipo de problema de manera sistemática resulta práctico trazar un diagrama de árbol. Este diagrama muestra que hay 3 posibilidades (3 ramas) que corresponden a 0, 1 o 2 de los que deciden estudiar francés. Después, para los que desean estudiar alemán hay tres ramas que emanan de la rama superior, dos de las ramas del medio y una de la rama inferior. Vuelve a haber tres posibilidades 0, 1 o 2 cuando ningún estudiante va a estudiar francés; dos posibilidades 0 o 1, cuando uno de los dos estudiantes va a estudiar francés; y una posibilidad 0, cuando ambos estudiantes van a estudiar francés. En total hay 10 posibilidades.

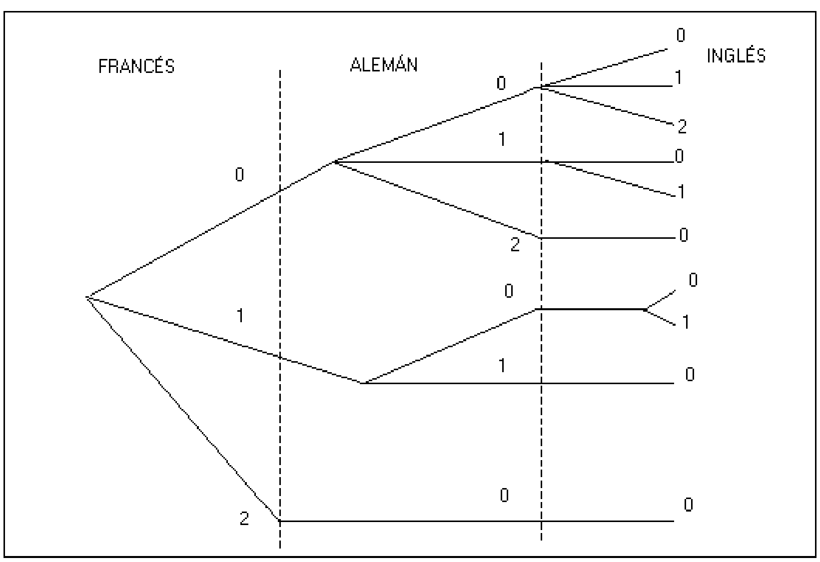


Figura 3.5 Diagrama de Árbol

Ejemplo:

Una empresa del ramo de la alimentación elabora sus productos en cuatro factorías: F1, F2, F3 y F4. El porcentaje de producción total que se fabrica en cada factoría es del 40%, 30%, 20% y 10%, respectivamente, y además el porcentaje de envasado incorrecto en cada factoría es del 1%, 2%, 7% y 4%. Tomamos un producto de la empresa al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que se encuentre defectuosamente envasado?

Solución:

Llamando M = "el producto está defectuosamente envasado", se tiene que este producto puede proceder de cada una de las cuatro factorías y, por tanto, según el teorema de la probabilidad total y teniendo en cuenta las probabilidades del diagrama de árbol adjunto, tenemos:

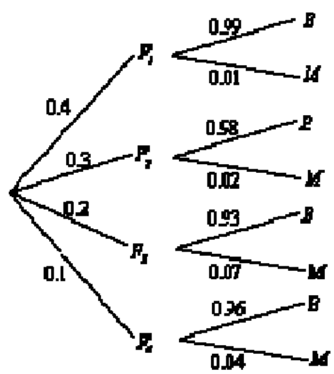


Figura 3.6 Diagrama de Árbol

$$P(M) = P(F1) \cdot P(M/F1) + P(F2) \cdot P(M/F2) + P(F3) \cdot P(M/F3) + P(F4) \cdot P(M/F4) =$$
$$= 0.4 \cdot 0.01 + 0.3 \cdot 0.02 + 0.2 \cdot 0.07 + 0.1 \cdot 0.04$$
$$= 0.004 + 0.006 + 0.014 + 0.004 = 0.028$$

Ejemplo:

Para realizar un experimento aleatorio, disponemos de una muestra de cinco concesionarios de coches, de los cuales dos concesionarios tienen 3 coches blancos y 5 azules, otros dos concesionarios tienes 2 coches blancos y 3 azules, y el último concesionario tiene 2 coches blancos y 1 azul. ¿Cuál es la probabilidad de elegir un coche azul?

Solución:

Suceso A: 3 blancos y 5 azules

Como existen 2 sucesos A, entonces P(A) = 2/5 Probabilidad de escoger 1 azul en estos dos concesionarios P(azul/A) = 5/8

Suceso B: 2 blancos y 3 azules

Como existen 2 sucesos B, entonces P(B) = 2/5 Probabilidad de escoger 1 azul en estos dos concesionarios P(azul/B) = 3/5

Suceso C: 2 blancos y 1 azul

Como existe 1 suceso C, entonces P(C) = 1/5 Probabilidad de escoger 1 azul en este concesionario P(azul/C) = 1/3

$$P(azul) = \left(\frac{2}{5} * \frac{5}{8}\right) + \left(\frac{2}{5} * \frac{3}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} * \frac{1}{3}\right) = \frac{10}{40} + \frac{6}{25} + \frac{1}{15} = 0,25 + 0,24 + 0,06 = 0,55$$

Si hubiésemos optado por hacerlos como 5 sucesos individuales:

P(azul) =
P(A)*P(azul/A)+P(A)*P(azul/A)+P(B)*P(azul/B)+P(B)*P(azul/B)+P(C)*P(azul/C)

$$P(azul) = \left(\frac{1}{5} * \frac{5}{8}\right) + \left(\frac{1}{5} * \frac{5}{8}\right) + \left(\frac{1}{5} * \frac{3}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} * \frac{3}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} * \frac{1}{3}\right)$$

$$P(azul) = \frac{5}{40} + \frac{5}{40} + \frac{3}{25} + \frac{3}{25} + \frac{1}{15} = 0,55$$

Ejemplo:

Una compañía dedicada al transporte público explota tres líneas de una ciudad, de forma que el 60% de los autobuses cubre el servicio de la primero línea, el 30% cubre la segunda y el 10% cubre el servicio de la tercera línea. Se sabe que la probabilidad de que, diariamente, un autobús se averíe es del 2%, 4% y 1%, respectivamente, para cada línea. Determina la probabilidad de que, en un día, un autobús sufra una avería.

Solución:

Para obtener la solución definimos el suceso "sufrir una avería" (Av) puede producirse en las tres líneas, (L1, L2, L3). Según el teorema de la probabilidad total y teniendo en cuenta las probabilidades del diagrama de árbol adjunto, tenemos:

$$\begin{aligned} P(Av) &= P(L1) \cdot P(Av/L1) + P(L2) \cdot P(Av/L2) + P(L3) \cdot P(Av/L3) \\ &= 0.6 \cdot 0.02 + 0.3 \cdot 0.04 + 0.1 \cdot 0.01 \\ &= 0.012 + 0.012 + 0.001 \\ &= 0.025 \end{aligned}$$

Ejemplo:

Se tienen dos urnas, la nº1 tiene 3 bolas blancas y 2 negras, la nº2 tiene 2 bolas blancas y 3 negras. Se elige una urna al azar y de ella se extrae una bola. Calcular la probabilidad de que sea blanca.

Solución:

Sea A1: “elegir la urna nº1”

A2: “elegir la urna nº2”

B: “extraer bola blanca”

$$P(B) = P(A1) \cdot P(B/A1) + P(A2) \cdot P(B/A2)$$

$$P(B) = 1/2 \cdot 3/5 + 1/2 \cdot 2/5 = 1/2.$$

3.5 Teoremas de Probabilidad

A continuación, se presentan algunos de los teoremas más importantes que se aplican invariablemente:

- La probabilidad de un evento E es un número real que está en el intervalo de 0 a 1.

$$0 \leq P(E) \leq 1$$

- Si se tiene la certeza de que ocurrirá un evento, su probabilidad es 1, ($P(\Omega)$= 1), y si se tiene la certeza de que no ocurrirá un evento, su probabilidad es 0, ($P(0)$= 0).
- Si dos eventos son mutuamente exclusivos, la probabilidad de que uno o el otro ocurra es igual a la suma de sus probabilidades.
- La suma de las probabilidades de que ocurra un evento y de que no ocurra un evento es igual a 1.
- La probabilidad de un suceso es mayor o igual que cero.
- Si un suceso está incluido en otro, su probabilidad es menor o igual a la de éste.
- La probabilidad de la unión de dos sucesos es la suma de sus probabilidades restándole la probabilidad de su intersección.

Basándonos en estos teoremas se producen otros más que se señalan a continuación.

3.6 Reglas de Probabilidad

Existen dos reglas fundamentales para resolver problemas en donde se desea determinar la probabilidad de un suceso si se conocen las probabilidades de otros sucesos que están relacionados con él. Estas son:

- La Regla de la Adición: que expresa la probabilidad de que ocurran dos o más sucesos a la vez, P (A U B). Esta puede presentarse de dos formas: para conjuntos con intersección (**Regla General de Adición**) y para conjuntos mutuamente excluyentes (**Regla Especial de la Adición**).

- La Regla de la Multiplicación o Probabilidad Conjunta: Esta regla expresa la probabilidad de que ocurra un suceso A y un suceso B. Esta puede presentarse de dos formas: que el segundo suceso depende del primero (**Regla General de Multiplicación**) o que ninguno dependa del otro (**Regla Especial de Multiplicación**).

3.6.1 Regla Especial de la Adición

Si dos o más sucesos son tales, que solamente uno de ellos puede ocurrir en un solo ensayo, se dice que son mutuamente excluyentes. Su probabilidad se denomina mediante la Regla especial de la adición, que afirma que la probabilidad de que ocurra tal evento es igual a la suma de las probabilidades de cada suceso. En otras palabras, si K eventos son mutuamente exclusivos, la probabilidad de que uno de ellos ocurra es igual a la suma de sus probabilidades respectivas; en forma simbólica:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_K) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots P(A_K)$$

para los eventos mutuamente exclusivos $A_1, A_2, \ldots, A_K$ donde, $\cup$ suele leerse "unión".

Ejemplo:

La probabilidad de obtener un As o un Rey, sacando una sola carta en una baraja española de 40 cartas. Si uno de los casos aparece, queda excluido el otro.

Solución:

$$P_A = \frac{4}{40} = \frac{1}{10} \quad AS \qquad\qquad P_B = \frac{4}{40} = \frac{1}{10} \quad REY$$

$$P_{A\,o\,B} = P_A + P_B = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{2}{10} = \boxed{1/5}$$

Ejemplo:

La probabilidad de obtener un 2 o un 5, en el lanzamiento de un dado.

Solución:

$$P_{(A)} = 1/6 \ _{(\text{aparición del 2})} \qquad P_{(A)} = 1/6 \ _{(\text{aparición del 5})}$$

$$P_{(A\,o\,B)} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \boxed{1/3}$$

Ejemplo:

a) Las probabilidades de que una mujer compre vestidos en Look, en Denny´s y en La Gota son 0.22, 0.18 y 0.35 respectivamente. ¿Cuál es la probabilidad de que ella compre el vestido en una de esas tiendas?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que una mujer no compre vestidos a ninguna de las tres tiendas?

Solución:

a) Como las 3 posibilidades son mutuamente exclusivas, la respuesta es:

$$
\begin{aligned}
P(\text{Look} \cup \text{Denny's} \cup \text{La Gota}) &= 0.22 + 0.18 + 0.35 \\
&= 0.75.
\end{aligned}
$$

b)
$$
\begin{aligned}
P(\text{No compre}) &= 1 - P(\text{Compre}) \\
&= 1 - 0.75 \\
&= 0.25
\end{aligned}
$$

Ejemplo:

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un total de 7 u 11 cuando se lanza un par de dados de 6 caras cada uno?
b) ¿Cuál es la probabilidad de no obtener ni 7 ni 11 en el experimento de lanzar dos dados?

Solución:

a). Sea A el evento de que obtenga un 7 y B el evento de que se obtenga un 11. Se observa que ocurre el evento A en 6 de los 36 puntos muestrales y ocurre el evento B en sólo dos de los puntos muestrales. Puesto que todos los puntos muestrales son igualmente probables, se tiene que P(A) = 1/6 y P(B) = 1/18. Los eventos A y B son mutuamente exclusivos, ya que no se puede obtener al mismo tiempo un total de 7 y 11 en el mismo lanzamiento. Por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
P(A \cup B) &= P(A) + P(B) \\
&= 1/6 + 1/18 \\
&= 2/9
\end{aligned}
$$

c)
$$
\begin{aligned}
P(A \cup B) + P(\overline{A \cup B}) &= 1 \\
P(A \cup B) &= 1 - 2/9 \\
&= 7/9
\end{aligned}
$$

3.6.2 Regla General de Adición

Esta regla se aplica cuando los eventos A y B no son mutuamente exclusivos y cuentan con intersección, la misma está definida con la siguiente ecuación:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Para entender la ley aditiva observe que los dos primeros términos en ella, $P(A)$ y $P(B)$ se asocian con todos los puntos muestrales en $A \cup B$. Sin embargo, como los puntos muestrales en la intersección $A \cap B$ están en A y en B al mismo tiempo, al calcular $P(A) + P(B)$ de hecho contamos dos veces a cada uno de los puntos en $A \cap B$. Al restar $P(A \cap B)$ se corrige el doble conteo. En otras palabras, sumamos la probabilidad de A más la probabilidad de B, pero como la intersección está incluida en la suma, entonces la restamos.

Ejemplo:

Para obtener una fórmula $P(A \cup B)$ que se cumpla sin importar si los eventos A y B son mutuamente exclusivos, tomemos en cuenta el siguiente diagrama (Figura 3.6), que concierne a la elección de un alcalde.

La G representa persona graduada de la universidad.
La M representa persona de un grupo monetario.

De las figuras obtendremos:

$$P(G) = 0.44 + 0.15 = 0.59$$
$$P(M) = 0.15 + 0.07 = 0.22$$
$$P(G \cup M) = 0.44 + 0.15 + 0.07 = 0.66$$

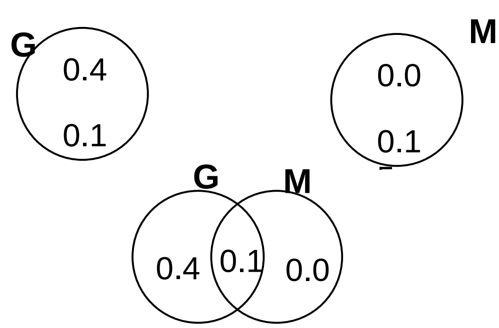


Figura 3.6 Ejemplo de la Regla General de Adición

Si hubiese utilizado en forma errónea la regla de adición especial $P(G \cup M) = P(G) + P(M) = 0.59 + 0.22 = 0.81$. Este error se produce al incluir $P(G \cap M) = 0.15$ dos veces, una vez en $P(G) = 0.59$ y otra en $P(M) = 0.22$ y se puede corregir al restar 0.15 de 0.81.

$$
\begin{aligned}
P(G \cup M) &= P(G) + P(M) - P(G \cap M) \\
&= 0.59 + 0.22 - 0.15 \\
&= 0.66
\end{aligned}
$$

Ejemplo:

Si se saca una carta de una pila ordinaria de 52 cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que será un trébol o un muñeco (rey, reina o jota)?

Solución:

Si C denota sacar un trébol y F tomar un muñeco, entonces:

$P(C) = 13/52$, $P(F) = 12/52$, y $P(C \cap F) = 3/52$ de manera que
$P(C \cup F) = 13/52 + 12/52 - 3/52 = 22/52$.

Ejemplo:

Consideremos el caso de una pequeña ensambladora con 50 empleados. Se espera que cada trabajador termine a tiempo sus labores de trabajo, además de que el producto armado pase una inspección final. A veces, alguno de los trabajadores no puede cumplir con los estándares de desempeño porque terminan su trabajo tarde y/o arman productos defectuosos. Al terminar un período de evaluación de desempeño, el gerente de producción vio que 5 de los 50 trabajadores habían terminado tarde su trabajo, que 6 de los 50 habían armado productos defectuosos y que 2 habían terminado el trabajo tarde y también habían armado productos defectuosos.

Solución:

T = el evento de que el trabajo se termina *tarde*
D = el evento de que el producto armado es *defectuoso*

$P(T) = 5/50 = 0.10$
$P(D) = 6/50 = 0.12$
$P(T \cap D) = 2/50 = 0.04$

Después de revisar los datos el gerente de producción optó por asignar una mala calificación de desempeño al empleado cuyo trabajo se presentará tarde o fuera defectuoso; en consecuencia el evento de interés es $T \cup D$. ¿Qué probabilidad hay de que se asigne una mala calificación a un empleado?

$$
\begin{aligned}
P(T \cup D) &= P(T) + P(D) - P(T \cap D) \\
&= 0.10 + 0.12 - 0.04 \\
&= 0.18
\end{aligned}
$$

3.6.3 Regla Especial de Multiplicación

Requiere que dos eventos, A y B, sean independientes. Lo son si el hecho de que ocurra uno no altera la probabilidad de que ocurra el otro.

Una forma de entender la independencia consiste en suponer que los eventos A y B ocurren en diferentes tiempos. Por ejemplo, cuando el evento B ocurre después del evento A, ¿influye A en la probabilidad de que el evento B ocurra? Si la respuesta es no, entonces A y B son independientes.

La probabilidad de que ocurrieran dos eventos independientes es simplemente el producto de sus probabilidades respectivas.

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Observe que la ley multiplicativa para eventos independientes representa otro método para determinar si A y B son independientes.

Nota: Utilizando la ley de multiplicación, tenemos que A y B son independientes si:
$P(A/B) = P(A)$ o si $P(B/A) = P(B)$.

Ejemplo:

¿Cuál es la probabilidad de obtener dos sellos en dos lanzamientos al aire de una moneda equilibrada?

Solución:

La probabilidad de que caigan sellos es 1/2 en cada lanzamiento al aire de la moneda, la respuesta es $1/2 \times 1/2 = 1/4$.

Ejemplo:

Un gerente de una gasolinera sabe, por su experiencia, que el 80% de los clientes usan tarjeta de crédito para comprar gasolina ¿cuál es la probabilidad de que los dos clientes siguientes que compren gasolina usen tarjeta de crédito?

Solución:

Si hacemos que:

A = el evento donde el primer cliente usa tarjeta de crédito y
B = el evento donde el segundo cliente usa tarjeta de crédito,

entonces el evento de interés es $A \cap B$. Como no contamos con más información podemos suponer razonablemente que A y B son eventos independientes, entonces:

$$
\begin{aligned}
P(A \cap B) &= P(A) \,.\, P(B) \\
&= 0.8 * 0.8 \\
&= 0.64
\end{aligned}
$$

Ejemplo:

Si se responden al azar cuatro preguntas con cinco opciones cada una, ¿cuál es la probabilidad de acertar a todas?

Solución:

La probabilidad de acierto en cada una de las preguntas es 1/5. Por lo tanto, la probabilidad de acertar en las cuatro es:

$$P(A) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{625}$$

Ejemplo:

Suponiendo que la probabilidad de tener un hijo o una hija es ½, ¿cuál es la probabilidad de que, al tener tres hijos, 2 solamente sean varones?

Solución:

Si H representa el nacimiento de un hombre y M el de una mujer, tenemos los siguientes casos favorables: HHM – HMH – MHH:

La probabilidad de cada uno de estos eventos es: $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

Por lo tanto, la probabilidad pedida es: $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

Ejemplo:

El dueño de un hotel ha modernizado sus instalaciones. Observó que el 20% de los autos
que pasan por ahí, se detienen a alquilar un cuarto.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que los próximos dos carros se detengan?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que el primer auto pare y el segundo no lo haga?

Solución:

Asumiendo que son eventos independientes:

a. $P(A \cap B) = P(A)\,P(B) = 0.2 * 0.2 = 0.04$

b. $P(A \cap B) = P(A)\,[1-P(B)] = 0.2*0.8=0.16$

3.6.4 Regla General de Multiplicación

Si dos eventos no son independientes, se dice que son dependientes y se considera que el primer evento determina la probabilidad del segundo.

Si dos eventos, A y B son dependientes, la probabilidad conjunta de que ambos ocurran se determina multiplicando la probabilidad de que ocurra el evento A por la probabilidad condicional de que ocurra el evento B, dado que A ha ocurrido. En otras palabras, La ley multiplicativa se basa en la definición de la probabilidad condicional, dada por la siguiente ecuación:

$$P\ (A \cap B) = P(B)\ \mathbf{[}P(A \mid B)]$$[4]

La probabilidad condicional de que ocurran dos eventos es el resultado de la probabilidad de que uno de los eventos ocurra dado que ha ocurrido el primer evento.

Ejemplo:

Un jurado consta de 9 personas nativas del lugar y de tres extranjeros. Si dos de los miembros del jurado se eligen al azar para realizar una entrevista. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos sean extranjeros?

Solución:

Sean:

A: El evento de que el primer jurado es extranjero y
B: El evento de que el segundo es también extranjero.

Si se suponen probabilidades iguales para cada elección, la probabilidad de que el primer miembro del jurado sea extranjero es $P\ (A) = 3/12$. Por lo tanto, si el primer miembro del jurado escogido es extranjero, la probabilidad de que el segundo sea también extranjero es $P\ (B \mid A) = 2/11$, por consiguiente:

$$P\ (A \cap B) = P(B) \times P(A \mid B) = 3/12 * 2/11 = 1/22$$

[4] $P(A \mid B)$ se lee “la probabilidad de A dado que ocurrió el evento B”.

Ejemplo:

El departamento de circulación de un diario sabe que el 84% de las familias de una determinada urbanización tiene una suscripción para recibir el periódico de lunes a sábado. Si hacemos que D represente el evento de que una familia tiene tal tipo de suscripción, la probabilidad de $P(D)=0.84$. Se sabe que la probabilidad de que una familia, cuya suscripción, además de ser de lunes a sábado, también se suscriba a la edición dominical (evento S), es de 0.75; esto es, $P(S|D)= 0.75$ ¿Cuál es la probabilidad que la suscripción de una familia incluya tanto a la edición dominical como la de lunes a sábado?.

Solución:

Con la ley multiplicativa calculamos $P(S \cap D)$ como sigue:

$$\begin{aligned} P(S \cap D) &= P(D).P(S|D) \\ &= 0.84 * 0.75 \\ &= 0.63 \end{aligned}$$

Sabemos ahora que el 63% de las familias tiene una suscripción de las ediciones entre semana y dominicales.

3.7 Teorema de Bayes

El teorema de Bayes ofrece un poderoso método estadístico para evaluar nueva información y revisar estimaciones precedentes (basadas en escasa información solamente) sobre la probabilidad de que las cosas se hallen en uno u otro estado. *Si se usa correctamente, el teorema hace innecesario reunir grandes cantidades de datos durante largos períodos a fin de tomar decisiones basadas en las probabilidades*.

El teorema de Bayes está concebido para calcular probabilidades condicionales marchando a la inversa. Reformulando un conjunto de probabilidades previas $P(A|B_i)$, conocidas como probabilidades *a priori*, se puede calcular la probabilidad posterior $P(Bi|A)$, conocida como probabilidad *a posteriori*. $P(B_i|A)$ es la probabilidad de B_i. De manera más sencilla podemos definir que el Teorema de Bayes permite conocer el cambio que experimenta la probabilidad de A como consecuencia de haber ocurrido B. Siendo la ocurrencia de B la que establece la frontera entre el antes y el después. La fórmula básica del teorema de Bayes o de *Probabilidad Condicional bajo Dependencia* es:

$$P\left(\frac{B_i}{A}\right) = \frac{P(B_i)}{P(A)}$$

Enunciada de forma más completa de la siguiente manera: *Si los eventos B_1, B_2, ...,B_k, constituyen una partición del espacio muestral* Ω*, donde $P(B_i) \neq$* 0 para i= 1, 2, ...k entonces, para cualquier evento A de Ω tal que $P(A) \neq 0$:

$$P\left(\frac{B_r}{A}\right) = \frac{P(B_r \cap A)}{\sum_{i=1}^{k} P(B_i \cap A)} = \frac{P(B_r)\,P(\frac{A}{B_r})}{\sum_{i=1}^{k} P(B_i)\,P(\frac{A}{B_i})} \qquad \textit{para r: 1, 2, ..., k.}$$

El teorema de Bayes se aplica cuando los eventos para los que deseamos calcular sus probabilidades posteriores son mutuamente excluyentes, y la unión de todos ellos es todo el espacio muestral, se dice que los eventos son colectivamente exhaustivos.

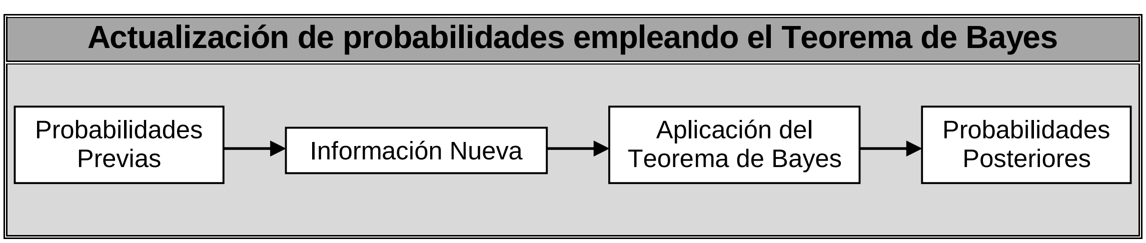


Figura 3.7: Teorema de Bayes

Algunas aplicaciones puntuales que se le ha dado a la Teoría de Bayes son:

- El diagnóstico de cáncer.
- Evaluación de probabilidades durante el desarrollo de un juego de bridge por Dan F. Waugh y Frederick V. Waugh.
- Probabilidades a priori y a posteriori.
- Un uso controvertido en la Ley de sucesión de Laplace.
- En el testeo de hipótesis en Ciencia Política cuando se usa metodología “process tracing”.

Ejemplo:

Tres máquinas, A, B y C, producen el 45%, 30% y 25%, respectivamente, del total de las piezas producidas en una fábrica. Los porcentajes de producción defectuosa de estas máquinas son del 3%, 4% y 5%.

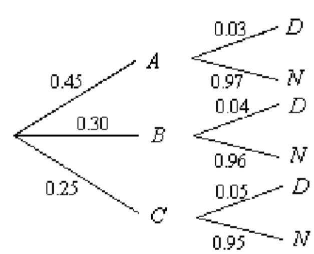
a. Seleccionamos una pieza al azar; calcula la probabilidad de que sea defectuosa.

b. Tomamos, al azar, una pieza y resulta ser defectuosa; calcula la probabilidad de haber sido producida por la máquina B.

c. ¿Qué máquina tiene la mayor probabilidad de haber producido la citada pieza defectuosa?

Solución:

Sea D= "la pieza es defectuosa" y N= "la pieza no es defectuosa". La información del problema puede expresarse en el diagrama de árbol adjunto.



a. Para calcular la probabilidad de que la pieza elegida sea defectuosa, P(D), por la propiedad de la probabilidad total.

$$P(D) = P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B) + P(C) \cdot P(D/C)$$
$$P(D) = 0.45 \cdot 0.03 + 0.30 \cdot 0.04 + 0.25 \cdot 0.05$$
$$P(D) = 0.038$$

b.
$$P(B/D) = \frac{P(B) \cdot P(D/B)}{P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B) + P(C) \cdot P(D/C)} =$$
$$= \frac{0.30 \cdot 0.04}{0.45 \cdot 0.03 + 0.30 \cdot 0.04 + 0.25 \cdot 0.05} = \frac{12}{38} = 0.316$$

c. Debemos calcular P(B/D). Por el teorema de Bayes.

Calculamos P(A/D) y P(C/D), comparándolas con el valor de P(B/D) ya calculado. Aplicando el teorema de Bayes, obtenemos:

$$P(A/D)=\frac{0.45\cdot 0.03}{0.45\cdot 0.03+0.30\cdot 0.04+0.25\cdot 0.05}=\frac{135}{380}=0.355$$

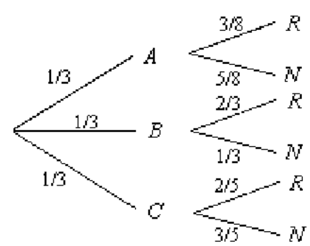
$$P(C/D)=\frac{0.25\cdot 0.05}{0.45\cdot 0.03+0.30\cdot 0.04+0.25\cdot 0.05}=\frac{125}{380}=0.329$$

Ejemplo:

Tenemos tres urnas: A con 3 bolas rojas y 5 negras, B con 2 bolas rojas y 1 negra y C con 2 bolas rojas y 3 negras. Escogemos una urna al azar y extraemos una bola. Si la bola ha sido roja, ¿cuál es la probabilidad de haber sido extraída de la urna A?

Solución:

Llamamos R= "sacar bola roja" y N= "sacar bola negra". En el diagrama de árbol adjunto pueden verse las distintas probabilidades de ocurrencia de los sucesos R o N para cada una de las tres urnas.



La probabilidad pedida es P(A/R). Utilizando el teorema de Bayes, tenemos:

$$P(A/R)=\frac{P(A)\cdot P(R/A)}{P(A)\cdot P(R/A)+P(B)\cdot P(R/B)+P}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{8}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{8}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}}=\frac{45}{173}=0.260$$

Ejemplo:

Una empresa manufacturera recibe embarques de partes de dos proveedores distintos. Sea A_1 el evento de que una parte provenga del proveedor 1 y A_2 el evento de que una parte provenga del proveedor 2. Actualmente, el 65% de las partes que compra la empresa provienen del proveedor 1 y el 35% restante del proveedor 2. En consecuencia, si se selecciona una parte al azar, asignaríamos las probabilidades previas $P(A_1)=0.65$ y $P(A_2)=0.35$. La calidad de las partes varía según su origen. Los datos históricos sugieren que el desempeño en términos de calidad de los dos proveedores es el siguiente:

Proveedor	Porcentaje de piezas buenas	Porcentaje de piezas malas
Proveedor A_1	98	2
Proveedor A_2	95	5

Solución:

Si B representa el evento de que una parte es *buena* y M el evento de que una parte es *mala*, la información da como resultado los siguientes valores de probabilidad condicional:

$P(B|A_1) = 0.98$ $\quad$ $P(M|A_1) = 0.02$
$P(B|A_2) = 0.95$ $\quad$ $P(M|A_2) = 0.05$

Al aplicar la ecuación y sustituir los valores de probabilidad de nuestro ejemplo tenemos:

$$P(A_1|M) = [\, P(A_1)\, P(M|A_1)\,] / [\, P(A_1)\, P(M|A_1) + P(A_2)\, P(M|A_2)\,]$$
$$= [\, 0.65(0.02)\,] / [\, 0.65(0.02) + 0.35(0.05)\,]$$
$$= 0.0130 / (0.0130 + 0.0175)$$
$$= 0.0130 / 0.0305 = 0.4262$$

Además, usando la ecuación calculamos $P(A_2/M)$:

$$P(A_2|M) = 0.35(0.05) / [\, 0.65(0.02) + 0.35(0.05)\,]$$
$$= 0.0175 / (0.0130 + 0.0175)$$
$$= 0.0175 / 0.0305$$
$$= 0.5738$$

En este ejemplo observamos que inicialmente se tenía una probabilidad de 0.65 de que una parte seleccionada al azar fuera del proveedor 1. Sin embargo, ante la información que la parte es defectuosa, la probabilidad de que provenga del proveedor 1 baja a 0.4262. De hecho, si la parte es defectuosa hay más del 50% de probabilidades de que la parte sea del proveedor 2, esto es $P(A_2 | M) = 0.5738$.

Ejemplo:

Han sido nominados para el puesto de presidente 3 miembros de un club campestre privado. La probabilidad de que el señor Álvarez sea elegido es de 0.3, la probabilidad de que el señor Bolívar sea elegido es de 0.5 y la probabilidad de que la señora Chávez sea elegida es de 0.2. Si se elige al señor Álvarez, la probabilidad de que haya un aumento en las cuotas de membresía es de 0.8. Si se elige al señor Bolívar o a la señora Chávez son de 0.1 y 0.4, respectivamente. Si una persona está considerando inscribirse en el club, pero demora su decisión varias semanas sólo para darse cuenta de que han aumentado las cuotas, ¿cuál es la probabilidad de que se haya elegido a la señora Chávez presidenta del club?

Solución:

Considérense los siguientes eventos:

A = se aumenta la cuota de la membresía,
B_1 = se elige al Sr. Álvarez,
B_2 = se elige al Sr. Bolívar,
B_3 = se elige a la Sra. Chávez.

La probabilidad de que se aumenten las cuotas se expresa:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(B_i)\, P\left(\frac{A}{B_i}\right)$$

$$P(A) = P(B_1)\, P\left(\frac{A}{B_1}\right) + P(B_2)\, P\left(\frac{A}{B_2}\right) + P(B_3)\, P\left(\frac{A}{B_3}\right)$$

$$P(A) = (0.3)(0.8) + (0.5)(0.1) + (0.2)(0.4)$$

$$P(A) = 0.24 + 0.05 + 0.08$$

$$P(A) = 0.37$$

aplicando entonces el teorema de Bayes:

$$P\left(\frac{B_3}{A}\right) = \frac{P(B_3)\,P(\frac{A}{B_3})}{\sum_{i=1}^{3} P(B_i)\,P(\frac{A}{B_i})}$$

$$P(\frac{B_3}{A}) = \frac{P(B_3)\,P(\frac{A}{B_3})}{P(B_1)\,P(\frac{A}{B_1}) + P(B_2)\,P(\frac{A}{B_2}) + P(B_3)\,P(\frac{A}{B_3})}$$

sustituyendo por las probabilidades ya calculadas, se tiene:

$$P(\frac{B_3}{A}) = \frac{0.08}{0.24 + 0.05 + 0.08} = \frac{8}{37} \approx 0.22$$

En vista de que han aumentado las cuotas, este resultado sugiere que es probable que no sea la señora Chávez la presidenta del club.

Ejemplo:

El 20% de los empleados de una empresa son ingenieros y otro 20% son economistas. El 75% de los ingenieros ocupan un puesto directivo y el 50% de los economistas también, mientras que los no ingenieros y los no economistas solamente el 20% ocupa un puesto directivo. ¿Cuál es la probabilidad de que un empleado directivo elegido al azar sea ingeniero?

Solución:

$$p\left(ingeniero\ /\ directivo\right) = \frac{0.2 \cdot 0.75}{0.2 \cdot 0.75 + 0.2 \cdot 0.5 + 0.6 \cdot 0.2} = 0.405$$

Ejemplo:

Un fabricante tiene tres máquinas que llamaremos *x, y, z* que producen partes idénticas.

Se sabe que 5% de las partes producidas por *x* son defectuosas (D), y que los porcentajes de partes defectuosas que producen *y* y *z* son el 10% y 15% respectivamente.

Si se mezclan los productos de las tres máquinas y no hay manera de reconocer cuál ha sido producida por cual máquina. Pero se sabe que las tres máquinas tienen igual capacidad y funcionan al mismo ritmo de producción. Si se toma una parte producida, al azar, y se encuentra defectuosa. ¿Cuál es la probabilidad de que provenga de *y*? Es decir, calcular P(*Y/D*)

Si

P(*X*)= 1/3; P(*Y*)= 1/3; P(*Z*)= 1/3

y

P(*D/X*)= 0.05; P(*D/Y*)= 0.1; P(*D/Z*)= 0.15

entonces:

$$P(\frac{Y}{D}) = \frac{P(Y)P(\frac{D}{Y})}{P(X)P(\frac{X}{D}) + P(Y)P(\frac{Y}{D}) + P(Z)P(\frac{Z}{D})}$$

$$P(\frac{Y}{D}) = \frac{\frac{1}{3}(0.1)}{\frac{1}{3})(0.05) + \frac{1}{3}(0.1) + \frac{1}{3}(0.15)} = \frac{1}{3} \approx 0.33$$

3.8 Variables Aleatorias y Distribución de Probabilidad

Una variable aleatoria es aquella que asume diferentes valores a consecuencia de los resultados de un experimento aleatorio, esto significa que para una prueba específica (evento o suceso) de un experimento, el valor de la variable estará determinado por factores al azar. Se puede enunciar este concepto de la siguiente forma:

Si los valores que toma un símbolo (variable) están asociados a los sucesos aleatorios elementales en el espacio muestral de un experimento dado, y depende por tanto de factores al azar en cuanto a sus ocurrencias, el símbolo se llama variables aleatorias.

Se puede entonces concebir la variable aleatoria como un valor o magnitud que cambia entre una y otra ocurrencia en una secuencia indefinida.

Sea Ω el espacio muestral asociado a un experimento aleatorio. Se llama variable aleatoria a toda aplicación del espacio muestral en el conjunto de los números reales. Esto quiere decir, la variable aleatoria asocia a cada elemento del espacio muestral un número real.

Al obtener una muestra en forma aleatoria de una característica en la cual se observan diversos valores, esto nos lleva a definir a esta característica como una variable aleatoria. Por ejemplo:

- El ingreso anual en una ciudad
- Los puntajes obtenidos en un curso
- El número de llamadas en 50 minutos en un conmutador
- El tiempo entre llamadas nacionales recibidas en un día
- El número de llegadas a un supermercado en una hora
- La temperatura en un momento dado en la Ciudad de Panamá.

Las variables aleatorias pueden ser discretas o continuas conforme sean los eventos de un experimento, continuos o discretos. Si se permite que una variable aleatoria adopte sólo un número limitado de valores, en otras palabras, sus posibles valores constituyen un conjunto finito o infinito numerable. se le llama *variable aleatoria discreta*. Por el contrario, si se le permite asumir cualquier valor dentro de determinados límites, es decir, puede tomar cualquier valor de R, recibe el nombre de *variable aleatoria continua*.

Si a los valores que toma una variable se le asigna sus correspondientes probabilidades se genera una distribución de probabilidad. Esta es una lista de los resultados de un experimento y describe la forma en que varían los mismos, con las probabilidades que según se espera se asociaran a esos resultados. La regla para asignar probabilidades toma dos formas distintas dependiendo de si la variable aleatoria es discreta o continua.

Ejemplo:

Se extraen en forma sucesiva dos bolas (sin reemplazo) de una urna que contiene 4 bolas rojas y 3 negras. Si se define *y* como la variable aleatoria que denota el número de bolas rojas observadas, los posibles resultados y valores que toman se muestran a continuación:

Espacio muestral	*y*
RR	2
RN	1
NR	1
NN	0

Ejemplo:

Un empleado de almacén le regresa, en forma aleatoria, tres cascos de seguridad, previamente revisados, a tres empleados de una fundadora. Si Tapiero, Zapata y Corro, en ese orden, reciben uno de tres cascos, liste los puntos muestrales para los órdenes posibles de devolución de los cascos y encuentre los valores *m* de la variable aleatoria *M* que representa el número de asociaciones correctas.

Solución:

Si *T*, *Z* y *C* representan los cascos de Tapiero, Zapata y Corro respectivamente, entonces los arreglos posibles en los que podrían devolverse los cascos y el número de asociaciones correctas son:

Espacio Muestral	*m*
TZC	3
TCZ	1
ZTC	1
ZCT	0
CTZ	0
CZT	1

Ejemplo:

Consideremos a la variable aleatoria *X* como la cantidad de águilas observadas cuando se lanzan dos monedas. El espacio muestral es el conjunto {*AA*, *AS*, *SA*, *SS*} y se puede ver que la variable *X* puede tomar como valores 0, 1 y 2.

Calculando las probabilidades tenemos:

P(de no observar águilas)	=	$P(SS)$	=	$P(X=0)$	=	¼
P(de observar un águila)	=	$P(SA \cup AS)$	=	$P(X=1)$	=	$^2/_4$
P(de observar dos águilas)	=	$P(AA)$	=	$P(X=2)$	=	¼

Si ahora se organizan estos resultados con el siguiente formato:

X	***P*(*X*=*x*)**
0	¼
1	$^2/_4$
2	¼

En cada uno de los tres ejemplos anteriores, el espacio muestral contiene un número finito de elementos.

3.8.1 Variable Aleatoria Discreta

Una variable aleatoria que puede asumir una cantidad finita de valores, o una sucesión infinita de valores como: 0,1,2,..., se llama *variable aleatoria discreta,* en otras palabras, se dice que es discreta si los números asignados a los sucesos elementales del espacio muestral son puntos aislados y esos posibles valores constituyen un conjunto finito o infinito numerable. Por ejemplo, consideremos el experimento en que un médico presenta el examen de certificación de especialización. El examen consta de 5 partes. Se puede definir la variable aleatoria discreta como x = la cantidad de partes aprobadas del examen. Esta variable discreta puede asumir la cantidad finita de valores 0,1,2,3,4 o 5.

Otro ejemplo de variable aleatoria discreta: Un experimento relacionado a los vehículos que llegan a una caseta de cobro. La variable aleatoria de interés es x = cantidad de vehículos que llegan en un día. Los valores posibles de x provienen de la sucesión de enteros 0,1,2, etc. Por consiguiente, x es una variable aleatoria discreta que toma uno de los valores de esta sucesión infinita.

Aunque muchos experimentos tienen resultados que se pueden describir naturalmente con valores numéricos, existen otros que no. Por ejemplo, una pregunta de una encuesta puede pedir a la persona que recuerde el mensaje de un comercial televisivo reciente. Habría dos resultados experimentales:

- El individuo no puede recordar el mensaje y
- el individuo si puede recordarlo.

Podemos seguir describiendo estos resultados experimentales en forma numérica, si definimos a la variable aleatoria discreta x como sigue:

Sea

x = 0 si el individuo no puede recordar el mensaje, y
x = 1 si sí lo puede recordar.

Los valores numéricos para esta variable aleatoria son arbitrarios (se podría haber usado 5 y 10), pero se pueden captar en términos de la definición de variable aleatoria; x es una variable aleatoria porque asigna una descripción numérica al resultado del experimento.

Algunos ejemplos adicionales de variables aleatorias discretas son:

Ejemplos de Variables Aleatorias Discretas		
Experimento	Variable Aleatoria (x)	Valores posibles de las variables aleatorias
Llamar a 5 clientes	Cantidad de clientes que hacen pedido	0,1,2,3,4,5
Inspeccionar un embarque de 50 radios	Cantidad de radios defectuosos	0,1,2,...,49,50
Funcionamiento de un restaurante durante un día	Cantidad de clientes	0,1,2,3...
Vender un automóvil	Sexo del cliente	0 si es hombre, 1 si es mujer

Observamos que, en cada ejemplo, la variable aleatoria discreta asume, o toma una cantidad finita o infinita de valores como 0,1,2... etc.

Resulta conveniente representar todas las probabilidades de una variable aleatoria discreta *X* a través de una fórmula. Esta fórmula sería necesariamente función de los valores numéricos *x*, que se denotarán por *f(x), g(x), r(x)* y así sucesivamente.

Se puede entonces describir $f(x)= P(X= x)$; es decir, por ejemplo, $f(3)= P(X= 3)$. Al conjunto de pares ordenados $(x, f(x))$ se le denomina función de probabilidad o distribución de probabilidad de la variable aleatoria X cuando ocurre el valor 3.
El conjunto de pares ordenados (x, $f(x)$) es una función de probabilidad de la variable aleatoria discreta X si, para cada posible resultado x:

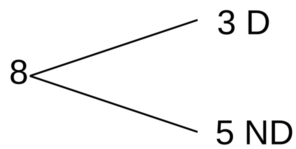
1. $f(x) \geq 0$.
2. $\Sigma f(x) = 1$.
3. $P(X= x)= f(x)$.

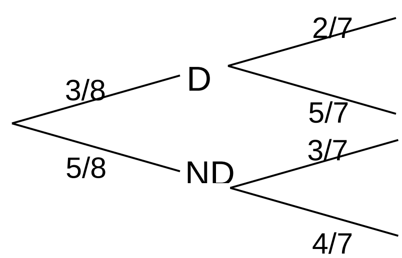
Ejemplo:

Un envío de 8 microcomputadoras similares para un distribuidor contiene 3 defectuosas. Si una empresa hace una compra aleatoria de 2 de esas computadoras, encuentre la distribución de probabilidad para el número de defectuosas.

Solución:

Sea X una variable cuyos valores x son los números posibles de computadoras defectuosas adquiridas por la empresa. Entonces x puede ser cualquiera de los números 0, 1 y 2. Ahora,





$$S = \left\{ \begin{array}{ll} D, & D \\ D, & ND \\ ND, & D \\ ND, & ND \end{array} \right\} \longrightarrow X = \text{Nº de computadoras defectuosas adquiridas por la empresa}$$

D	D	=	2
D	ND	=	1
ND	D	=	1

ND ND = 0 P(0) = 3/8 * 2/7 = 3/28

P(1) = 3/8 * 5/7 + 5/8 * 3/7
= 15/56 + 15/56
= 30/56 = 15/28

P(2) = 5/8 * 4/7
= 5/14

Por ello, la distribución de probabilidad de *X* es:

x	0	1	2
P(x)	3/28	15/28	5/14

Si 50% de los automóviles que vende una agencia están equipados con motores Diesel, encuentre una fórmula para la distribución de probabilidad del número de automóviles Diesel entre los siguientes 4 que esta agencia vende.

Solución:

La distribución de probabilidad *f(x)* = P(X = x) es:

$$f(x) = \binom{4}{x} \text{ entre 16; para } x = 0,1,2,3,4$$

f(0) = 1/16
f(1) = 1/4
f(2) = 3/8
f(3) = 1/4
f(4) = 1/16

Es posible trazar los puntos *(x, f(x))* del ejemplo anterior, para obtener la siguiente figura:

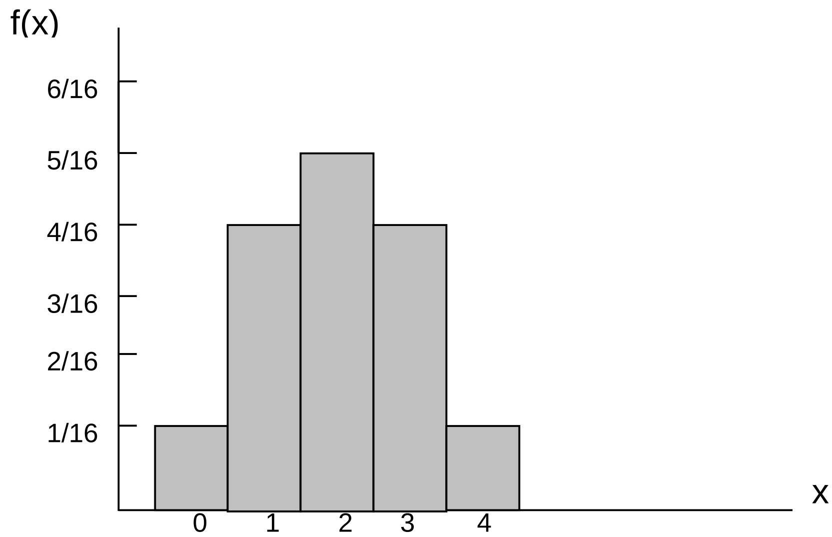


Figura 3.8 Diagrama de Barras

Al unir los puntos en el eje de las *x*, ya sea a través de una línea punteada o de una línea continua, se obtiene lo que comúnmente se denomina una gráfica de barras, la que hace que resulte muy sencillo observar cuáles son los valores de *X* que mayor probabilidad de ocurrencia y también señala una situación de perfecta simetría en este caso.

En vez de trazar los puntos *(x, f(x))*, es más frecuente que se construyan rectángulos. Aquí los rectángulos están construidos de manera que sus bases, de igual amplitud, están centradas en cada valor *x* y sus alturas son iguales a las correspondientes probabilidades dadas por *f(x)*. Las bases se construyen de manera que no queden espacios entre los rectángulos. A la siguiente figura se le denomina *histograma de probabilidad*.

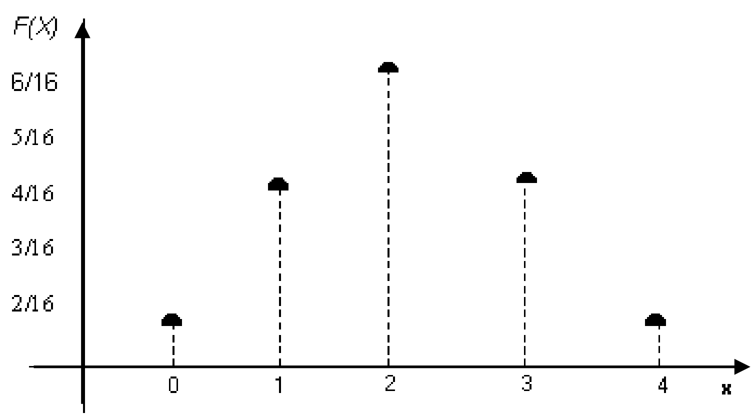


Figura 3.9 Histograma de Probabilidad

La gráfica de la distribución acumulada del ejemplo anterior (figura 3.10) aparece como una función de escalones, obtenida dibujando los puntos *(x, F(x))*.

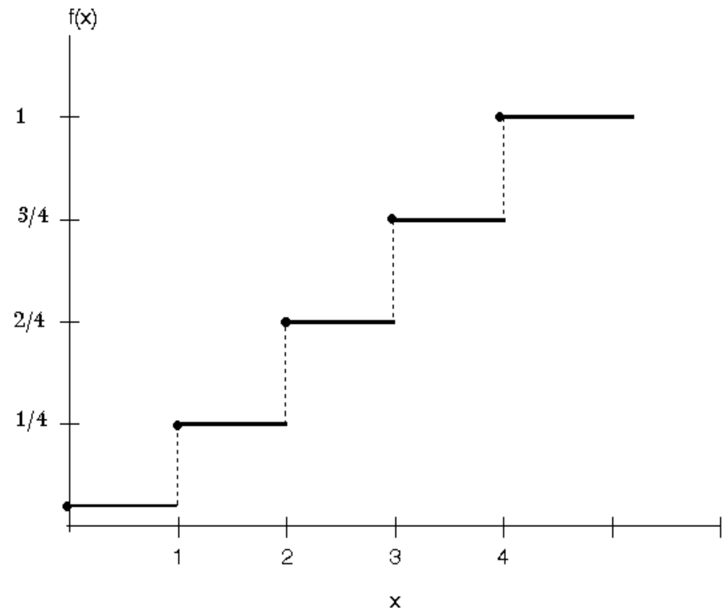


Figura 3.10 Distribución acumulada

Considere un experimento que consiste en lanzar tres veces una moneda. La variable aleatoria X denota el número de caras obtenidas en los tres lanzamientos.

La variable puede asumir los valores 0,1,2,3, formando 8 posibles eventos:

1 evento tiene 0 caras
3 eventos tienen 1 cara
3 eventos tienen 2 caras
1 evento tiene 3 caras

3.8.2 Variable Aleatoria Continua

Hasta el momento se han considerado las distribuciones de probabilidad para variables discretas, donde se podía asignar el valor que toma la función de probabilidad cuando la variable aleatoria tomaba un valor en concreto. Sin embargo, al considerar las variables continuas es posible que los datos que se puedan recabar no sean completamente exactos, o dos o más de ellos no coincidan, por lo que se tienen que trabajar en intervalos y, en ese momento, modelar una función se convierte en un problema serio. Si una variable aleatoria puede tomar cualquier valor numérico[5] en un intervalo o conjunto de intervalos se llama variable aleatoria continua, en otras palabras, si los valores asignados pueden ser cualesquiera, dentro de ciertos intervalos, es decir, puede tomar cualquier valor de R.

Los resultados experimentales que se basan en escalas de medición como el tiempo, el peso, la distancia y la temperatura se pueden describir mediante variables aleatorias continuas. Por ejemplo, imaginemos un ejemplo que consiste en monitorear las llamadas telefónicas que entran a la oficina de ajuste de una gran aseguradora. Suponga que la variable aleatoria de interés es el tiempo de llamadas consecutivas en minutos. Esta variable aleatoria puede asumir cualquier valor en el intervalo x >= 0. En realidad, hay una cantidad infinita de valores posibles para x, como 1.26 min., 2.751 min., 4.3333 min., etc.

Otro ejemplo es un tramo de 90 millas de la carretera interestatal I-75 al norte de Atlanta. Podríamos definir para un servicio de ambulancias de emergencia en Atlanta, la variable aleatoria x = la ubicación del siguiente accidente de tránsito en ese tramo de carretera. En este caso x sería una variable aleatoria continua que asume cualquier valor en el intervalo 0 <=x <= 90. Veamos los otros ejemplos de variables aleatorias continuas.

Ejemplos de Variables Aleatorias Continuas		
Experimento	Variable Aleatoria (x)	Valores posibles de las variables aleatorias
Funcionamiento de un banco	Tiempo entre llegadas de clientes en minutos	x >= 0
Llenar una lata de bebida (máx.=12.1 onzas)	Cantidad onzas	0 <=x <= 12.1
Proyecto para construir una nueva biblioteca	Porcentaje terminado del proyecto en 6 meses	0 <=x <= 100
Ensayar un nuevo proceso químico	Temperatura cuando se lleva a cabo la reacción	150 <=x <= 212

[5] con un rango infinito de valores.

	deseada (min=150° F; máx.=212° F)	

Como las variables aleatorias continuas pueden asumir alguna de un incontable (e infinito) número de valores posibles, tienen una probabilidad de cero de tomar *exactamente* cualquiera de sus valores, no significando esto que el valor es infinito, sino que resulta extremadamente imposible tomando en consideración el número infinito de alternativas. Por lo tanto, no se puede presentar su distribución de forma tabular, pero se puede tener una fórmula, la cual será función de los valores numéricos de la variable continua *X* y como tal se representa a través de la notación funcional *f(x)*, conocida normalmente como *función de densidad de probabilidad* o *función de densidad* de *X*.

La mayor parte de las funciones de densidad que tienen aplicaciones prácticas para el análisis de datos estadísticos son continuas y sus gráficas pueden tomar diversas formas (ver figura 3.11).

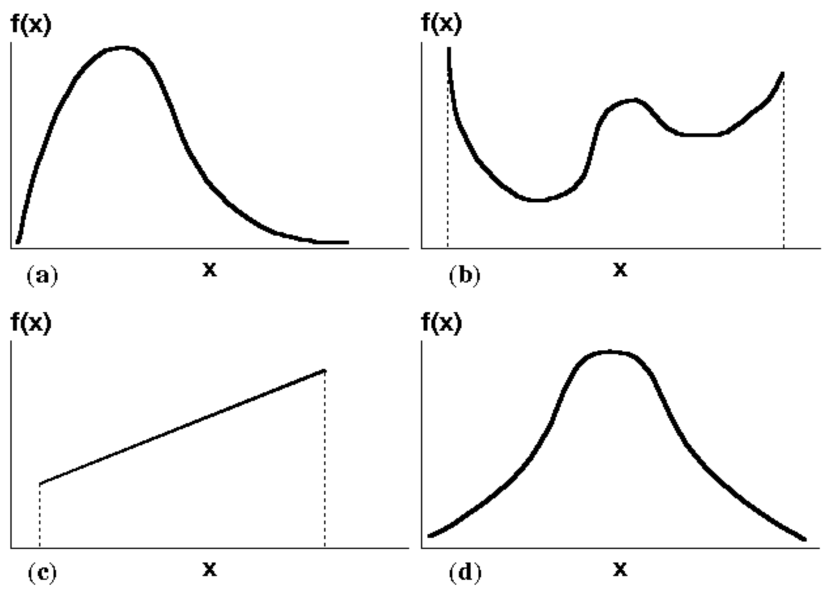


Figura 3.11 Funciones típicas de Densidad

Una función de densidad se construye de manera que el área bajo su curva, limitada por el eje de las *x* sea igual a 1 cuando se calcula en el rango de *X* para el que se ha definido *f(x)* (figura 3.12). Si este rango de *X* fuese un intervalo finito, siempre es posible ampliar el intervalo para incluir el conjunto total de números reales, al definir *f(x)*= 0 en todos los puntos de las porciones ampliadas del intervalo. Del cálculo de la integral se tiene que:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

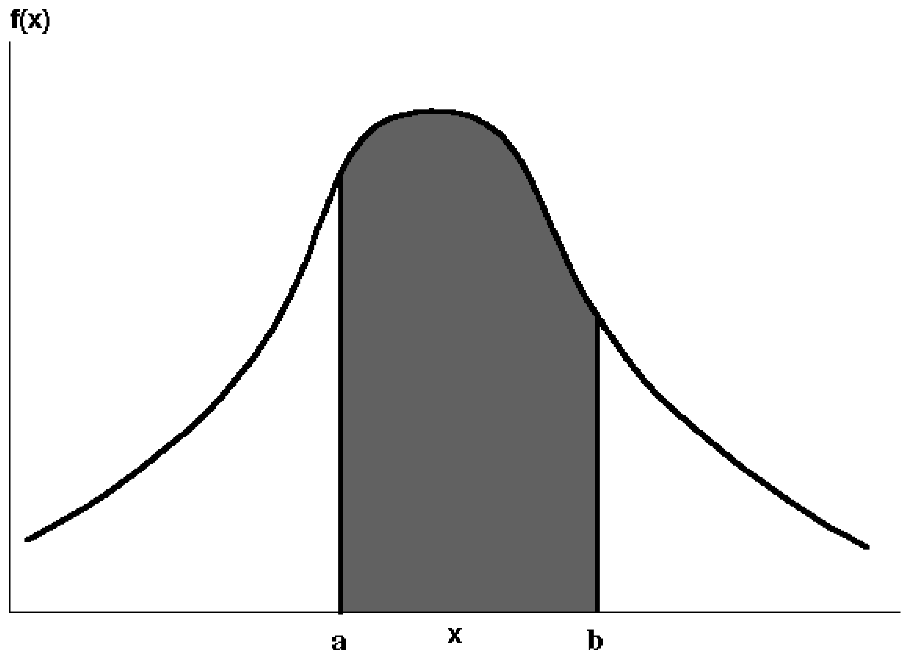


Figura 3.12 P(a < X < b)

Podemos añadir que la función *f(x)* es una función de densidad de probabilidad para la variable aleatoria continua *X*, definida sobre el conjunto de los números reales, *R*, si cumple con los siguientes enunciados:

1. $f(x) \geq 0 \;\; para\, toda\; x \in R$.
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$.
3. $P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx$.

La *distribución acumulada F(x)* de una variable aleatoria continua *X*, con función de densidad *f(x)*, está dada por:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \quad para - \infty < x < \infty \, ,$$

la cual define la probabilidad de que la variable aleatoria asuma un valor menor o igual a x.

La consecuencia inmediata de la definición anterior nos permite escribir lo siguiente como resultado:

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a)$$

y

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

en caso de que exista la derivada.

Ejemplo:

Suponga que el error en la temperatura de reacción, en grados centígrados, para un experimento controlado de laboratorio es una variable aleatoria continua *X* que tiene la función de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} x^2/3, & -1 > x < 2, \\ 0, & \end{cases}$$

Encuentre P $(0 < x \leq 1)$.

Solución:

$$P\,(0 < x \leq 1) = \int_0^1 \frac{x^2}{3}\,dx = \frac{x^3}{9}\Big|_0^1 = \frac{1}{9}$$

Ejemplo:

Para la función de densidad del ejemplo anterior, encuentre la función de distribución *F(x)* y utilícela para evaluar -1 < *x* < 2,

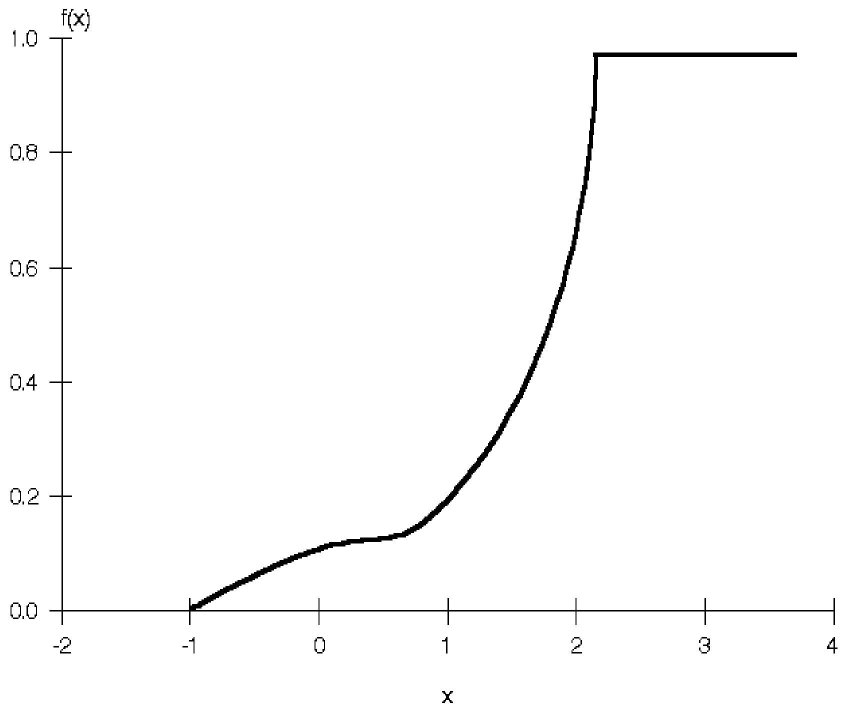


Figura 3.12 Distribución acumulada continua

Solución:

Para -1 < *x* < 2

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-1}^{x} dt = \left.\frac{t^3}{9}\right|_{-1}^{x} = \frac{x^3+1}{9}.$$ Por lo tanto

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ \dfrac{x^3+1}{9}, & -1 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

En la figura 3.12 se expresa en forma gráfica la distribución acumulada *F(x)*.

$$P(0 < X \leq 1) = F(1) - F(0) = \frac{2}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{9},$$

Ahora, lo cual concuerda con el resultado que se obtuvo al utilizar la función de densidad del ejemplo anterior.

3.8.3 Variable Aleatoria Mixta

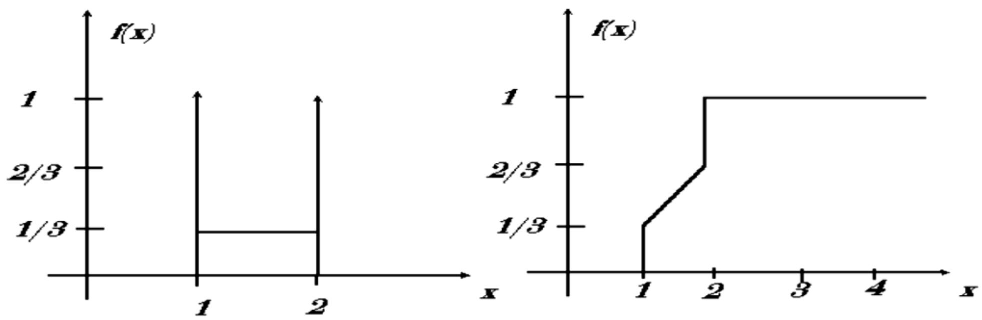
Hasta este momento las consideraciones se han restringido a variables aleatorias discretas o continuas, y para la mayor parte de las aplicaciones esto es lo adecuado. Sin embargo, ocasionalmente se presentará una situación en donde la variable aleatoria x puede tomar diferentes valores x_1, x_2, ..., x_k con probabilidad positiva y también puede tomar todos los valores en algún intervalo o colección de intervalos. Por ejemplo, considérese la distribución del tiempo de espera para un cliente que llega a la ventanilla de un banco. Si no hay personas en la línea, el tiempo de espera es cero, y existe una probabilidad positiva de que éste sea el caso; pero si hay uno o más clientes ya sean en la línea y/o están siendo atendidos, el tiempo de espera tomará algún valor sobre un intervalo.

Existen pues, variables aleatorias que pueden tomar valores continuos o discretos. Este tipo de variable se representa por medio de una distribución mixta. Estos casos se dan cuando la variable puede asumir cualquier valor discreto con probabilidad finita o puede asumir una continuidad de valores establecidos por una función de densidad, En palabras más sencillas es una variable aleatoria que tome unos valores puntuales con probabilidad dada, y el resto de los valores los toma dentro de uno o varios intervalos. La figura 3.13 describe una distribución donde los valores discretos 1 y 2 ocurren, cada una con una probabilidad de como se indica con las flechas. Los valores entre uno y dos están gobernados por la función de densidad *f(x)*= 1/3

La función de distribución muestra una unión con una distribución continua con valores igualmente probables, en la función acumulada muestra el mayor valor en el punto 2 y el menor valor en el punto 1.

La función de distribución acumulada para la variable mostrada es:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1/3 + (x - 1)/3, & 1 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$



De esta ecuación y de la figura anterior se observa que *F(X)* tiene discontinuidad en el punto 1 y en el punto 2. En los puntos de discontinuidad P (*X*= *x*) es igual al salto en *F(X)* hecho en el punto *x*. Por ejemplo, P (*X*= 1) = 1/3, sin embargo, para 1 < *x* < 2 es continuo en x y P(*X*= *x*)= 0.

Como conclusión podemos definir que una distribución discreta describe la probabilidad de ocurrencia de cada valor de una variable aleatoria discreta. Una variable aleatoria discreta es una variable aleatoria que tiene valores contables, tales como una lista de enteros no negativos.

Con una distribución de probabilidad discreta, cada valor posible de la variable aleatoria discreta puede estar asociado con una probabilidad distinta de cero. Por lo tanto, una distribución de probabilidad discreta suele representarse en forma tabular.

3.8 4 Esperanza y Momento

La esperanza y el momento son necesarios, algunas veces, para caracterizar a una variable aleatoria mediante uno o más valores que sumasen información contenida en una función de distribución de probabilidad.

Esperanza o Valor Esperado[6]:

El valor esperado, o media, de una variable aleatoria es una medida de la localización central (o tendencia central de esa variable). En otras palabras, la esperanza o valor esperado debe interpretarse como un promedio y el mismo nace de la práctica de los juegos de azar y representa para los jugadores la cantidad que ganarán, o perderán, después de jugar repetidamente cierto juego. La ecuación matemática del valor esperado de una variable aleatoria discreta x es la siguiente:

$$E(x) = \mu = \Sigma x f(x)$$

Se puede usar las notaciones E(x) y μ para representar el valor de una variable aleatoria. Para calcular el valor esperado de una variable aleatoria discreta debemos multiplicar x, (cada valor de ella), por *f(x), (*su probabilidad correspondiente), y después sumar todos los productos obtenidos.

Si la variable aleatoria x es continua tenemos que la media o valor esperado es:

$$E(x) = \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)dx$$

La esperanza tiene algunas propiedades, tales como:

- La esperanza de una constante es la propia constante.
- La esperanza de una función lineal es la misma función lineal de la esperanza. La linealidad los operadores integral y sumatorio garantizan el cumplimiento de esta propiedad.

[6] Media

Ejemplo:

Durante los últimos 300 días de operación los datos de ventas de Motores di Carlo muestran que en 54 días no se vendieron automóviles, en 117 se vendió un automóvil, en 72 se vendieron 2; en 42, 3 en 12, 4 y en 3 días se vendieron 5 automóviles. Sabemos que x es una variable aleatoria discreta que puede asumir los valores 0,1,2,3,4 o 5. Como los datos históricos muestran que en 54 de 300 días no se vendieron automóviles, asignaremos el valor de 54/300 = 0.18 a *f(0)*, 117/300 = 0.39 a *f(1)* y así con los siguientes y tendremos:

X	*f(x)*	x*f(x)*
0	0.18	0(0.18)
1	0.39	1(0.39)
2	0.24	2(0.24)
3	0.14	3(0.14)
4	0.04	4(0.04)
5	0.01	5(0.01)
		1.50

$$E(x) = \mu = \Sigma x f(x)$$

Describimos el cálculo del valor esperado de la cantidad de automóviles que se venden en un día. La suma de los elementos de la columna x*f(x)* muestra que el valor esperado es de 1.5 automóviles por día. En consecuencia, sabemos que, aunque es posible vender 1,2,3,4 o 5 automóviles en cualquier día, Motores di Carlo puede esperar a la larga, la venta de un promedio de 1.5 automóviles por día. Si ponemos que la operación durante un mes equivale a 30 días se puede usar el valor esperado de 1.50 para anticipar que las ventas mensuales promedios son 30(1.50) = 45 automóviles.

Ejemplo:

En un juego de azar, se le paga a una persona 5 dólares si al tirar al aire tres monedas obtiene puras caras o puros sellos, mientras que esta persona deberá pagar 3 dólares si obtiene sólo 1 o 2 caras. ¿Cuál es la ganancia esperada del jugador?

Solución:

El espacio muestral formado por todos los posibles resultados que pueden obtenerse cuando se tiran tres monedas de manera simultánea, o en forma equivalente si la moneda se tira 3 veces sucesivas, es:

S = {(CCC),(CCS),(CSC),(SCC),(CSS),(SCS),(SSC),(SSS)}; para C = cara y S = sello

Se puede argumentar que cada una de estas posibilidades es igualmente probable y ocurre con una probabilidad = 1/8.

La variable aleatoria de interés es Y, la cantidad que el jugador puede ganar y los valores posibles de Y son $ 5.00, si ocurre el evento E_1= {CCC, SSS} y -$3.00 si ocurre el evento E_2= {CCS, CSC, SCC, CSS, SCS, SSC}. Puesto que E_1 y E_2 se presentan con probabilidades de 1/4 y 3/4 respectivamente, se deduce que $\mu = E(Y) = 5(1/4) + (-3)(3/4) = -1$. En este juego, el apostador perderá en promedio $1.00 al tirar las tres monedas.

Varianza o Momento:

Si bien el valor esperado representa el promedio de la variable aleatoria, con frecuencia se necesita conocer una medida de dispersión o variabilidad. Entre otras se utiliza la varianza para resumir la variabilidad en los valores de una variable aleatoria. La varianza de una variable aleatoria es una medida de propagación de la distribución de probabilidad. En palabras más sencillas, son los valores esperados de ciertas funciones de X. los cuales forman una colección de medidas descriptivas que pueden emplearse para caracterizar la distribución de probabilidad de X y especificarlas si todos los momentos de X son conocidos.

Varianza de una variable aleatoria discreta Var(x) = $\sigma^2 = \Sigma(x-\mu)^2 f(x)$.

Si una variable aleatoria tiene una varianza pequeña entonces los eventos tienden a ocurrir cerca del valor esperado.

La raíz cuadrada de la varianza indica la desviación estándar de la variable aleatoria:

$$\Gamma_x = \sqrt{VAR(x)} \qquad \Gamma_x = \sqrt{\Gamma_x^{\,2}}$$

Ejemplo:

El cálculo de la varianza para la distribución de probabilidad de la cantidad de automóviles vendidos en Motores di Carlo durante un día es la siguiente:

x	**x-μ**	**$(x-\mu)^2$**	***f(x)***	**$(x-\mu)^2$ *f(x)***
0	0-1.50 = -1.50	2.25	0.18	2.25(0.18) = 0.4050
1	1-1.50 = -0.50	0.25	0.39	0.25(0.39) = 0.0975
2	2-1.50 = 0.50	0.25	0.24	0.25(0.24) = 0.0600
3	3-1.50 = 1.50	2.25	0.14	2.25(0.14) = 0.3150
4	4-1.50 = 2.50	6.25	0.04	6.25(0.04) = 0.2500
5	5-1.50 = 3.50	12.25	0.01	12.25(0.01) = <u>0.1225</u> 1.2500

$$\sigma^2 = \Sigma(x-\mu)^2 f(x)$$

Vemos que la varianza es de 1.25. La desviación estándar σ, se define como la raíz cuadrada positiva de la varianza. Así, la desviación estándar de la cantidad de autos vendidos en un día es:

$$\sigma = \sqrt{1.25} = 1.118.$$

La desviación estándar se mide con las mismas unidades que la variable aleatoria (σ = 1.118 automóviles) y en consecuencia se prefiere en muchas ocasiones para describir la variabilidad de una variable aleatoria. La varianza σ^2 se mide con las unidades elevadas al cuadrado, y por ello es más difícil de interpretar.

Covarianza:

Si *X y Y* son variables aleatorias, entonces la covarianza de X y *Y* denotada por COV(*X, Y*) se define como:

$$COV[X, Y] = E[(X - E[X]) (Y - E[Y])]$$

La covarianza es importante porque mide la asociación lineal entre *X* y *Y*. Si el resultado de *X* no tiene influencia en el resultado de *Y*, entonces *X* y *Y* se dicen independientes y la COV[*X, Y*] puede ser cero. Más formalmente, *X* y *Y* son independientes si y sólo si:

P(*y/x*) = P(*y*) {En el caso discreto donde P (*Y/X*) es la probabilidad de *Y*= *X* dado que ocurra *X*= *x*.}

f(*y/x*) = f(*y*) {En el caso continuo donde f(*Y/X*) es la función de densidad condicional de *Y* para *X*= *x*..}

Esta expresión indica que la distribución de probabilidad de *Y* conocida la de *X*, es la misma que la distribución de probabilidad de *Y* desconocida la de *X*. En otras palabras, la covarianza es un valor que indica el grado de variación conjunta de dos variables aleatorias respecto a sus medias. Por lo tanto, se puede decir que, es el dato básico para determinar si existe una dependencia entre ambas variables y además es el dato necesario para estimar otros parámetros básicos, como el coeficiente de correlación lineal o la recta de regresión.

Coeficiente de Correlación:

Es una medida de dependencia que está relacionada a la covarianza, denotado por ρ y definido como:

> El coeficiente de correlación tiene un rango de -1 a 1 con un valor cero indicando la no-correlación entre *X* y *Y*. Los valores cercanos a esos límites indican una fuerte relación. Mientras el coeficiente se acerque más a 0, la relación es más débil. Un signo positivo indica que *Y* tiende a ser alto cuando *X* es alto y un signo negativo indica que *Y* tiende a ser bajo cuando *X* es elevado.

Si el ajuste es lineal entonces la magnitud de ρ indica el grado de linealidad, de correlación o el grado exponencial de *Y* cuando se grafica contra *X*, y se calcula el coeficiente de correlación como una medida del grado de asociación entre dos variables. Si una gráfica de *Y* versus *X* es una línea recta, entonces ρ ± 1.

Cuando *X* y *Y* son independientes entonces una gráfica de *Y* versus *X* puede producir puntos al azar y puede ser cero. En la figura 3.14 se presentan diagramas de dispersiones típicas de *Y versus X* para diferentes valores de ρ.

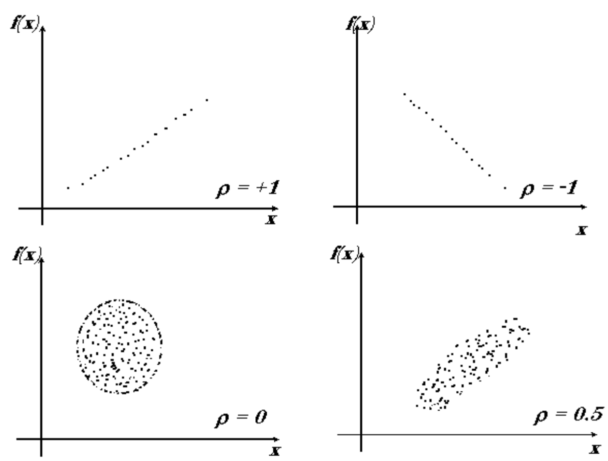


Figura 3.14 Diagramas de Dispersión

3.9 Distribuciones de Probabilidad

En las secciones anteriores se describieron las propiedades de las variables aleatorias. Basándonos en estos conceptos, se puede pasar ahora a estudiar las probabilidades como una función.

Las características de las diferentes distribuciones que se tratarán son las que llevarán al modelador a seleccionar una de estas, para una variable aleatoria particular, de manera que represente matemáticamente un proceso aleatorio.

La probabilidad de un evento o suceso se puede expresar como una función porque a cada valor distinto posible de una variable aleatoria X, que en verdad es un suceso, le corresponde una probabilidad de ocurrencia entre cero (0) y uno (1), incluidos. En otras palabras, existe una probabilidad que se puede asignar a cada valor posible de x, que es un evento elemental o compuesto.

Si los valores de X son mutuamente exclusivos o colectivamente exhaustivos, entonces la función de probabilidad para todos los valores de X se puede considerar como una distribución de probabilidades.

Esto significa que, dado un experimento, se llama distribución de probabilidades a una expresión de probabilidades que tiene por dominio un conjunto de valores mutuamente exclusivos y exhaustivos por el experimento.

La naturaleza de una distribución particular de probabilidades depende de la variable que se esté considerando.

La distribución de probabilidades se concibe como una distribución técnica de frecuencia.

Diferencia entre Distribución de Frecuencia y Distribución de Probabilidad:

Una distribución de frecuencia[7] es el "listado" de todos los puntos muestrales con la frecuencia "real" con que sean presentadas cuando se llevó a cabo el experimento. Mientras que una distribución de probabilidades es un listado de todos los resultados posibles que podrán presentarse si se efectúa el experimento. Es decir, una distribución de probabilidades no es más que el resultado o puntos muestrales de un experimento con sus respectivas probabilidades.

---

[7] Conocida también como *histograma*.

Ejemplo:

Se tiran dos monedas legales
A: denota el evento de observar el resultado de la cara superior (C= cara, S= sello):

Evento	P(A)
CC	0.5 x 0.5 = 0.25
CS	0.5 x 0.5 = 0.25
SC	0.5 x 0.5 = 0.25
SS	0.5 x 0.5 = 0.25

Una distribución de probabilidades también incluye el determinar la presencia de “cara” en el experimento.

La siguiente tabla es la distribución de probabilidad de X números de sellos en el juego de dos monedas perfectas.

Cara	Evento	P(X)
0	SS	0.25
1	CS, SC	0.50
2	CC	0.25
		1.00

Es importante resaltar que la distribución de probabilidades se puede resumir de forma concisa mediante la distribución de probabilidades acumuladas, que da las probabilidades
para $X \leq x$, donde x representa todos los valores en el dominio de la función X.

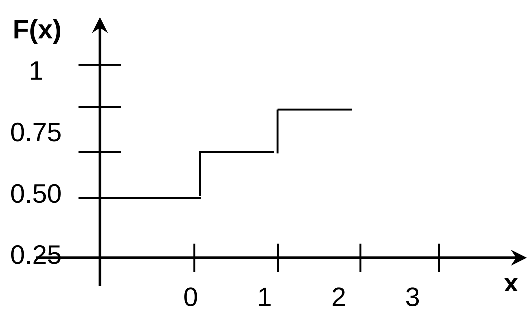


Figura 3.15: Gráfica de la Distribución de Probabilidad de x

3.9.1 Principio de Bernoulli

Una repetición de pruebas o experimentos aleatorios independientes se llama Proceso de Bernoulli si solo hay dos posibles resultados para cada prueba y la probabilidad para cada resultado posible permanece constante durante la prueba. A estas dos probabilidades se les suele denotar por p y q, indicando con p la probabilidad de éxito E y q la probabilidad de falla F.

$$p, q > 0 \quad \text{y} \quad p + q = 1.$$

El espacio muestral para cada prueba de Bernoulli es constituido solo por dos puntos
X = {1, 0} ó {Éxito, Fracaso} o {v, f}, etc. Su esperanza matemática E[X] será igual a p y su varianza será $p(1-p)$.

Ejemplo:

De sucesivos lanzamientos de una moneda simétrica se tiene que: $p = q = 1/2$.

Ejemplo:

De sucesivos lanzamientos de un dado no cargado de 6 caras, donde:

E: denota el evento de observar el 1.

F: Denota el evento de obtener 2,3,4,5 o 6;

Tendremos entonces que P(E) = 1/6 $\longrightarrow$ p = 1/6

P(E) = 5/6 $\longrightarrow$ q = 5/6

Ejemplo:

E: denota el evento de observar un número par.

F: denota el evento de observar un número impar.

Se tendrá entonces que P(E) = P(F) = ½. Si se define el éxito como la observación de un número par $\Longrightarrow$ p = q = ½.

Las pruebas de Bernoulli constituyen un modelo teórico y solo la experiencia puede mostrarnos si este es adecuado o no para describir determinada observación.

En este sentido, el hecho de lanzamientos sucesivos de una moneda simétrica conforma una prueba de Bernoulli se basa en experiencias obtenidas vía experimentación. Sin embargo, no se puede dejar de mencionar que cada uno de nosotros después de que se han realizado 20 lanzamientos y ha caído siempre sello se ve más probable de que en el próximo lanzamiento saldrá cara. Esto último no tiene que ver con imperfecciones de la moneda, más bien está relacionado con la "memoria", es decir se está negando la independencia estocástica de pruebas sucesivas.

El espacio muestral de n pruebas de Bernoulli tiene 2^n puntos, cada uno con una secuencia de n letras E, F representando los posibles resultados.
Como cada prueba es independiente de la otra tendremos:

P(EEEFF...FEFE) = P(E)P(E)P(E)P(F)P(F)...P(F)P(E)P(F)P(E) = *pppqq...qpqp*
Cada evento en el ensayo de Bernoulli es mutuamente excluyente y colectivamente exhaustivo. La probabilidad se mantiene igual en cada ensayo.

Como el modelo tiene solamente dos clases de sucesos también se le conoce como *modelo probabilístico de dos puntos*.

La varianza y la desviación típica están denotadas por VAR(Y) y Γ_y se obtienen de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} VAR(y) &= E(y^2) - E[(y)]^2 \\ &= \Gamma^2(1 - P) + 1^2(P) - P^2 \\ &= P - P^2 \\ &= p(1 - p) \\ &= pq \end{aligned}$$

Donde:

$$\Gamma_y = \sqrt{VAR(y)} = pq$$

La media de una variable es igual a la probabilidad de un éxito y la varianza es igual a la probabilidad de un éxito multiplicado por la de un fallo.

Características de los Procesos de Bernoulli:

- Existen n ensayos, cada uno de los cuales tienen dos resultados mutuamente excluyentes que pueden clasificarse como *éxito o fracaso*.
- La probabilidad de un *éxito p* permanece fija en cada ensayo.
- La probabilidad de *fracaso q* permanece fija en cada ensayo y *q = 1 - p*.
- La variable aleatoria X es el número total de éxitos en *n* ensayos.

Ejemplo:

Un vendedor calcula que cada entrevista con un cliente lleva una venta con probabilidad de 0.2. Cierto día, entrevista dos clientes, (V y F), calcule la distribución de probabilidad del número por clientes que firman un contrato de ventas (asumir que las entrevistas representan sucesos independientes).

X	P(X)
VV	0.2 x 0.2 = 0.04
VF	0.2 x 0.8 = 0.16
FV	0.8 x 0.2 = 0.16
FF	0.8 x 0.8 = 0.64
	1.00

X	P(X)
0	0.64
1	0.32
2	0.04
	1.00

Ejemplo:

Un dado se lanza 25 veces. Un resultado exitoso es la ocurrencia de un 6. Este es un ejemplo de un proceso de Bernoulli. Si se supone que el dado sea legal, la probabilidad de éxito en cada ensayo es 1/6, o sea p = 1/6. Si la probabilidad de éxito es 1/6, la de un fracaso q es q = 1 - p = 1 - 1/6 = 5/6. Los sucesivos lanzamientos de un dado son estadísticamente independientes. La variable aleatoria X es el número de veces que sale un 6 en 25 lanzamientos.

3.9.2 Distribución Binomial

La distribución binomial de probabilidad es una distribución discreta de probabilidad que tiene muchas aplicaciones. Se relaciona con un experimento de etapas múltiples que llamamos binomial. Además, es uno de los modelos matemáticos (expresión matemática para representar una variable) que se utiliza cuando la variable aleatoria discreta es el número de éxitos en una muestra compuesta por n observaciones.

Sea Ω el espacio muestral de un experimento aleatorio y E uno de sus eventos simples. Si al realizar el experimento resulta el evento simple E, se dice que E ha sido un **éxito**, de lo contrario se dice que ha sido un **fracaso**.

Un experimento binomial tiene cuatro propiedades:

- El experimento consiste en una sucesión de n intentos o ensayos o experimentos idénticos.
- En cada intento son posibles dos resultados: A uno lo llamaremos *éxito* y al otro *fracaso.*
- La probabilidad de un éxito, representada por p no cambia de un intento a otro. En consecuencia, la probabilidad de un fracaso, representado por $1 - p$, no cambia de un intento a otro.
- Los intentos son independientes.

Si existen las 3 últimas propiedades, se dice que los intentos se generan mediante un proceso de Bernoulli. Si además existe la propiedad 1, se dice que se tiene un experimento binomial.

En un experimento binomial interesa la *cantidad de éxitos que suceden en los n ensayos.* Si hacemos que x represente la cantidad de éxitos en los *n* intentos, vemos que x puede asumir los valores 0,1,2, 3,...,n. Como la cantidad de valores es finita, x es una variable aleatoria *discreta.* Por ejemplo, veamos el experimento de lanzar una moneda 5 veces y, en cada tirada observar si la moneda cae “cara” o “sello” hacia arriba. Suponga que nos interesa contar la cantidad de caras que aparecen en los 5 lanzamientos. ¿Tiene este experimento las propiedades de un experimento binomial? ¿Cuál es la variable aleatoria de interés? Observe que:

- El experimento consiste en 5 intentos idénticos y cada intento implica lanzar una moneda.
- Son posibles dos resultados para cada intento: cara o sello.
- Podemos convenir en que cara es un éxito y sello un fracaso.

- La probabilidad de cara y la probabilidad de sello son iguales para cada intento, siendo *p* = 0.5 y 1 - *p* = 0.5.
- Los intentos o lanzamientos son independientes, porque el resultado de cualquier intento no se afecta por lo que suceda en los demás intentos.

Entonces, vemos que se satisfacen las propiedades de un experimento binomial. La variable aleatoria de interés es x = la cantidad de caras en los 5 intentos. En este caso, *x* puede asumir los valores 0, 1, 2, 3, 4, o 5.

Fórmula de Distribución de Probabilidad Binomial:

$$f(x) = \frac{n!}{x!\,(n-x)!}\, p^{x}\, q^{n-x}$$

n = número de intentos
p = probabilidad de éxito de cualquier intento
x = variable aleatoria que representa el número de éxitos de n intentos
q = probabilidad de fracaso de cualquier intento
f(x) = probabilidad de x éxito en n intentos

Ejemplo:

Fijémonos en las decisiones de compra de los siguientes 3 compradores que entran a la Tienda de Ropa M&M. Con base a su experiencia, el gerente de la tienda estima que la probabilidad de que cualquier cliente compre es de 0.3. ¿Cuál es la probabilidad de que 2 de los siguientes 3 clientes hagan una compra?

Tenemos que:

n = 3 clientes
p = 0.30
q = 0.70
x = 2 clientes

$$f(x) = \frac{n!}{x!\,(n-x)!}\, p^{x}\, q^{n-x}$$

$$f(x) = \frac{3!}{2!\,(3-2)!}\,(0.30)^{2}\,(0.70)^{3-2}$$

f(x) = 0.189

Valor Esperado y Varianza para la Distribución Binomial de Probabilidad:

La media de una variable binomial X es el n número promedio de éxitos cuando el número de muestras de tamaño n tomadas por el principio de Bernoulli, tiende a infinito.

$$\mu = E(X) = \sum_{x=0}^{n} X \; P(X)$$

La media de X es la suma de los productos de los valores que puede tomar X multiplicados por sus respectivas probabilidades, se expresa así:

$$\mu = \mathrm{n}\rho$$

La varianza es:

$$\mathrm{VAR(X)} = \mathrm{E(X^2)} - \Gamma^2$$

$$= \sum_{x=0}^{n} X^2 \, P(X) - \mu^2$$

$$= \mathrm{n}\rho\mathrm{q}$$

y la desviación estándar:

$$\Gamma = \sqrt{\sum_{x=0}^{n} X^2 \, P(X) - \mu^2}$$

$$= \sqrt{n \; p \; q}$$

Para el problema de la Tienda de Ropa M&M para 3 clientes, podemos calcular la cantidad esperada de clientes que hacen una compra:

$$\mathrm{E(x)} = np = 3\ (0.30) = 0.90$$

La varianza y la desviación estándar de la cantidad de clientes que hacen una compra son:

$$\sigma^2 = npq = 3(0.30)(0.70) = 0.63$$

$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{0.63} = 0.79$ que la desviación estándar.

3.9.3 Distribución de Poisson

La distribución de Poisson se utiliza frecuentemente para el modelado de tasas de llegada en situaciones de espera en cola.

Si se satisfacen las dos probabilidades siguientes, la cantidad de ocurrencia es una variable aleatoria que se describe con la función de probabilidad de Poisson:
Propiedades de un experimento Poisson:

1. La probabilidad de una ocurrencia es igual en dos intervalos cualesquiera de igual longitud.
2. La ocurrencia o no-ocurrencia en cualquier intervalo es independiente de la ocurrencia o no-ocurrencia en cualquier otro intervalo.

Esta distribución es una de las más importantes distribuciones de variable discreta y pertenece usualmente al número de eventos ocurridos en un periodo de tiempo específico, bajo presupuestos de aleatoriedad y ciertas circunstancias restrictivas. Se origina cuando se quiere determinar las observaciones de interés por unidad de tiempo y espacio. Es una distribución asimétrica cuya asimetría es positiva.

Función de Probabilidad de Poisson:

$$f(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

donde:

f(x) = probabilidad de x ocurrencias en un intervalo
λ = valor esperado o cantidad promedio de ocurrencias en un intervalo
e = 2.71828

Ejemplo:

Supongamos que nos interesa la cantidad de llegadas a la ventanilla de servicio en automóvil de un banco, durante un período de 15 minutos en las mañanas de los días hábiles. Si podemos suponer que la probabilidad de que llegue un automóvil durante 2 intervalos cualesquiera de igual longitud de tiempo y que la llegada o no llegada en cualquier intervalo de tiempo no depende de la llegada o no llegada en cualquier otro período, se puede aplicar la distribución de Poisson. Supongamos que se satisfacen esas hipótesis y que un análisis de datos históricos muestra que la cantidad promedio de automóviles que llega en un período de 15 minutos es 10. La gerencia desea conocer la probabilidad de que haya exactamente 5 llegadas en 15 minutos.

Tenemos:

$\lambda = 10$
$x = 5$

$$f(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

$$f(5) = \frac{10^5 e^{-10}}{5!}$$

$$f(5) = 0.0378$$

Media y Varianza de la Distribución de Poisson:

Media:

$$\mu = \lambda$$

Varianza:

$$\sigma^2 = \lambda$$

Desviación Estándar:

$$\Gamma = \sqrt{\lambda}$$

Aproximación de la Distribución de Poisson y la Distribución Binomial:

Se puede usar la distribución de probabilidad de Poisson como aproximación a la distribución binomial cuando ***p**, la probabilidad de éxito,* es pequeña y ***n**, la cantidad de los intentos* es grande. Tan sólo se iguala $\lambda = np$ y se usan las tablas de Poisson.

Como regla general la aproximación será buena siempre y cuando $p <= 0.05$ y $n >= 20$.

Ejemplo:

Se desea calcular la probabilidad binomial de x = 3 éxitos en n = 250 intentos, cuando $p = 0.01$. Para usar la aproximación Poisson, igualamos:

$$\lambda = np = 250\,(0.01)$$

$$f(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

$$f(5) = \frac{2.5^3 e^{-2.5}}{3!}$$

$$f(5) = 0.2138$$

3.9.4 Distribución Geométrica

Supóngase que en una sucesión de ensayos queremos saber el número de ensayos en que ocurre el primer éxito y que todas las suposiciones fundamentales de la distribución binomial, menos la de que n es constante, se satisfacen; en otras palabras, n no es fija. De manera general, podemos decir que la distribución geométrica es un modelo adecuado para aquellos procesos en los que se repiten pruebas hasta la consecución del éxito a resultado deseado y tiene interesantes aplicaciones en los muestreos realizados de esta manera. También implica la existencia de una dicotomía de posibles resultados y la independencia de las pruebas entre sí.

Es claro que, si el primer éxito ocurre en el x-éximo ensayo, estuvieron precedido por x-1 fracasos; y si la probabilidad de un éxito es p, la probabilidad de x-1 fracasos en x-1 ensayos es $(1 - p)^{x-1}$. Así, si multiplicamos esta expresión por la probabilidad p de un éxito en el x-éximo ensayo, observamos que la probabilidad de obtener el primer éxito en el x-éximo ensayo es proporcionada por:

$$P(x) = p(1-p)^{x-1}$$

en donde el parámetro p es una constante que se encuentra entre 0 y 1 y x toma los valores 1,2,3, ...

La media de esta distribución es $\mu = 1/p$
La varianza es VAR (X) = $(1-p)/p$

Ejemplo:

Si la probabilidad de que un ladrón sea atrapado en un robo cualquiera es 0.20. ¿Cuál es la probabilidad de que lo capturen por primera vez en su cuarto robo?

Solución:

Sustituyendo x = 4 y p = 0.20 en la fórmula de la distribución geométrica obtenemos:

$P(x) = p(1-p)^{x-1}$
$P(4) = 0.20\,(1 - 0.20)^{4-1}$
$P(4) = 0.102$

3.9.5 Distribución Hipergeométrica

La diferencia principal entre la distribución hipergeométrica y la binomial es que en la distribución hipergeométrica los intentos no son independientes, y en que la probabilidad de éxito cambia de un intento a otro. Es especialmente útil en todos aquellos casos en los que se extraigan muestras o se realizan experiencias repetidas sin devolución del elemento extraído o sin retornar a la situación experimental inicial.

La notación que se acostumbra al aplicar la distribución hipergeométrica de probabilidad es que **r** representa la cantidad de elementos en la población de tamaño N, que se identifica como éxitos, y que **N - r** represente la cantidad de elementos en la población que se identifican como fracasos. La distribución hipergeométrica de probabilidad se usa para calcular la probabilidad de que, en una muestra aleatoria de n artículos seleccionado sin reemplazo, obtengamos x elementos identificados como éxitos y n - x identificados como fracasos. Para que suceda esto debemos obtener x éxitos de los r en la población, y n - x fracasos de los N - r de la población. La siguiente función hipergeométrica de probabilidad determina f(x), la probabilidad de obtener x éxitos en una muestra de tamaño n.

Función de Probabilidad Hipergeométrica:

$$f(x) = \frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad \text{para } 0 \leq x \leq r$$

En donde:

f(x) = probabilidad de x éxitos en n intentos
n = cantidad de intentos
N = cantidad de elementos en la población
r = cantidad de elementos identificados como éxitos en la población

Ejemplo:

Al seleccionar 2 miembros de un comité de 5 miembros para que asistan a una convención en Las Vegas, suponga que el comité está formado por 3 mujeres y 2 hombres. Determinar la probabilidad de seleccionar a 2 mujeres al azar.

Solución:

P(x = 2) **x:** número de mujeres seleccionadas.

N = 5
n = 2
r = 3
x = 2

$$f(x) = \frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$P(x=2) = \frac{\binom{3}{2}\binom{5-3}{2-2}}{\binom{5}{2}}$$

$$P(x=2) = 3/10 = 0.3$$

Supongamos que después nos enteramos de que los que harán el viaje a Las Vegas serán 3 personas del comité. Determine la probabilidad de que exactamente 2 de los 3 miembros sean mujeres.

Tenemos ahora que: N = 5
N = 3
R = 3
x = 2

$$f(x) = \frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}} \qquad \text{P(x=2)} = \frac{\binom{3}{2}\binom{5-3}{3-2}}{\binom{5}{3}} \qquad \text{P(x=2)} = 6/10 = 0.60$$

3.9.6 Distribuciones Continuas

Una variable aleatoria es considerada continua cuando presenta un gran número de resultados posibles, o cuando no puedan ser utilizadas las distribuciones probabilísticas discretas, para obtener probabilidades, ya que los resultados incluyen valores enteros y no enteros.

Existen muchos experimentos que tienen un número infinito de puntos correspondientes a infinitos resultados posibles. Las variables aleatorias de dichos experimentos toman valores que difieren unos de otros en cantidades infinitesimales.

Muchos tipos de datos son continuos por naturaleza porque las observaciones se obtienen por medidas que se pueden hacer con cualquier grado de precisión que se desee, por ejemplo, las medidas de tiempo, distancias, de estaturas, de peso.

Para acercarse más a la realidad, se emplea el intervalo de números reales como espacio muestral de la variable continua. A tal variable se le llama continua en sentido de que hay un número infinito de puntos en cualquier intervalo de números reales y los valores dentro del intervalo entre sí en cantidades infinitesimales.

En el caso de una variable aleatoria continua, su probabilidad se determina al obtener el porcentaje del área entre dos valores.

Ejemplo:

La figura 3.16 presenta un círculo dividido en ocho partes iguales con una flecha giratoria en el centro se hace girar, la punta de la flecha podrá detenerse en cualquier punto dentro del círculo, y no precisamente en algunos de los valores enteros, la probabilidad de que la punta señale un valor determinado es tan pequeña, que deberá considerarse aproximadamente igual a cero.

Si escogemos un rango, la probabilidad de que la flecha se detenga entre 3 y 4 sería de 1/8 ya que el círculo está dividido en 8 partes, no es necesario distinguir entre $3<x<4$ y $3<= x <=4$, como en el caso de las probabilidades discretas ya que $P(x=3)$ y $P(x=4)$ son aproximadamente igual a cero.

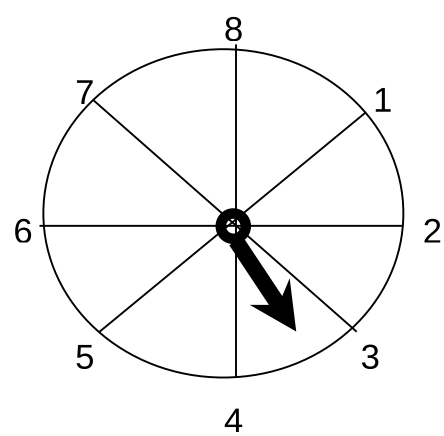


Figura 3. 16 La probabilidad de que la punta de flecha se detenga entre dos puntos es igual al porcentaje del área entre ambos puntos

El evento "la flecha se detiene entre los puntos 4 y 6" (un cuarto del círculo), se le asignaría una probabilidad del 25%. Los intervalos son limitados por valores enteros solo por comodidad. Sin embargo, la probabilidad de observar un valor entre 3.217 y 4.217 sería de 1/8, y la probabilidad de observar un valor entre 3.5 y 4 es 1/16.

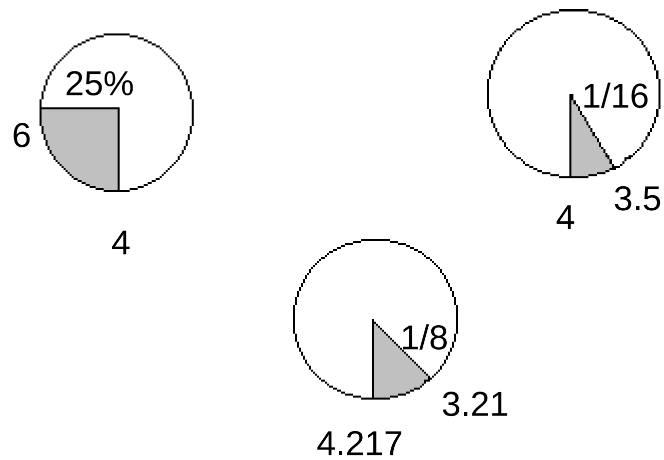


Figura 3.17 Otras posibles Probabilidades de ciertas áreas

3.9.7 Distribución Uniforme

Cuando una variable aleatoria asume cualquier valor en una escala continua entre dos puntos, de tal forma que ningún valor sea más probable que el otro, entonces las probabilidades asociadas con la variable aleatoria se pueden describir mediante la distribución uniforme.

Esta probabilidad indica que todos los valores entre un mínimo y un máximo son igualmente probables. Puede a veces indicar una completa carencia de conocimientos con respecto a la variable aleatoria y por eso se le da a cada posible suceso la misma probabilidad de ocurrencia.

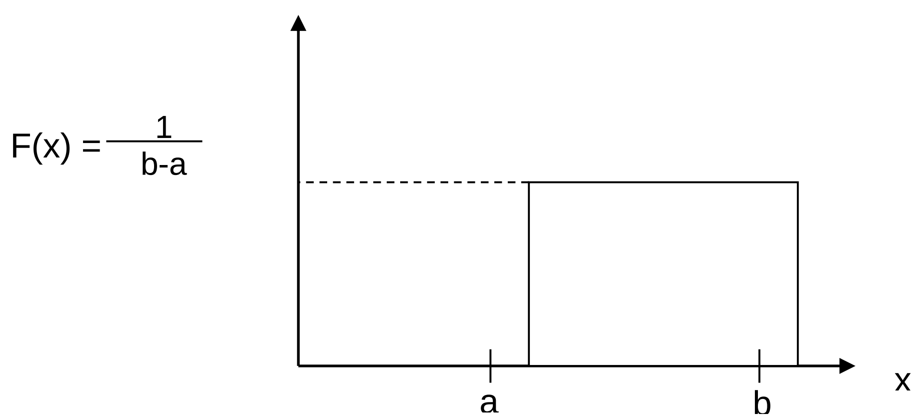


Figura 3.18 Distribución Uniforme

La función de densidad uniforme es:

$$f(x) = \frac{1}{b - a} \quad a \leq x \leq b$$

Ejemplo:

En el ejemplo anterior de la flecha en la circunferencia, todos los puntos del círculo tienen la misma probabilidad. La distribución uniforme se representa gráficamente como un rectángulo limitado por los puntos a y b, los cuales constituyen el intervalo de resultados posibles (ver

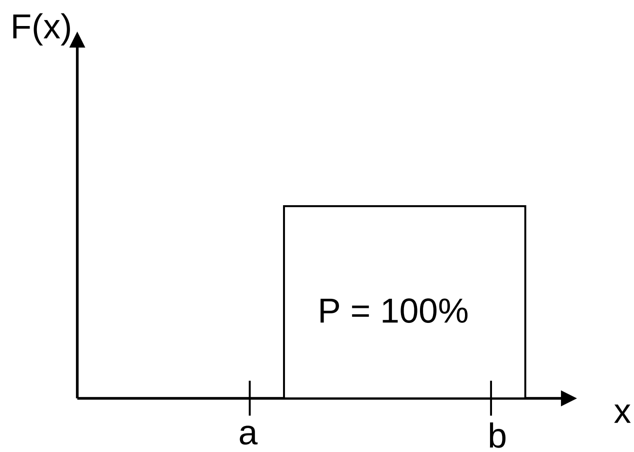


figura 3.18).

Figura 3.19 Distribución Uniforme

La altura del rectángulo se considera igual a 1.00 y el área del mismo es igual a 100%. El área bajo el rectángulo entre dos puntos cualesquiera c y d es igual al porcentaje del intervalo total incluido entre c y d.

$$P(c \leq x \leq d) = \frac{(d - c)}{(b - a)}$$

Ejemplo:

Un vendedor llama por teléfono a las oficinas entre las 3:00 y 3:15 de la tarde y en ningún otro momento, de ese lapso, hay probabilidades de que el vendedor llame.

Solución:

Dado que el tiempo se mide en escala continua, la probabilidad de que se registre una llamada entre dos puntos cualesquiera en el tiempo es igual a razón de ese tiempo al intervalo de 1 hora. La probabilidad que se registre la llamada entre 3:00 y 3:15 es 15/60 = 0.25

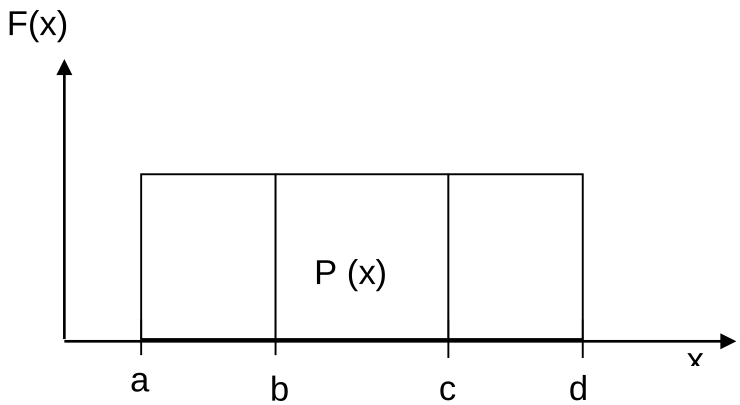


Figura 3.20 Probabilidad de una Llamada registrada entre 3:00 y 3:15

Para ciertas aplicaciones, es necesario utilizar la media y la varianza de una distribución probabilística:

$$\text{La media } \mu = \frac{a+b}{2}$$

$$\text{La varianza } \Gamma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Esta distribución indica que el valor en un intervalo específico es proporcional a la longitud del intervalo. También se le conoce con el nombre de distribución rectangular.

Ejemplo:

Veamos la variable aleatoria x que representa el tiempo de vuelo de un avión que va de Chicago a Nueva York. Supongamos que el tiempo de vuelo puede ser cualquier valor en el intervalo de 120 a 140 minutos. Como la variable aleatoria x puede tomar cualquier valor en ese intervalo, x es una variable aleatoria continua y no discreta.

Supongamos que hay suficientes datos reales de tiempo de vuelo para llegar a la conclusión de que la probabilidad de un tiempo de vuelo dentro de cualquier intervalo de un minuto es igual a la correspondiente dentro a otro intervalo similar dentro del rango de 120 y 140 minutos. La función de densidad de probabilidad, que define la distribución uniforme de probabilidad de la variable aleatoria tiempo de vuelo es:

$$f(x) = \begin{cases} 1/20 & \text{cuando } 120 \le x \le 140 \\ 0 & \text{en cualquier otro lugar} \end{cases}$$

¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de vuelo sea entre 120 y 130 minutos? Esto es, ¿Cuál es $P(120 \leq x \leq 130)$?.

Si el ancho del intervalo es igual a 130 - 120 = 10 y la altura es igual al valor de la función de densidad de probabilidad *f(x)*= 1/20, entonces $P(120 \leq x \leq 130)$ va a ser = 10(1/20) que es igual 10/20 = 0.50.

¿Cuál es la probabilidad de que el vuelo este entre 128 y 136 minutos?

El ancho del intervalo es de 136 -128 = 8. Con la altura uniforme de 1/20 vemos que: $P(128 \leq x \leq 136)$ = 8(1/20) = 0.40.

Observe que $P(120 \leq x \leq 140)$ =20(1/20) = 1. Esta propiedad es válida para las distribuciones continuas de probabilidad, y es el análogo de la condición de que las sumas de probabilidades deben ser iguales a 1 para una función de probabilidad discretas. Para una función continua de densidad de probabilidad también se requiere que $f(x) \geq 0$ para todos los valores de x. Es el análogo del requisito que $f(x) \geq 0$ para las funciones discretas de probabilidad.

Hay dos diferencias principales entre el manejo de las variables aleatorias continuas y el de su contraparte las variables discretas:

- Ya no se habla de la probabilidad de que la variable aleatoria tome un valor determinado. En su lugar se habla de la probabilidad de que la variable aleatoria asuma un valor dentro de cierto intervalo dado.

- La probabilidad de que la variable aleatoria tome un valor dentro de un determinado intervalo dado x_1 a x_2 se define como el área bajo la gráfica de la función de densidad de probabilidad entre x_1 y x_2. Esto implica que la probabilidad de que la variable aleatoria continua asuma exactamente determinado valor es 0 porque el área bajo la gráfica *f(x)* en un solo punto es 0.

Si aplicamos las ecuaciones de valor esperado y varianza a la distribución uniforme de probabilidades de los tiempos de vuelo entre Chicago y Nueva York:

$$E(x) = (a + b) / 2$$
$$E(x) = (120 + 140) / 2$$
$$E(x) = 130$$

$$Var(x) = (b - a)^2 / 12$$
$$Var(x) = (140 - 120)^2 / 12$$
$$Var(x) = 33.33$$

La desviación estándar de los tiempos de vuelo se calcula sacando la raíz cuadrada de la varianza. Por consiguiente, $\sigma = 5.71$.

Ejemplo:

Los clientes llegan a un cajero con distribución uniforme. Encuentre la probabilidad de que un cliente llegue durante los últimos 5 minutos de un período de 30 minutos.

$$P(25 \leq x \geq 30) = \int_{25}^{30} 1/30\, dy = (30 – 25) / 30 = 5 / 30 = 1/6$$

3.9.8 Distribución Exponencial

Si la probabilidad de que uno y solamente un evento ocurrirá durante un pequeño intervalo de tiempo Δt es proporcional a t y si la ocurrencia de un evento es independiente a la ocurrencia de otro evento, entonces el intervalo de tiempo entre la ocurrencia de eventos está distribuido exponencialmente.

Otra forma de verlo es que la actividad caracterizada por una distribución exponencial tiene la misma probabilidad de ser concluida en cualquier período de tiempo subsiguiente Δt .

La distribución exponencial es utilizada para representar o modelar el tiempo entre fallas de equipo eléctrico, el tiempo entre llegadas de clientes a un supermercado, el tiempo entre llamadas para servicio, el tiempo entre llegadas a un auto baño, el tiempo necesario para cargar un camión, la distancia entre los principales defectos en una carretera, etc. Se expresa en términos del tiempo o distancia hasta que el evento no tenga lugar.

Su densidad está dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\mu} e^{-x/\mu} \quad para \quad x \geq 0, \quad \mu > 0$$

Ejemplo:

El tiempo que se tarda en cargar un camión en el muelle sigue esta distribución. Si la media del tiempo, o tiempo promedio para cargarlo es de 15 minutos (μ=15), su función de densidad de probabilidad es:

$$f(x) = \frac{1}{\mu} e^{-x/\mu}$$

$$f(x) = \frac{1}{15} e^{-x/15}$$

La probabilidad de que la carga de un camión dure 6 minutos ($x \leq 6$) se define como el área bajo la curva de x = 0 a x = 6.

Para calcular esta probabilidad empleamos la siguiente ecuación, que da como resultado la probabilidad de obtener un valor de la variable aleatoria exponencial igual o menor que determinado valor específico de x, representado por x_0.

$$P(x \leq x_0) = 1 - e^{\frac{-x_0}{\mu}}$$

Para el ejemplo del muelle tenemos:

$$P(tiempo \quad de \quad c \arg a \leq x_0) = 1 - e^{\frac{-x_0}{15}}$$

En consecuencia, la probabilidad de que la carga de un camión dure 6 minutos o menos es:

$$P(tiempo \quad de \quad c \arg a \leq 6) = 1 - e^{\frac{-6}{15}} = 0.3297$$

La media y la varianza de la distribución exponencial son:

Media $\mu = \theta$

VAR(X)= θ^2

Ejemplo:

Se desea determinar la probabilidad de que no haya llamadas durante un período de dos horas (t = 2) si la razón promedio (λ) es 1.5 llamadas / hora:

P(T>t) = $e^{-\lambda t}$

P(T>2) = $e^{-(1.5)(2)}$

Con esta fórmula, se calcula la probabilidad de que el espacio (o tiempo) antes de que se presente la primera ocurrencia sea mayor que un espacio dado (o tiempo) t.

La probabilidad de una ocurrencia en t o antes de dicho espacio se obtiene:

$$P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

Suponga que el tiempo que tardan en recibir su orden después de hacerla en un gran restaurante promedia 10 minutos. Suponga también que ese tiempo que espera en ser atendido se distribuye exponencialmente.

- Calcule la probabilidad de que su tiempo de espera sea mayor de 10 minutos.
- Obtenga la probabilidad de que su tiempo de espera sea de 10 minutos o menos.
- Encontrar la probabilidad de que su tiempo de espera sea de tres minutos o menos.

Solución:

λ = 1/10 = 0.1 por minuto

a. $P(T>10) = e^{-\lambda t} = e^{-(0.1)(10)} = e^{-1} = 0.368$

b. $P(T \leq 10) = 1 - e^{-\lambda t} = 1 - e^{-1} = 1 - 0.368 = 0.632$

c. $P(T \leq 3) = 1 - e^{-\lambda t} = 1 - e^{-0.3} = 1 - 0.741 = 0.259$

Suponga que una máquina falla un promedio de una vez cada dos años ($1/\lambda = 2$, así que $\lambda = 0.5$).

Encuentre la probabilidad de que la máquina no falle durante el siguiente año.

$$P(T>1) = e^{-\lambda t} = e^{-(0.5)(1)} = e^{-0.5} = 0.607$$

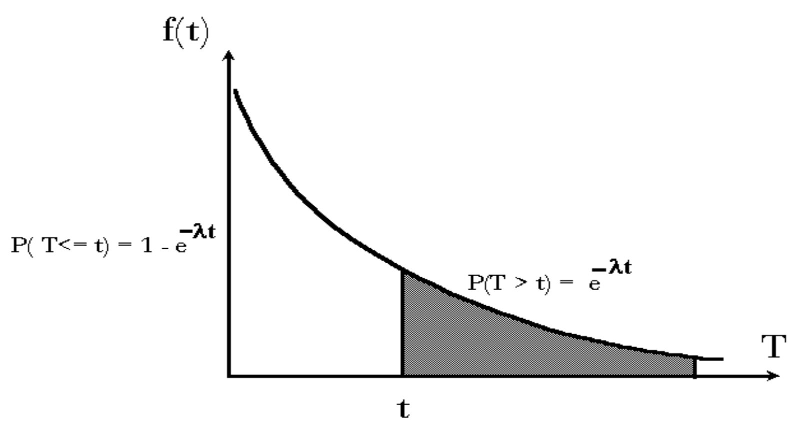


Figura 3.21 Distribución Exponencial

3.9.9 Distribución Normal

La distribución normal o gaussiana es la distribución de probabilidad más prominente. La justificación de su uso se basa en el teorema del límite central el cual especifica que bajo una condición muy liberal la distribución del promedio o suma de observaciones independientemente de la distribución se acerca a una distribución normal.

Esta distribución coincide cercanamente con la distribución de frecuencia observadas de muchas mediciones naturales y físicas, además pueden ser usadas para aproximar probabilidades binomiales cuando n es grande, y las distribuciones de medias muéstrales y proporciones de grandes muestras tienden a distribuirse normalmente.

Cuando tratamos con un fenómeno que está relacionado a sumas de variables aleatorias, pueden considerarse aproximaciones a una distribución normal. Esta distribución tiene la ventaja de ser manejable matemática y consecuentemente muchas teorías de inferencia estadística tales como el análisis de regresión y el análisis de la varianza se derivan asumiendo una función de distribución normal.
Las curvas normales tienen estas características:

1. La curva normal tiene forma de campana.
2. Es simétrica con respecto a la media de la distribución.
3. Se extiende de -∞ a + ∞
4. Cada distribución normal es completamente especificada por su media y desviación estándar; existe una distribución normal diferente para cada combinación de media y desviación estándar.
5. El área total bajo la curva normal se considera que es el 100%.
6. El área bajo la curva entre dos puntos es la probabilidad de que una variable distribuida normalmente asuma un valor entre ellos.
7. Dado que existe un número ilimitado de valores en el intervalo que va de -∞ a + ∞, la probabilidad de que una variable aleatoria distribuida con normalidad sea exactamente igual a cualquier valor dado es casi de cero. Por tanto, las probabilidades siempre serán para un *intervalo de valores.*
8. El área bajo la curva entre la media y cualquier otro punto es una función del número de desviaciones estándar que el punto dista de la media.

La curva de la distribución está dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma \sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\Gamma^2}}$$

donde e y π son constantes, μ es la media, Γ es la desviación estándar.

Para evitar la complejidad se debe trabajar con valores relativos en lugar de reales. Esto equivale a utilizar la media como punto de referencia, y la desviación estándar como una media de la desviación de dicho punto de referencia. Esta escala es conocida como escala Z[8], en donde:

$$Z = \frac{(x - \mu)}{\Gamma}$$

Z = número de desviaciones estándar a partir de la media
x = algunos valores de interés
μ = media de una desviación normal
Γ = desviación estándar
Valor real = $\mu + Z\,\Gamma$

Ejemplo:

En un examen final de matemáticas la media fue 72 y la desviación típica 15. Determinar las referencias tipificadas (es decir, graduaciones en unidades de desviación típica) de los estudiantes que obtuvieron puntuaciones de a) 60, b) 93, c) 72.

Solución:

a) $Z = \dfrac{X - \overline{X}}{s} = \dfrac{60 - 72}{15} = -0.8$

b) $Z = \dfrac{X - \overline{X}}{s} = \dfrac{93 - 72}{15} = 1.4$

c) $Z = \dfrac{X - \overline{X}}{s} = \dfrac{72 - 72}{15} = 0$

[8] Ver anexo de la Tabla de Valores Z

Ejemplo:

Con referencia al problema anterior, hallar las puntuaciones correspondientes a las referencias tipificadas

a) -1, b) 1,6
a) $X = \overline{X} + zs = 72 + (-1)(15) = 57$
b) $X = \overline{X} + zs = 72 + (1.6)(15) = 96$

Ejemplo:

El supervisor de una planta hidroeléctrica sabe que las turbinas de la presa generan electricidad a toda su potencia cuando por lo menos 1,000,000 de galones de agua pasan por la presa al día. También sabe por experiencia que el flujo diario tiene una distribución normal, con una media igual al flujo del día anterior y con una desviación estándar de 200,000 galones. Ayer pasaron por la presa 850,000 galones. ¿Cuál es la probabilidad de que las turbinas generen hoy una cantidad máxima?

X: cantidad de galones de agua que pasan por la presa en un día determinado
$x = 1,000,000$
$\mu = 850,000$
$\sigma = 200,000$

$z = x - \mu / \sigma$
$z = 1,000,000 - 850,000 / 200,000$
$z = 0.75$

Según la tabla, $P(z < 0.75) = 0.2734$.

$$\begin{aligned} P(X > 1,000,000) &= P(z > 0.75) \\ &= 0.5 - P(z < 0.75) \\ &= 0.5 - 0.2734 \\ &= 0.2266 \end{aligned}$$

La probabilidad de que hoy las turbinas generen una cantidad máxima de electricidad es de **0.2266**.

Ejemplo:

Una empresa de neumáticos acaba de desarrollar un neumático radial con banda de acero que venderá a través de una cadena nacional de tiendas de descuento. Como ese neumático es un producto nuevo, la dirección cree que la garantía de millas recorridas que se ofrece con el neumático será un factor importante en la aceptación.

En pruebas reales en carretera, el grupo de ingeniería ha estimado que el promedio de distancias recorridas es $\mu = 36{,}500$ millas, y la desviación estándar $\sigma = 5{,}000$. ¿Qué porcentaje de neumáticos se puede esperar que duren más de 40,000 millas? En otras palabras, ¿Cuál es la probabilidad de que las millas recorridas rebasen las 40,000?

Cuando x = 40000, tenemos que:

$$z = x - \mu / \sigma$$
$$z = 40000 - 36500 / 5000$$
$$z = 0.70$$

Al emplear la tabla vemos que el área entre el promedio y z=0.70 es 0.2580. Además, el área entre x=36500 y x=40000 también es 0.2580. Así como 0.5000 - 0.2580 = 0.2420 es la probabilidad de x sea mayor que 40000. Podemos concluir que un 24.2% de los neumáticos duran más de 40000 millas.

3.9.10 Distribución Normal Logarítmica

Esta distribución corresponde a las variables aleatorias cuyo logaritmo natural, sigue la distribución normal. De la misma forma en que la distribución normal es aplicable a procesos aditivos, la distribución normal logarítmica es apropiada para procesos de tipo multiplicativo.

Si a un conjunto de datos se les transforma calculando su logaritmo natural y si los datos transformados están normalmente distribuidos, entonces se dice que los datos originales tienen una distribución normal logarítmica.

Esta distribución es utilizada en variadas aplicaciones como biología, economía y otras.

Resulta apropiada en proceso donde el valor de una variable observada es una proporción aleatoria de los valores previamente observados. Ejemplos de tales procesos incluyen la distribución de ingresos personales, beneficios y depósitos de banco.

La curva de la distribución está dada por:
$$f(x) = \frac{1}{\Gamma\, x \sqrt{2\, x}}\, e^{\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x\, \mu}{\Gamma}\right)^2}$$

3.10 Resumen

La **probabilidad de un evento A** es la suma de los pesos de todos los puntos muestrales que se encuentra en *A*. Por lo tanto,

$$0 \leq P(A) \leq 1\,, \quad P(\emptyset) = 0, \;\; y \;\; P(S) = 1$$

La **probabilidad condicional** de *B* dado *A*, que se denota como P(A³B), es definido mediante

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \;\; si \;\; P(A) > 0$$

Dos eventos *A y B* son **independientes** si y sólo si

P(A³B)= P(B)

y

P(A³B)= P(B),

De otra manera A y B son **dependientes**.

La regla de Bayes nos dice que si los eventos B_1, B_2, ..., B_k constituyen una partición del espacio muestral S, donde $P(B_i) \neq 0$ para i= 1, 2, ...,k, entonces para cualquier evento A de S tal que $P(A) \neq 0$,

$$P\left(\frac{B_r}{A}\right) = \frac{P(B_r \cap A)}{\sum_{i=1}^{k} P(B_i \cap A)} = \frac{P(B_r)\,P(\frac{A}{B_r})}{\sum_{i=1}^{k} P(B_i)\,P(\frac{A}{B_i})}$$

para r: 1, 2, ..., k.

Una **variable aleatoria** es una función que asocia un número real a cada elemento del espacio muestral. Si un espacio muestral contiene un número infinito de posibilidades iguales al número de puntos que se encuentra en un segmento o línea, se le denomina **espacio muestral continuo**.

El conjunto de pares ordenados (x, f(x)) es una **función de probabilidad** o una **distribución de probabilidad** de variable aleatoria discreta *X* si, para cada posibles resultado *x* la sumatoria de las probabilidades es igual a 1, entre otras cosas. Por su parte la **distribución acumulada** F(x) de una variable aleatoria discreta *X*, está dada por:

F(x)= P(X $\leq$ x)= para $-\infty < x < \infty$.

Existen variables aleatorias que pueden tomar valores continuos o discretos. Este tipo de variable se representa por medio de una distribución mixta. Estos casos se dan cuando la variable puede asumir cualquier valor discreto con probabilidad finita o puede asumir una continuidad de valores establecidos por una función de densidad.
La esperanza y el momento son necesarios, algunas veces, para caracterizar a una variable aleatoria mediante uno o más valores que sumarien información contenida en una función de distribución de probabilidad.

La esperanza es una probabilidad promedio de un posible valor de X y una media central para la distribución, por esta razón es llamada el valor medio.

La varianza de una variable aleatoria es una medida de propagación de la distribución de probabilidad.

Un momento de particular importancia en la teoría de probabilidad es el segundo momento, alrededor del punto medio llamado comúnmente varianza de X.

Las características de las diferentes distribuciones son las que llevarán al modelador a seleccionar un tipo de éstas, para una variable aleatoria particular de manera que represente un proceso aleatorio.

La probabilidad de un suceso se puede expresar como una función porque a cada valor distinto posible de una variable aleatoria X, que en verdad es un suceso, le corresponde un número real y sólo uno entre cero (0) y uno (1).
Una distribución de probabilidades no es más que el resultado o puntos muéstrales de un experimento con sus respectivas probabilidades.

Es importante resaltar que la distribución de probabilidades se puede resumir de forma concisa mediante la distribución de probabilidades acumuladas, que da las probabilidades para $X \leq x$, donde x representa todos los valores en el dominio de la función X.

Una distribución de probabilidad ampliamente utilizada de una variable aleatoria discreta es la distribución binomial. El lanzamiento de una moneda legal un número fijo de veces es un proceso de Bernoulli y los resultados de esa acción pueden ser representados por la distribución binomial de probabilidad.

La distribución de Poisson se emplea para describir varios procesos entre otros casos, la distribución de las llamadas telefónicas que llegan a un conmutador, los arribos de camiones y automóviles a la caseta de cobro, y otros procesos que puedan ser descritos por una variable aleatoria discreta.

La distribución geométrica se da si en ensayos independientes repetidos pueden resultar un éxito con probabilidad q= 1 - p, entonces la distribución de probabilidad de la variable aleatoria X, el número del ensayo en el cual ocurre el primer éxito está dada por $f(x)= pq^{x-1}$, x= 1, 2, 3, ...

En la distribución continua de probabilidad, una variable aleatoria es considerada continua cuando presenta un gran número de resultados posibles, o cuando no puedan ser utilizadas las distribuciones probabilísticas discretas, para obtener probabilidades, ya que los resultados incluyen valores enteros y no enteros. Para acercarse más a la realidad se emplea el intervalo de números reales como espacio muestral de la variable continua. A tal variable se le llama continua en sentido de que hay un número infinito de puntos en cualquier intervalo de números reales y los valores dentro del intervalo entre sí en cantidades infinitesimales.

Cuando una variable aleatoria asume cualquier valor en una escala continua entre dos puntos, de tal forma que ningún valor sea más probable que el otro, entonces las probabilidades asociadas con la variable aleatoria se pueden describir mediante la distribución uniforme.

La distribución exponencial es utilizada para representar o modelar el tiempo entre fallas de equipo eléctrico, el tiempo entre llegadas de clientes a un supermercado y el tiempo entre llamadas para servicio. Se expresa en términos del tiempo o distancia hasta que el evento no tenga lugar.

La distribución normal o gaussiana es la distribución de probabilidad más prominente. La justificación de su uso se basa en el teorema del límite central el cual especifica que bajo una condición muy liberal la distribución del promedio o suma de mis observaciones independientemente de la distribución se acerca a una distribución normal.

Esta distribución tiene la ventaja de ser manejable matemática y consecuentemente muchas teorías de inferencia estadística tales como el análisis de regresión y el análisis de la varianza se derivan asumiendo una función de distribución normal.

3.11 Problemas Resueltos.

Regla General de Adición

Una urna contiene 200 bolsas en cada una de las cuales aparece un número del 1 al 200. Se saca una bolsa de la urna. ¿Cuál es la probabilidad de que el número marcado en la bolsa sea múltiplo de 6 o 8?

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= 33/200 + 25/200 - 8/200 \\ &= 1/4 \end{aligned}$$

Probabilidad Condicional

Si la probabilidad de que un sistema de comunicación tenga alta fidelidad es 0.81 y la probabilidad de que tenga alta selectividad es 0.18. ¿Cuál es la probabilidad de que un sistema con alta fidelidad tenga también alta selectividad?

A: tenga alta selectividad
B: tenga alta fidelidad

$P(A/B) = 0.18 / 0.81 = 0.22$

Regla de Multiplicación

Una caja contiene 15 tornillos de los cuales 5 están defectuosos. Dos tornillos se extraen al azar. Encontrar la probabilidad del suceso tal que ninguno de los 2 tornillos sea defectuoso.

A: primer tornillo no defectuoso
B. segundo tornillo no sea defectuoso

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) * P(B/A) \\ &= (10/15)(9/14) \\ &= 0.4286 \end{aligned}$$

Teorema de Bayes

Supóngase que 3 máquinas B_1, B_2, B_3 producen respectivamente 50%, 30%, 20 % del número total de artículos en una fábrica.

Los porcentajes de desperfecto de producción son 3%, 4% y 5% respectivamente. Si se selecciona un artículo al azar, halle la probabilidad de que el artículo sea defectuoso.

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B_1)\, P(A/B_1) + P(B_2)\, P(A/B_2) + P(B_3)\, P(A/B_3) \\ &= 0.5\ (0.03) + 0.30\ (0.04) + 0.20\ (0.05) \\ &= 0.037 \end{aligned}$$

Valor Esperado

Supóngase que en una lotería se venden 2000 boletos a un dólar cada uno y que se van a otorgar 3 premios. El primer premio es un aparato de sonido con un valor de $ 500.00 el segundo premio es un aparato de televisión con un valor de $ 300.00 y el tercero es un fonógrafo con un valor de $200.00. si usted compró un boleto. ¿Cuál es la ganancia esperada?

E(X) = 499 (1/2000) + 299 (1/2000) + 199 (1/2000) - 1(1997/2000)
= -1/2 = 0.5

Proceso de Bernoulli

Durante un período largo de tiempo se ha observado que un tirador da en el blanco con probabilidad igual a 0.8 cada vez que hace un disparo. Si dispara 4 veces. ¿Cuál es la probabilidad de que dé en el blanco exactamente 2 veces?

X = dar en el blanco
P = 0.8
n = 4
q = 1 - p = 0.2

$$P(2) = \binom{4}{2}(0.8)^2(0.2)^2$$
= 0.1536

Distribución de Poisson

Un departamento de reparación de maquinarias recibe un promedio de 5 solicitudes de servicio por hora.
¿Cuál es la probabilidad de que reciba exactamente 3 solicitudes en una hora seleccionada al azar?

X = solicitudes recibidas
$\lambda = 5$

$P(X = 3/5) = 5^3 e^{-5} / 3!$
= 125 (0.00674) / 6
= 0.14037

Distribución Hipergeométrica

Un cargamento de 20 grabadoras contiene 5 defectuosas. Si 10 de ellos son aleatoriamente escogidas para revisión.

Cuál es la probabilidad de que 2 estén defectuosas.
N = 20
a = 5
n = 10
x = 2
N-a =15

$$P= (x = 2) = \frac{\binom{a}{x}\binom{N-a}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$= \frac{\binom{5}{2}\binom{15}{8}}{\binom{20}{10}} = 0.348$$

Distribución Binomial

1. Se asegura que, en el 60% de las instalaciones generadoras de electricidad mediante energía solar, los gastos de servicios se reducen al menos en una tercera parte. De acuerdo con lo anterior, ¿cuáles son las, probabilidades que se reduzcan al menos en una tercera parte en

(a) cuatro de cinco instalaciones;
(b) en al menos cuatro de cinco instalaciones?

Solución:

(a) Sustituyendo x = *4, n* 5 y *p* 0.60 en la fórmula para la distribución binomial, obtenemos

$$b(4;5,0.60) = \binom{5}{4}(0.60)^4(1-0.60)^{5-4}$$
$$= 0.259$$

(b) Sustituyendo x = *5, n* = 5 y *p* = 0.60 en la fórmula para la distribución binomial, obtenemos

$$b(5{,}5{,}0.60) = \binom{5}{5}(0.60)^4(1-0.60)^{5-5}$$

$$= 0.078$$

y la respuesta es *b(4; 5,* 0.60) + *b(5; 5,* 0.60) = 0.259 + 0.078 = 0.337.

2. Alguien asegura que el 75% de los accidentes industriales pueden ser prevenidos acatando estrictamente las disposiciones de seguridad. Suponiendo que la afirmación sea verdadera, ¿cuáles son las probabilidades de que

(a) menos de 16 de entre un total de 20 accidentes industriales pueden ser prevenidos acatando estrictamente las disposiciones de seguridad;
(b) 12 de 15 accidentes industriales pueden prevenirse obedeciendo estrictamente las disposiciones de seguridad?

Solución:

(a) En primer término usando la parte (b) del teorema 3.1 y luego buscando las probabilidades requeridas en la tabla 1, obtenemos

$$\begin{aligned} B(15; 20, 0.75) &= 1 - B(5; 20, 0.25) \\ &= 1 - 0.4158 \\ &= 0.5842 \end{aligned}$$

(b) al utilizar la parte (d) del teorema 3.1 y luego al buscar en la tabla 1 las probabilidades que se requieren, obtenemos

$$\begin{aligned} B(12; 15, 0.75) &= B(3; 15, 0.25) - B(2; 15, 0.25) \\ &= 0.4613 - 0.2361 \\ &= 0.2252 \end{aligned}$$

3. Un fabricante de lavadoras asegura que solamente el 10% de sus lavadoras requiere reparación dentro del período de garantía que es de 12 meses. Si cinco de 20 de sus lavadoras requieren reparación durante el primer año, ¿contribuye esto a apoyar o a refutar su afirmación?

Solución:

Encontraremos primero la probabilidad de que cinco o más de 20 de sus lavadoras necesiten reparación durante el año de garantía, cuando la probabilidad de que cualquiera de ellas requerirá reparación en el transcurso del año es 0.10. Usando la tabla 1, obtenemos

$$\sum_{x=5}^{20} b(x;20,0.10) = 1 - B(5;20,0.10)$$
$$=0.03192$$

Dado que este valor es muy pequeño, parecería razonable rechazar la afirmación del fabricante de lavadoras.

4. Se sabe que el 5% de los libros encuadernados en cierto taller tienen encuadernación defectuosa. Calcúlese la probabilidad de que 2 de 100 libros terminados en este taller tengan una encuadernación defectuosa.

n = 100
p = 0.05

$$P(X = 2) = \binom{100}{2}(0.05)^2(0.95)^{98}$$
$$= 0.081$$

Distribución Normal

Si la cantidad de radiación cósmica a la que una persona está expuesta mientras viaja en avión, a la República Mexicana es una variable aleatoria con distribución normal μ = 4.35 mrem σ = 0.59 mrem ¿Calcúlese la probabilidad de que la cantidad de radiación cósmica a la que un viajero queda expuesto en tal vuelo que sea al menos 5.5?

$Z = X - \mu / \sigma$
$= 5.5 - 4.35 / 0.59 = 1.95$
$P(X \geq 5.5) = I - P(X \leq 5.5)$
$= 1 - P(Z<1.95)$
$= 1 - F(1.95)$
$= 1 - .9744$
$= 0.0256$

3.12 Ejercicios

Teorema de Bayes

1. En cierta región del país se sabe, por experiencias pasadas, que la probabilidad de elegir a un adulto de más de 40 años con cáncer es de 0.02. Si la probabilidad de que un doctor diagnostique en forma correcta que una persona tiene cáncer es de 0.78 y la probabilidad de que diagnostique de manera incorrecta que una persona que tiene cáncer no lo tiene es de 0.06, ¿cuál es la probabilidad de que diagnostique que una persona tiene cáncer?

Respuesta: 0.0744

2. Con referencia al problema anterior ¿cuál es la probabilidad de que una persona a la que se le ha diagnosticado cáncer esté en realidad enferma?

Respuesta: 0.2097

3. La policía planea hacer respetar los límites de velocidad utilizando radares en cuatro ubicaciones diferentes dentro de los límites de la ciudad. Se operan radares en cada una de las ubicaciones L1, L2, L3 y L4 en 40%, 30%, 20% y 10% del tiempo, y si una persona que rebasa los límites de velocidad en su camino al trabajo tiene probabilidades de 0.2, 0.1, 0.5 y 0.2, respectivamente, de pasar por estos lugares, ¿Cuál es la probabilidad de que reciba una multa?

Respuesta: 0.23

4. Una prueba diagnóstica para la diabetes tiene un CFP de 4% y un CFN del 5%. Si la prevalencia de la diabetes en la población donde se usa es del 7% ¿cuál es la probabilidad de que sea diabético un individuo en el que la prueba dé positiva? y ¿de qué no lo sea uno en el que dé negativo?

p(+|NE) = 0,04 □ p(-|NE) = 0,96
p(-|E) = 0,05 □ p(+|E) = 0,95
p(E) = 0,07 □ p(NE) = 0,93

Respuesta: 0.641

Respuesta: 0.996

Distribución Binomial

1. Los archivos muestran el 30% de los pacientes que se admiten en una clínica no cumplen con el pago de sus cuentas, las que terminan por serles perdonadas. Supongamos que n=4 representa una selección aleatoria de un grupo grande de posibles pacientes atendidos por la clínica. Encuentre la probabilidad de que:

a. La cuenta de todos los pacientes tenga que serles perdonadas.
b. Que una cuenta tenga que ser perdonada.
c. Que ninguna tenga que ser perdonada.

Respuesta:

a. P(x = 4) = 0.0081
b. P(x = 1) = 0.4116
c. P(x = 0) = 0.24

2. Consideremos un defecto metabólico que ocurre en aproximadamente uno de cada 100 nacimientos. Si 4 niños nacen en un hospital un día dado. Cuál es la probabilidad de que:

a. Ninguno tenga defecto
b. Que a lo más uno tenga defecto.

Respuesta:

a. P(x = 0) = 0.961
b. P(x $\leq$ 1) = 0.9998

3. Un 10% de los utensilios producidos en un cierto proceso de fabricación resulta ser defectuoso. Hallar la probabilidad de que una muestra de 10 utensilios elegidos al azar sea exactamente 2 los defectuosos mediante

a. Distribución Binomial

Respuesta: P(x) = 0.194

b. Distribución de Poisson

Respuesta: p(x) = 0.184

Si tenemos λ - 4.2 en una distribución de Poisson encuentre.

a) P(X<= 2)
b) P(X>= 5)
c) P(X=8)

Respuesta:

a) 0.2103
b) 0.4101
c) 0.0360

4. Una máquina fabrica una determinada pieza y se sabe que produce un 7 por 1000 de piezas defectuosas. Hallar la probabilidad de que al examinar 50 piezas sólo haya una defectuosa.

Solución:

Se trata de una distribución binomial de parámetros B(50, 0'007) y se debe calcular la probabilidad p(X=1).

Respuesta: 0.248

5. La probabilidad de éxito de una determinada vacuna es 0,72. Calcula la probabilidad de a que una vez administrada a 15 pacientes.
a) Ninguno sufra la enfermedad.
b) Todos sufran la enfermedad.
c) Dos de ellos contraigan la enfermedad.

Respuesta: a) 0.00724
b) 5.097.10 –9
c) 0.11503

Distribución Uniforme:

1. Un vendedor telefonea a las oficinas centrales entre las 3 y 4 de la tarde y, según el registro, en ningún momento de ese lapso hay probabilidades de que el vendedor llame. ¿Cuál es la probabilidad de que se registre la llamada entre 3:00 y 3:15?
   Respuesta: P(x)= 0.25

2. Las ventas de combustible en una gasolinera tienen una media de 40000 litros por día y un mínimo de 30000 litros por día. Suponga que una distribución uniforme es apropiada.
   a. Determinar las ventas máximas diarias.
   b. ¿Qué porcentaje de días, las ventas excederán los 34000 litros?

   Respuesta:
   a. Ventas máximas = 50000 lts/día
   b. P(34000<= X <= 50000)= 0.8

3. Una pequeña compañía corta y vende leños (para chimeneas) cuya longitud varía uniformemente entre 2 y 3 pies.
   a. ¿Cuál es la longitud promedio de un leño?
   b. ¿Cuál es la probabilidad de que cualquier leño sea mayor que 2?6 pies?

Respuesta:

a. 2.5 pies
b. 0.4

Distribución Exponencial:

1. Supóngase que un sistema contiene cierto tipo de componente cuya duración útil en años, está dada por la variable aleatoria T, distribuida en forma exponencial con parámetro $\beta = 5$. Si se instalan 5 de estos componentes en diferentes sistemas. ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos 2 funcionen todavía al término de 8 años?

Respuesta: P(x >= 2) = 0.2

2. Las llamadas de emergencia durante las primeras horas de la mañana del lunes siguen el modelo exponencial, con un tiempo medio de una hora entre cada llamada.

Calcule la probabilidad de un periodo de 2 horas sin que registre ninguna llamada.

Respuesta: P(T>2000)= 0.135

3. Un satélite de comunicación tiene una sola fuente de energía. Determine la probabilidad de que le satélite funcione durante por lo menos 20000 horas antes de que haya una falla de energía, si el tiempo medio entre fallas ($\frac{1}{\lambda}$ es de 10000 horas).

Respuesta: P(T>=10000)= 0.135

Distribución Normal

1. Cuál es la probabilidad de que un participante elegido de manera aleatoria tarde más de 500 horas en terminar un programa de capacitación?
u= 500 horas
T= 100 horas.

Respuesta: P(X>500)= 0.5

2. Cuál es la probabilidad de que un candidato seleccionado aleatoriamente tarde entre 500 y 650 horas en terminar el programa de capacitación?

Respuesta: P(500 a 650)= 0.4332

3. ¿Cuál es la probabilidad de que un candidato seleccionado aleatoriamente tarde más de 700 horas en terminar el programa de capacitación?

Respuesta: P(más de 700)= 0.0228

TABLA DE FORMULAS

CÁLCULO DE LA PROBABILIDAD MEDIANTE EL COMPLEMENTO

$$P(E)= 1 - P(\bar{E})$$

INTERSECCIÓN DE EVENTOS

$$(A \cap B = B \cap A).$$

Unión de Eventos

$$(A \cup B = B \cup A)$$

EVENTO MUTUAMENTE EXCLUSIVO

$$A \cap B = \emptyset \quad \text{ó} \quad A \cap B = \{\ \}.$$

EVENTO COLECTIVAMENTE EXHAUSTIVO

$$A \cup B = \Omega$$

PROBABILIDAD

$$P(A)=m/n$$

REGLA ESPECIAL DE LA ADICIÓN

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_K) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots P(A_K)$$

REGLA GENERAL DE ADICIÓN

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

REGLA ESPECIAL DE MULTIPLICACIÓN

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

REGLA GENERAL DE MULTIPLICACIÓN

$$P(A \cap B) = P(B)\ [P(A \mid B)]$$

VARIABLE ALEATORIA DISCRETA

Resulta conveniente representar todas las probabilidades de una variable aleatoria discreta *X* a través de una fórmula. Esta fórmula sería necesariamente función de los valores numéricos *x*, que se denotarán por *f(x), g(x), r(x)* y así sucesivamente.

$$f(x)= P(X= x)$$

VARIABLE ALEATORIA CONTINUA

La *distribución acumulada F(x)* de una variable aleatoria continua *X*, con función de densidad *f(x)*, está dada por:

$$F(x)= P(X \leq x)= \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \quad para\ -\infty < x < \infty$$

$f(x)=\dfrac{dF(x)}{dx}$ en caso de que exista la derivada.

ESPERANZA O VALOR ESPERADO

$$E(x) = \mu = \Sigma x f(x)$$

Si la variable aleatoria x es continua tenemos que la media o valor esperado es:

$$E(x)= \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)dx$$

PRINCIPIO DE BERNOULLI

$$p, q > 0 \quad y \quad p + q = 1$$

indicando con p la probabilidad de éxito E y q la probabilidad de falla F.

TEOREMA DE BAYES

$$P\left(\frac{B_i}{A}\right) = \frac{P(B_i)}{P(A)}$$

$$P\left(\frac{B_r}{A}\right) = \frac{P(B_r \cap A)}{\sum_{i=1}^{k} P(B_i \cap A)} = \frac{P(B_r)\,P(\frac{A}{B_r})}{\sum_{i=1}^{k} P(B_i)\,P(\frac{A}{B_i})}$$

para r: 1, 2, ..., k.

COVARIANZA

Si *X y Y* son variables aleatorias, entonces la covarianza de *X* y *Y* denotada por COV(*X, Y*) se define como:

COV[*X, Y*] = E[(*X* - E[*X*]) (*Y* - E[*Y*])]

VALOR ESPERADO Y VARIANZA PARA LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL DE PROBABILIDAD

La media de una variable binomial X es el n número promedio de éxitos cuando el número de muestras de tamaño n tomadas por el principio de Bernoulli, tiende a infinito.

$$\mu = E(X) = \sum_{x=0}^{n} X\ P(X)$$

La media de X es la suma de los productos de los valores que puede tomar X multiplicados por sus respectivas probabilidades, se expresa así:

$$\mu = n\rho$$

y la desviación estándar:

$$\Gamma = \sqrt{\sum_{x=0}^{n} X^2\, P(X) - \mu^2} = \sqrt{n\,p\,q}$$

VARIANZA O MOMENTO

Varianza de una variable aleatoria discreta

$$Var(x) = \sigma^2 = \Sigma(x-\mu)^2 f(x)$$

La raíz cuadrada de la varianza indica la desviación estándar de la variable aleatoria:

$$\Gamma_x = \sqrt{VAR(x)} \qquad \Gamma_x = \sqrt{\Gamma_x^{\,2}}$$

FÓRMULA DE DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD BINOMIAL

$$f(x) = \frac{n!}{x!\,(n-x)!}\, p^x\, q^{n-x}$$

Distribución de Poisson

$$f(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

f(x) = probabilidad de x ocurrencias en un intervalo.

λ = valor esperado o cantidad promedio de ocurrencias en un intervalo.

e = 2.71828

APROXIMACIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN DE POISSON Y LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

$$\lambda = np$$

DISTRIBUCIÓN GEOMÉTRICA

$$P(x) = p(1-p)^{x-1}$$

DISTRIBUCIÓN HIPERGEOMÉTRICA

$$f(x) = \frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$ para $0 \leq x \leq r$

3.13 Bibliografía

Anderson David, "Estadística para Administración y Economía", Séptima edición, Editorial International Thomson, México, 1999, 909 páginas.

Hines William, "Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Administración", Segunda Edición, Editorial CECSA, México, 1988, 669 páginas.

Levin Richard I., "Estadística para Administradores", Segunda Edición, Editorial Prentice-Hall Hispanoamericana, México, 1988.

Miller Irwin, "Probabilidad y Estadística para Ingeniería", Tercera Edición, Editorial Prentice-Hall, México, 1987, 574 páginas.

Spiegel Murria, "Estadística y Teoría Práctica", Editorial McGraw-Hill, 1970.

Walpole Ronald et al., "Probabilidad y Estadística para Ingenieros", 3ª Edición, Editorial McGraw-Hill Interamericana, México, 1989, 733 páginas.

Domínguez Enrique, www.montevideo.com.uy/u/calculus/ind_prob.htm, 1998.

Rangel Velásquez Ricardo , www.csc.mty.itesm.mx/~laava/java/Binomial.html

Osorio Víctor Larios, www.uaq.mx/matematicas/estadisticas/xu4-5.html

www.strix.ciens.ucv.ve/~teorprob/guiasteoricas/index.html

Teorema de Bayes, http://www.hrc.es/bioest/Probabilidad_18.html,

Probabilidad Elemental http://lectura.ilce.edu.mx:3000/sites/telesec/curso1/htmlb/sec_56.html

Teorema de Probabilidad, http://www.fie.us.es/~calvo/alumnos/formulario/Trabajo%20de%20Estadistica/Teorema%20probabilidad%20total.htm

Conjunto:

Libre, G. (2017). ¿Qué es un conjunto? [online] Gcfaprendelibre.org. Available at: https://www.gcfaprendelibre.org/matematicas/curso/los_conjuntos/entender_los_conjuntos/1.do [Accessed 23 Oct. 2017].

Propiedades de los eventos:

Cyta.com.ar. (2017). CyTA. [online] Available at: http://www.cyta.com.ar/biblioteca/bddoc/bdlibros/guia_estadistica/modulo_5.htm [Accessed 23 Oct. 2017].

Evento Colectivamente Exhaustivo:

Scribd. (2017). EVENTOS COLECTIVAMENTE EXHAUSTIVOS. [online] Available at: https://es.scribd.com/document/187576225/EVENTOS-COLECTIVAMENTE-EXHAUSTIVOS [Accessed 24 Oct. 2017].

Teoremas de Probabilidad:

Monografias.interbusca.com. (2017). [online] Available at: http://monografias.interbusca.com/matematicas/propiedades-de-la-probabilidad.html [Accessed 24 Oct. 2017].

Reglas de Probabilidad:

Blade1.uniquindio.edu.co. (2017). Regla de la Adición. [online] Available at: http://blade1.uniquindio.edu.co/uniquindio/ntic/trabajos/6/grupo3/probabilidad/paginas/reglaspro.htm [Accessed 25 Oct. 2017].

Martínez Bencardino, C. (2012). Estadística y muestreo. 13th ed. Bogotá: Ecoe Ediciones.

Regla Especial de Multiplicación:

Mario Orlando Suárez Ibujes, M. (2017). Regla General y Particular de la Multiplicación de Probabilidades - Monografias.com. [online] Monografias.com. Available at: http://www.monografias.com/trabajos89/regla-general-y-particular-multiplicacion-probabilidades/regla-general-y-particular-multiplicacion-probabilidades.shtml#reglaparta#ixzz4xqVLT283 [Accessed 27 Oct. 2017].

Ww2.educarchile.cl. (2017). Citar un sitio web - Cite This For Me. [online] Available at: http://ww2.educarchile.cl/UserFiles/P0001/File/multiplicacion_probabilidades.pdf [Accessed 28 Oct. 2017].

Regla General de Multiplicación:

Scribd. (2017). Apuntes. Reglas de la multiplicación. [online] Available at: https://es.scribd.com/doc/49273842/Apuntes-Reglas-de-la-multiplicacion [Accessed 28 Oct. 2017].

Halweb.uc3m.es. (2017). Citar un sitio web - Cite This For Me. [online] Available at: http://halweb.uc3m.es/esp/Personal/personas/amalonso/esp/ietema5.pdf [Accessed 3 Nov. 2017].

Teorema de Bayes:

Es.wikipedia.org. (2017). Teorema de Bayes. [online] Available at: https://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_Bayes [Accessed 3 Nov. 2017].

Uv.es. (2017). Citar un sitio web - Cite This For Me. [online] Available at: https://www.uv.es/montes/probabilitat/manual.pdf [Accessed 4 Nov. 2017].

Variables Aleatorias y Distribución de Probabilidad:

Ugr.es. (2017). Citar un sitio web - Cite This For Me. [online] Available at: http://www.ugr.es/~eues/webgrupo/Docencia/MonteroAlonso/estadisticaII/tema2.pdf [Accessed 4 Nov. 2017].

Ugr.es. (2017). Citar un sitio web - Cite This For Me. [online] Available at: http://www.ugr.es/~proman/EDIP/2013-2014/PDF/Tema5.pdf [Accessed 5 Nov. 2017].

Esperanza o Valor Esperado:
Omxr (2017). Valor esperado o media. [online] Es.slideshare.net. Available at: https://es.slideshare.net/jagaromxrsxidd/valor-esperado-o-media-60966640 [Accessed 5 Nov. 2017].

Varianza o Momento:

Es.wikibooks.org. (2017). Apuntes matemáticos/Estadística/Capítulo 3/Momentos - Wikilibros. [online] Available at: https://es.wikibooks.org/wiki/Apuntes_matem%C3%A1ticos/Estad%C3%ADstica/Cap%C3%ADtulo_3/Momentos [Accessed 5 Nov. 2017].

Previa.uclm.es. (2017). Citar un sitio web - Cite This For Me. [online] Available at: https://previa.uclm.es/profesorado/licesio/Docencia/mei/Tema7_guion.pdf [Accessed 6 Nov. 2017].

Distribución Binomial:

Lockheart (2017). DISTRIBUCIÓN BERNOULLI Y DISTRIBUCIÓN BINOMIAL. [online] Es.slideshare.net. Available at: https://es.slideshare.net/sonyelockheart/distribucin-bernoulli-y-distribucin-binomial [Accessed 6 Nov. 2017].

Distribución de Poisson:

Uv.es. (2017). DISTRIBUCI�N DE POISSON. [online] Available at: https://www.uv.es/ceaces/base/modelos%20de%20probabilidad/poisson.htm [Accessed 7 Nov. 2017].

Distribución Geométrica:

Uv.es. (2017). DISTRIBUCI�N GEOM�TRICA. [online] Available at: https://www.uv.es/ceaces/base/modelos%20de%20probabilidad/geometrica.htm [Accessed 7 Nov. 2017].