Cadenas de Markov

Objetivos de aprendizaje

Determinar los estados o las condiciones futuras utilizando el análisis de Markov.

Calcular las condiciones a largo plazo o de estado estable, usando únicamente la matriz de probabilidades de transición.

Entender el uso del análisis de estado absorbente en la predicción de condiciones futuras.

Introducción

- El *análisis de Markov* es una técnica que maneja las probabilidades de ocurrencia futura, mediante el análisis de las probabilidades conocidas en el presente.
- Tiene diversas aplicaciones en los negocios.
- El análisis de Markov supone que el sistema comienza en un estado o condición inicial.
- Las probabilidades de cambio de un estado a otro se conocen como matriz de probabilidades de transición.
- La solución de problemas con el análisis de Markov tan solo requiere un manejo básico de martrices.

Introducción

- Este análisis se limita a problemas que siguen cuatro supuestos:

  1. Existe un número limitado o finito de estados posibles.
  2. La probabilidad de cambiar de estado permanece igual con el paso del tiempo.
  3. Podemos predecir cualquier estado futuro a partir del estado anterior y la matriz de probabilidades de transición.
  4. El tamaño y la composición del sistema no cambia durante el análisis.

Estados y probabilidades de los estados

- Los estados se utilizan para identificar todas las condiciones posibles de un proceso o sistema.
- Es posible identificar los estados específicos de muchos procesos o sistemas.
- En el análisis de Markov suponemos que los estados son tanto *colectivamente exhaustivos* como *mutuamente excluyentes*.
- Después de identificar los estados, el siguiente paso consiste en determinar la probabilidad de que el sistema esté en dicho estado.

La información se coloca en un vector de probabilidades de estado:

Estados y probabilidades de los estados

$\pi(i)$ = vector de probabilidades de estado para el periodo i

$= (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \ldots, \pi_n)$

Donde:

n = número de estados

$\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ = probabilidad de estar en el estado 1, estado 2, …, estado n

- En algunos casos, es posible saber con total certidumbre en qué estado se encuentra el artículo:

- Entonces, el vector de estado se representa como:

$$\pi(1) = (1, 0)$$

donde

$\pi(1)$ = vector de estado para la máquina en el periodo 1

π_1 = 1 = probabilidad de estar en el primer estado

π_2 = 0 = probabilidad de estar en el segundo estado

Vector de probabilidades de estado

- Veamos el vector de estados para los clientes en un pequeño pueblo con tres tiendas.
- Un total de 100,000 personas compran en las tres tiendas durante un mes dado:
  - Cuarenta mil compran en American Food Store: estado 1.
  - Treinta mil compran en Food Mart: estado 2.
  - Treinta mil compran en Atlas Foods: estado 3.

Vector de probabilidades de estado

La probabilidad de que una persona compre es:

Estado 1: American Food Store	**40,000/100,000 = 0.40 = 40%**
Estado 2: Food Mart	**30,000/100,000 = 0.30 = 30%**
Estado 3: Atlas Foods	**30,000/100,000 = 0.30 = 30%**

Estas probabilidades se colocan en el vector de probabilidades de estado como

$$\pi(1) = (0.4, 0.3, 0.3)$$

donde

$\pi(1)$=vector de probabilidades de estado para las tres tiendas en el periodo 1

$\pi_1 = 0.4 =$ probabilidad de que una persona compre en American Food, estado 1

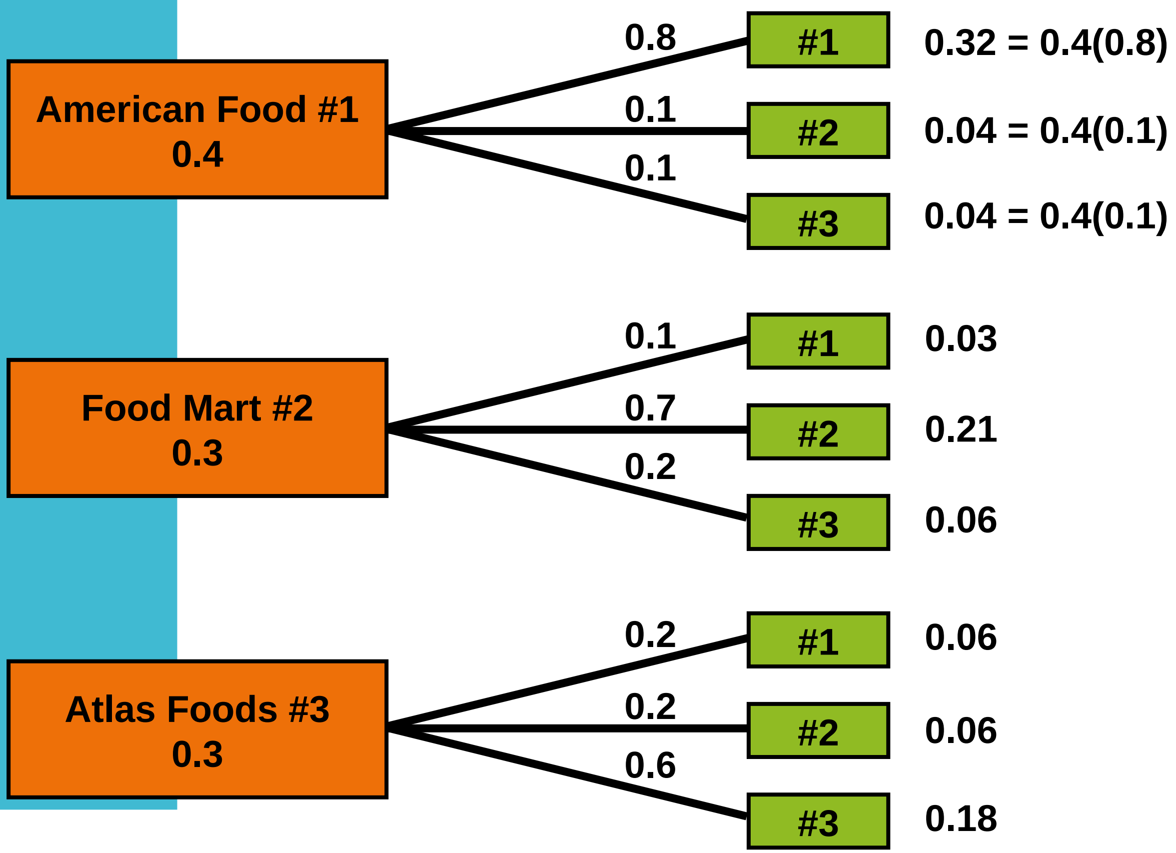
$\pi_2 = 0.3 =$ probabilidad de que una persona compre en Food Mart, estado 2

$\pi_3 = 0.3 =$ probabilidad de que

Vector de probabilidades de estado para el ejemplo de tres tiendas de abarrotes

- Las probabilidades en el vector de estado representan la *participación en el mercado* de las tres tiendas.
- La gerencia de las tres tiendas estará interesada en la manera en que cambia su participación en el mercado con el tiempo.
- La figura muestra un diagrama de árbol de la participación en el mercado del mes próximo.

Diagrama de árbol para el ejemplo de las tres tiendas



Matriz de probabilidades de transición

La matriz de probabilidades de transición nos permite ir de un estado actual a un estado futuro:

Sea P_{ij} = probabilidad condicional de estar en el estado j en el futuro, dado el estado actual i

Por ejemplo, P_{12} es la probabilidad de estar en el estado 2 en el futuro, dado que el evento estaba en el estado 1 en el periodo anterior:

Matriz de probabilidad es de transición

Sea P = la matriz de probabilidades de transición:

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & \cdots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & \cdots & P_{2n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ & & \cdots & & \\ P_{m1} & & & & P_{mn} \end{pmatrix}$$

- **Los valores individuales de P_{ij} se determinan empíricamente**
- **Las probabilidades en cada renglón sumarán 1**

Probabilidades de transición para las tres tiendas

Usamos los datos históricos para desarrollar la siguiente matriz:

$$P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{pmatrix}$$

Renglón 1

0.8 = P_{11} = probabilidad de estar en el estado 1, después de estar en el estado 1 en el periodo anterior

0.1 = P_{12} = probabilidad de estar en el estado 2, después de estar en el estado 1 en el periodo anterior

0.1 = P_{13} = probabilidad de estar en el estado 3, después de estar en el estado 1 en el periodo anterior

Probabilidades de transición para las tres tiendas

Renglón 2

0.1 = P_{21} = = probabilidad de estar en el estado 1, después de estar en el estado 2 en el periodo anterior

0.7 = P_{22} = = probabilidad de estar en el estado 2, después de estar en el estado 2 en el periodo anterior

0.2 = P_{23} = probabilidad de estar en el estado 3, después de estar en el estado 2 en el periodo anterior

Renglón 3

0.2 = P_{31} = = probabilidad de estar en el estado 1, después de estar en el estado 3 en el periodo anterior

0.2 = P_{32} = = probabilidad de estar en el estado 2, después de estar en el estado 3 en el periodo anterior

0.6 = P_{33} = = probabilidad de estar en el estado 3, después de estar en el estado 3 en el periodo anterior

Predicción de la participación futura en el mercado

- Uno de los propósitos del análisis de Markov es predecir el futuro.
- Dado el vector de probabilidades de estado y la matriz de probabilidades de transición, no es muy difícil determinar las probabilidades de estado en una fecha futura.
- Este tipo de análisis permite el cálculo de la probabilidad de que una persona compre en alguna de las tiendas en el futuro.
- Como esta probabilidad es igual a la participación en el mercado, es posible determinar la participación futura en el mercado de las tiendas de abarrotes.

Predicción de la participación futura en el mercado

Cuando el periodo actual es 0, las probabilidades de estado del siguiente periodo 1 se determinan como sigue:

$$\pi(1) = \pi(0)P$$

Para cualquier periodo n calculamos las probabilidades de estado del periodo $n + 1$ como sigue:

$$\pi(n+1) = \pi(n)P$$

Predicción de la participación futura en el mercado

Los cálculos para la participación en el mercado del periodo siguiente son:

$$\pi(1) = \pi(0)P$$

$$= (0.4, 0.3, 0.3)\begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} = [&(0.4)(0.8) + (0.3)(0.1) + (0.3)(0.2), \\ &(0.4)(0.1) + (0.3)(0.7) + (0.3)(0.2), \\ &(0.4)(0.1) + (0.3)(0.2) + (0.3)(0.6)] \end{aligned}$$

$$= (0.41, 0.31, 0.28)$$

Predicción de la participación futura en el mercado

- La participación de mercado para American Food y Food Mart aumenta, en tanto que para Atlas Foods disminuye.
- Podemos determinar si esto continuará, observando las probabilidades de estado en el futuro.
- Si consideramos dos periodos a partir de ahora:

$$\pi(2) = \pi(1)P$$

Predicción de la participación futura en el mercado

Como sabemos que:

$$\pi(1) = \pi(0)P$$

Tenemos:

$$\pi(2) = \pi(1)P = [\pi(0)P]P = \pi(0)PP = \pi(0)P^2$$

En general:

$$\pi(n) = \pi(0)P^n$$

La cuestión de si American y Food Mart continuarán ganando participación en el mercado y Atlas continuará perdiendo es mejor abordarla en términos de condiciones de equilibrio o de estado estable.

Análisis de Markov en operación de maquinaria

- El dueño de Tolsky Works registró durante varios años la operación de sus fresadoras.
- En los dos últimos años, 80% de las veces la fresadora funcionaba correctamente en el mes en curso, si había funcionado correctamente en el mes anterior.
- 90% de las veces la máquina estaba mal ajustada, si se había ajustado incorrectamente el mes anterior.
- 10% de las veces la máquina operaba correctamente en un mes dado, cuando había operado incorrectamente el mes anterior.

La matriz de probabilidades de transición para esta máquina es:

Ejemplo de Tolsky Works

$$P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}$$

donde

$P_{11} = 0.8 =$ **probabilidad de que la máquina funcione *correctamente* este mes, dado que funcionaba *correctamente* el mes pasado**

$P_{12} = 0.2 =$ **probabilidad de que la máquina *no* funcione correctamente este mes, dado que funcionaba *correctamente* el mes pasado**

$P_{21} = 0.1 =$ **probabilidad de que la máquina funcione *correctamente* este mes, dado que *no* funcionaba correctamente el mes pasado**

$P_{22} = 0.9 =$ **probabilidad de que la máquina *no* funcione correctamente este mes, dado que *no* funcionaba correctamente el mes pasado**

¿Cuál es la probabilidad de que la máquina funcione correctamente dentro de uno y dos meses a partir de ahora?

Ejemplo de Tolsky Works

$$\pi(1) = \pi(0)P$$

$$= (1, 0)\begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}$$

$$= [(1)(0.8) + (0)(0.1), (1)(0.2) + (0)(0.9)]$$

$$= (0.8, 0.2)$$

¿Cuál es la probabilidad de que la máquina funcione correctamente dentro de uno y dos meses a partir de ahora?

Ejemplo de Tolsky Works

$$\pi(2) = \pi(1)P$$

$$= (0.8,\ 0.2)\begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}$$

$$= [(0.8)(0.8) + (0.2)(0.1),\ (0.8)(0.2) + (0.2)(0.9)]$$

$$= (0.66,\ 0.34)$$

Estado de probabilidades para el ejemplo de la máquina con 15 periodos

Periodo	Estado 1	Estado 2
1	1.000000	0.000000
2	0.800000	0.200000
3	0.660000	0.340000
4	0.562000	0.438000
5	0.493400	0.506600
6	0.445380	0.554620
7	0.411766	0.588234
8	0.388236	0.611763
9	0.371765	0.628234
10	0.360235	0.639754
11	0.352165	0.647834
12	0.346515	0.653484
13	0.342560	0.657439
14	0.339792	0.660207
15	0.337854	0.662145

Tabla 15.1

Condiciones de equilibrio

- Es fácil pensar que con el paso del tiempo todas las participaciones de mercado serán 0 o 1.
- Pero es normal encontrar un *porcentaje de equilibrio* de los valores o las probabilidades de mercado.
- Se presenta una *condición de equilibrio* cuando las probabilidades de estado no cambian después de muchos periodos.
- Entonces, en equilibrio, las probabilidades de estado para un periodo futuro deben ser iguales a las probabilidades de estado del periodo actual.
- Las probabilidades de estado en equilibrio se calculan repitiendo el análisis de Markov para un gran número de periodos.

Condiciones de equilibrio

Siempre es cierto que

$$\pi\,(\text{siguiente periodo}) = \pi\,(\text{este periodo})P$$

- **O bien,**

$$\pi(n+1) = \pi(n)P$$

- **En equilibrio,**

$$\pi(n+1) = \pi(n)$$

- **Por lo tanto, en equilibrio**

$$\pi(n+1) = \pi(n)P = \pi(n)$$

- **O bien,**

$$\pi = \pi P$$

Para la máquina de Tolsky,

Condiciones de equilibrio

$$\pi = \pi P$$

$$(\pi_1, \pi_2) = (\pi_1, \pi_2) \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}$$

- **Aplicando la multiplicación de matrices:**

$$(\pi_1, \pi_2) = [(\pi_1)(0.8) + (\pi_2)(0.1), (\pi_1)(0.2) + (\pi_2)(0.9)]$$

El primero y segundo términos del lado izquierdo, π_1 y π_2, son iguales a los primeros términos del lado derecho:

$$\pi_1 = 0.8\pi_1 + 0.1\pi_2$$
$$\pi_2 = 0.2\pi_1 + 0.9\pi_2$$

Condiciones de equilibrio

- **Las probabilidades de estado deben sumar 1:**

$$\pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_n = 1$$

- **Para la máquina de Tolsky:**

$$\pi_1 + \pi_2 = 1$$

Condiciones de equilibrio

De manera arbitraria, decidimos resolver las siguientes dos ecuaciones:

$$\pi_2 = 0.2\pi_1 + 0.9\pi_2$$

$$\pi_1 + \pi_2 = 1$$

Reagrupando y sustituyendo, obtenemos

$$0.1\pi_2 = 0.2\pi_1$$

$$\pi_2 = 2\pi_1$$

$$\pi_1 + \pi_2 = 1$$

$$\pi_1 + 2\pi_1 = 1$$

$$3\pi_1 = 1$$

$$\pi_1 = {}^1/_3 = 0.33333333$$

$$\pi_2 = {}^2/_3 = 0.66666667$$

Ejemplo de cuentas por pagar

Estados absorbentes y matriz fundamental

- En los ejemplos estudiados hasta ahora, se supone que es posible pasar de un estado a otro.
- Esto no siempre es posible.
- Cuando se permanece en un estado, esto se conoce como *estado absorbente*.
- Un sistema de cuentas por cobrar generalmente ubica las deudas en cuatro estados posibles:

Estado 1 (π_1): pagadas, todas las cuentas

Estado 2 (π_2): deuda incobrable, atrasada por más de tres meses

Estado 3 (π_3): atrasada menos de un mes

Estado 4 (π_4): atrasada entre uno y tres meses

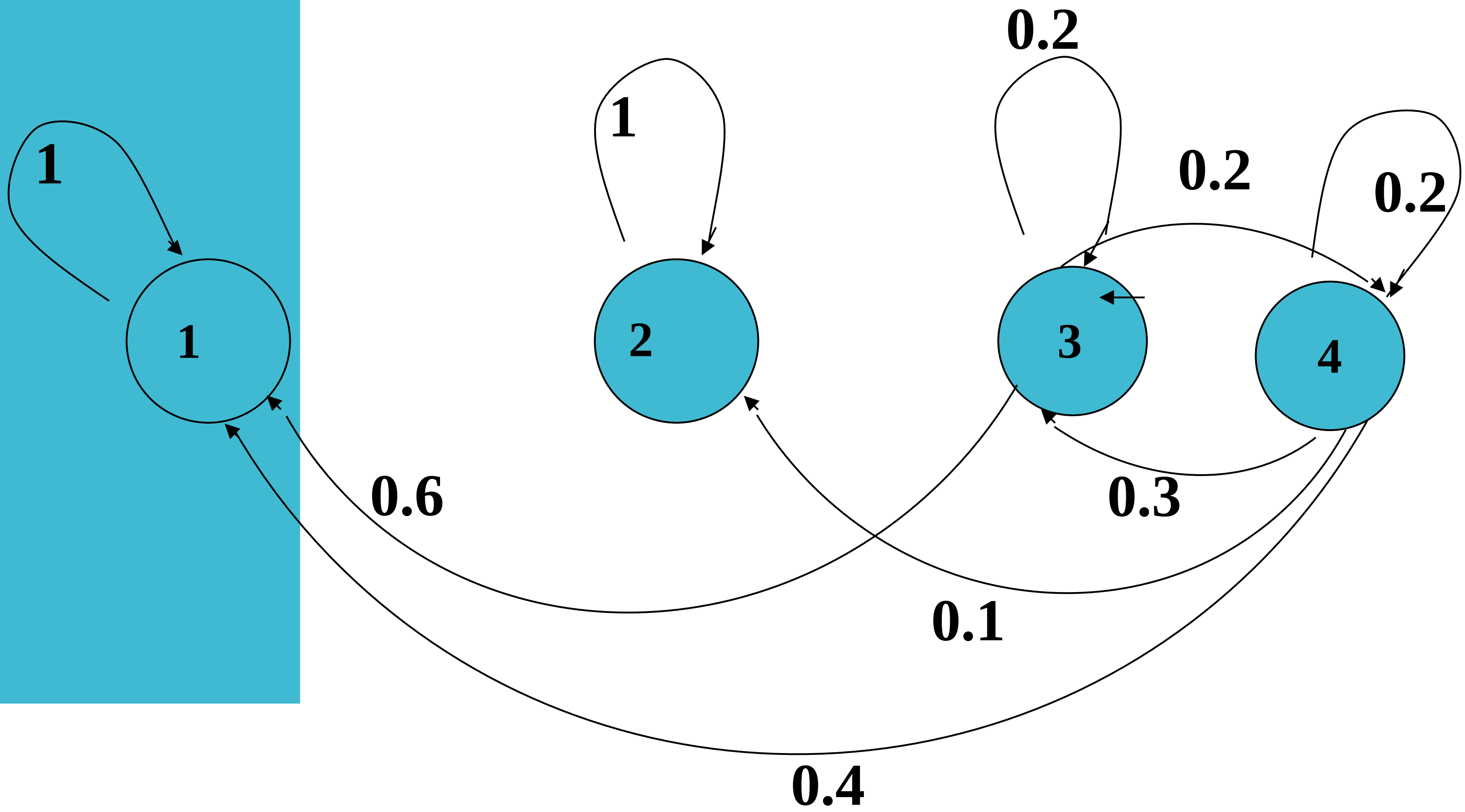
Matriz de probabilidades de transición de este problema

Estados absorbentes y matriz fundamental

ESTE MES	SIGUIENTE MES			
	PAGADA	DEUDA INCOBRABLE	<1 MES	1 A 3 MESES
Pagada	**1**	**0**	**0**	**0**
Deuda incobrable	**0**	**1**	**0**	**0**
Menor de 1 mes	**0.6**	**0**	**0.2**	**0.2**
1 a 3 meses	**0.4**	**0.1**	**0.3**	**0.2**

Por lo tanto:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0.2 & 0.2 \\ 0.4 & 0.1 & 0.3 & 0.2 \end{pmatrix}$$


0.2
1
0.2
0.2
1
1
2
3
4
0.6
0.3
0.1
0.4

Para obtener la matriz fundamental, es necesario hacer una partición de la matriz de probabilidades de transición como sigue:

Estados absorbentes y matriz fundamental

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cc} \quad I \downarrow \quad & \quad 0 \downarrow \quad \end{array} \\
P = & \left(\begin{array}{cc:cc}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
\hdashline
0.6 & 0 & 0.2 & 0.2 \\
0.4 & 0.1 & 0.3 & 0.2
\end{array}\right) \\
 & \begin{array}{cc} \quad \uparrow A \quad & \quad \uparrow B \quad \end{array}
\end{array}
$$

$$
I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
A = \begin{pmatrix} 0.6 & 0 \\ 0.4 & 0.1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 \end{pmatrix}
$$

donde

I = matriz identidad

0 = matriz solo con ceros

La matriz fundamental se calcula como:

Estados absorbentes y matriz fundamental

$$F = (I - B)^{-1}$$

$$F = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

$$F = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.2 \\ -0.3 & 0.8 \end{bmatrix}^{-1}$$

El inverso de la matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ **es** $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{d}{r} & \frac{-b}{r} \\ \frac{-c}{r} & \frac{a}{r} \end{bmatrix}$

donde

$$r = ad - bc$$

Para obtener la matriz F calculamos:

Estados absorbentes y matriz fundamental

$$r = ad - bc = (0.8)(0.8) - (-0.2)(-0.3) = 0.64 - 0.06 = 0.58$$

Con esto tenemos:

$$F = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.2 \\ -0.3 & 0.8 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{0.8}{0.58} & \dfrac{-(-0.2)}{0.58} \\ \dfrac{-(-0.3)}{0.58} & \dfrac{0.8}{0.58} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.38 & 0.34 \\ 0.52 & 1.38 \end{pmatrix}$$

Podemos usar la matriz *FA* para contestar preguntas como cuánto de la deuda en la categoría de menos de un mes se pagará, y cuánto se convertirá en deuda incobrable:

Estados absorbentes
y matriz fundamental

$$M = (M_1, M_2, M_3, \ldots , M_n)$$

donde

n **= número de estados no absorbentes**
M_1 **= cantidad en el primer estado o categoría**
M_2 **= cantidad en el segundo estado o categoría**
M_n **= cantidad en el** n**-ésimo estado o categoría**

Si se supone que hay $2,000 en la categoría de menos de un mes y $5,000 en la de uno a tres meses, M sería:

$$M = (2{,}000,\ 5{,}000)$$

Estados absorbentes y matriz fundamental

Cantidad pagada y cantidad de deuda incobrable

$$= MFA$$

$$= (2{,}000,\ 5{,}000)\begin{bmatrix} 0.97 & 0.03 \\ 0.86 & 0.14 \end{bmatrix}$$

$$= (6{,}240,\ 760)$$

Entonces, del total de $7,000, $6,240 se pagarán al final y $760 terminarán como deuda incobrable.

Cadenas de Markov

"Cuando, conociendo el pasado y el presente, el comportamiento probabilístico del futuro inmediato sólo depende del estado presente"

Propiedad Markoviana

- Sea $\{X_n: n \geq 0\}$ un proceso estocástico discreto (es decir, cada X_n es una variable aleatoria discreta). Diremos que tiene la propiedad de markoviana si se cumple:

$$P\{X_{n+1}= j \,/\, X_0= i_0 \,,\, X_1= i_1 \;.\;.\;.\; X_n= i_n \} =$$

$$P\{X_{n+1}= j \,/\, X_n= i_n \} \;=\; p_{i,j}(n)$$

Probabilidades de Transición

$p_{i,j}(n)$ = la probabilidad de que el proceso, estando en el estado i en el tiempo n, pase al estado j en el instante siguiente

Cuando $p_{i,j}(n) = p_{i,j}$ (esto es, no depende de n) se dice que las probabilidades de transición son estacionarias. **Lo supondremos de ahora en adelante.**

Matriz de Transición

Las probabilidades de transición definen la matriz $P = [p_{ij}]$ que satisface

1) $p_{ij} \geq 0$ para todo i, j

2) $\sum_j p_{ij} = 1$ para todo i

Matriz de Transición: ejemplo

-

			Tiempo n+1		
		Estado 0	Estado 1	Estado 2	Estado 3
	Estado 0	**0,20**	**0,65**	**0,15**	**0**
Tiempo n	Etado 1	**0**	**0,60**	**0**	**0,40**
	Estado 2	**0,15**	**0,15**	**0,30**	**0,40**
	Estado 3	**0**	**0**	**0**	**1**

Caminata Aleatoria: ejemplo de una Cadena de Markov

$P\{S_{n+1}=j\ /S_0= 0,\ S_1= i,..,\ S_{n-1} = i_{n-1},\ S_n= i\} =$

$P\{S_n+X_{n+1}= j\ /S_0= 0,\ S_1= i,..,\ S_{n-1}= i_{n-1},\ S_n= i\}=$

$P\{X_{n+1}= j-i\ /S_0= 0,\ S_1= i,..,\ S_{n-1}= i_{n-1},\ S_n= i\}=$

$P\{X_{n+1}= j-i\}= p_{j-i}$

$= p_{i,j}$

$= P\{S_{n+1}=j\ /\ S_n= i\}$

Ejemplo 2: caminata aleatoria con barreras absorbentes

En el tiempo 0 tengo \$ 2 y en los tiempos 1,2,3,... participo en un juego en el que apuesto \$1. Gano el juego (y gano \$1) con probabilidad p y lo pierdo (perdiendo lo apostado) con probabilidad 1-p. Mi meta es aumentar mi capital hasta \$4 y tan pronto lo logre me salgo del juego. También salgo cuando me arruine (capital \$0).

Ejemplo 2 (cont)

- X_n : mi capital inmediatamente después del juego n
- Estados del proceso = {0,1,2,3,4}
- Matriz de transición:

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2. & 3. & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 1-p & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Eejmplo 3: un modelo para el desplazamiento poblacional

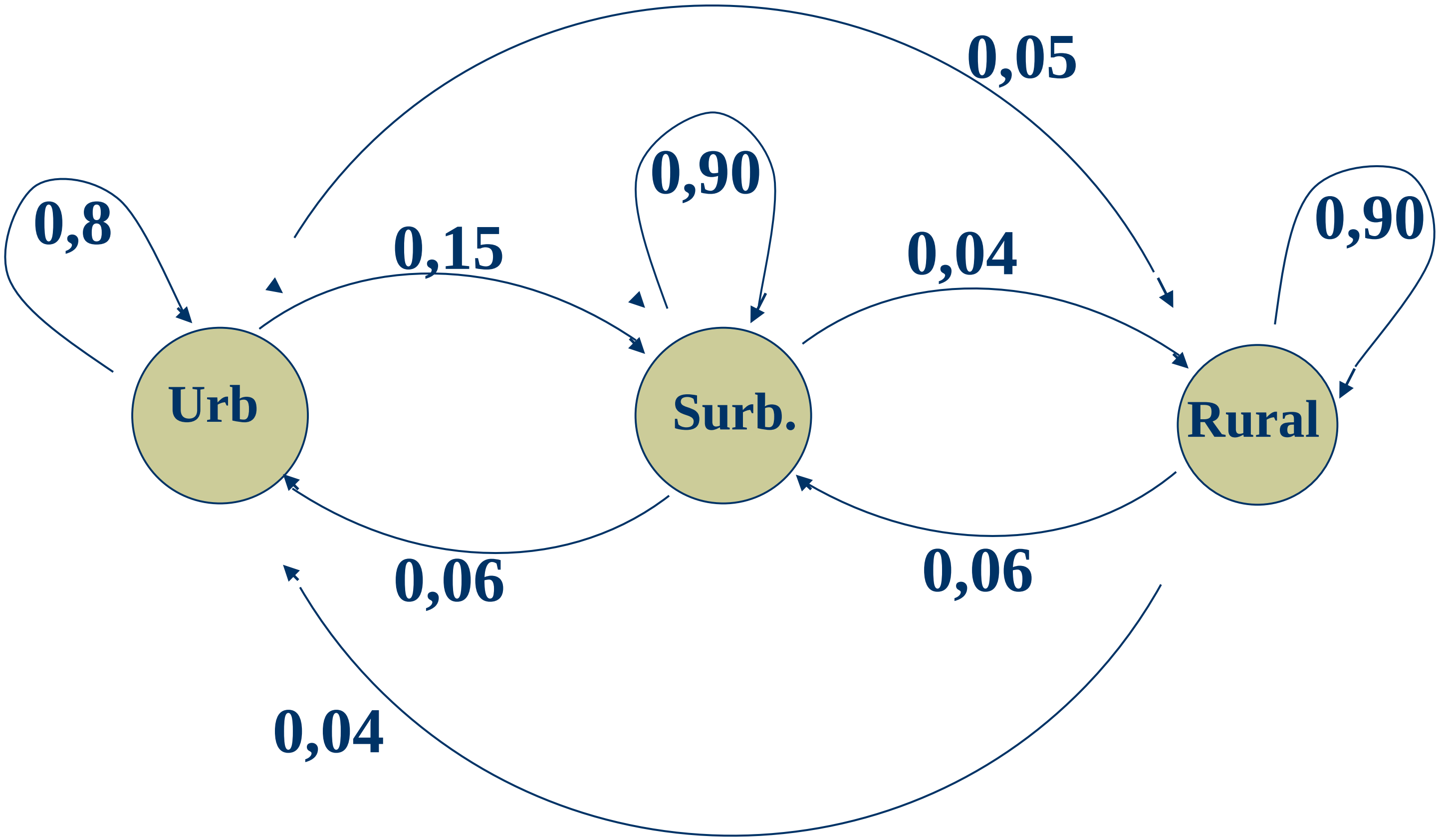
Para efectos de una investigación, en un determinado país, una familia puede clasificarse como habitante de zona urbana, rural o suburbana. Se ha estimado que durante un año cualquiera, el 15% de todas las familias urbanas se cambian a zona suburbana y el 5% a zona rural. El 6% de las familias suburbanas pasan a zona urbana y el 4% a zona rural. El 4% de las familias rurales pasan a zona urbana y el 6% a zona suburbana.

Cadenas de Markov: ejemplo 3

Tendremos la siguiente matriz de transición

$$
\begin{array}{cccc}
 & \text{Urb.} & \text{Surb.} & \text{Rur.} \\
P = & \left(\begin{matrix} 0{,}80 & 0{,}15 & 0{,}05 \\ 0{,}06 & 0{,}90 & 0{,}04 \\ 0{,}04 & 0{,}06 & 0{,}90 \end{matrix}\right) & &
\end{array}
$$

Cadenas de Markov



Distribución de una Cadena de Markov

Sea $\{X_n : n \geq 0\}$ una Cadena de Markov, con distribución inicial $a_j = P\{X_0 = j\}$ para $j = 1,2, \ldots$

Entonces, para cualquier k_0 y para cualesquiera $i_0, \ldots, i_k$ pertenecientes al conjunto de estados del proceso se cumple:

$$P\{X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_k = i_k\} = a_{i_0}\, p_{i_0 i_1}\, p_{i_1 i_2} \ldots p_{i_{k-1} i_k}$$

donde

$$p_{ij} = P\{X_{m+1} = j \,/\, X_m = i\}$$

Probabilidades de transición en n etapas

Pregunta: si en el tiempo t el proceso de Markov se encuentra en el estado i, ¿cuál es la probabilidad de que **n pasos después** se encuentre en el estado j ?

Resp:

$P\{X_{n+t}= j / X_t= i \}= P\{X_n= j / X_0= i \}$ (estacionaria)

$= p^{(n)}_{i,j}$ (notación)

$=$ elemento (i,j) de la matriz P^n

Ecuación de Chapman-Kolgomorov

Si el resultado anterior se combina con la identidad matricial $P^{n+m} = P^n P^m$, obtenemos:

$$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_k p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)}$$

Una transición desde ***i*** hasta ***j*** en n+m pasos puede lograrse moviendose desde ***i*** hasta un punto intermedio ***k*** en n pasos (*con prob* $p^{(n)}_{i,k}$) y después, dado que el proceso está en el estado ***k*** (*la propiedad de Markov permite que seamos indeferentes a la ruta recorrida*), moverse hasta el estado ***j*** en m pasos (*con prob* $p^{(m)}_{k,j}$). Luego, deben considerarse todas las opciones posibles para el punto intermedio.

Consecuencia de los resultados anteriores

Pregunta: ¿cuál es la probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado j en el tiempo n?

Resp.

Sea $\underline{\boldsymbol{a}}^t = (a_0, a_1,\ldots,a_m)$ la distribución inicial de la Cadena de Markov (con m estados) , entonces:

$$P\{X_n = j\} = \text{elemento } j \text{ del vector } \underline{\boldsymbol{a}}^t P^n$$

Aplicación de resultados anteriores

Consideremos el ejemplo 3, y supongamos que al inicio de la investigación, el 35% de la población vivía en áreas urbanas, el 45% en área suburbana, y el resto en área rural.

a) Si inicialmente una familia vive en un área rural, ¿cuál es la probabilidad de que tres años después esta familia viva en un área urbana?

b) ¿Cual es la probabilidad de que tres años despúes de iniciada la investigación una familia viva en el área urbana?

Aplicación de resultados anteriores

$$P^3 = \begin{pmatrix} 0{,}5399 & 0{,}3353 & 0{,}1248 \\ 0{,}1352 & 0{,}7593 & 0{,}1055 \\ 0{,}0967 & 0{,}1622 & 0{,}7411 \end{pmatrix}$$

$$\bar{a}^t = (0{,}35 \quad 0{,}45 \quad 0{,}20)$$

a) 0,0967

b) 0,2691

Clasificación de estados en Cadenas de Markov

Estado Alcanzable:

El estado j es alcanzable desde el estado i si existe $n > 0$ tal que $p^{(n)}_{i,j} > 0$; es decir **es posible** que el proceso llegue al estado j desde el estado i. Se denota $i \rightarrow j$.

Clasificación de estados en Cadenas de Markov

Estados que se comunican:

Los estados i, j se comunican si $i \longleftrightarrow j$.

Atención: la relación $\longleftrightarrow$ es una relación de equivalencia (reflexiva, simétrica y transitiva). Me permite dividir el conjunto de estados en clases de equivalencia

Clasificación de estados en Cadenas de Markov: ejemplo

Ejemplo 4: consideremos una cadena de Markov con matriz de transición

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\
P = & \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Clasificación de estados en Cadenas de Markov: ejemplo

Los estados {a,b,c} se comunican y forman una clase de equivalencia. El estado {d} es otra clase de equivalencia.

Atención: cuando una cadena de Markov tiene sólo una clase de equivalencia, se dice que es irreducible

Clasificación de estados en Cadenas de Markov

$f^{(n)}_{jk}$ = probabilidad de que, partiendo del estado j , la cadena llegue al estado k ***por primera vez*** en el tiempo n

Clasificación de estados en Cadenas de Markov

Probabilidad de llegar a k (en un tiempo finito), partiendo de j

$$f_{jk} = \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}_{jk}$$

Clasificación de estados en Cadenas de Markov

Estado Recurrente.

Se dice que el estado i es recurrente si $f_{ii} = 1$.

Esto significa lo siguiente: siempre que parta del estado i, podré regresar a el (en un tiempo finito)

Clasificación de estados en Cadenas de Markov

Estado Transitorio (no recurrente)

Se dice que el estado i es transitorio si $f_{ii} < 1$.

(Esto significa lo siguiente: hay manera de abandonar el estado i, de tal modo que nunca regrese a el)

Estado Absorbente:

Se dice que el estado i es absorbente si $p_{ii} = 1$.

En el ejemplo 4, a,b y c son transitorios, d es recurrente y también absorbente

Clasificación de estados en Cadenas de Markov: ejemplo

Estado Periódico

Un estado recurrente i es *periódico*, con periodo k > 1, si k es el menor número tal que todas las trayectoria que parte de i y regresan a i, tienen longitud múltiplo de k.

Si no es periodico se le dice ***aperiódico***

Clasificación de estados en Cadenas de Markov

Cadena Ergódica

Si todos los estados de una Cadena de Markov son recurrentes, aperiódicos y se comunican entre si, se dice que la cadena es ***Ergódica***.

Propiedades a largo plazo de una Cadena de Markov

Pregunta interesante

¿Existe una ***probabilidad límite*** de que el sistema se encuentre en el estado j, después de muchas transiciones, y que esta probabilidad sea ***independiente del estado inicial***.?

Propiedades a largo plazo de una Cadena de Markov

Afirmación:

Si P es la matriz de transición de una Cadena de Markov que tiene los estados {1,2,...k} , entonces, para j=1,2,..,k

$$\lim_{n\to\infty} p_{i,j}^{(n)} = \pi_j$$

Propiedades a largo plazo de una Cadena de Markov

Escrito de otra forma

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \cdot & \cdot & \pi_k \\ \pi_1 & \pi_2 & \cdot & \cdot & \pi_k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \pi_1 & \pi_2 & \cdot & \cdot & \pi_k \end{pmatrix}$$

Propiedades a largo plazo de una Cadena de Markov

Para obtener los π_j se tiene presente las

<u>ecuaciones de estado estable</u>

a) $\pi_j > \boldsymbol{0}$

b) $\pi_j = \sum_{i=\boldsymbol{1}}^{k} \pi_i p_{ij}$ esto es $\pi^t = \pi^t P$

c) $\sum_{j=\boldsymbol{1}}^{k} \pi_j = \boldsymbol{1}$

Ejemplo (desplazamiento poblacional: ejemplo 3)

Dado que la matriz del ejemplo 3 es ergódica, podemos hacer:

$$(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)\begin{pmatrix} 0{,}80 & 0{,}15 & 0{,}05 \\ 0{,}06 & 0{,}90 & 0{,}04 \\ 0{,}04 & 0{,}06 & 0{,}90 \end{pmatrix}$$

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$

continuación

Una opción es:

$$\pi_1 = 0{,}80\pi_1 + 0{,}06\pi_2 + 0{,}04\pi_3$$

$$\pi_2 = 0{,}15\pi_1 + 0{,}90\pi_2 + 0{,}06\pi_3$$

$$1 = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3$$

continuación

Cuya solución es

$$(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = (0.2077\ ,\ 0.4918\ ,\ 0.3005)$$

Es decir, si con el paso del tiempo se mantiene el comportamiento descrito por el modelo (lo cual es muy poco probable) después de muchos años,aproximadamente, el 21% de la población ocupará las zonas urbanas, el 49% las suburbanas y el 30% la rural.

Tiempo de primera pasada

Estamos interesados en tener información respecto al número de pasos (transiciones) que hace el proceso al ir de un estado i a un estado j por primera vez. Se define

$T_{i,j}$ = tiempo de primera pasada al ir del estado i al estado j

Tiempo de primera pasada

Definimos el ***tiempo esperado de recurrencia***

$$E(T_{i,j}) = \mu_{ij}$$

Se puede demostrar que se cumple:

$$\mu_{jj} = \frac{\boldsymbol{1}}{\pi_j}$$

$$\mu_{ij} = \boldsymbol{1} + \sum_{n \neq j} p_{in}\mu_{nj}$$

Ejemplo

En el ejemplo anterior

$$1/\pi_1 = 1/0{,}2077 = 4{,}8146 = \mu_{11}$$

Es decir, el número promedio de años para que, partiendo de vivir en una zona urbana, una familia regrese a vivir en una zona urbana <u>por primera vez</u> es 4,8 años.

continuación

¿Cuál es el número promedio de años para que, partiendo de vivir en zona urbana, una familia llegue a vivir en zona suburbana, por primera vez?. Hacemos primero

$$\mu_{12} = \mathbf{1} + p_{11}\mu_{12} + p_{12}\mu_{22} + p_{13}\mu_{32}$$

$$\mu_{22} = \mathbf{1} + p_{21}\mu_{12} + p_{22}\mu_{22} + p_{23}\mu_{32}$$

$$\mu_{32} = \mathbf{1} + p_{31}\mu_{12} + p_{32}\mu_{22} + p_{33}\mu_{32}$$

continuación

Luego, ignoramos todas las filas y columnas que tengan μ_{22} y queda el sistema

$$\mu_{12} = \mathbf{1} + p_{11}\mu_{12} + p_{13}\mu_{32}$$

$$\mu_{32} = \mathbf{1} + p_{31}\mu_{12} + p_{33}\mu_{32}$$

se sustituye y agrupa

$$-\mathbf{1} = -\mathbf{0{,}20}\mu_{12} + \mathbf{0{,}05}\mu_{32}$$

$$-\mathbf{1} = \mathbf{0{,}04}\mu_{12} - \mathbf{0{,}10}\mu_{32}$$

cuyo resultado es $\mu_{12} = \mathbf{8{,}33}$ y $\mu_{32} = \mathbf{13{,}33}$

continuación

Entonces, en promedio transcurren 8,33 años para que una familia que inicialmente vive en una zona urbana llegue a vivir en zona suburbana, por primera vez.

Modelos de Programación Lineal: Método Gráfico

Introducción

Programación Lineal **(PL) es**

- **Una técnica de modelado matemático ampliamente utilizada**
- **Diseñada para ayudar a los gerentes en la planeación y la toma de decisiones**
- **Relacionadas a la asignación de recursos**

PL es una técnica que ayuda en las decisiones

de asignación de recursos

- ***Programar*** **se refiere a modelar y resolver un problema matemáticamente.**

Ejemplos de aplicaciones exitosas de PL

1. **El Desarrollo de una programación de producción que:**
   - ***Satisfará la demanda futura de la producción de una gran compañía***
   - ***Mientras se minimizarán los costos totales de producción y de inventario***
2. **Seleccionar la mezcla de producción**
   - ***Hacer el mejor uso de las horas-máquina y horas-hombre disponibles***
   - ***Mientras se maximizan el número de los productos***

3. **Determinación de los grados de productos de petróleo que producen la máxima utilidad**

4. **Seleccionar la mejor mezcla de materia prima de alimentos que produzca el menor costo**

5. **Determinar el sistema de distribución que minimice los costos de transporte marítimo y algunos almacenajes a diferentes localidades.**

Requisitos de un problema de LP

Todos los problemas de PL comparten cuatro propiedades:

- **Todos los problemas buscan maximizar o minimizar alguna cantidad (la función objetivo)**
- **Las restricciones limitan el grado al cual el objetivo puede ser alcanzado.**
- **Debe tener alternativas disponibles.**
- **Las relaciones matemáticas son lineales.**

Hipótesis de LP

1. **Certeza:**
   - ***Los coeficientes en la función objetivo y las restricciones son conocidas con certeza y no cambian en el periodo en que son estudiadas.***
2. **Proporcionalidad**
   - ***Entre el objetivo y las restricciones***
   - ***Concordancia entre los incrementos en la producción y la utilización de los recursos.***
3. **Aditividad:**
   - ***El total de todas las actividades es igual a la suma de las actividades individuales.***

Hipótesis de LP (cont.)

4. **Divisibilidad:**
   - ***Las soluciones no tienen que ser números enteros***
   - ***Las soluciones son divisibles y pueden tomar valores de fracciones.***

5. **No negatividad :**
   - ***Todas las respuestas o valores de las variables son mayores o iguales a cero***
   - ***Los valores negativos de cantidades físicas es imposible***

Formulación de problemas de PL

- **La formulación de un programa lineal implica el desarrollo de un modelo matemático que representa el problema administrativo.**
- **Una vez que se entiende el problema administrativo se inicia el desarrollo del enunciado matemático del mismo.**
- **Los pasos para formular un programa lineal son:**

1. ***Entender por completo el problema administrativo que enfrenta***
2. ***Identificar los objetivos y las restricciones***
3. ***Definir las variables de decisión***
4. ***Utilizar las variables de decisión para escribir las expresiones matemáticas de la función objetivo y de las restricciones***

Formulación de problemas de PL

El problema de mezcla de productos

- **Se producen dos o más productos utilizando recursos limitados tales como:**

- personal, máquinas, materia prima, etc.

- **La utilidad que la firma busca maximizar está basada en la contribución a la utilidad por unidad de cada producto.**
- **A la compañía le gustaría determinar cuántas unidades de cada producto deberá fabricar para maximizar la utilidad total dados sus recursos limitados.**

Flair Furniture Company

Horas requeridas para producir una unidad

Departamento	(*M*) Mesas	(*S*) Sillas	Horas disponibles esta semana
• Carpintería	4	3	240
• Pintura y barnizado	2	1	100
Utilidad por unidad	**$7**	**$5**	

Identificar la función objetivo y las restricciones

Maximizar las utilidades

Sujeto a:

Horas de carpintería usadas $\leq$ 240 hrs.por semana

Horas de pintura y barnizado usadas $\leq$ 100 hrs./sem.

Flair Furniture Company

Identificar la función objetivo y las restricciones

Maximizar las utilidades

Sujeto a:

Horas de carpintería usadas $\leq$ 240 hrs.por semana

Horas de pintura y barnizado usadas $\leq$ 100 hrs./sem.

Definir las variables de decisión:

X_1 = número de mesas producidas por semana

X_2 = número de sillas producidas por semana

Flair Furniture Company

Horas requeridas para producir una unidad

Departamento	(X_1) Mesas	(X_2) Sillas	Horas disponibles esta semana
• Carpintería	4	3	240
• Pintura y barnizado	2	1	100
Utilidad por unidad	**$7**	**$5**	

Formulación matemática:

Max.utilidad $Z = 7X_1 + 5X_2$

Subject to: $4X_1 + 3X_2 \leq 240$ (Carpintería)

$2X_1 + 1X_2 \leq 100$ (Pintura y Barniz)

$X_1 \geq 0$ (1ª restricción de no negatividad)

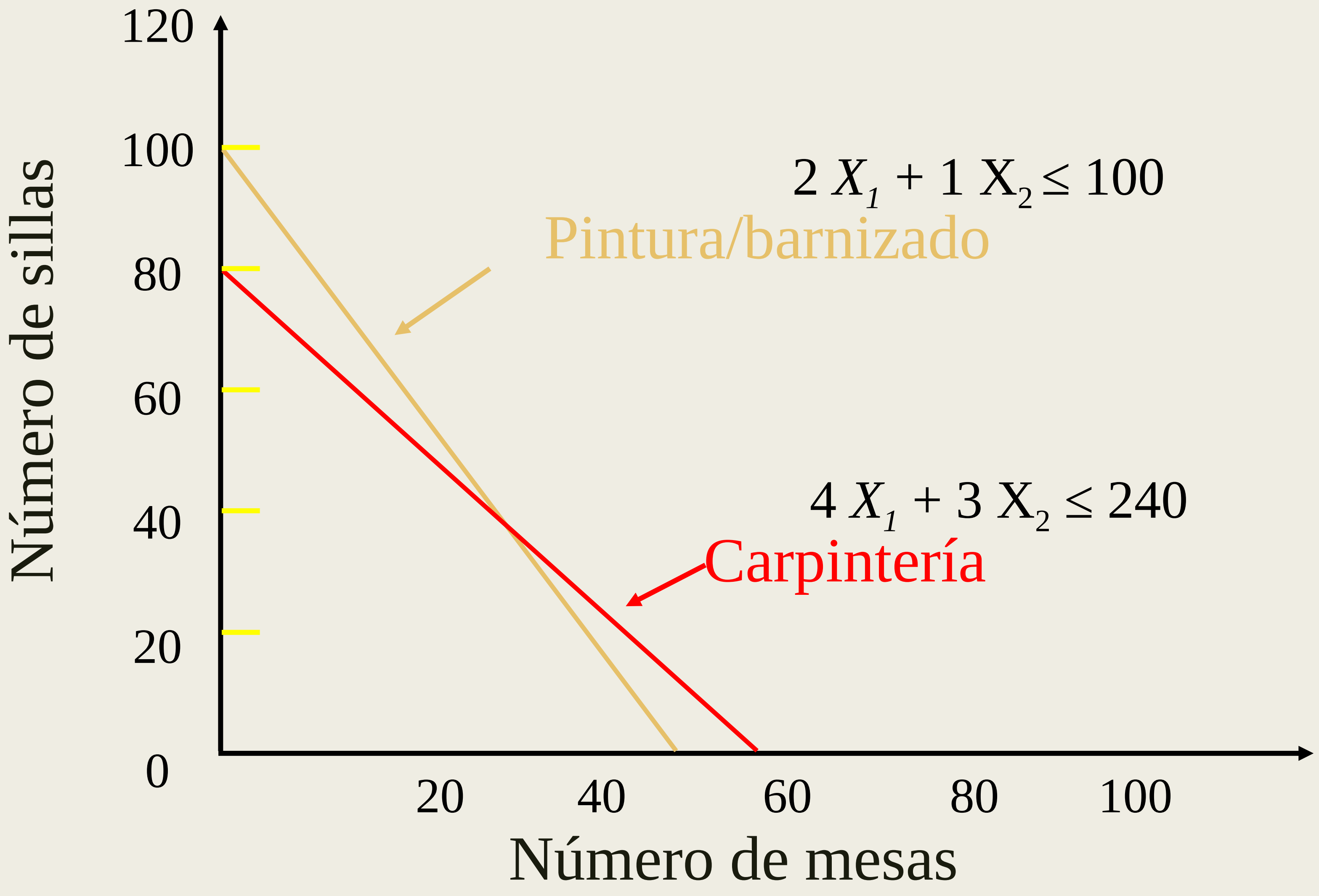
$X_2 \geq 0$ (2ª restricción de no negatividad)

Flair Furniture Company Restricciones

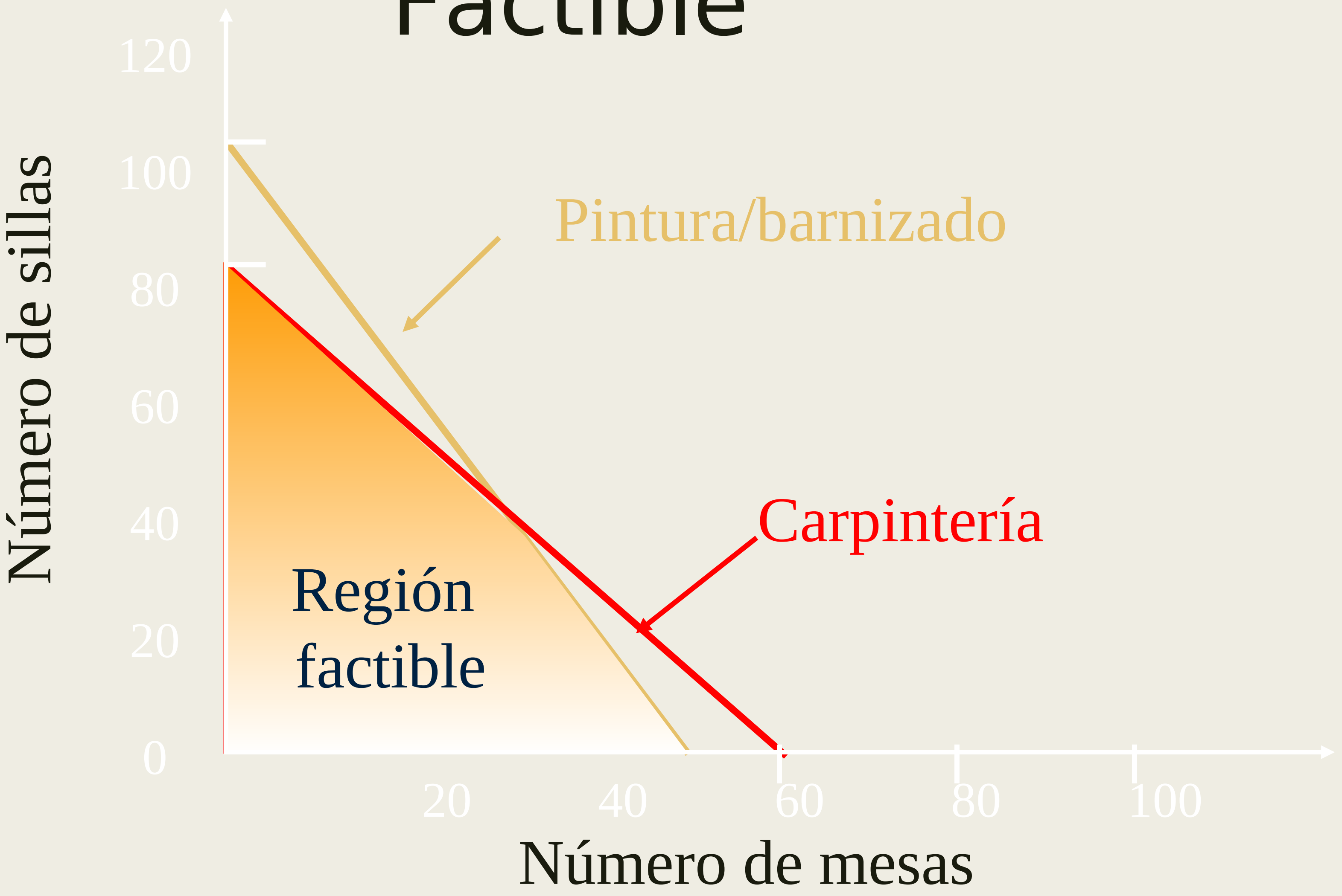
La forma más fácil de resolver un problema sencillo como el de Flair Furniture Company es a través del Método Gráfico

El método gráfico sólo se utiliza cuando se tienen problemas con dos variables de decisión, pero da una valiosa idea sobre cómo se estructura los problemas más grandes.

Flair Furniture Company



Flair Furniture Company Región Factible



Etapas para el método de línea de isoutilidad

1. **Graficar las restricciones y encuentre la región factible.**
2. **Seleccione la línea de utilidad o costo y grafiquela para encontrar la pendiente.**
3. **Mover la línea de la función objetivo en la dirección del incremento de utilidad (o decremento de costo) manteniendo la inclinación de la pendiente. El último punto que toca in la región factible es la solución óptima.**
4. **Encontrar los valores de las variables de decisión en el último punto y calcule la utilidad (o costo).**

Flair Furniture Company línea de isoutilidad

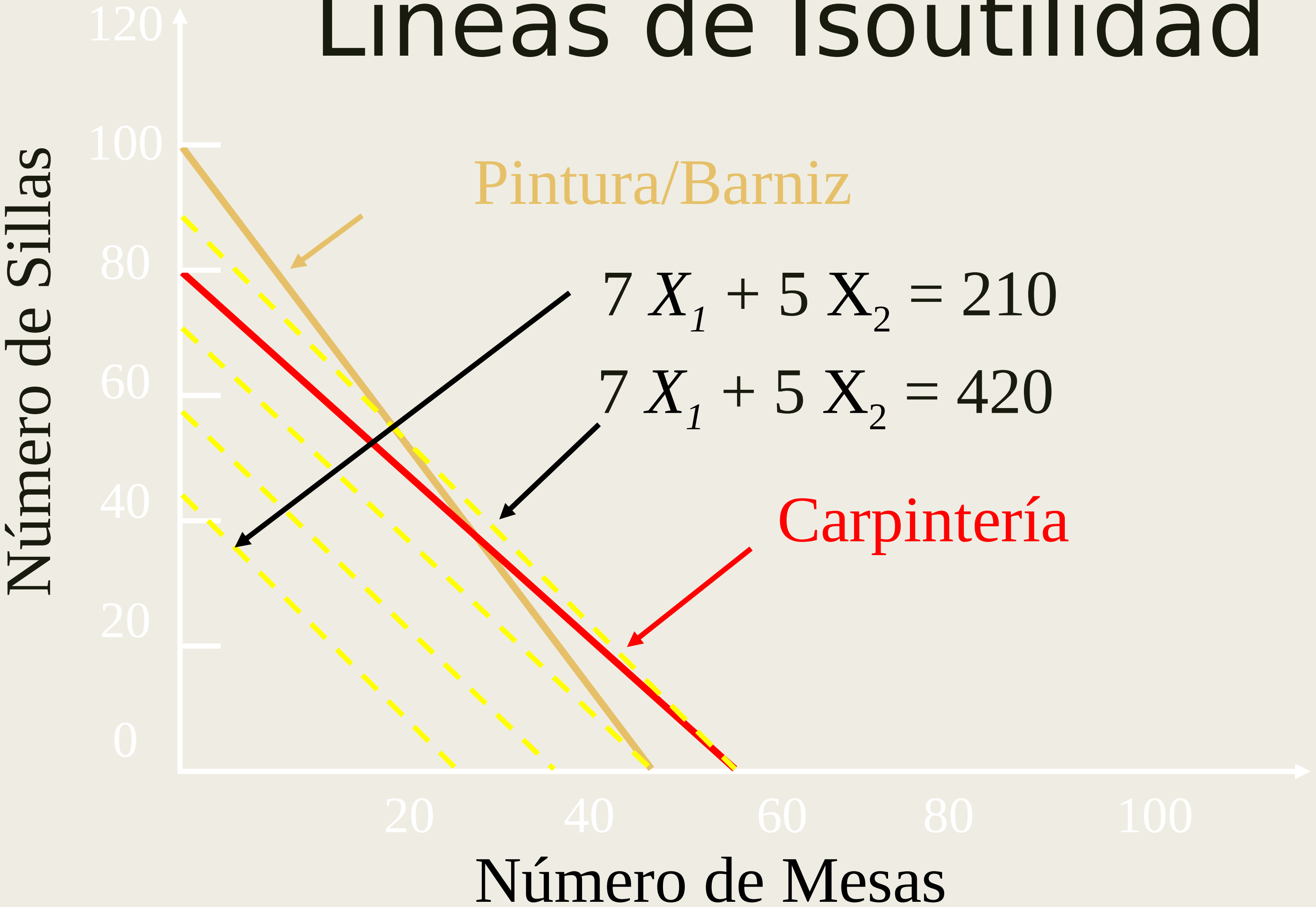
Método de la línea de isoutilidad

- **Empiece con utilidades igual a una cantidad arbitraria de dinero**
- **Escoja por ejemplo $210.**

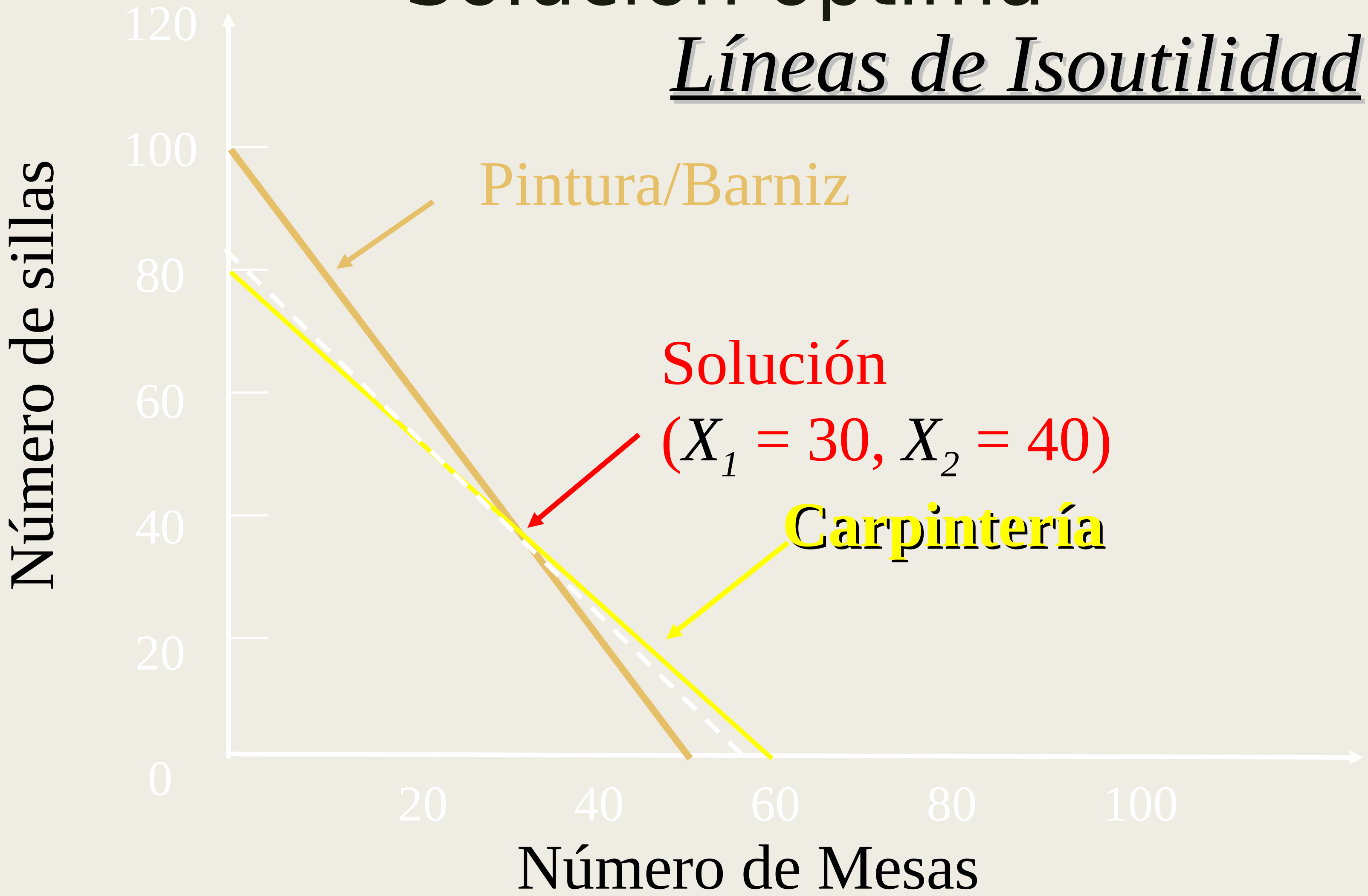
- Esta es una cantidad que puede ser obtenida fácilmente sin violar ninguna de las restricciones

- **La función objetivo puede ser escrita como $210 = 7 X_1 + 5 X_2.**

Flair Furniture Company
Líneas de Isoutilidad



Flair Furniture Company
Solución óptima



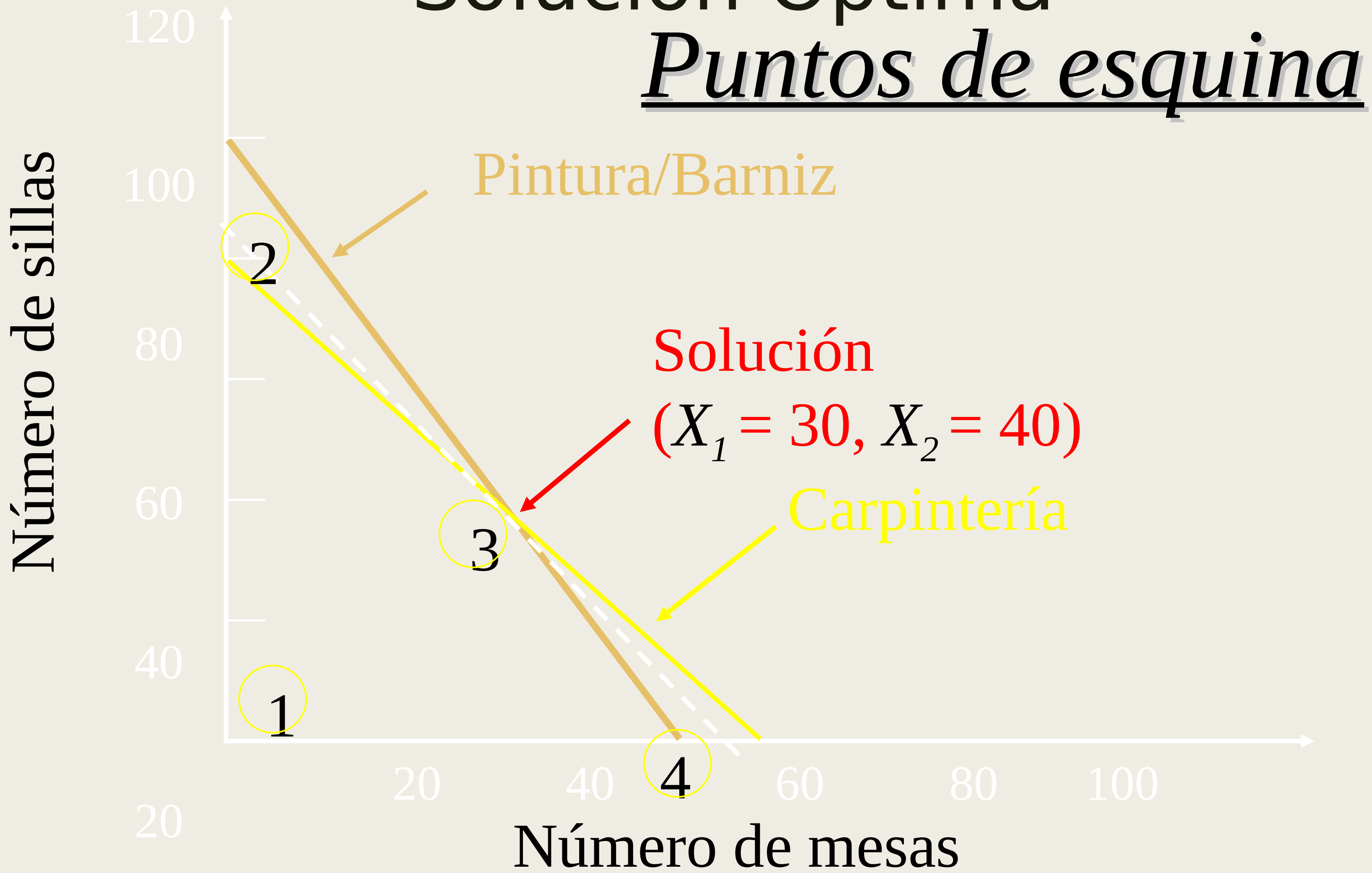
Flair Furniture Company
Punto de Esquina

Método de solución del punto de Esquina

Una segunda forma de resolver problemas de programación lineal

- **La teoría matemática detrás de la PL es que la solución óptima debe quedar en uno de los puntos de esquina en la región factible.**

Flair Furniture Company
Solución Óptima



Solucionando problemas de minimización

Holiday Meal Turkey Ranch example

Minimizar: $2X_1 + 3X_2$

Sujeto a:

$5X_1 + 10X_2 \geq 90$ oz. (A)

$4X_1 + 3X_2 \geq 48$ oz. (B)

$\frac{1}{2} X_1 \geq 1\frac{1}{2}$ oz. (C)

where, $X_1, X_2 \geq 0$ (D)

X_1 = Libras de la marca 1

X_2 = Libras de la marca 2

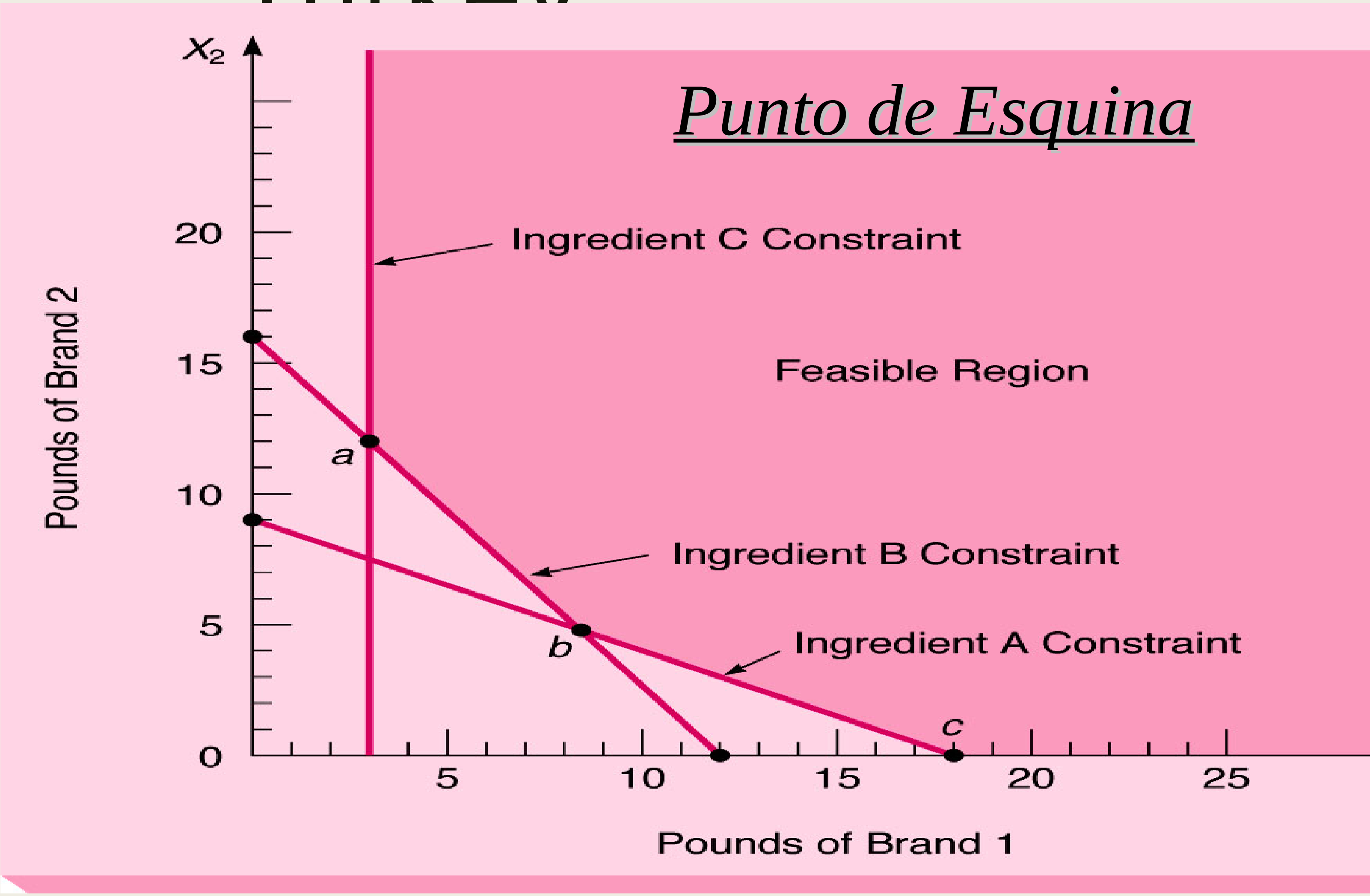
(A) = Restricción del ingrediente A

(B) = Restricción del ingrediente B

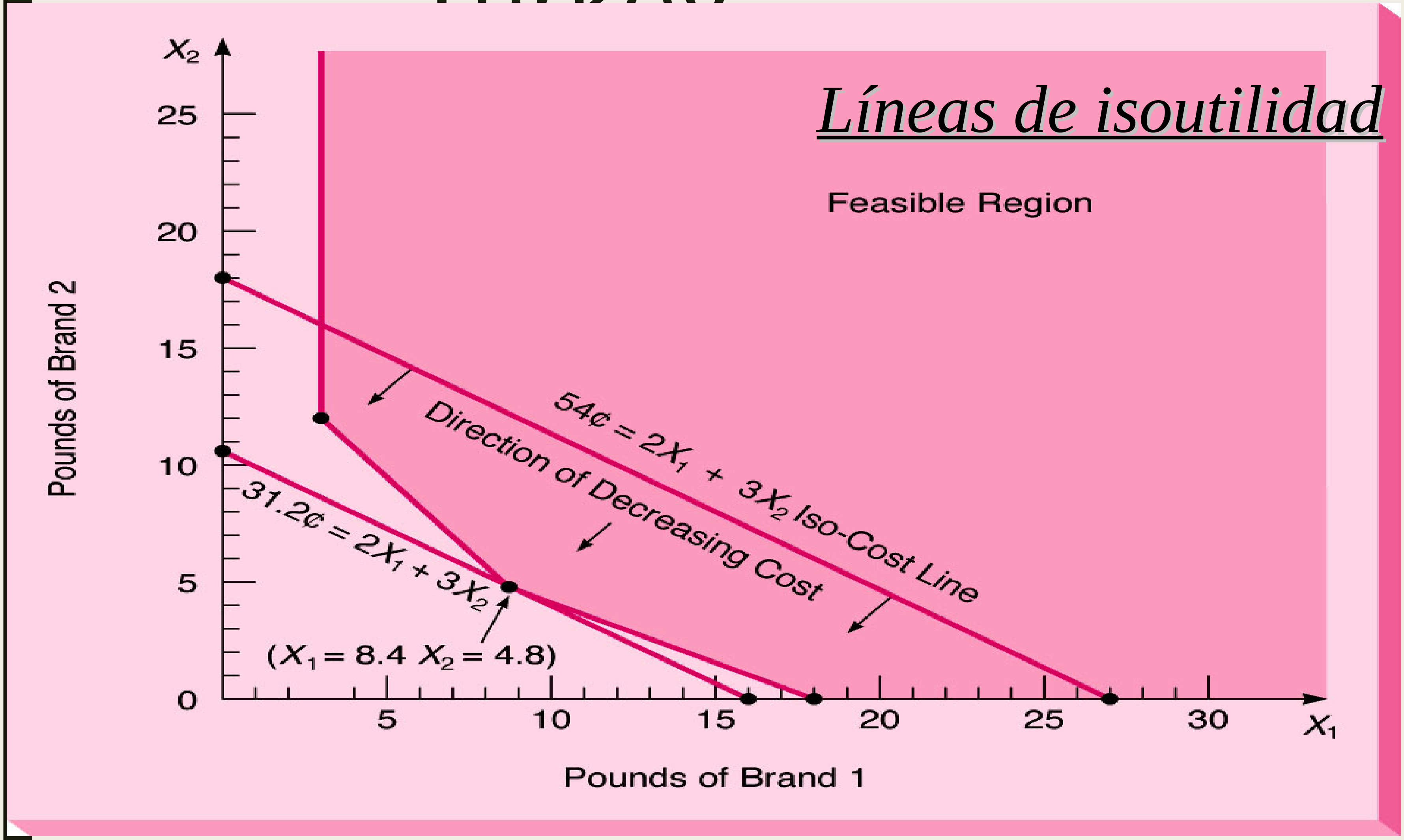
(C) = Restricción del ingrediente C

(D) = Restricción de no negatividad

Holiday Meal Turkey



Holiday Meal Turkey



INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

PROGRAMACIÓN LINEAL

Ejemplo

Giulliana S. A. manufactura muñecos y trenes de madera.

Cada muñeco:

- Produce un beneficio neto de B/ 3
- Requiere 2 horas de trabajo de acabado.
- Requiere 1 hora de trabajo de carpinteria.

Cada tren:

- Produce un beneficio neto de B/ 2.
- Requiere 1 hora de trabajo de acabado.
- Requiere 1 hora trabajo de carpinteria.

Cada semana Giulliana puede disponer de:

- Todo el material que necesite.
- Solamente 100 horas de acabado.
- Solamente 80 horas de carpinteria.

También:

- La demanda de trenes puede ser cualquiera (sin límite).
- La demanda de muñecos es como mucho 40.

Giulliana quiere maximizar sus beneficios.
¿Cuántos muñecos y cuántos trenes debe fabricar?

Este problema es un ejemplo típico de un problema de programación lineal (PPL).

Variables de Decisión

X_1 = nº de muñecos producidos a la semana

X_2 = nº de trenes producidos a la semana

Función Objetivo. En cualquier PPL, la decisión a tomar es como maximizar (normalmente el beneficio) o minimizar (el coste) de alguna función de las variables de decisión. Esta función a maximizar o minimizar se llama **función objetivo**.

El objetivo de Giulliana es elegir valores de X_1 e X_2 para maximizar 3 X_1 + 2 X_2. Usaremos la variable z para denotar el valor de la función objetivo. La función objetivo de Giulliana es:

$$\text{Max } z = 3 X_1 + 2 X_2$$

Restricciones

Son desigualdades que limitan los posibles valores de las variables de decisión.

En este problema las restricciones vienen dadas por la disponibilidad de horas de acabado y carpintería y por la demanda de muñecos.

También suele haber restricciones de signo o no negatividad:

$$X_1 \geq 0$$

$$X_2 \geq 0$$

Restricciones

Cuando X_1 y X_2 crecen, la función objetivo de Giulliana también crece. Pero no puede crecer indefinidamente porque, para Giulliana, los valores de X_1 y X_2 están limitados por las siguientes tres restricciones:

Restricción 1: no más de 100 horas de tiempo de acabado pueden ser usadas.

Restricción 2: no más de 80 horas de tiempo de carpinteria pueden ser usadas.

Restricción 3: limitación de demanda, no deben fabricarse más de 40 muñecos.

Estas tres restricciones pueden expresarse matematicamente por las siguientes desigualdades:

Restricción 1: $2X_1 + X_2 \leq 100$

Restricción 2: $X_1 + X_2 \leq 80$

Restricción 3: $X_1 \leq 40$

Además, tenemos las restricciones de signo: $X_1 \geq 0$ e $X_2 \geq 0$

Formulación matemática del PPL

Variables de Decisión X_1 = nº de muñecos producidos a la semana
X_2 = nº de trenes producidos a la semana

	Muñeco	Tren	
Beneficio	3	2	
Acabado	2	1	≤ 100
Carpintería	1	1	≤ 80
Demanda	≤ 40		

$\text{Max } z = 3\,X_1 + 2\,X_2$ (función objetivo)

$2\,X_1 + X_2 \leq 100$ (acabado)

$X_1 + X_2 \leq 80$ (carpintería)

$X_1 \leq 40$ (demanda muñecos)

$X_1 \geq 0$ (restricción de signo)

$X_2 \geq 0$ (restricción de signo)

Formulación matemática del PPL

Para el problema de Giulliana, combinando las restricciones de signo $X_1 \geq 0$ y $X_2 \geq 0$ con la función objetivo y las restricciones, tenemos el siguiente modelo de optimización:

Max z = $3X_1 + 2X_2$ (función objetivo)

Sujeto a (s.a:)

$2X_1 + X_2 \leq 100$ (restricción de acabado)

$X_1 + X_2 \leq 80$ (restricción de carpinteria)

$X_1 \leq 40$ (restricción de demanda de muñecos)

$X_1 \geq 0$ (restricción de signo)

$X_2 \geq 0$ (restricción de signo)

Región factible

La **región factible** de un PPL es el conjunto de todos los puntos que satisfacen todas las restricciones. Es la región del plano delimitada por el sistema de desigualdades que forman las restricciones.

$X_1 = 40$ y $X_2 = 20$ está en la región factible porque satisfacen todas las restricciones de Gepetto.

Sin embargo, $X_1 = 15$, $X_2 = 70$ no está en la región factible porque este punto no satisface la restricción de carpinteria

[15 + 70 > 80].

Restricciones de Gepetto

$2X_1 + X_2 \leq 100$ (restricción finalizado)

$X_1 + X_2 \leq 80$ (restricción carpintería)

$X_1 \leq 40$ (restricción demanda)

$X_1 \geq 0$ (restricción signo)

$X_2 \geq 0$ (restricción signo)

Solución óptima

Para un problema de maximización, una **solución óptima** es un punto en la región factible en el cual la función objetivo tiene un valor máximo. Para un problema de minimización, una solución óptima es un punto en la región factible en el cual la función objetivo tiene un valor mínimo.

La mayoría de PPL tienen solamente una solución óptima. Sin embargo, algunos PPL no tienen solución óptima, y otros PPL tienen un número infinito de soluciones.

Más adelante veremos que la solución del PPL de Gepetto es $X_1 = 20$ y $X_2 = 60$. Esta solución da un valor de la función objetivo de:

$$Z = 3\,X_1 + 2X_2 = 3 \cdot 20 + 2 \cdot 60 = B/180$$

Se puede demostrar que la **solución óptima** de un PPL está siempre en la frontera de la región factible, en un vértice (si la solución es única) o en un segmento entre dos vértices contiguos (si hay infinitas soluciones)

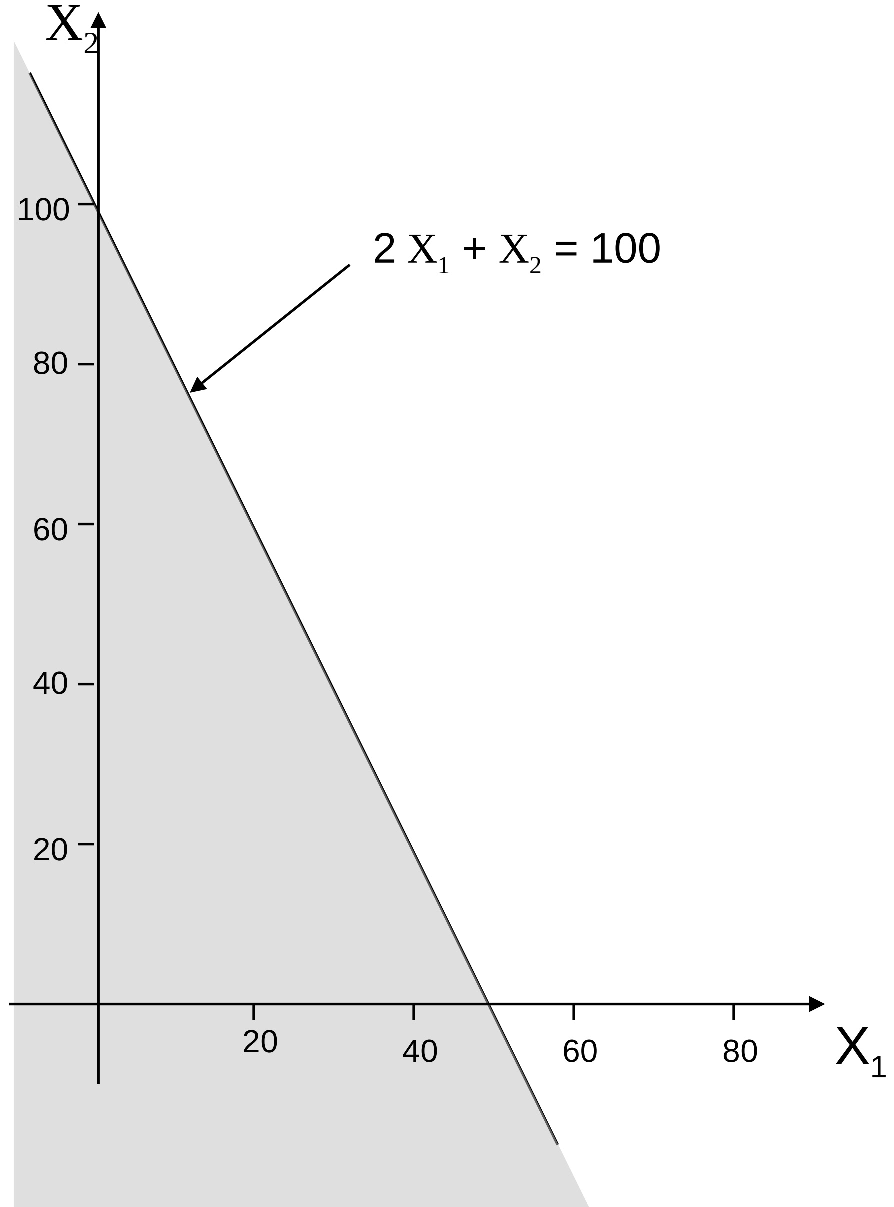
Cuando decimos que $X_1 = 20$ y $X_2 = 60$ es la solución óptima, estamos diciendo que, en ningún punto en la región factible, la función objetivo tiene un valor (beneficio) superior a 180.

Representación Gráfica de las restricciones

Cualquier PPL con sólo dos variables puede resolverse gráficamente.

Por ejemplo, para representar gráficamente la primera restricción, **2 X_1 + X_2 ≤ 100** :
Dibujamos la recta 2 X_1 + X_2 = 100

Elegimos el semiplano que cumple la desigualdad: el punto (0, 0) la cumple
(2·0 + 0 ≤ 100),
así que tomamos el semiplano que lo contiene.



Dibujar la región factible

Puesto que el PPL de GIULLIANA tiene dos variables, se puede resolver gráficamente. La región factible es el conjunto de todos los puntos que satisfacen las restricciones:

$2 X_1 + X_2 \leq 100$ (restricción de acabado)

$X_1 + X_2 \leq 80$ (restricción de carpintería)

$X_1 \leq 40$ (restricción de demanda)

$X_1 \geq 0$ (restricción de signo)

$X_2 \geq 0$ (restricción de signo)

Vamos a dibujar la región factible que satisface estas restricciones.

Dibujar la región factible

Teniendo en cuenta las restricciones de signo (X_1 **≥ 0,** X_2 **≥ 0)**, nos queda:

Restricciones

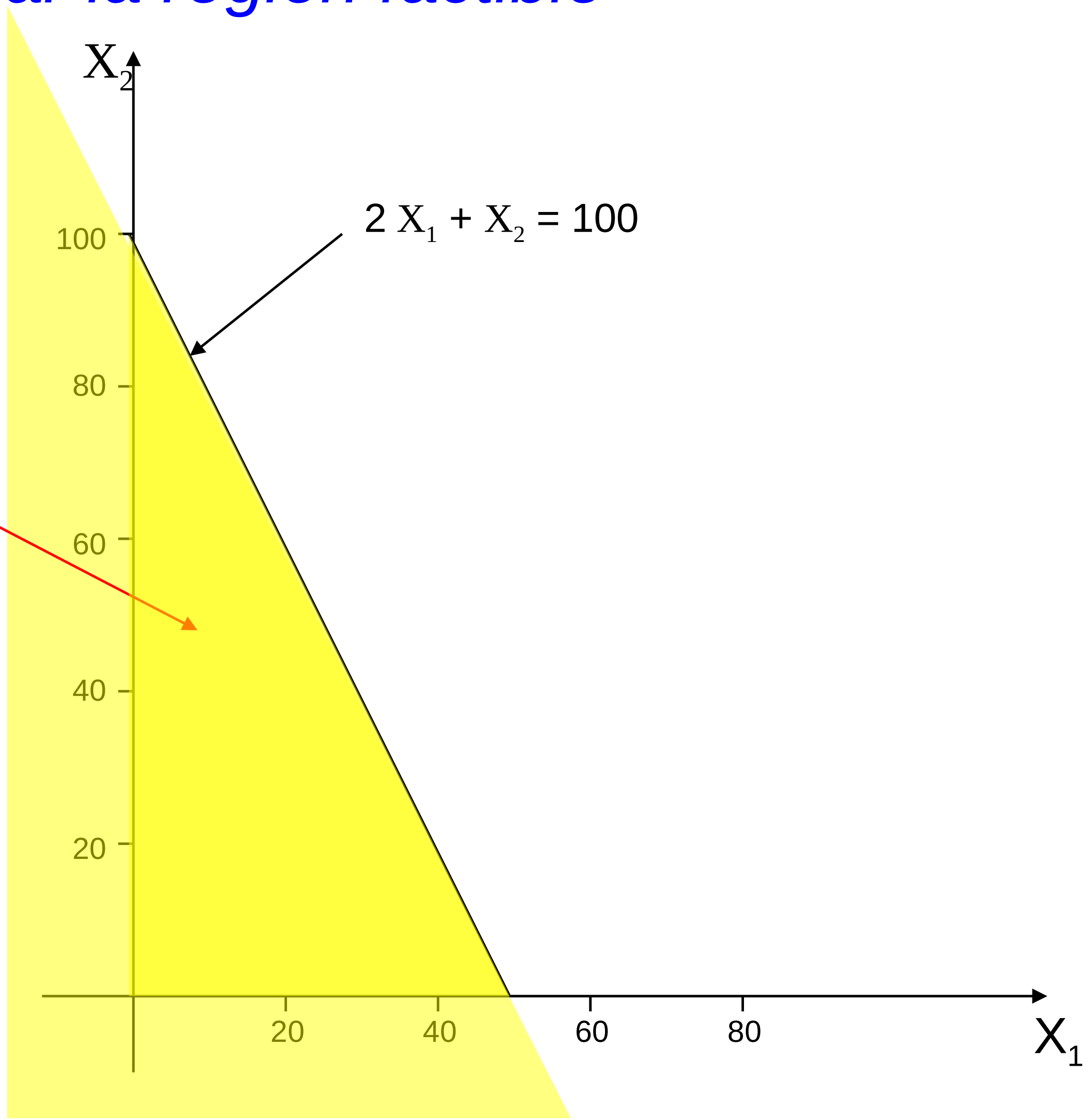
2 X_1 **+** X_2 **≤ 100**

X_1 **+** X_2 **≤ 80**

X_1 **≤ 40**

X_1 **≥ 0**

X_2 **≥ 0**



Dibujar la región factible

Restricciones

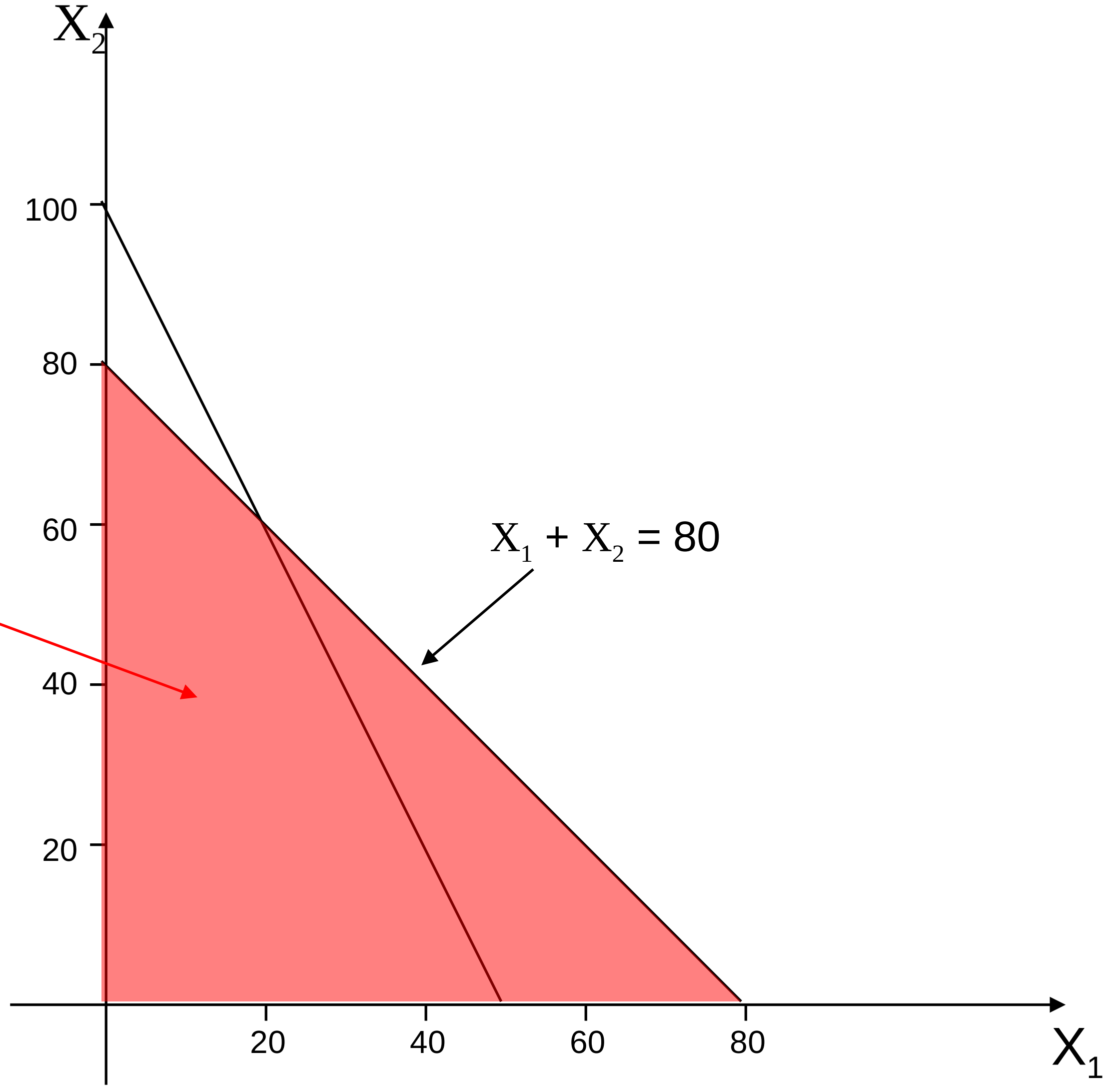
2 X_1 **+** X_2 **≤ 100**

X_1 **+** X_2 **≤ 80**

X_1 **≤ 40**

X_1 **≥ 0**

X_2 **≥ 0**



Dibujar la región factible

Restricciones

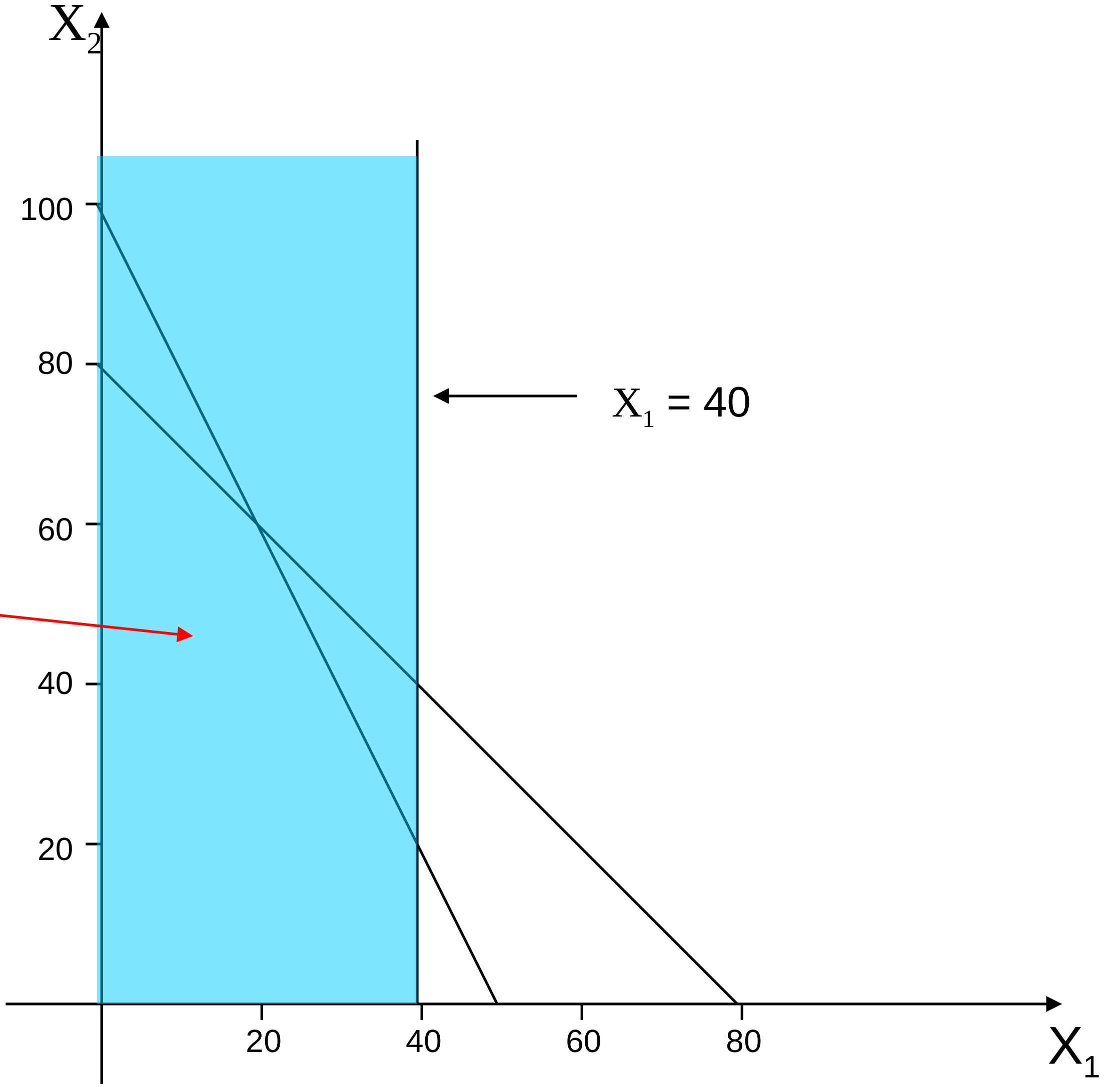
2 X_1 **+** X_2 **≤ 100**

X_1 **+** X_2 **≤ 80**

X_1 **≤ 40**

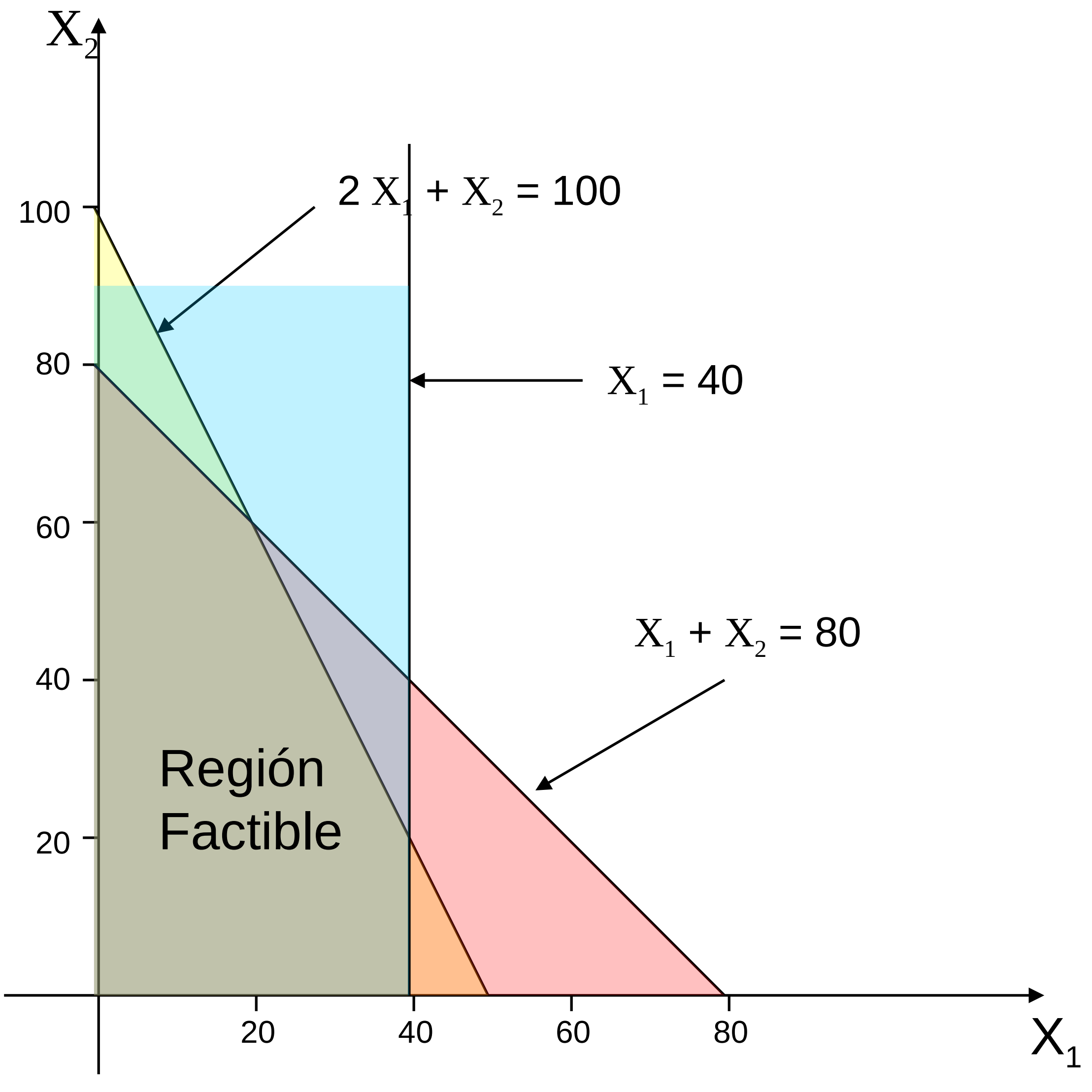
X_1 **≥ 0**

X_2 **≥ 0**



Dibujar la región factible

La intersección de todos estos semiplanos (restricciones) nos da la región factible



Vértices de la región factible

La región factible (al estar limitada por rectas) es un polígono. En esta caso, el polígono ABCDE.

Como la solución óptima está en alguno de los vértices (A, B, C, D o E) de la región factible, calculamos esos vértices.

Restricciones

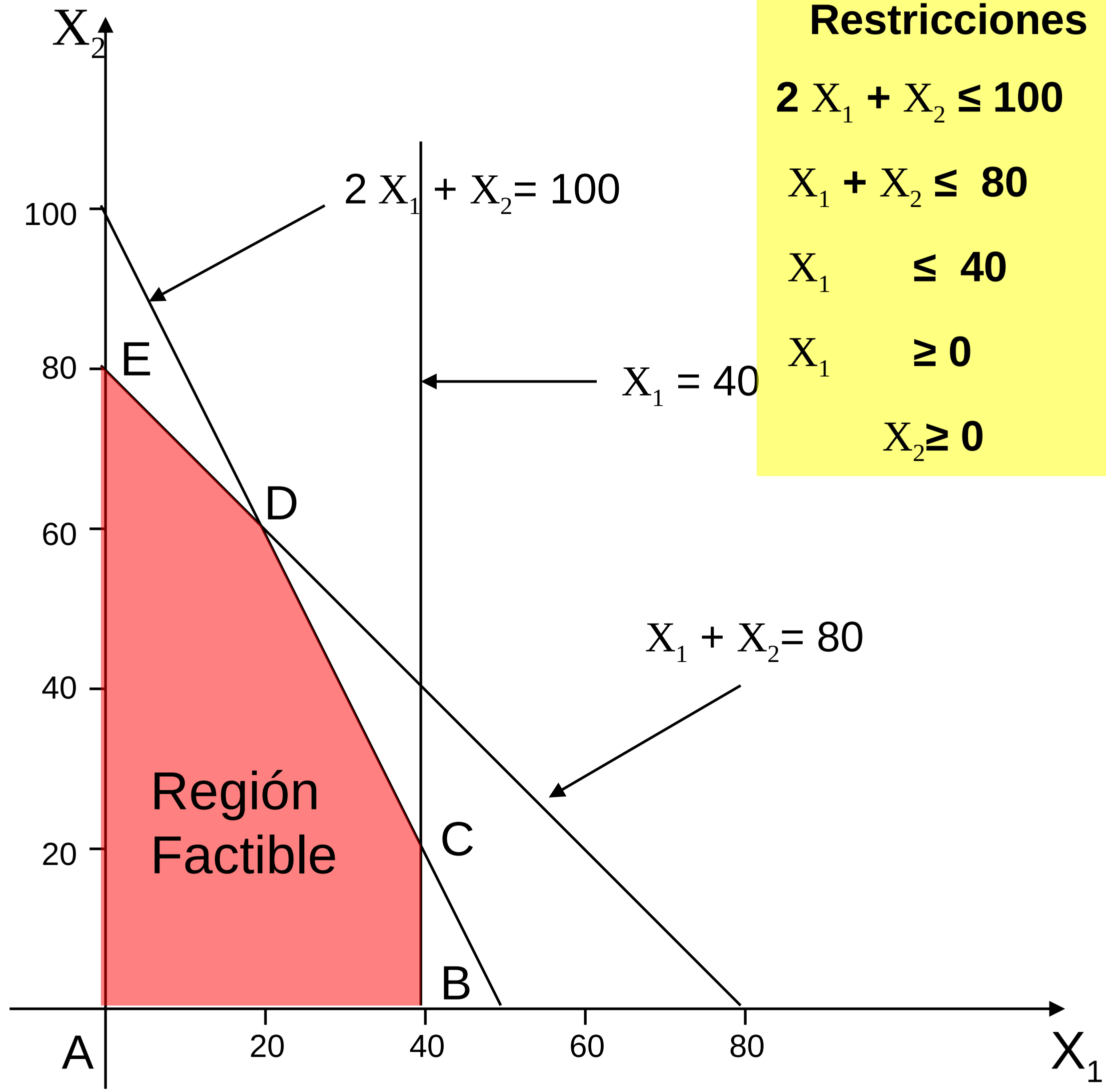
$2X_1 + X_2 \leq 100$

$X_1 + X_2 \leq 80$

$X_1 \leq 40$

$X_1 \geq 0$

$X_2 \geq 0$

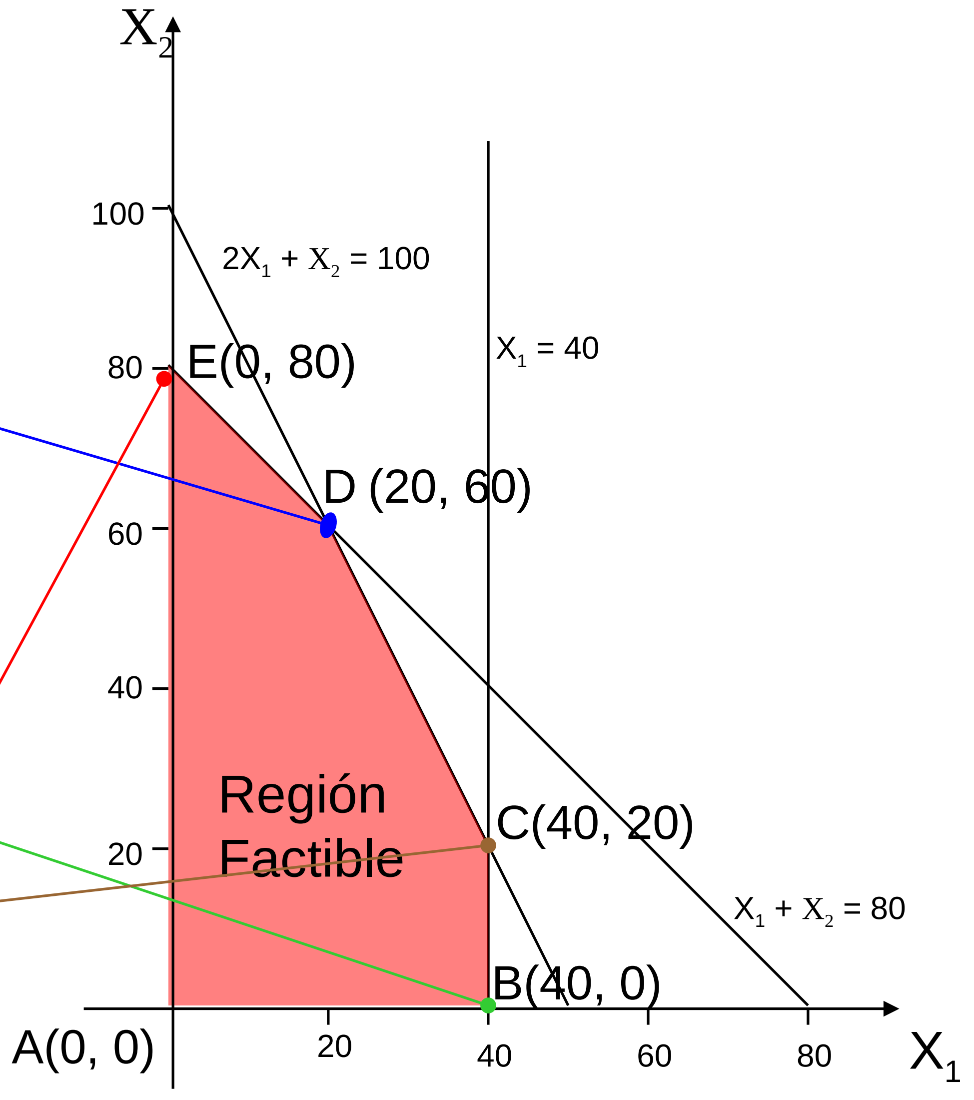


Vértices de la región factible

Los vértices de la región factible son intersecciones de dos rectas. El punto D es la intersección de las rectas

$$\left.\begin{array}{l} 2X_1 + X_2 = 100 \\ X_1 + X_2 = 80 \end{array}\right\}$$

La solución del sistema $X_1 = 20$, $X_2 = 60$ nos da el punto D.



B es solución de

$$\left.\begin{array}{l} X_1 = 40 \\ X_2 = 0 \end{array}\right\}$$

C es solución de

$$\left.\begin{array}{l} X_1 = 40 \\ 2X_1 + X_2 = 100 \end{array}\right\}$$

E es solución de

$$\left.\begin{array}{l} X_1 + X_2 = 80 \\ X_1 = 0 \end{array}\right\}$$

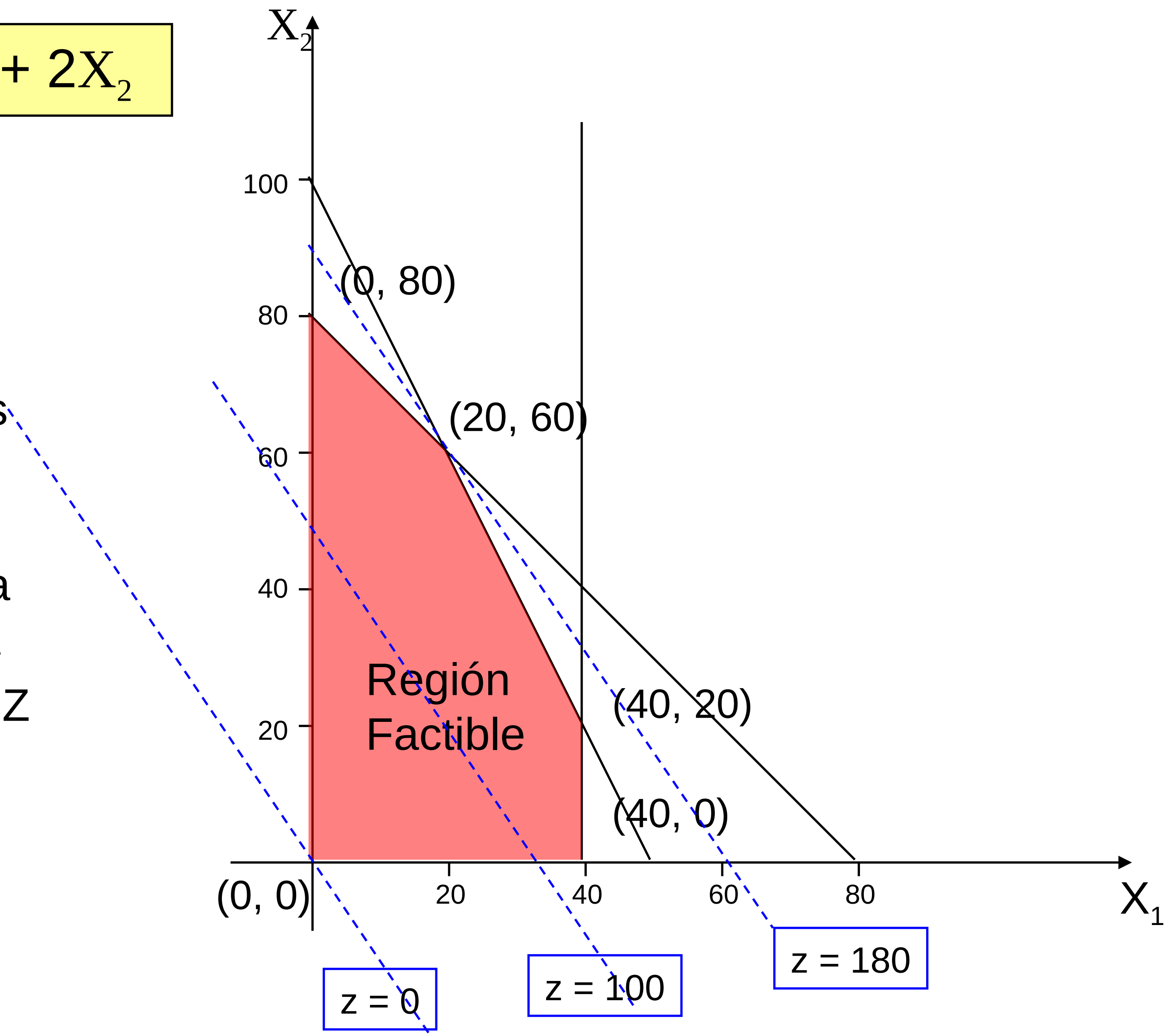
Resolución gráfica

$$\text{Max } Z = 3X_1 + 2X_2$$

Para hallar la solución óptima, dibujamos las rectas en las cuales los puntos tienen el mismo valor de Z.

La figura muestra estas lineas para

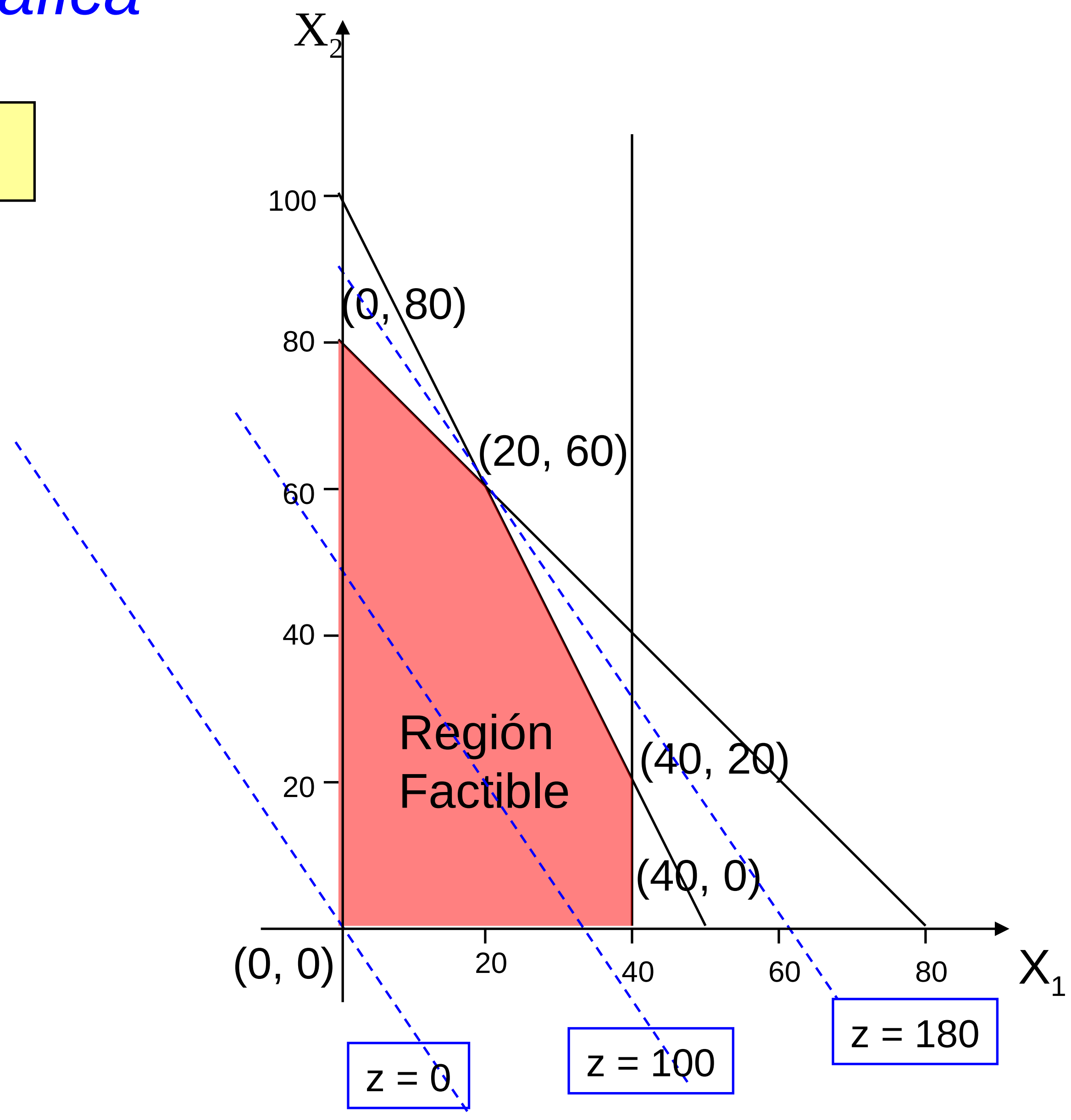
Z = 0, Z = 100, y Z = 180



Resolución gráfica

Max z = 3 X_1 + 2X_2

La última recta de z que interseca (toca) la región factible indica la solución óptima para el PPL. Para el problema de Gepetto, esto ocurre en el punto D (X_1= 20, X_2 = 60, z = 180).

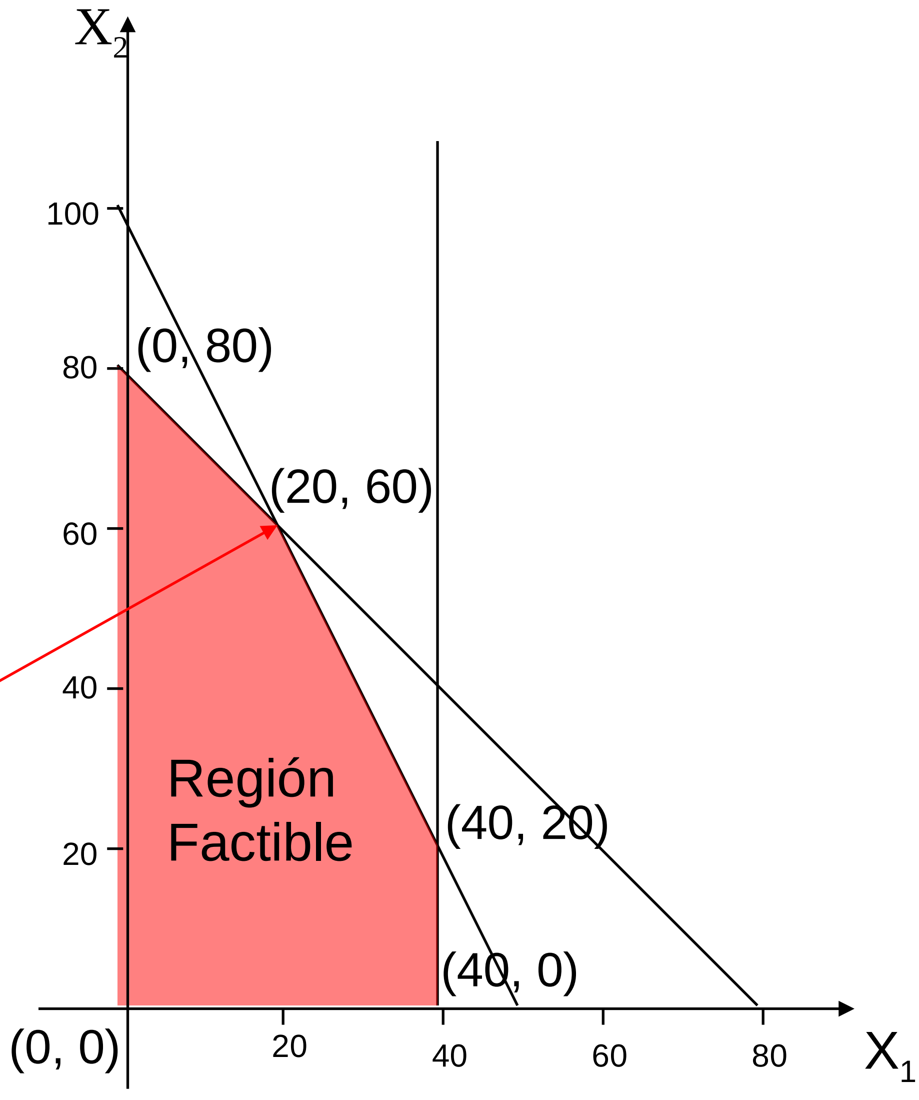


ANÁLISIS

$$\text{Max } z = 3\,X_1 + 2X_2$$

También podemos encontrar la solución óptima calculando el valor de z en los vértices de la región factible.

Vértice	$Z = 3\,X_1 + 2X_2$
(0, 0)	$z = 3\cdot0+2\cdot0 = 0$
(40, 0)	$z = 3\cdot40+2\cdot0 = 120$
(40, 20)	$z = 3\cdot40+2\cdot20 = 160$
(20, 60)	$z = 3\cdot20+2\cdot60 = 180$
(0, 80)	$z = 3\cdot0+2\cdot80 = 160$



La solución óptima es:

X_1 = 20 muñecos

X_2 = 60 trenes

Z = B/ 180 de beneficio

Hemos identificado la región factible para el problema de GIULLIANA y buscado la solución óptima, la cual era el punto en la región factible con el mayor valor posible de Z.

Recuerda que:

- **La región factible en cualquier PPL está limitada por segmentos (es un polígono, acotado o no).**
- **La región factible de cualquier PPL tiene solamente un número finito de vértices.**
- **Cualquier PPL que tenga solución óptima tiene un vértice que es óptimo.**

Un problema de minimización

JASON AUTOS S.A. fabrica y vende autos sedan y camionetas. La empresa quiere emprender una campaña publicitaria en TV y tiene que decidir comprar los tiempos de anuncios en dos tipos de programas: románticos y fútbol.

- Cada anuncio del programa romántico es visto por 6 millones de mujeres y 2 millones de hombres.
- Cada partido de fútbol es visto por 3 millones de mujeres y 8 millones de hombres.
- Un anuncio en el programa romántico B/ cuesta 50.000 y un anuncio del fútbol cuesta B/ 100.000
- JASON AUTO S.A. quisiera que los anuncios sean vistos por lo menos por 30 millones de mujeres y 24 millones de hombres.
- JASON AUTOS S.A. quiere saber cuántos anuncios debe contratar en cada tipo de programa para que el coste de la campaña publicitaria sea mínimo.

Formulación del problema:

- Cada anuncio del programa romántico es visto por 6 millones de mujeres y 2 millones de hombres.
- Cada partido de fútbol es visto por 3 millones de mujeres y 8 millones de hombres.
- Un anuncio en el programa romántico cuesta B/. 50.000 y un anuncio del fútbol cuesta B/. 100.000
- JASON AUTOS S.A. quisiera que los anuncios sean vistos por por lo menos 30 millones de mujeres y 24 millones de hombres.

JASON AUTOS S.A. quiere saber cuántos anuncios debe contratar en cada tipo de programa para que el coste de la campaña publicitaria sea mínimo.

	Romántico (X_1)	Fútbol (X_2)	
mujeres	6	3	$6X_1 + 3X_2 \geq 30$
hombres	2	8	$2X_1 + 8X_2 \geq 24$
Coste B/.1.000	50	100	$50X_1 + 100X_2$

Formulación del problema:

Variables de decisión: X_1 = nº de anuncios en programa romántico

X_2 = nº de anuncios en fútbol

Min $Z = 50\,X_1 + 100X_2$ (función objetivo en B/ 1.000)

s.a: $6\,X_1 + 3X_2 \geq 30$ (mujeres)

$2\,X_1 + 8X_2 \geq 24$ (hombres)

$X_1, X_2 \geq 0$ (no negatividad)

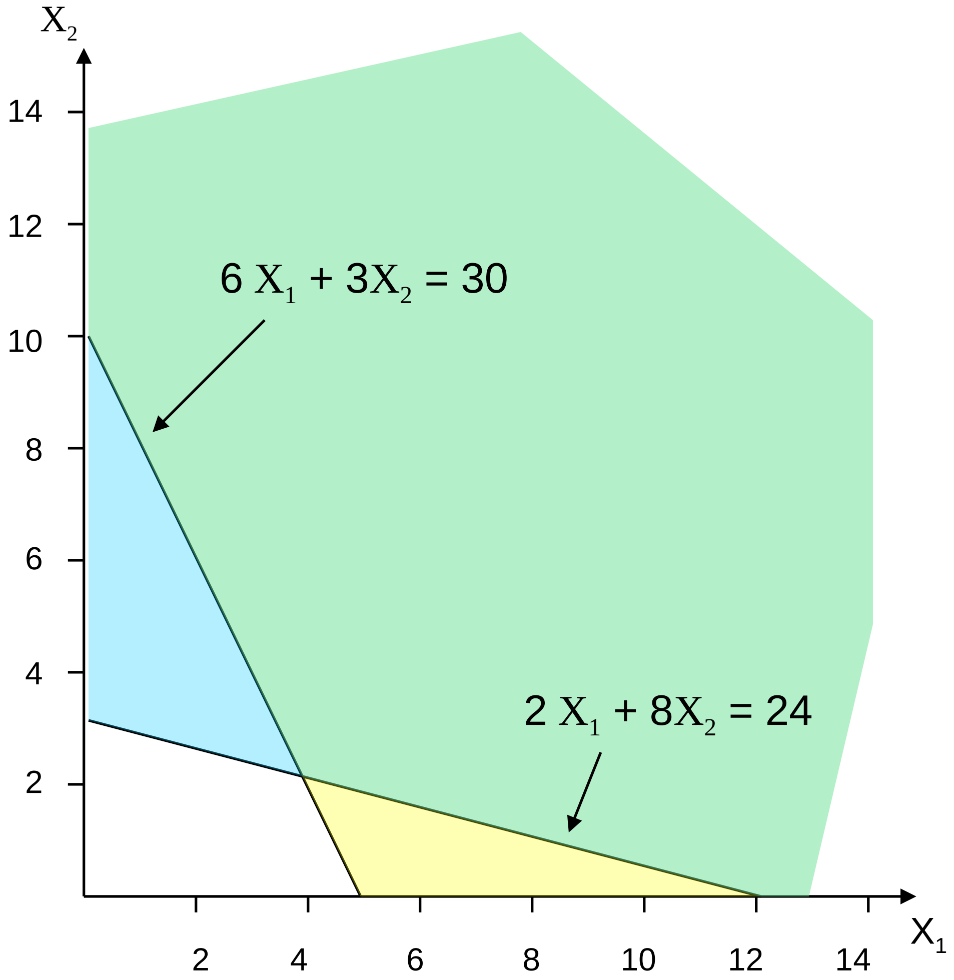
Dibujamos la región factible.

Min $z = 50\,X_1 + 100X_2$

s.a. $6\,X_1 + 3X_2 \geq 30$

$2\,X_1 + 8X_2 \geq 24$

X_1, y ≥ 0



Calculamos los vértices de la región factible:

El vértice A es solución del sistema

$$6\,X_1 + 3X_2 = 30$$

$$X_1 = 0$$

Por tanto, A(0, 10)

El vértice B es solución de

$$6\,X_1 + 3X_2 = 30$$

$$2\,X_1 + 8X_2 = 24$$

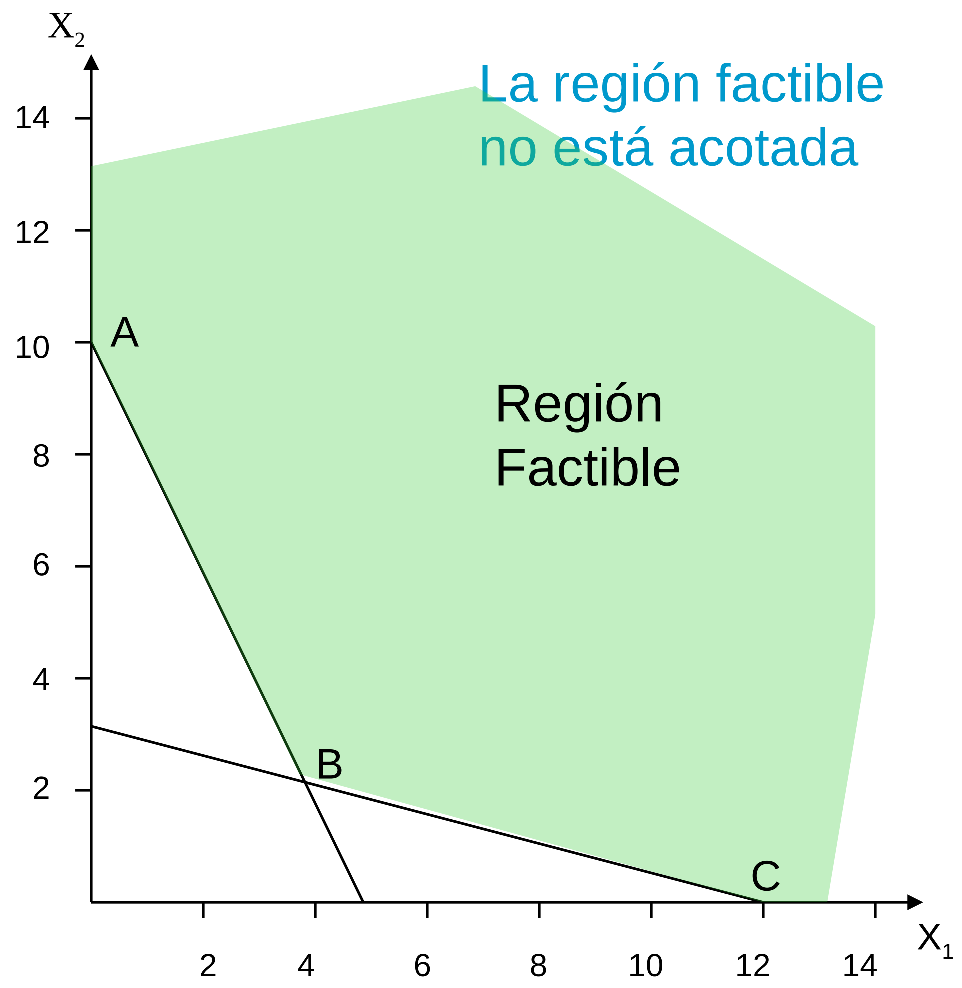
Por tanto, B(4, 2)

El vértice C es solución de

$$2\,X_1 + 8X_2 = 24$$

$$X_2 = 0$$

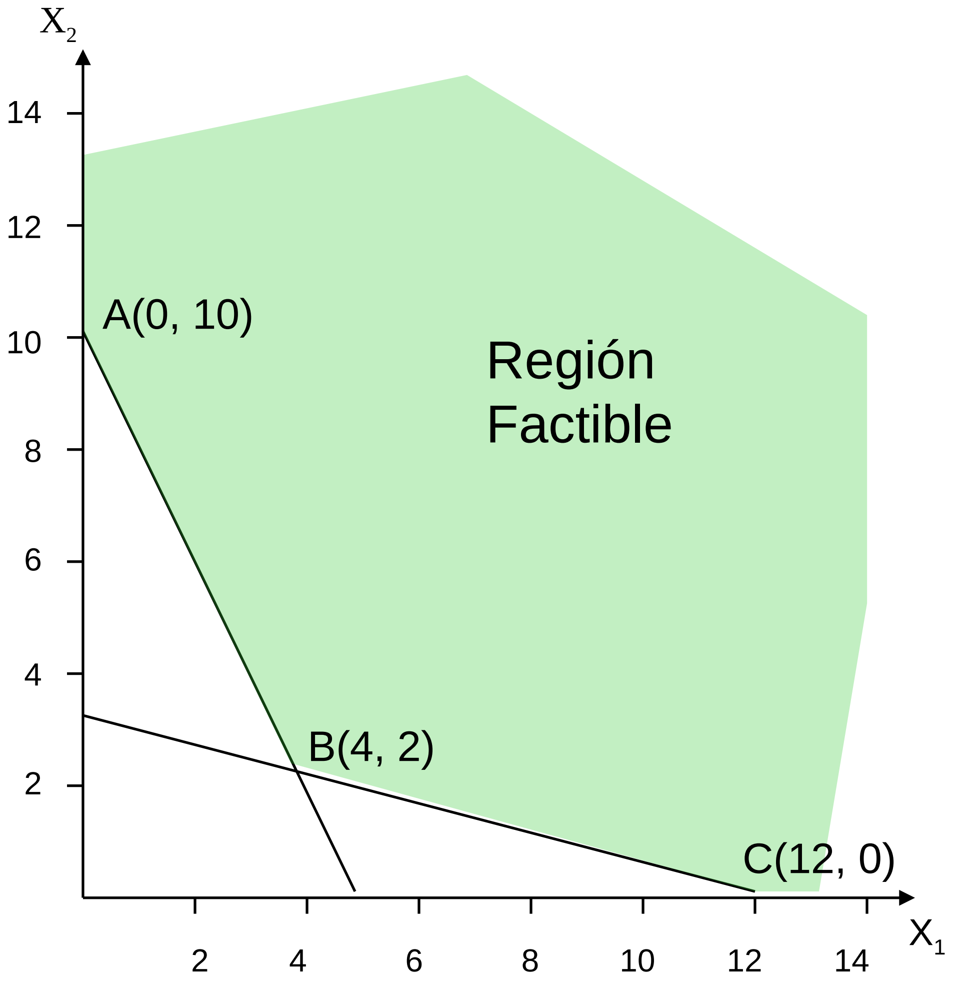
Por tanto, C(12, 0)



Resolvemos por el método analítico

Evaluamos la función objetivo z en los vértices.

Vértice	$Z = 50X_1 + 100X_2$
A(0, 10)	Z = 50·0 + 100·10 = 0+10000 = 10 000
B(4, 2)	Z = 50·4 + 100·2 = = 200+200 = 400
C(12, 0)	Z = 50·12 + 100·0 = = 6000+0 = 6 000



El coste mínimo se obtiene en B.

Solución:
X_1 = 4 anuncios en pr. románticos
X_2 = 2 anuncios en futbol
Coste Z = 400 (mil BALBOAS)

Resolvemos por el método gráfico

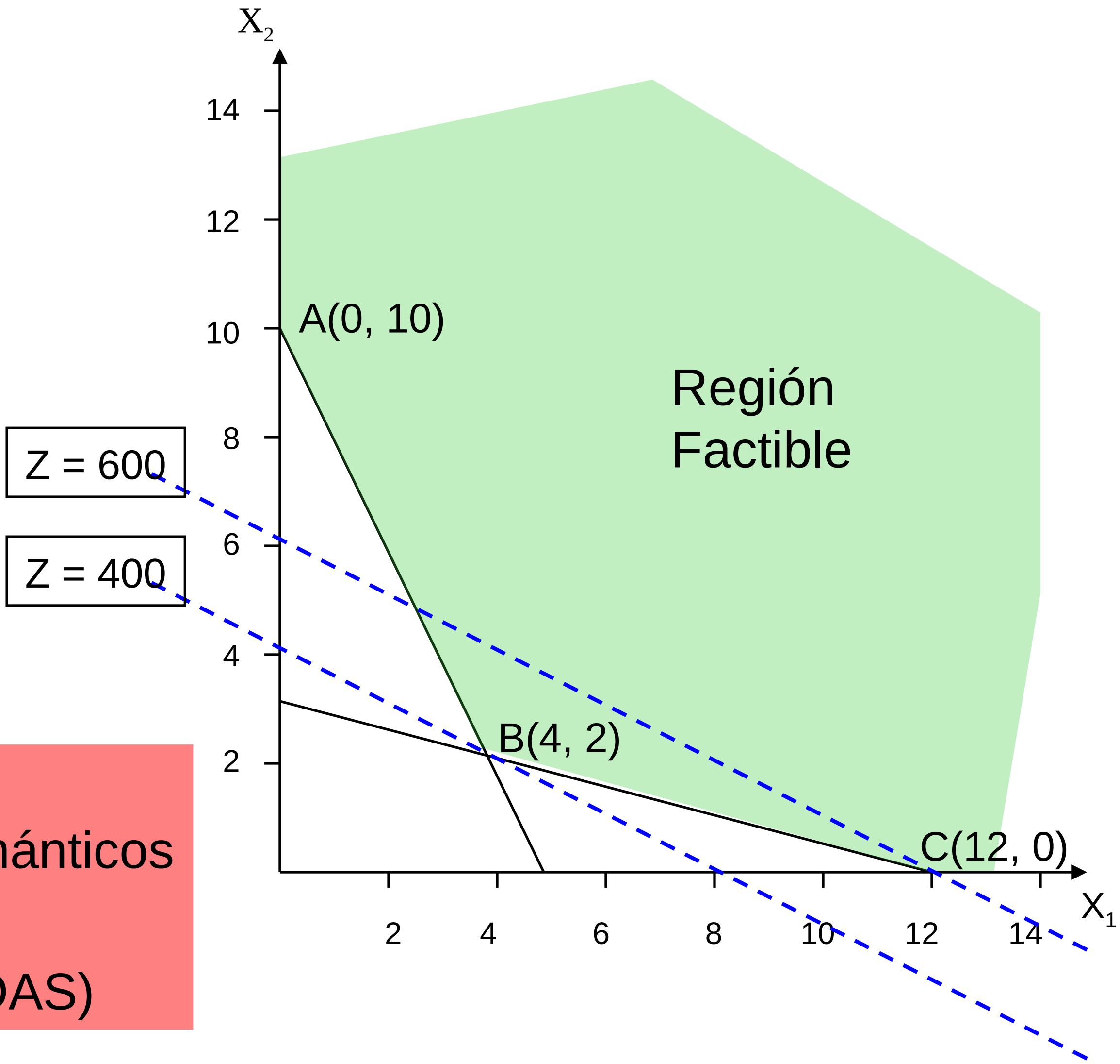
Min $Z = 50\,X_1 + 100X_2$

s.a. $6\,X_1 + 3X_2 \geq 30$

$2\,X_1 + 8X_2 \geq 24$

$X_1, X_2 \geq 0$

El coste mínimo se obtiene en el punto B.



Solución:

X_1 = 4 anuncios en pr. románticos

X_2 = 2 anuncios en futbol

Coste Z = 400 (mil BALBOAS)

Número de Soluciones de un PPL

Los dos ejemplos anteriores, GIULLIANA y JASON AUTOS S.A. , tienen, cada uno, una única solución óptima.
No en todos los PPL ocurre esto. Se pueden dar también las siguientes posibilidades:

- Algunos PPL tienen un número infinito de soluciones óptimas (alternativas o múltiples soluciones óptimas).
- Algunos PPL no tienen soluciones factibles (no tienen región factible).
- Algunos PPL son no acotados: Existen puntos en la región factible con valores de z arbitrariamente grandes (en un problema de maximización).

Veamos un ejemplo de cada caso.

Número infinito de soluciones óptimas

Consideremos el siguiente problema:

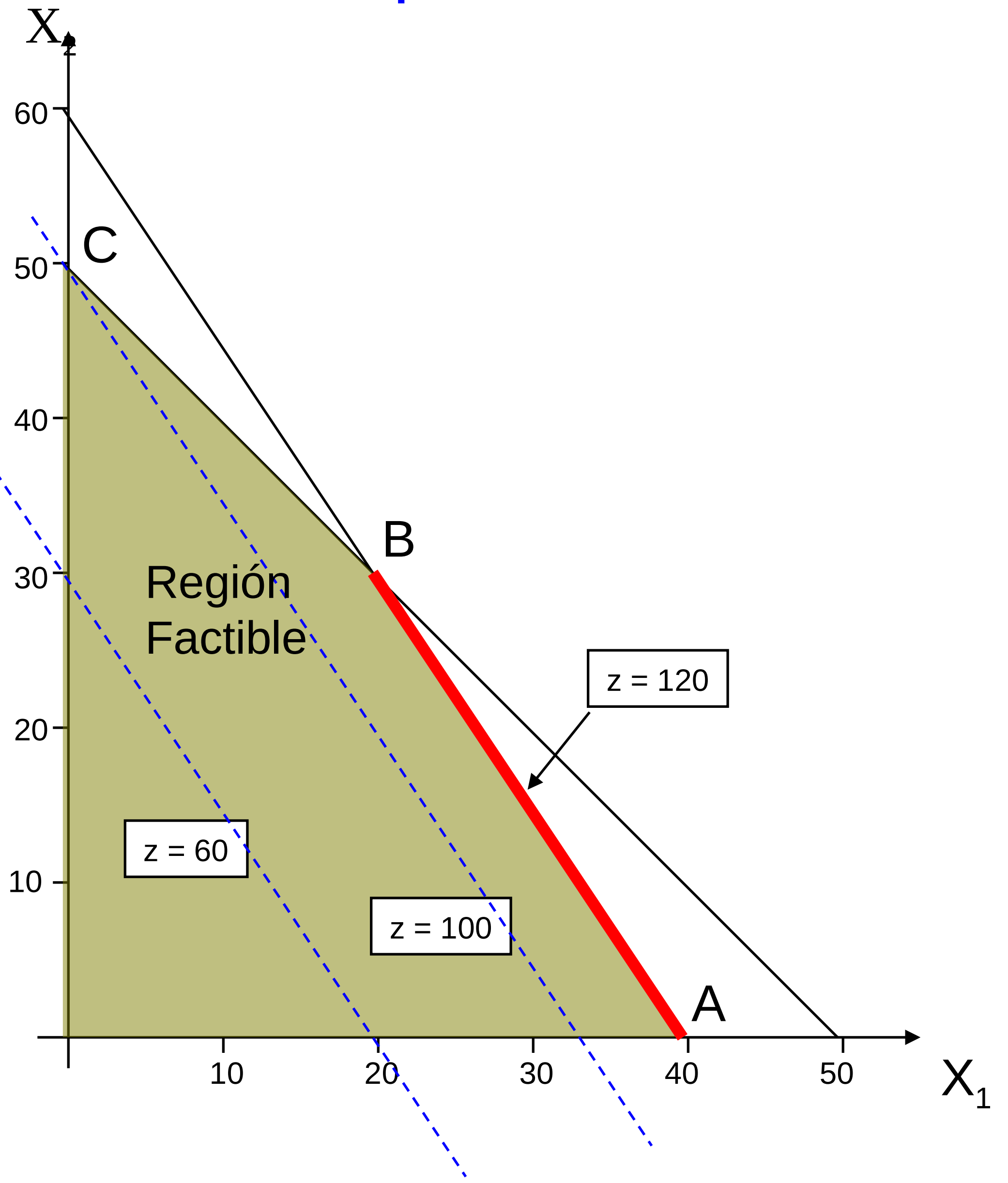
$$\max z = 3X_1 + 2X_2$$

s.a: $3X_1 + 2X_2 \leq 120$

$X_1 + X_2 \leq 50$

$X_1 , X_2 \geq 0$

Cualquier punto (solución) situado en el segmento **AB** puede ser una solución óptima de Z=120.



Sin soluciones factibles

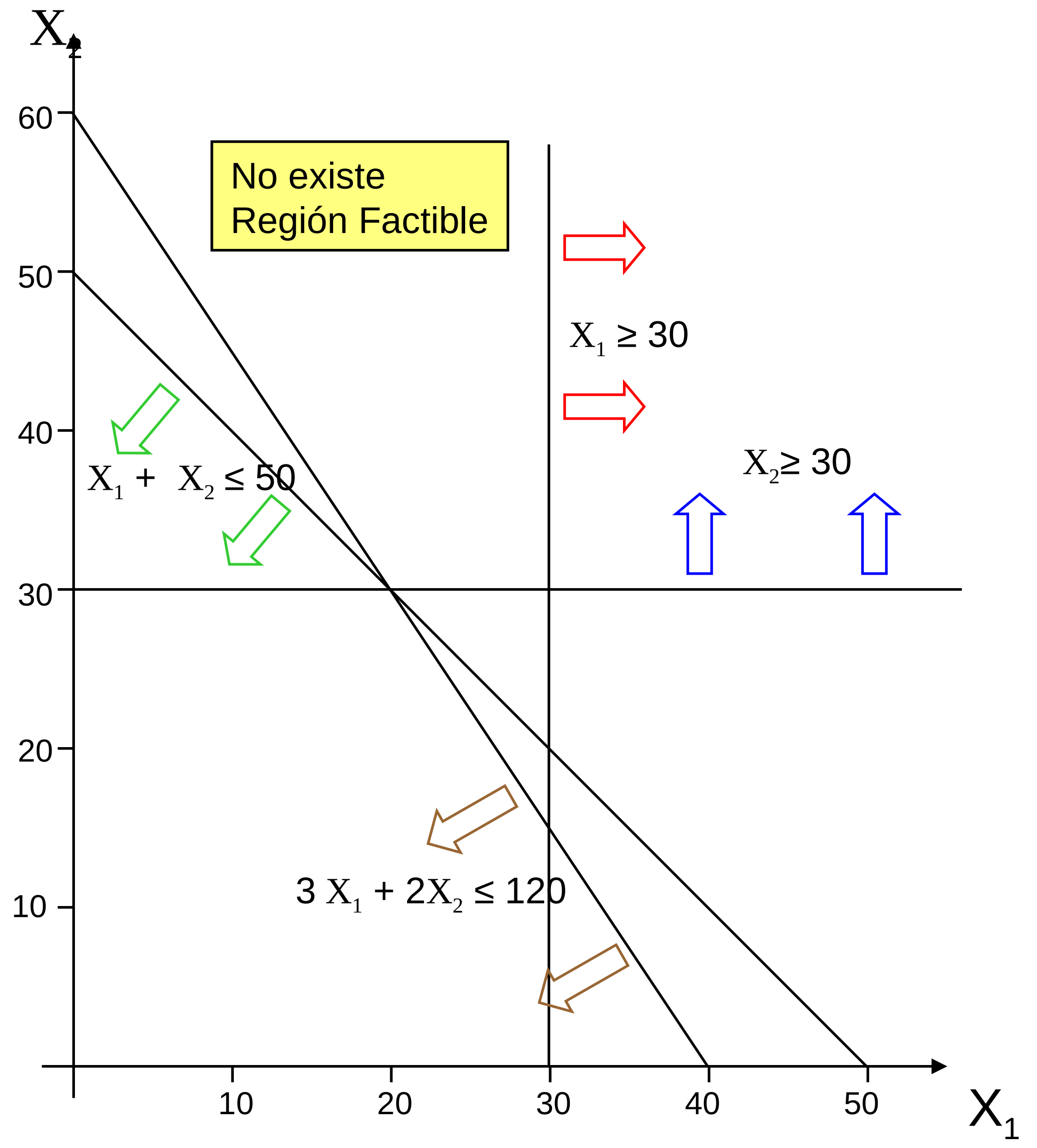
Consideremos el siguiente problema:

$$\max z = 3X_1 + 2X_2$$

s.a:

$$3X_1 + 2X_2 \leq 120$$
$$X_1 + X_2 \leq 50$$
$$X_1 \geq 30$$
$$X_2 \geq 30$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

No existe región factible



PPL no acotado

F.O. max $Z = 2X_1 - X_2$

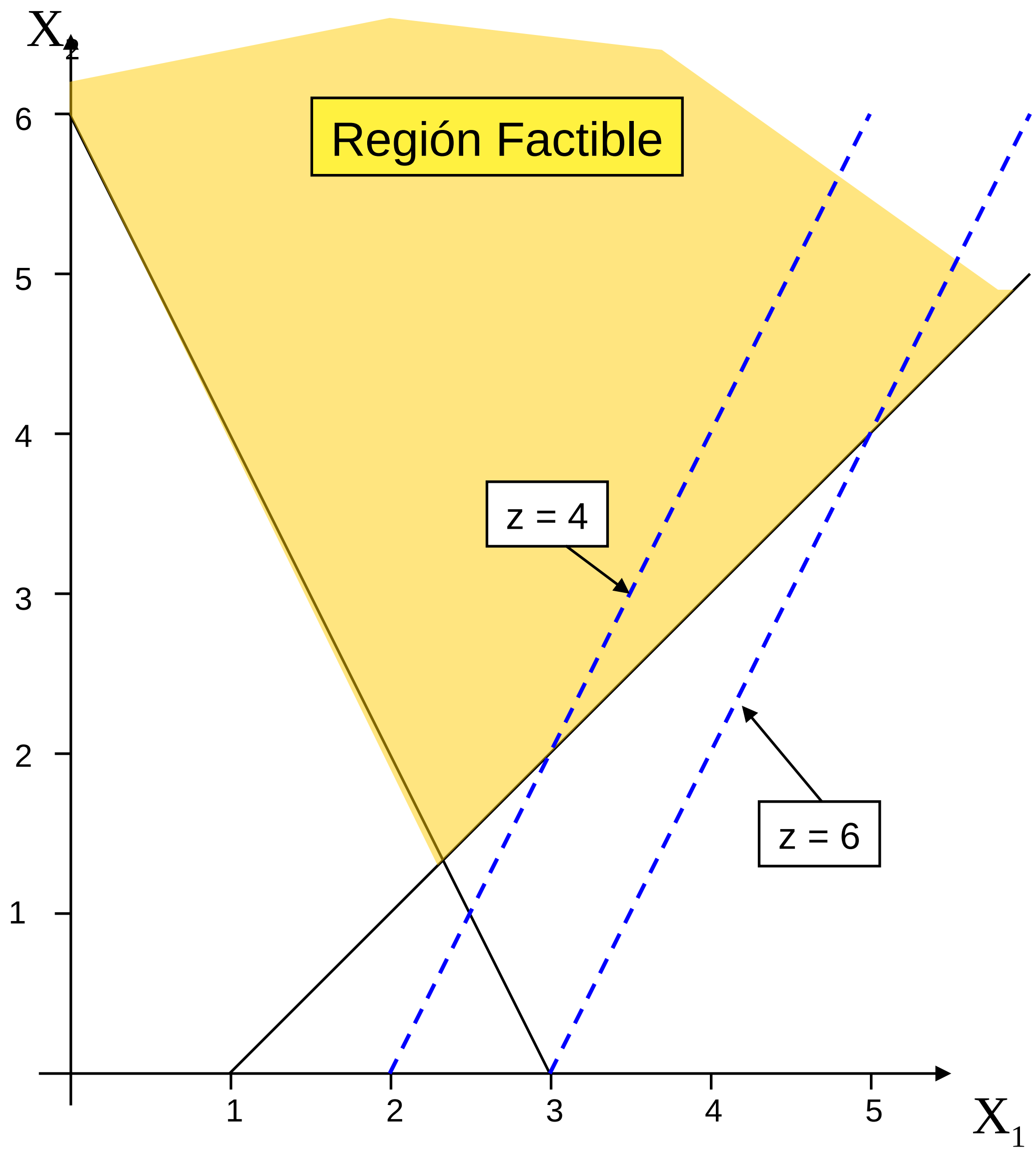
S.A:

$X_1 - X_2 \leq 1$

$2X_1 + X_2 \geq 6$

$X_1, X_2 \geq 0$

La región factible es no acotada. Se muestran en el gráfico las rectas de nivel para Z = 4 y Z = 6. Pero podemos desplazar las rectas de nivel hacia la derecha indefinidamente sin abandonar la región factible. Por tanto, el valor de Z puede crecer indefinidamente.



Modelos de redes

Contenido del capítulo

Introducción

- Este capítulo cubre tres modelos de redes que se usan para resolver problemas diversos.
- La *técnica del árbol de expansión mínima* determina el camino a través de la red que conecta todos los puntos, al tiempo que minimiza la distancia total.
- La *técnica del flujo máximo* encuentra el máximo flujo de cualquier cantidad o sustancia que pasa por la red.
- La *técnica de la ruta más corta* calcula la trayectoria más corta a través de una red.

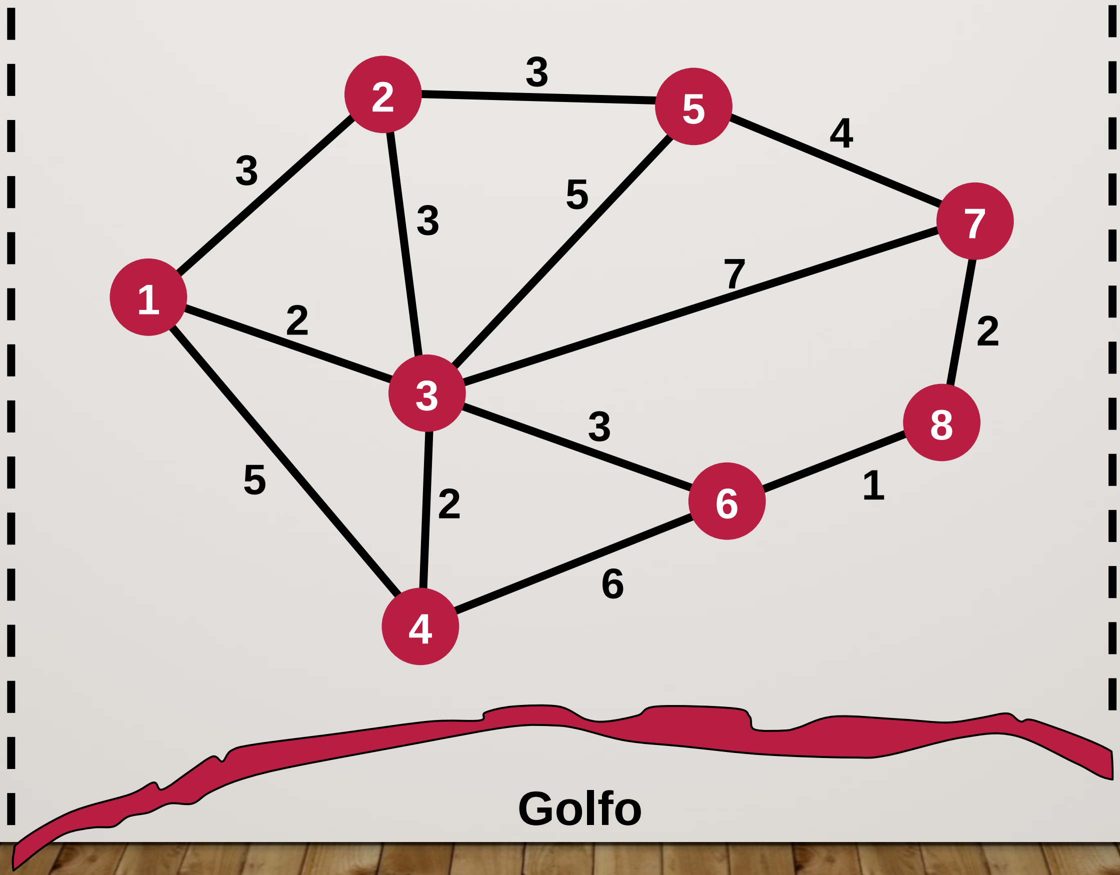
Introducción

- Los problemas más grandes quizá requieran cientos o miles de iteraciones, exigiendo el uso de programas de software eficientes.
- Todos los tipos de redes usan una terminología común.
- Los puntos en una red se conocen como *nodos* y se representan como círculos o cuadrados.
- Las líneas que unen los nodos se llaman *arcos*.

Técnica del árbol de expansión mínima

- La técnica del árbol de expansión mínima implica conectar todos los puntos de una red, al tiempo que minimiza la distancia entre ellos.
- La compañía Lauderdale Construction está desarrollando un proyecto habitacional.
- Quiere determinar la forma menos costosa de suministrar agua y electricidad a cada vivienda.
- Hay ocho casas en el proyecto y la distancia entre ellas se muestra en la figura.

Red para Lauderdale Construction



Pasos de la técnica del árbol de expansión mínima

1. Seleccionar cualquier nodo en la red.
2. Conectar este nodo con el nodo más cercano que minimice la distancia total.
3. Considerar todos los nodos que están conectados, encontrar y conectar el nodo más cercano que no está conectado. Si hay un empate en el nodo más cercano, elegir uno de manera arbitraria. Un empate sugiere que existe más de una solución óptima.
4. Repetir el paso tres hasta que todos los nodos estén conectados.

Compañía Lauderdale Construction

- Iniciar con la selección arbitraria del nodo 1.
- Como el nodo más cercano es el nodo 3 a una distancia de 2 (200 pies) conectamos dichos nodos.
- Consideramos los nodos1 y 3, y buscamos el siguiente nodo más cercano.
- El nodo 4 es el más cercano al nodo 3.
- Conectamos esos nodos.
- Buscamos ahora el nodo desconectado más cercano a los nodos 1, 3 y 4.
- Es el nodo 2 o el nodo 6.
- Elegimos el nodo 2 y lo conectamos al nodo 3.

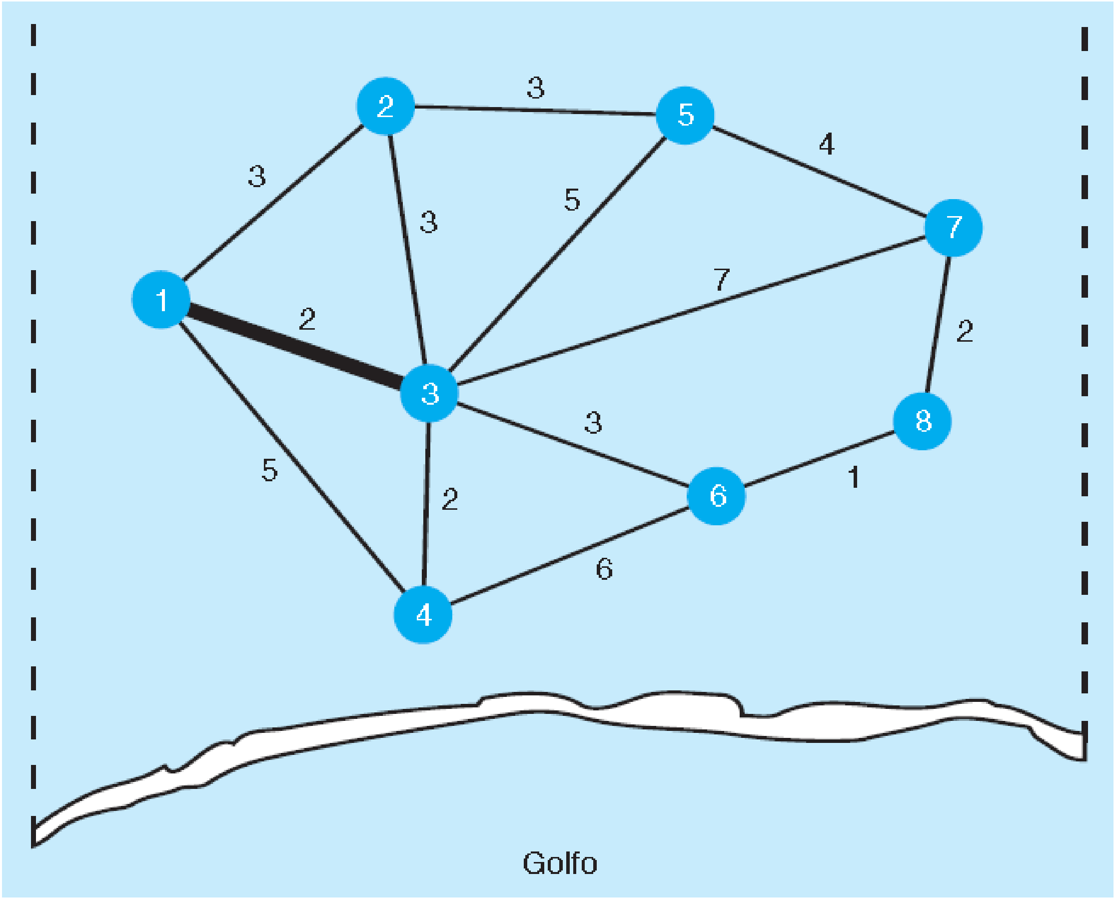
Técnica del árbol de expansión mínima

- Repitiendo el mismo proceso conectamos el nodo 2 al nodo 5.
- Luego, conectamos el nodo 3 al nodo 6.
- El nodo 6 se conecta al nodo 8.
- La última conexión es el nodo 8 al nodo 7.
- La distancia total se encuentra sumando las distancias de los arcos utilizados en el árbol de expansión:

$$2 + 2 + 3 + 3 + 3 + 1 + 2 = 16 \text{ (o 1,600 pies)}$$

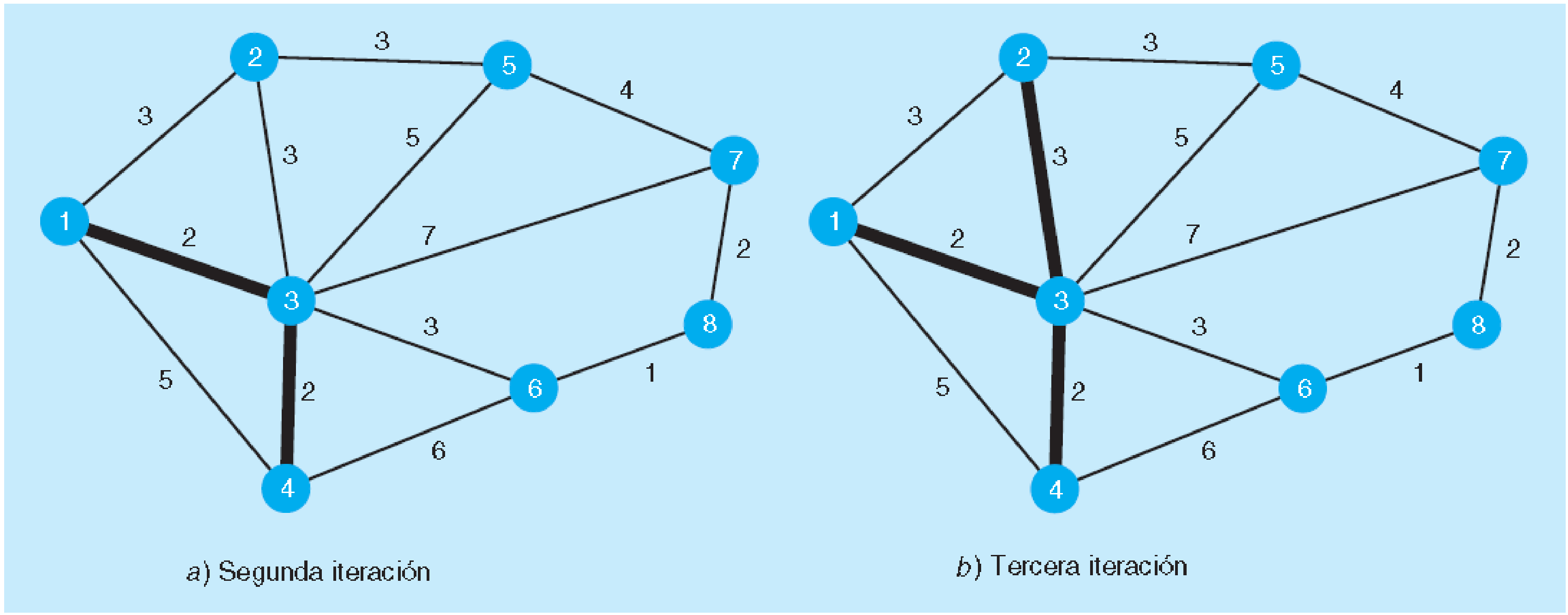
Técnica del árbol de expansión mínima

Primera iteración para Lauderdale Construction



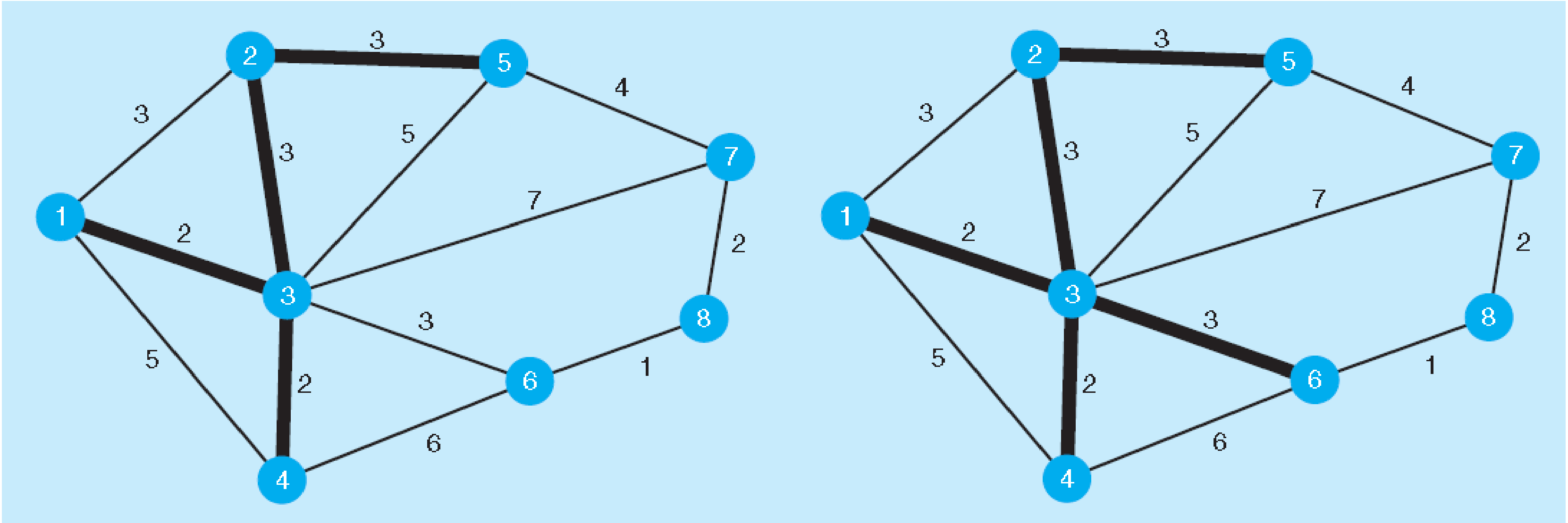
Técnica del árbol de expansión mínima

Segunda y tercera iteraciones para Lauderdale Construction



Técnica del árbol de expansión mínima

Cuarta y quinta iteraciones para Lauderdale Construction

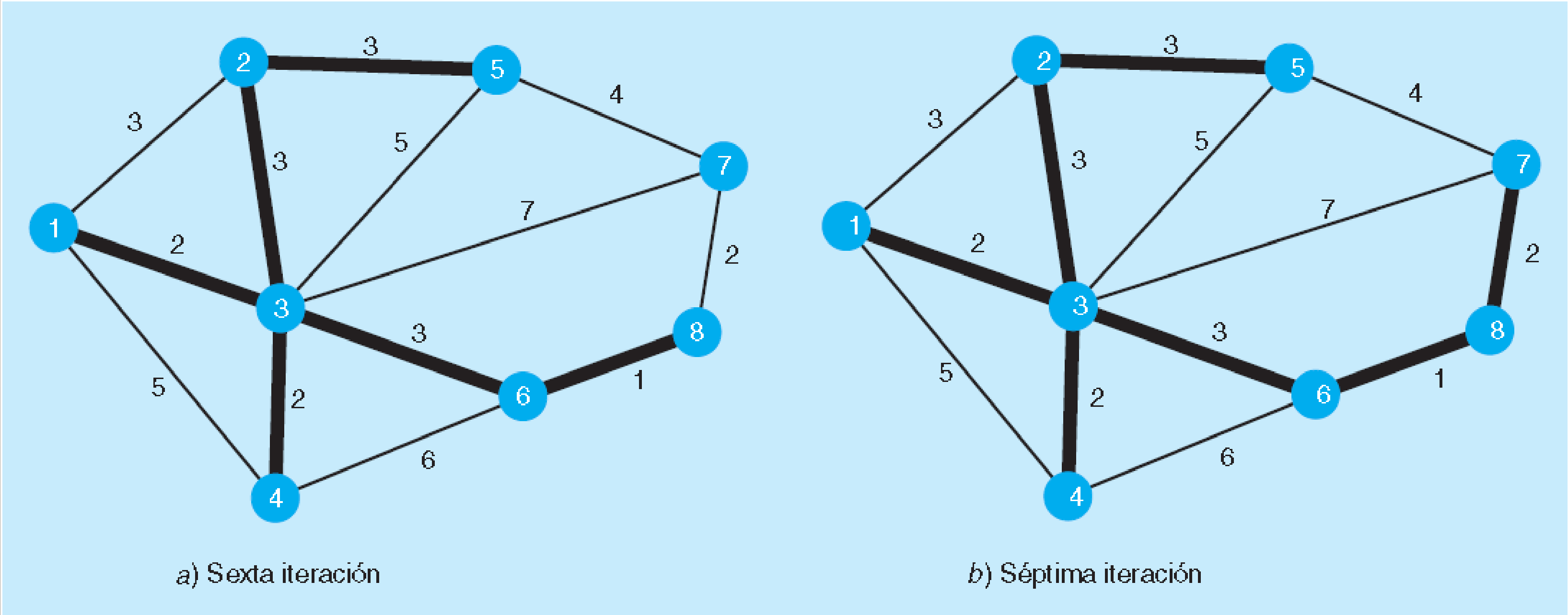


a) Cuarta iteración

b) Quinta iteración

Técnica del árbol de expansión mínima

Sexta y séptima iteraciones (finales) para Lauderdale Construction



Resumen de pasos en el problema del árbol de expansión mínima de Lauderdale Construction

Paso	Nodos conectados	Nodos no conectados	Nodo no conectado más cercano	Arco seleccio-nado	Longitud del arco	Distan-cia total
1	1	2,3,4,5,6,7,8	3	1-3	2	2
2	1,3	2,4,5,6,7,8	4	3-4	2	4
3	1,3,4	2,5,6,7,8	2 o 6	2-3	3	7
4	1,2,3,4	5,6,7,8	5 o 6	2-5	3	10
5	1,2,3,4,5	6,7,8	6	3-6	3	13
6	1,2,3,4,5,6	7,8	8	6-8	1	14
7	1,2,3,4,5,6,8	7	7	7-8	2	16

Solución de QM para Windows para el problema del árbol de expansión mínima de la compañía Lauderdale Construction

Starting node for iterations

1

Note
Multiple optimal solutions exist

Networks Results

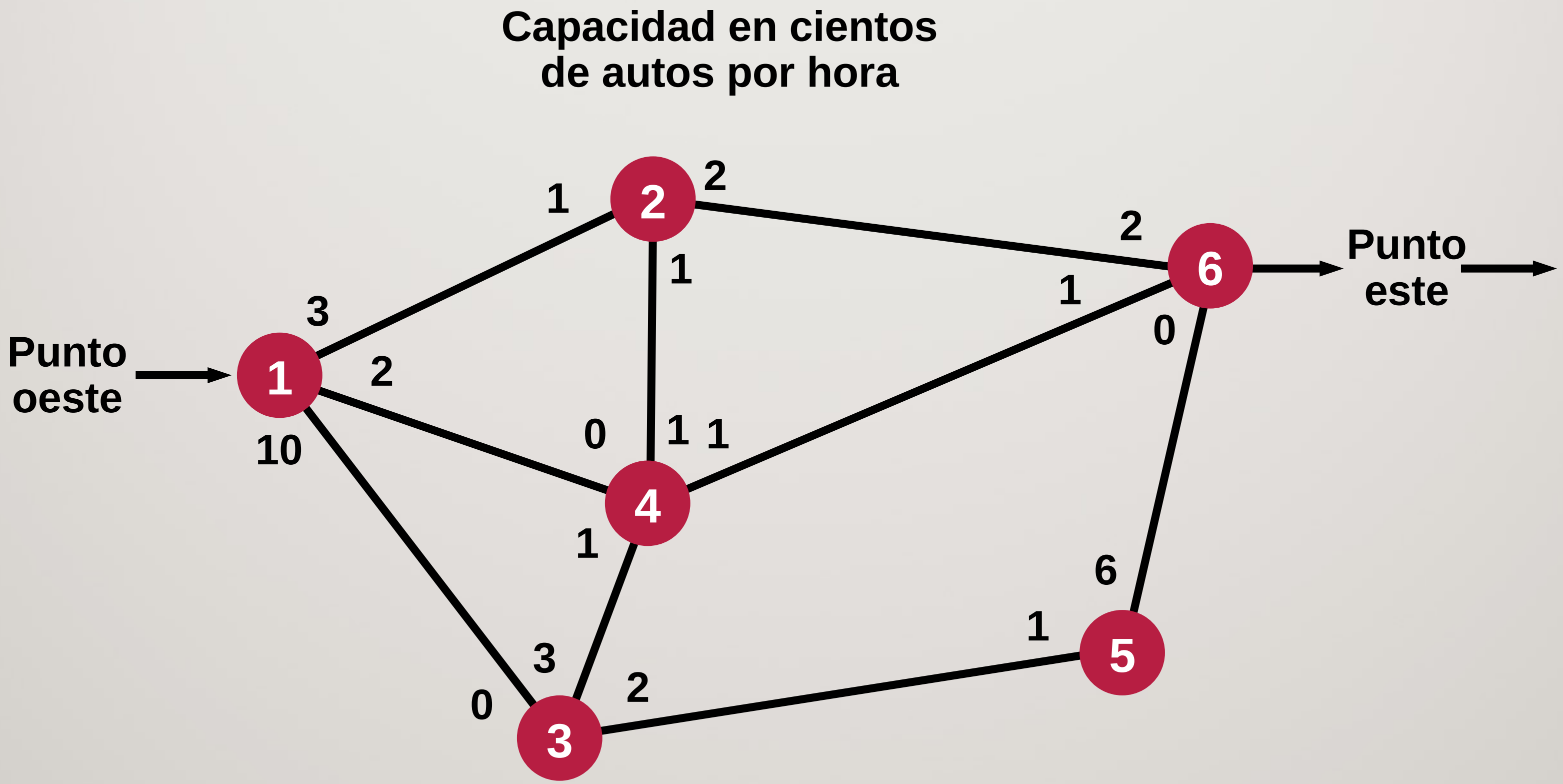
Lauderdale Construction Company Solution					
Branch name	Start node	End node	Cost	Include	Cost
Branch 1	1	2	3	Y	3
Branch 2	1	3	2	Y	2
Branch 3	1	4	5		
Branch 4	2	3	3		
Branch 5	2	5	3	Y	3
Branch 6	3	4	2	Y	2
Branch 7	3	5	5		
Branch 8	3	6	3	Y	3
Branch 9	3	7	7		
Branch 10	4	6	6		
Branch 11	5	7	4		
Branch 12	6	8	1	Y	1
Branch 13	7	8	2	Y	2
Total					16

Técnica del flujo máximo

- La técnica del flujo máximo permite determinar la cantidad máxima de material que puede fluir en una red.
- Waukesha, un pequeño pueblo de Wisconsin, está en el proceso de desarrollar un sistema de caminos en el área del centro.
- Los planificadores de la ciudad quieren determinar el número máximo de automóviles que pueden fluir por el pueblo de oeste a este.
- La red de caminos se ilustra en la figura 11.6.
- Los números al lado de los nodos indican el número de automóviles que pueden fluir *desde* los diferentes nodos.

Técnica del flujo máximo

Red de caminos para Waukesha



Técnica del flujo máximo

Cuatro pasos de la técnica del flujo máximo

1. Elegir cualquier ruta del inicio (*origen*) al final (*destino*) con algún flujo. Si no existe una trayectoria con flujo, entonces, se encontró la solución óptima.
2. Determinar el arco en esta ruta con la menor capacidad de flujo disponible. Llamar C a esta capacidad, que representa la capacidad adicional máxima que puede asignarse a esta ruta.

Técnica del flujo máximo

Cuatro pasos de la técnica del flujo máximo

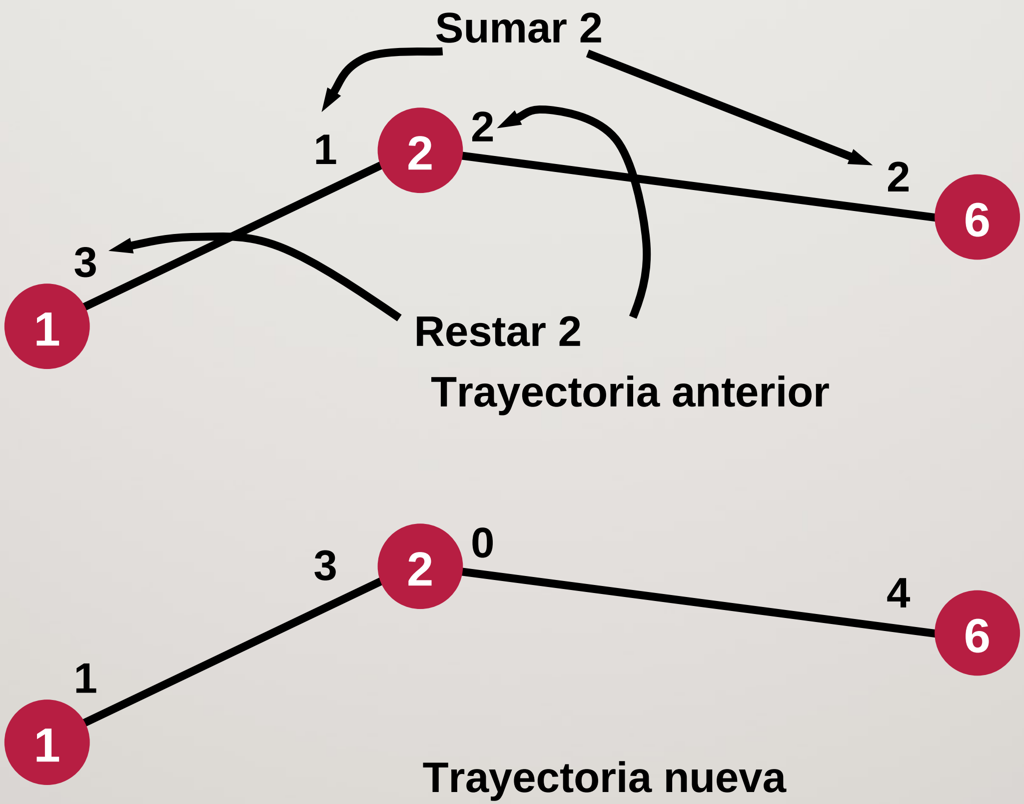
3. Para cada nodo en esta ruta, disminuir en la cantidad C la capacidad del flujo en la dirección del flujo. Para cada nodo en esta ruta, incrementar la capacidad del flujo en la cantidad C en la dirección contraria.
4. Repetir los pasos anteriores hasta que no sea posible aumentar el flujo.

Técnica del flujo máximo

- Comenzamos eligiendo arbitrariamente la trayectoria 1-2-6 en la parte superior de la red.
- El flujo máximo es de 2 unidades del nodo 2 al nodo 6.
- La capacidad de flujo se ajusta sumando 2 a la trayectoria hacia el oeste y restamos 2 a la trayectoria hacia el este.
- El resultado es la nueva ruta de la figura 11.7 la cual refleja la nueva capacidad relativa en esta etapa.

Técnica del flujo máximo

Ajuste de capacidad para la trayectoria 1-2-6, iteración 1

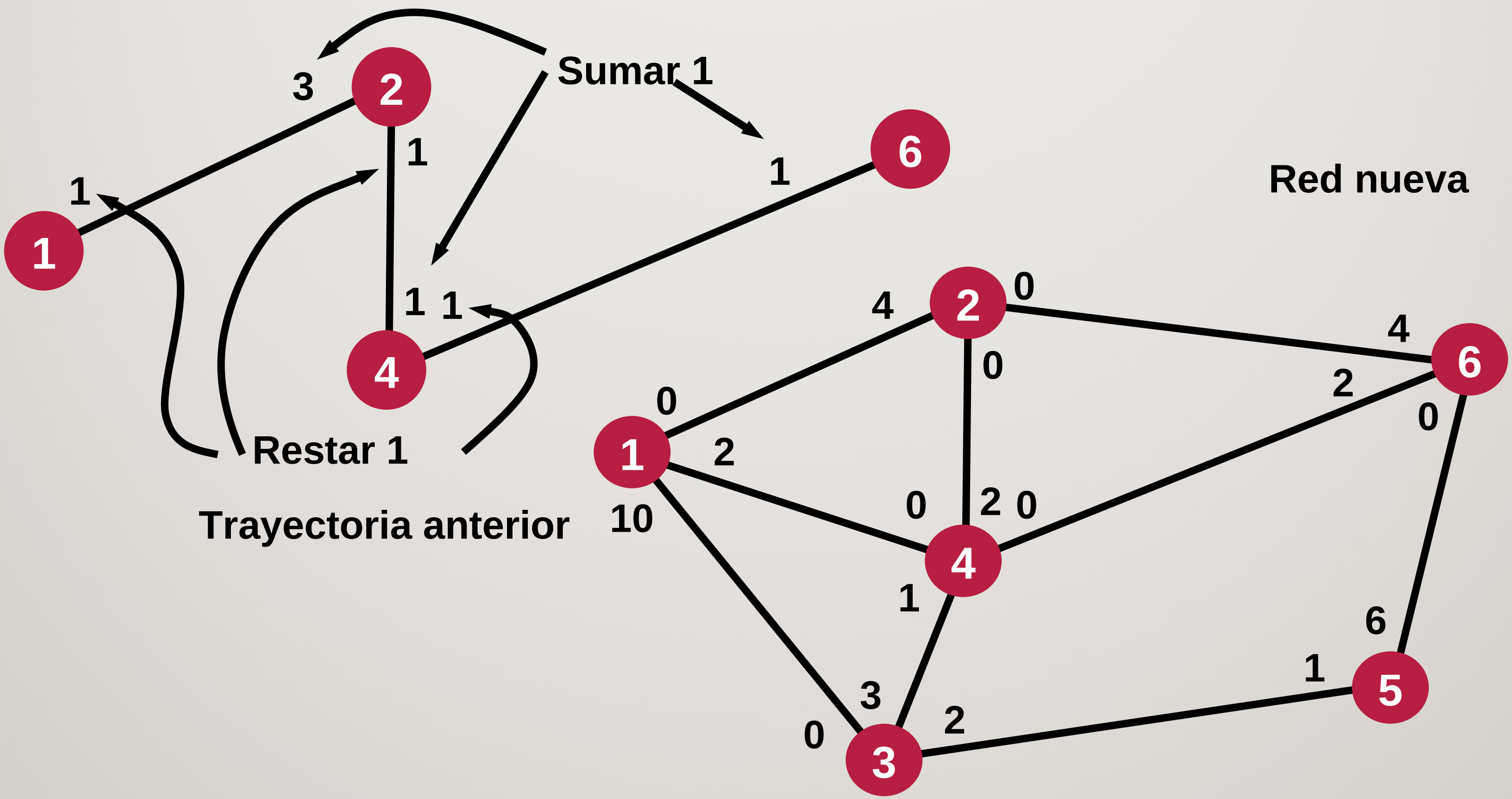


Técnica del flujo máximo

- Repetimos este proceso eligiendo la trayectoria 1-2-4-6.
- La capacidad máxima en este trayectoria es 1.
- La capacidad de la trayectoria se ajusta sumando 1 en los flujos hacia el oeste, y restando 1 a los flujos hacia el este.
- El resultado es la trayectoria nueva de la figura 11.8.
- Repetimos este proceso eligiendo la trayectoria 1-3-5-6.
- La capacidad máxima de esta trayectoria es 2.
- La figura siguiente muestra esta trayectoria ajustada.

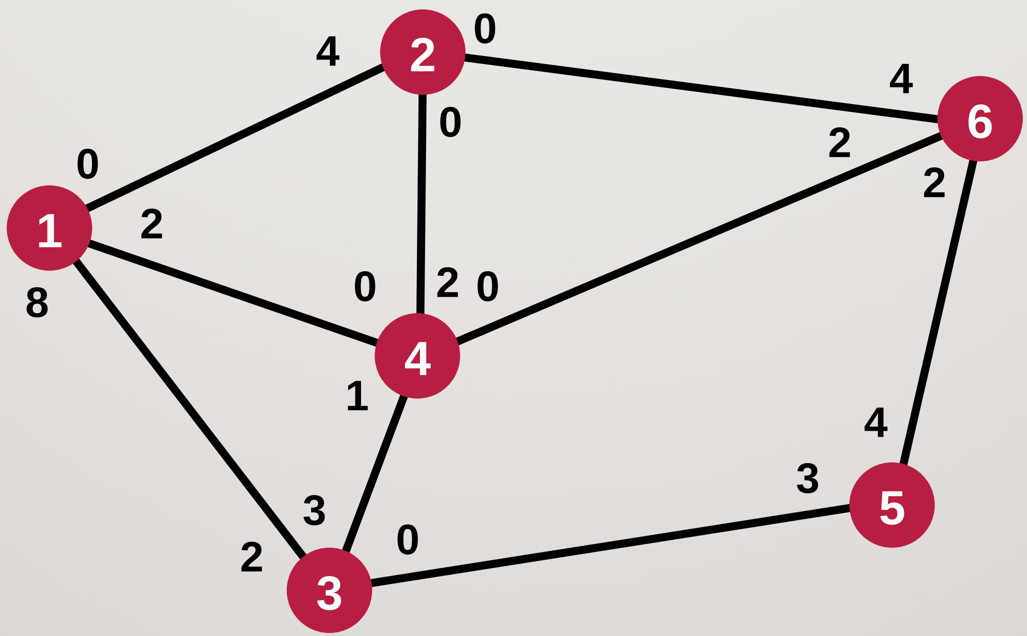
Técnica del flujo máximo

Segunda iteración para el sistema de caminos de Waukesha



Técnica del flujo máximo

Tercera y última iteración para el sistema de caminos de Waukesha



Técnica del flujo máximo

- No hay más trayectorias del nodo 1 al 6 con capacidad sin usar, de modo que esta representa la iteración final.
- El flujo máximo en esta red es de 500 automóviles.

RUTA		FLUJO (AUTOS POR HORA)
1–2–6		200
1–2–4–6		100
1–3–5–6		200
	Total	500

Programación lineal para flujo máximo

- Las variables se definen como:
  - *X_{ij} = flujo del nodo i al nodo j.*

- *Objetivo: maximizar el flujo = X_{61}*

Programación lineal para flujo máximo

Restricciones

$X_{12} \leq 3$	$X_{13} \leq 10$	$X_{14} \leq 2$
$X_{21} \leq 1$	$X_{24} \leq 1$	$X_{26} \leq 2$
$X_{34} \leq 3$	$X_{35} \leq 2$	$X_{42} \leq 1$
$X_{43} \leq 1$	$X_{46} \leq 1$	$X_{53} \leq 1$
$X_{56} \leq 1$	$X_{62} \leq 2$	$X_{64} \leq 1$

Programación lineal para flujo máximo

Continuación de restricciones:

$X_{61} = X_{12} + X_{13} + X_{14}$ o $X_{61} – X_{12} – X_{13} – X_{14} = 0$

$X_{12}+X_{42}+X_{62} = X_{21}+X_{24}+X_{26}$ o $X_{12}+X_{42}+X_{62}-X_{21}-X_{24}-X_{26} = 0$

$X_{13}+X_{43}+X_{53} = X_{34} +X_{35}$ o $X_{13}+X_{43}+X_{53}-X_{34}-X_{35} = 0$

$X_{14}+X_{24}+ X_{34}+X_{64} = X_{42} + X_{43} + X_{46}$ o

$X_{14}+X_{24} +X_{34}+X_{64} – X_{42} – X_{43} – X_{53} = 0$

$X_{35} = X_{56} + X_{53}$ o $X_{35} – X_{53} – X_{56} = 0$

$X_{26}+X_{46}+X_{56} = X_{61}$ o $X_{26} + X_{46} + X_{56} – X_{61} = 0$

$X_{ij} \geq 0$ and integer

Ahora estos problemas se pueden resolver con QM para Windows o usando Solver de Excel.

Solución de QM para Windows para el problema de flujo máximo en el

Source 1 Sink 6

Networks Results

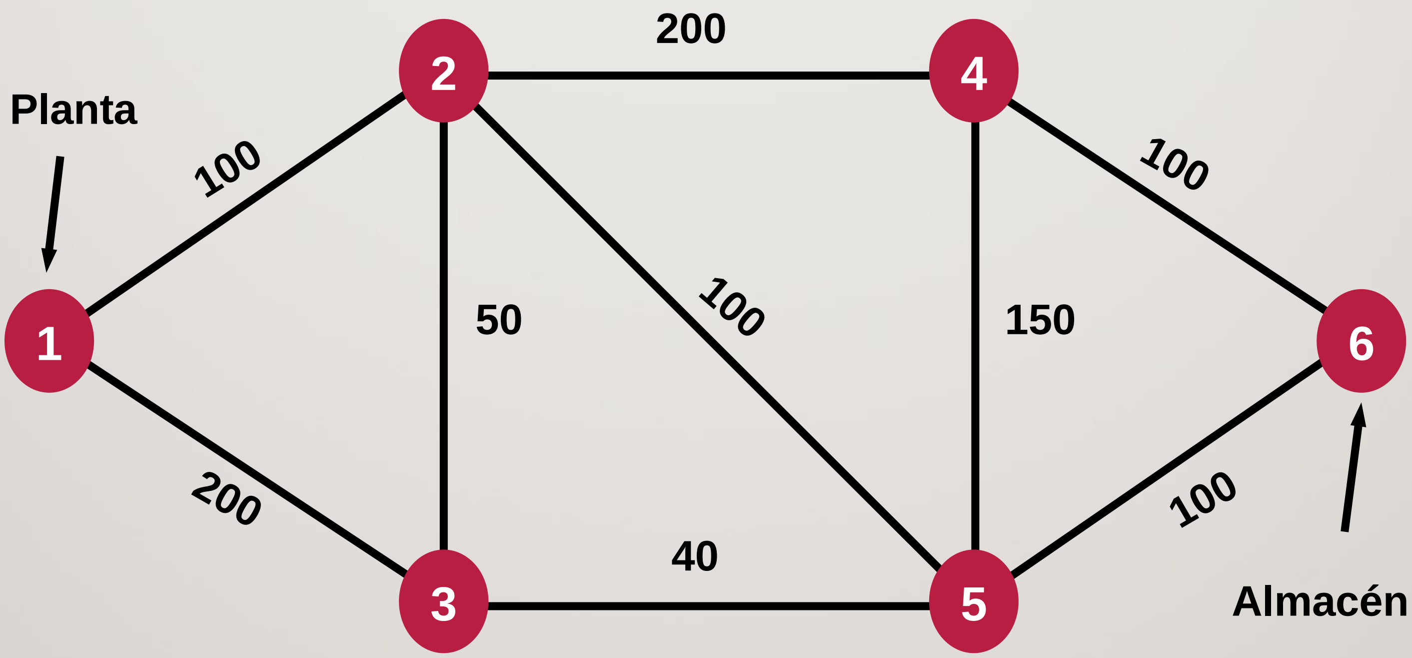
Waukesha Road Network Solution					
Branch name	Start node	End node	Capacity	Reverse capacity	Flow
Maximal Network Flow	5				
Branch 1	1	2	3	1	3
Branch 2	1	3	10	0	2
Branch 3	1	4	2	0	0
Branch 4	2	4	1	1	1
Branch 5	2	6	2	2	2
Branch 6	3	4	3	1	0
Branch 7	3	5	2	1	2
Branch 8	4	6	1	1	1
Branch 9	5	6	6	0	2

Problema de la ruta más corta

- La *técnica de la ruta más corta* identifica cómo una persona o un artículo puede viajar de un punto a otro minimizando la distancia total recorrida.
- Determina la ruta más corta para una serie de destinos.
- Ray Design, Inc. transporta camas, sillas y otros muebles de la fábrica al almacén.
- La compañía desea encontrar la ruta con la distancia más corta.
- La red de carreteras se muestra en la figura 11.10.

Problema de la ruta más corta

Carreteras de la planta de Ray al almacén



Problema de la ruta más corta

Pasos de la técnica de la ruta más corta:

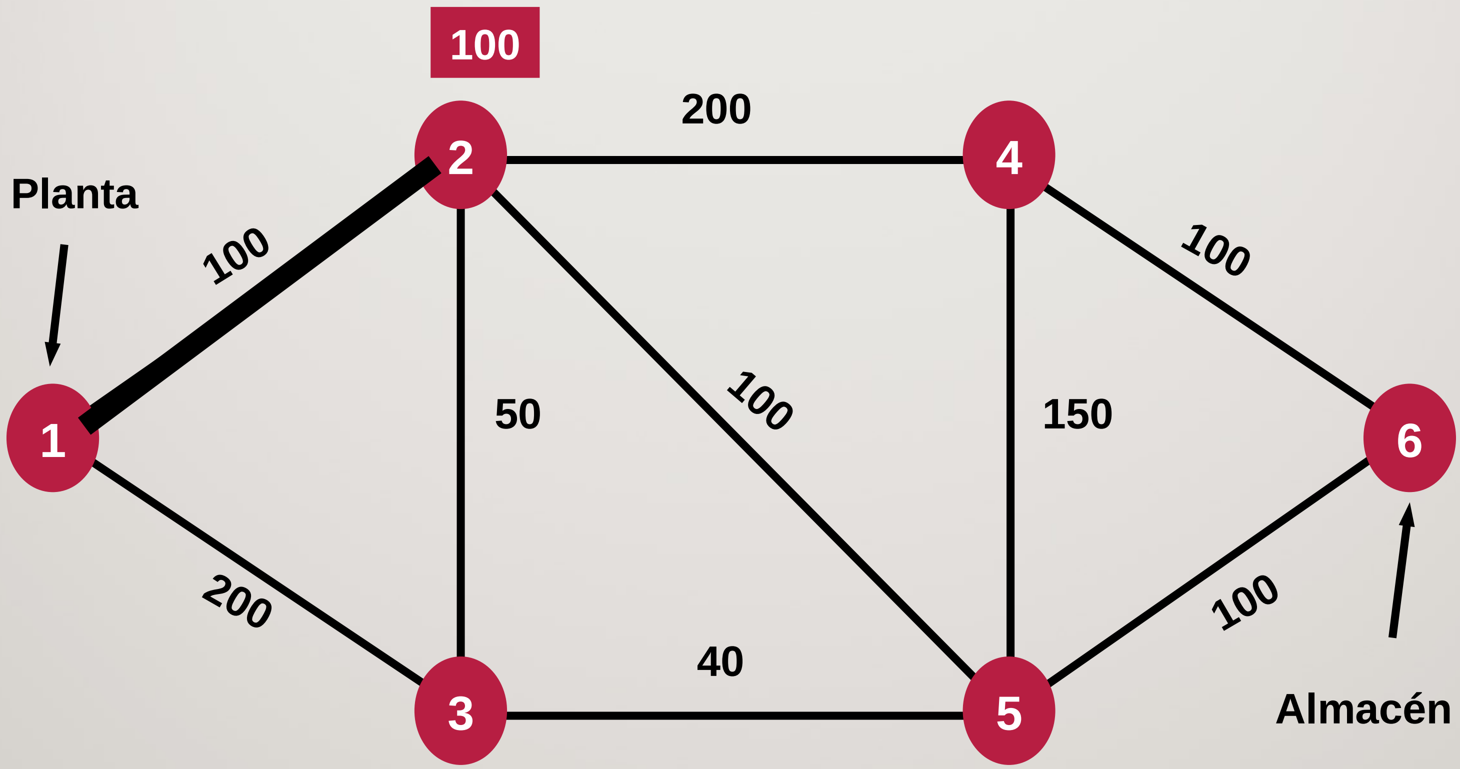
1. Encontrar el nodo más cercano al origen (planta). Colocar la distancia en un cuadro al lado del nodo.
2. Encontrar el siguiente nodo más cercano al origen y poner la distancia en un cuadro al lado del nodo. En algunos casos, deberán revisarse varias rutas para encontrar el nodo más cercano.
3. Repetir este proceso hasta que se haya revisado la red completa. La última distancia en el nodo final será la distancia con la ruta más corta.

Técnica de la distancia más corta

- Se puede ver que el nodo más cercano a la planta es el nodo 2.
- Se conectan entonces los dos nodos.
- Encontramos que el nodo 3 es el siguiente nodo más próximo pero hay dos trayectorias posibles.
- La ruta 1-2-3 es la más corta con una distancia de 150 millas.
- Repetimos el proceso y encontramos que el siguiente nodo más cercano es el nodo 5 pasando por el nodo 3.
- El siguiente nodo más cercano es el 4 o el 6, y el 6 es el más cercano.
- La ruta más corta es 1-2-3-5-6 con una distancia mínima de 290 millas.

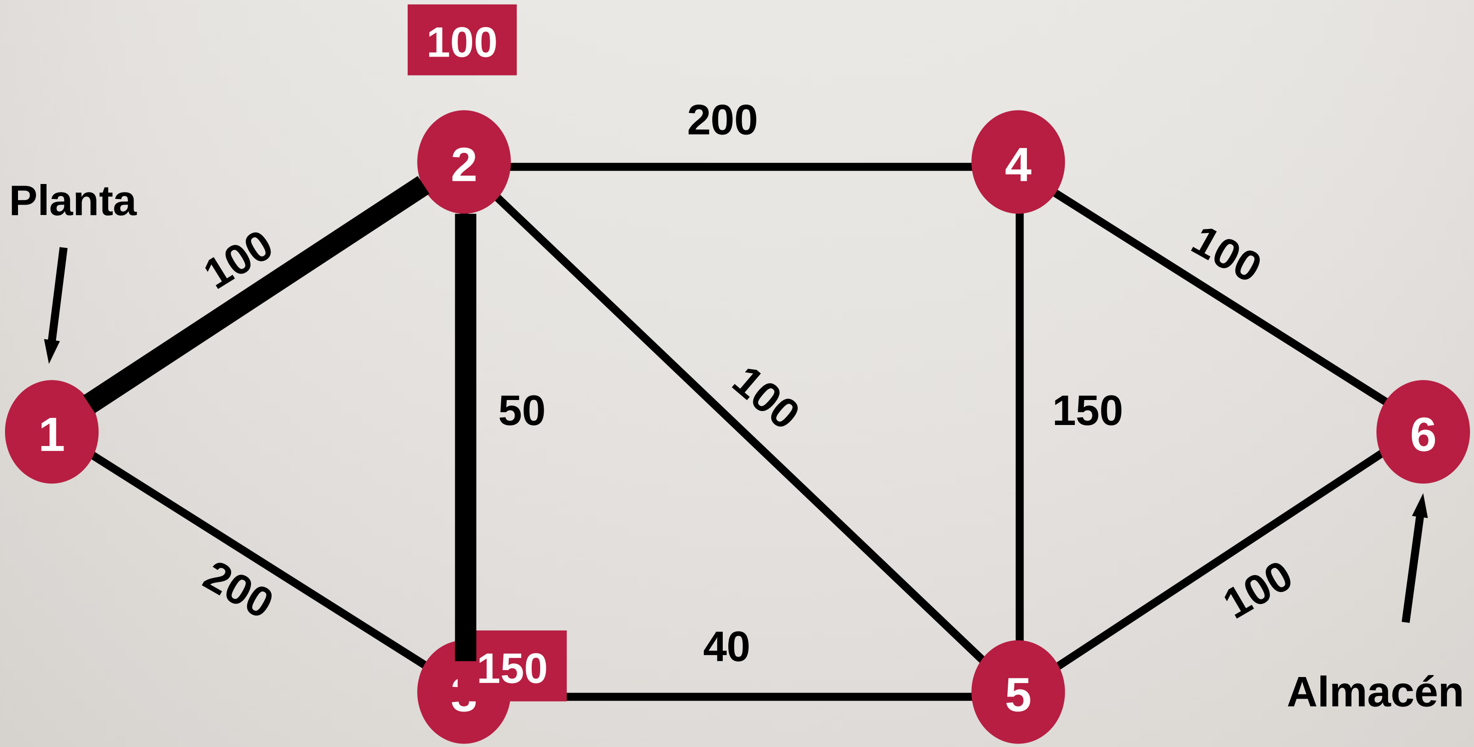
Problema de la ruta más corta

Primera iteración para Ray Design



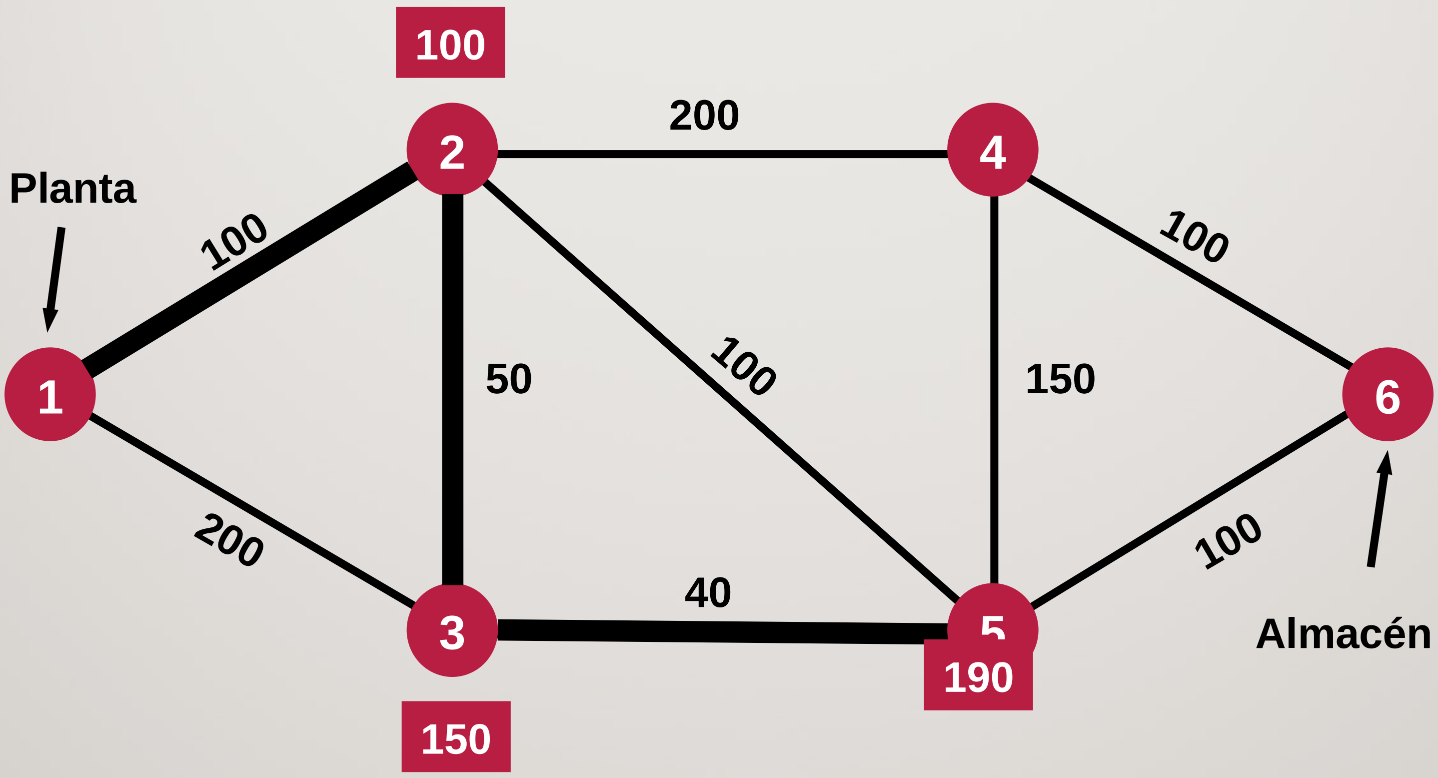
Técnica de la distancia más corta

Segunda iteración para Ray Design



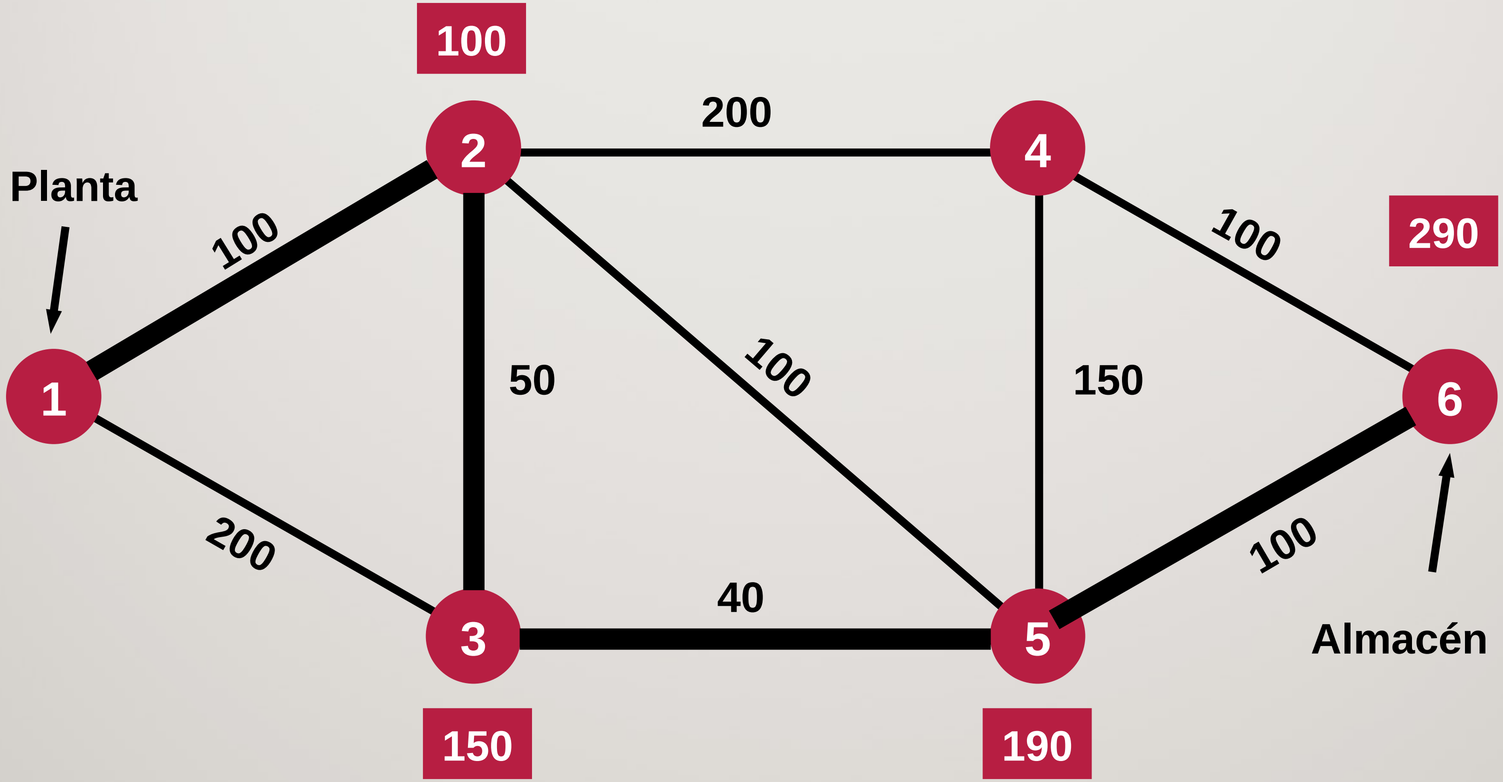
Técnica de la distancia más corta

Tercera iteración para Ray Design



Técnica de la distancia más corta

Cuarta y última iteración para Ray Design



Programación lineal para el problema de la ruta más corta

- El objetivo es minimizar la distancia

  (el costo) total de inicio a fin.

- La variables son:

  X_{ij} = 1 si se elige el arco del nodo *i* al nodo *j*

  = 0 de otra manera.

- Es útil visualizar esto como un problema de transbordo.

Programación lineal para el problema de la ruta más corta

Minimizar la distancia =

$100X_{12} + 200X_{13} + 50X_{23} + 50X_{32} + 200X_{24} + 200X_{42} + 100X_{25} + 100X_{52} + 40X_{35} + 40X_{53} + 150X_{45} + 150X_{54} + 100X_{46} + 100X_{56}$

Sujeta a:

$X_{12} + X_{13}$	$= 1$	**Nodo 1**
$X_{12} + X_{32} - X_{23} - X_{24} - X_{25}$	$= 0$	**Nodo 2**
$X_{13} + X_{23} - X_{32} - X_{35}$	$= 0$	**Nodo 3**
$X_{24} + X_{54} - X_{42} - X_{45} - X_{46}$	$= 0$	**Nodo 4**
$X_{25} + X_{35} + X_{45} - X_{52} - X_{53} - X_{54} - X_{56}$	$= 0$	**Nodo 5**
$X_{46} + X_{56}$	$= 1$	**Nodo 6**
Todas las variables	**= 0 o**	**bien 1**

Ahora estos problemas se pueden resolver con QM-Windows o Solver-Excel.

Ventana de entrada de QM para Windows para el problema de la ruta más corta de Ray Design

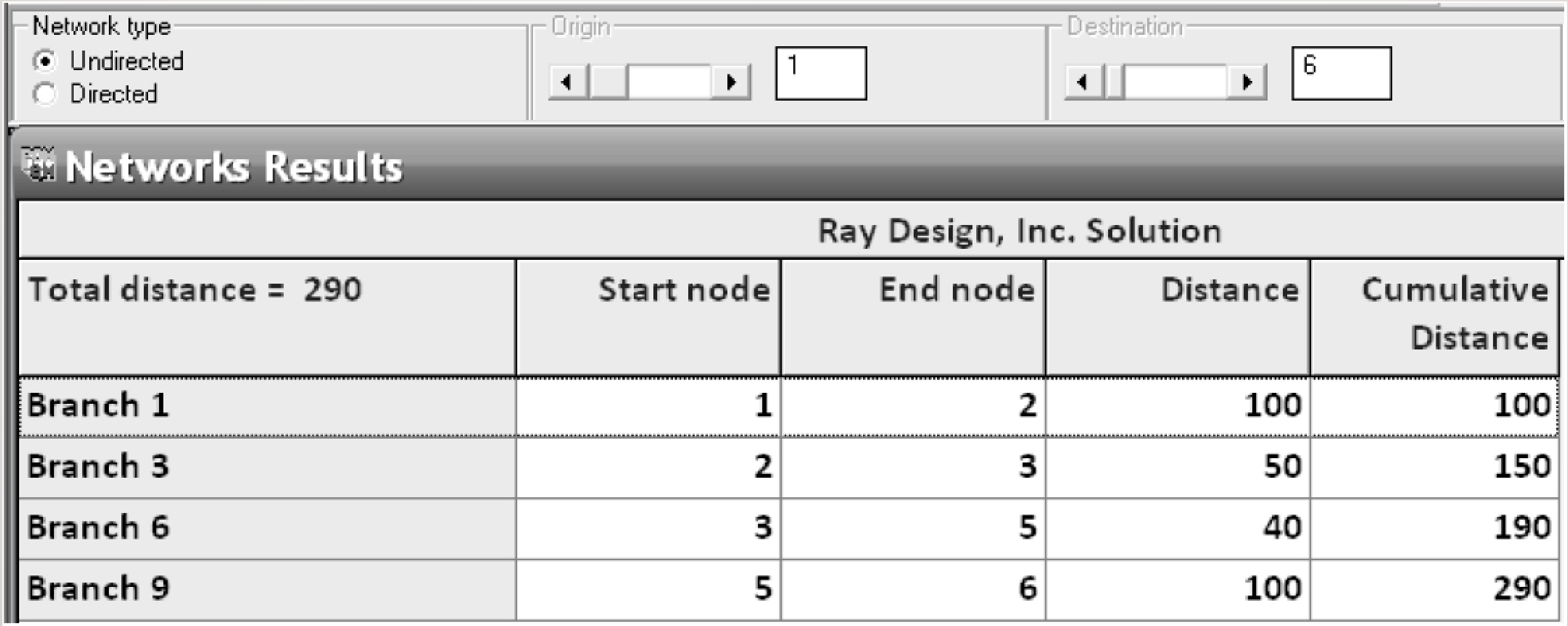
Network type
- (•) Undirected
- ( ) Directed

Origin: 1

Destination: 6

Ray Design, Inc.			
	Start node	End node	Distance
Branch 1	1	2	100
Branch 2	1	3	200
Branch 3	2	3	50
Branch 4	2	4	200
Branch 5	2	5	100
Branch 6	3	5	40
Branch 7	4	5	150
Branch 8	4	6	100
Branch 9	5	6	100

Ventana de solución de QM para Windows para el problema de la ruta más corta de Ray Design



Ray Design, Inc. Solution				
Total distance = 290	Start node	End node	Distance	Cumulative Distance
Branch 1	1	2	100	100
Branch 3	2	3	50	150
Branch 6	3	5	40	190
Branch 9	5	6	100	290

Modelos de transporte y asignación

Objetivos de aprendizaje

1. Estructurar problemas de PL para modelos de transporte, trasbordo y asignación.
2. Utilizar el método de la esquina noroeste y el método de Aproximación de Vogel
3. Resolver problemas de localización de instalaciones y otras aplicaciones con los modelos de transporte.
4. Resolver problemas de asignación con el método húngaro (reducción de matriz).

Introducción

- En este capítulo exploramos tres tipos especiales de modelos de programación lineal:
  - el problema de transporte
  - el problema de asignación
  - el problema de trasbordo.
- Forman parte de una categoría de técnicas de PL conocida como *problemas de flujo en red*.

Problema de transporte

- El *problema de transporte* maneja la distribución de bienes desde varios puntos de oferta (*orígenes* o *fuentes*) hasta varios puntos de demanda (*destinos*).
- En general, se tiene la capacidad (oferta) de bienes en cada fuente, un requerimiento (demanda) de bienes en cada destino, y el costo de envío por unidad.
- El objetivo de este problema que se minimice el costo total de transporte y los costos de producción.

Problema de transporte

- La corporación Furniture fabrica escritorios de oficina ejecutiva en tres lugares: Des Moines, Evansville y Fort Lauderdale.
- La firma distribuye los escritorios a través de los almacenes regionales situados en Boston, Albuquerque y Cleveland.

Table 8.1

TABLE 8.1 Table of constraint coefficients for linear programming

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

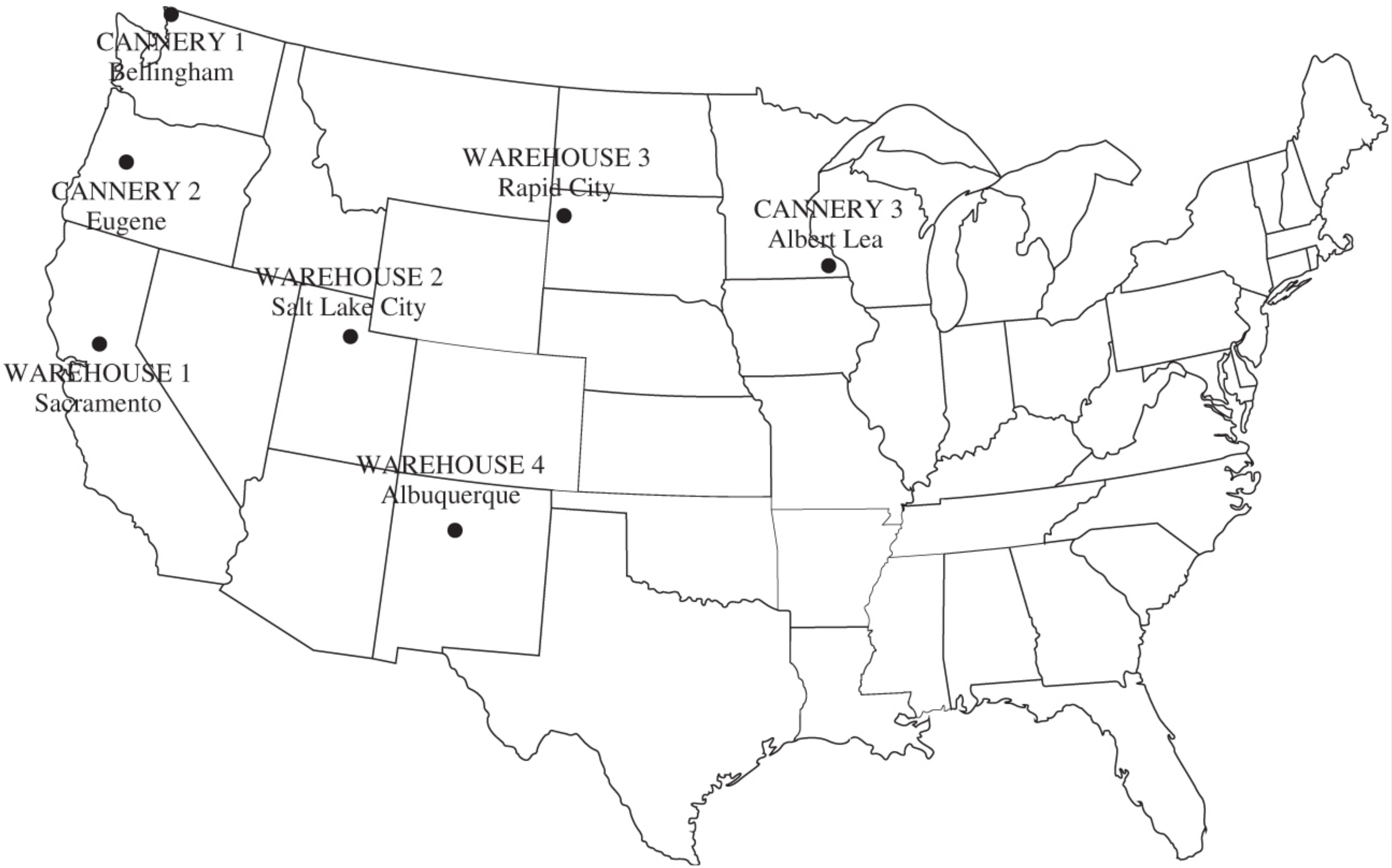
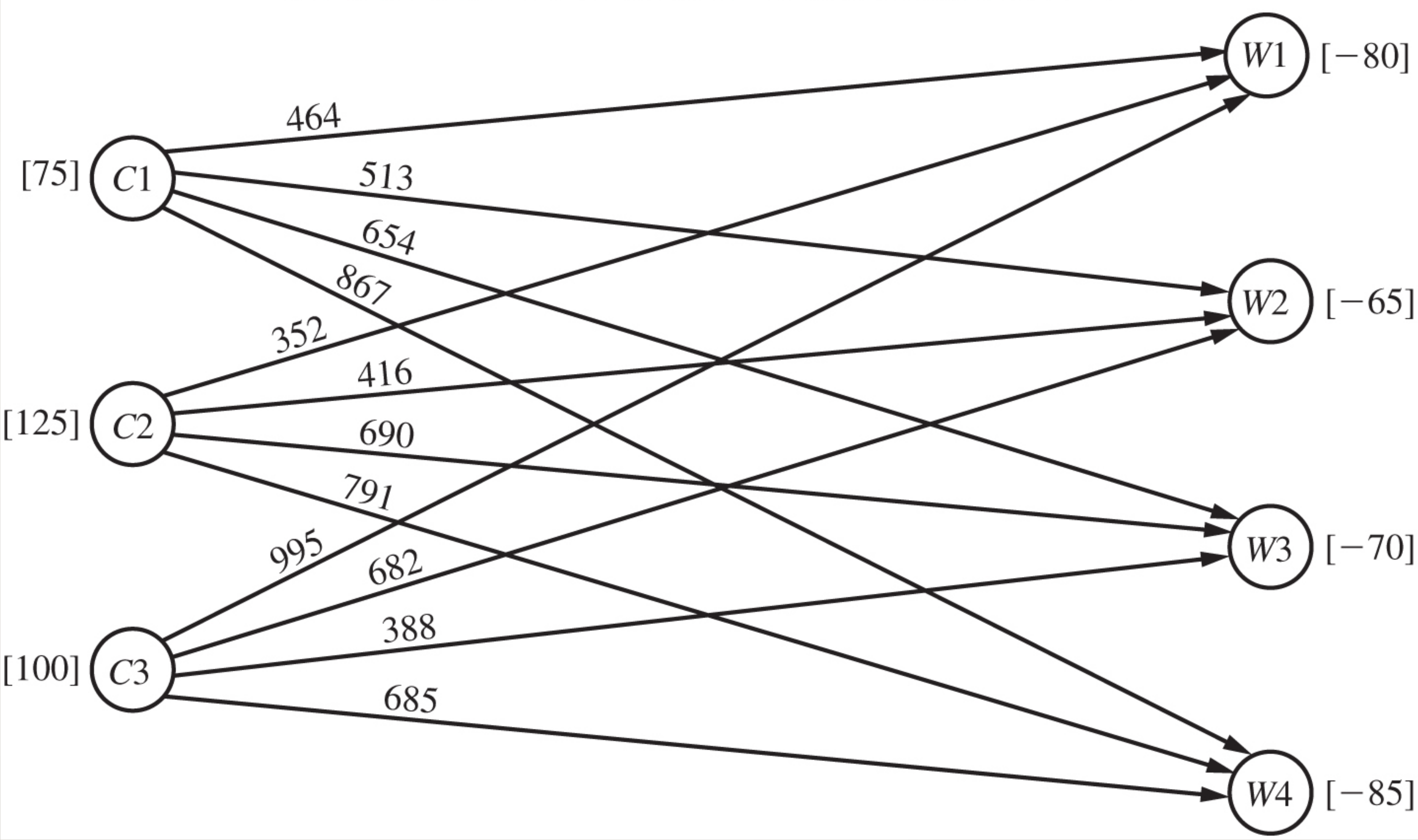

CANNERY 1
Bellingham
CANNERY 2
Eugene
WAREHOUSE 1
Sacramento
WAREHOUSE 2
Salt Lake City
WAREHOUSE 3
Rapid City
CANNERY 3
Albert Lea
WAREHOUSE 4
Albuquerque

Table 8.2

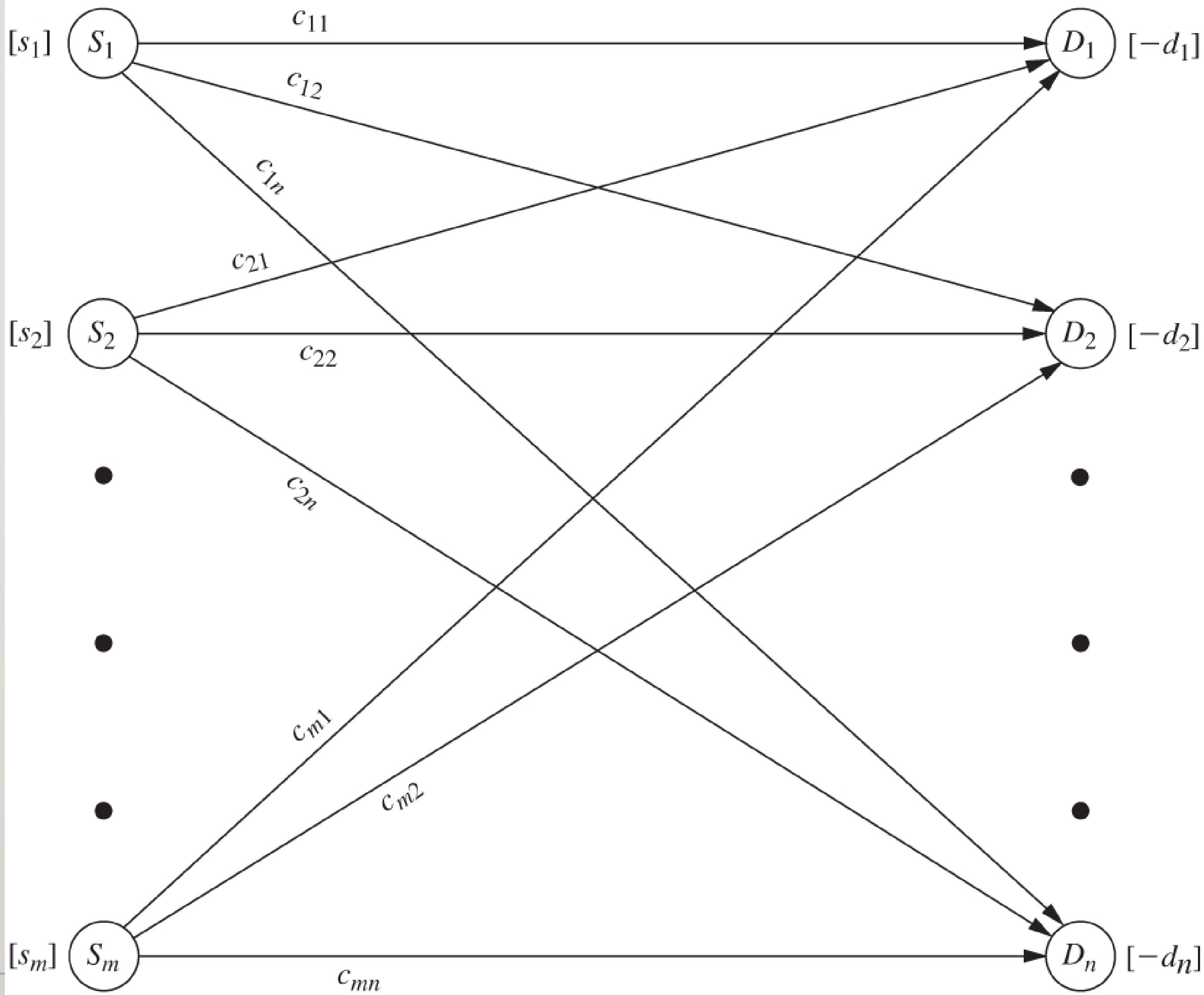
TABLE 8.2 Shipping data for P & T Co.

		Shipping Cost ($) per Truckload				
		Warehouse				
		1	2	3	4	Output
	1	464	513	654	867	75
Cannery	2	352	416	690	791	125
	3	995	682	388	685	100
Allocation		80	65	70	85	

Fig. 8.2



W1
[−80]
464
[75]
C1
513
654
867
W2
[−65]
352
416
[125]
C2
690
791
995
682
W3
[−70]
388
[100]
C3
685
W4
[−85]



$[s_1]$ S_1
$[s_2]$ S_2
$[s_m]$ S_m
D_1 $[-d_1]$
D_2 $[-d_2]$
D_n $[-d_n]$
c_{11}
c_{12}
c_{1n}
c_{21}
c_{22}
c_{2n}
c_{m1}
c_{m2}
c_{mn}

Table 8.3

TABLE 8.3 Constraint coefficients for P & T Co.

Coefficient of:

	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	
	1	1	1	1									Cannery constraints
					1	1	1	1					
									1	1	1	1	
A =	1				1				1				Warehouse constraints
		1				1				1			
			1				1				1		
				1				1				1	

Table 8.4

TABLE 8.4 Terminology for the transportation problem

Prototype Example	General Problem
Truckloads of canned peas	Units of a commodity
Three canneries	m sources
Four warehouses	n destinations
Output from cannery i	Supply s_i from source i
Allocation to warehouse j	Demand d_j at destination j
Shipping cost per truckload from cannery i to warehouse j	Cost c_{ij} per unit distributed from source i to destination j

Table 8.5

TABLE 8.5 Parameter table for the transportation problem

		Cost per Unit Distributed				
		Destination				
		1	**2**	$\cdots$	$\boldsymbol{n}$	**Supply**
Source	1	c_{11}	c_{12}	$\cdots$	c_{1n}	s_1
	2	c_{21}	c_{22}	$\cdots$	c_{2n}	s_2
	$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\vdots$
	m	c_{m1}	c_{m2}	$\cdots$	c_{mn}	s_m
Demand		d_1	d_2	$\cdots$	d_n	

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	**P&T Co. Distribution Problem**									
2										
3		**Unit Cost**		Destination (Warehouse)						
4				Sacramento	Salt Lake City	Rapid City	Albuquerque			
5		Source	Bellingham	$464	$513	$654	$867			
6		(Cannery)	Eugene	$352	$416	$690	$791			
7			Albert Lea	$995	$682	$388	$685			
8										
9										
10		**Shipment Quantity**		Destination (Warehouse)						
11		**(Truckloads)**		Sacramento	Salt Lake City	Rapid City	Albuquerque	Total Shipped		Supply
12		Source	Bellingham	0	20	0	55	75	=	75
13		(Cannery)	Eugene	80	45	0	0	125	=	125
14			Albert Lea	0	0	70	30	100	=	100
15			Total Received	80	65	70	85			
16				=	=	=	=			Total Cost
17			Demand	80	65	70	85			$ 152,535

Solver Parameters

Set Target Cell: TotalCost

Equal To: Max / Min (selected)

By Changing Cells:

ShipmentQuantity

Subject to the Constraints:

TotalReceived = Demand
TotalShipped = Supply

Solver Options

☑ Assume Linear Model
☑ Assume Non-Negative

Range Name	Cells
Demand	D17:G17
ShipmentQuantity	D12:G14
Supply	J12:J14
TotalCost	J17
TotalReceived	D15:G15
TotalShipped	H12:H14
UnitCost	D5:G7

	H
11	Total Shipped
12	=SUM(D12:G12)
13	=SUM(D13:G13)
14	=SUM(D14:G14)

	C	D	E	F	G
15	Total Received	=SUM(D12:D14)	=SUM(E12:E14)	=SUM(F12:F14)	=SUM(G12:G14)

	J
16	Total Cost
17	=SUMPRODUCT(UnitCost,ShipmentQuantity)

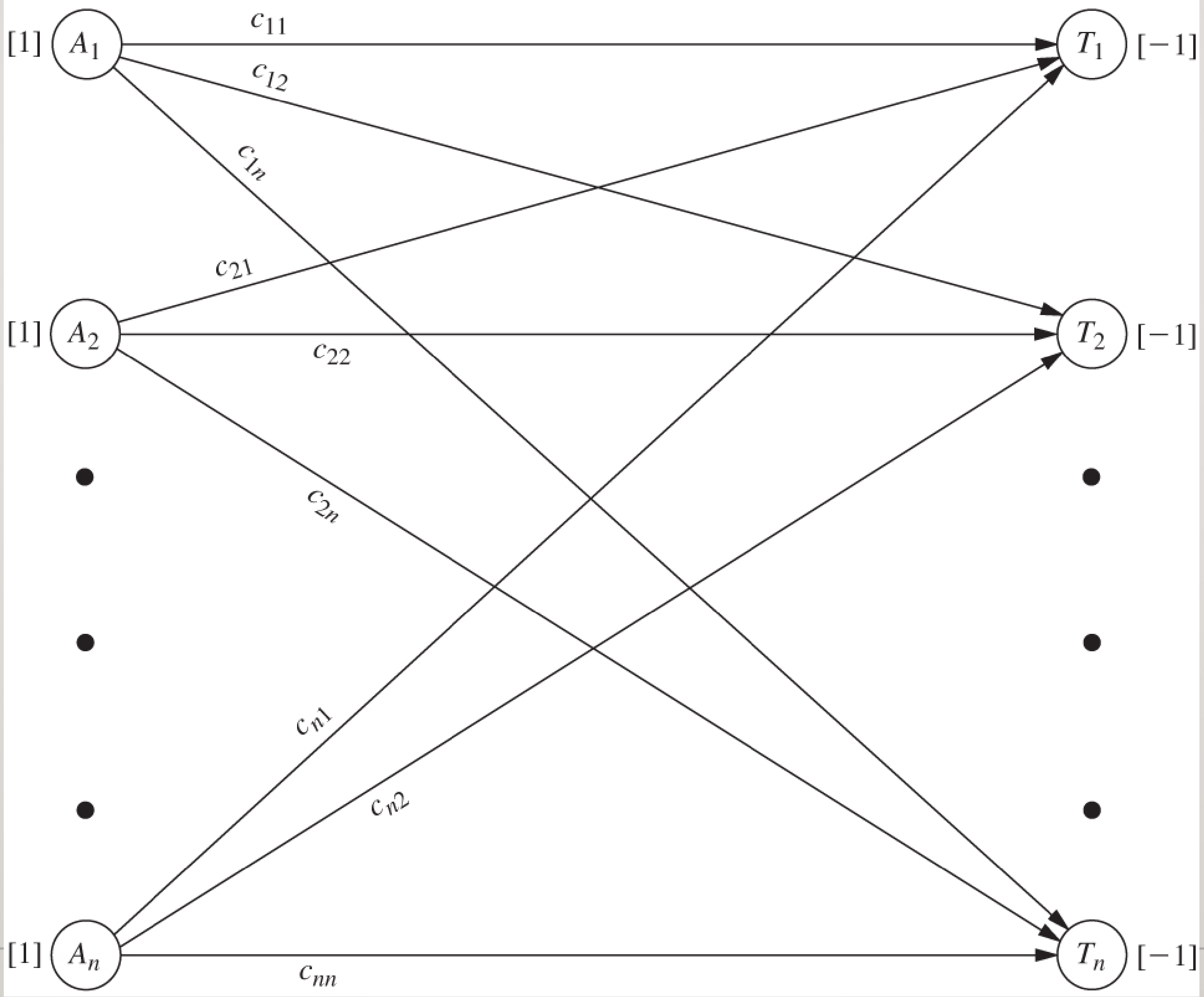

[1]
A_1
[1]
A_2
[1]
A_n
c_{11}
c_{12}
c_{1n}
c_{21}
c_{22}
c_{2n}
c_{n1}
c_{n2}
c_{nn}
T_1
[−1]
T_2
[−1]
T_n
[−1]

Table 8.6

TABLE 8.6 Constraint coefficients for the transportation problem

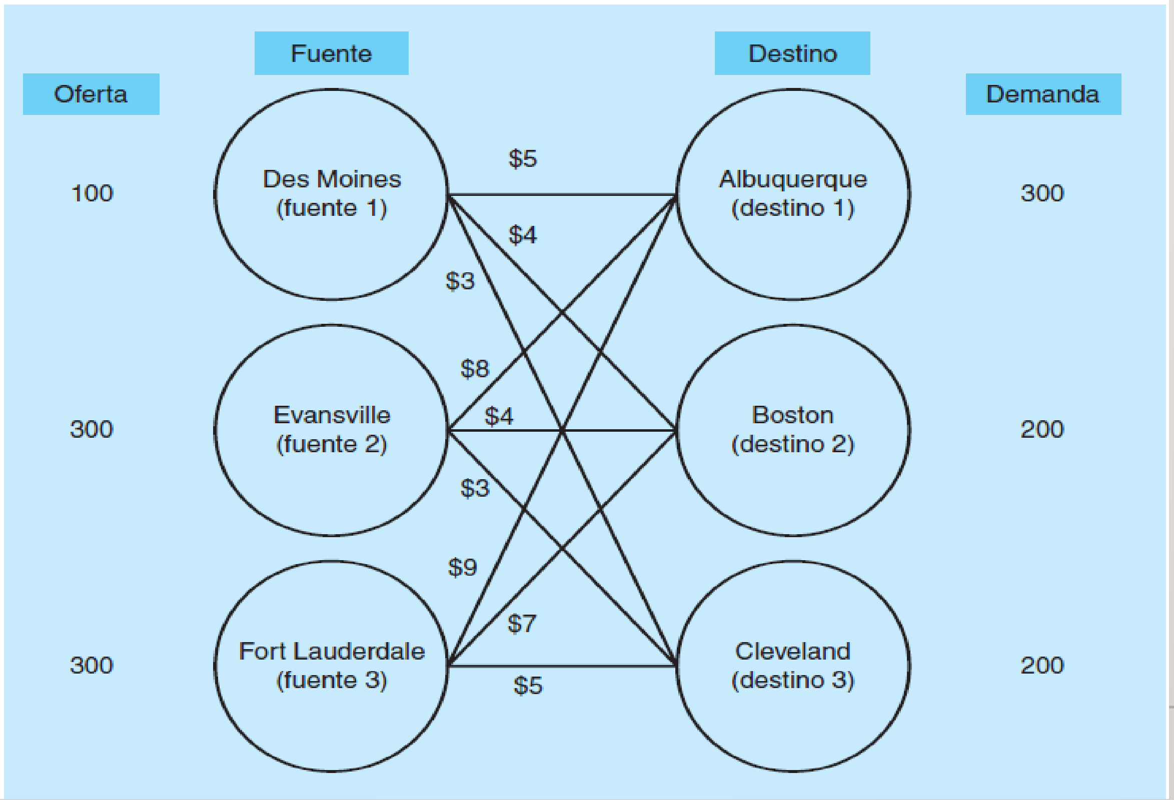
Coefficient of:

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccccccccc}
x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} & \cdots & x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn}
\end{array}
\\
\mathbf{A} = \left[\begin{array}{ccccccccccccc}
1 & 1 & \cdots & 1 & & & & & & & & & \\
 & & & & 1 & 1 & \cdots & 1 & & & & & \\
 & & & & & & & & \ddots & & & & \\
 & & & & & & & & & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
1 & & & & 1 & & & & & 1 & & & \\
 & 1 & & & & 1 & & & & & 1 & & \\
 & & \ddots & & & & \ddots & & \cdots & & & \ddots & \\
 & & & 1 & & & & 1 & & & & & 1
\end{array}\right]
\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} \text{Supply constraints} \\
\left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} \text{Demand constraints}
\end{array}
\end{array}
$$

Problema de transporte

Representación en red de un problema de transporte con costos, demandas y ofertas

Corporación Executive Furniture



Programación lineal para el ejemplo de transporte

- Sea X_{ij} = número de unidades enviadas de la fuente *i* al destino *j*,
  - donde:
    - *i* = 1, 2, 3, con 1 = Des Moines, 2 = Evansville y 3 = Fort Lauderdale
    - *j* = 1, 2, 3, con 1 = Albuquerque, 2 = Boston y 3 = Cleveland.

Programación lineal para el ejemplo de Transporte

F. O. Minimizar el costo total = $5X_{11} + 4X_{12} + 3X_{13} + 8X_{21} + 4X_{22} + 3X_{23} + 9X_{31} + 7X_{32} + 5X_{33}$

S. A.

$X_{11} + X_{12} + X_{13} \leq 100$ (oferta en Des Moines)

$X_{21} + X_{22} + X_{23} \leq 300$ (oferta en Evansville)

$X_{31} + X_{32} + X_{33} \leq 300$ (oferta en Fort Lauderdale)

$X_{11} + X_{21} + X_{31} = 300$ (demanda en Albuquerque)

$X_{12} + X_{22} + X_{32} = 200$ (demanda en Boston)

$X_{13} + X_{23} + X_{33} = 200$ (demanda en Cleveland)

$X_{ij} \geq 0$ para toda *i* y *j*.

Modelo general de PL para problemas de transporte

- Sea:
  - X_{ij} = número de unidades enviadas de la fuente *i* al destino *j*.
  - c_{ij} = costo de enviar una unidad de la fuente *i* al destino *j*.
  - s_i = oferta en la fuente *i*
  - d_j = demanda en el destino *j.*

Modelo general de PL para problemas de transporte

Minimizar el costo = $$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij}$$

sujeto a:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq s_i \qquad i = 1, 2, \ldots, m.$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq d_j \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

$x_{ij} \geq 0$ para toda *i* y *j*.

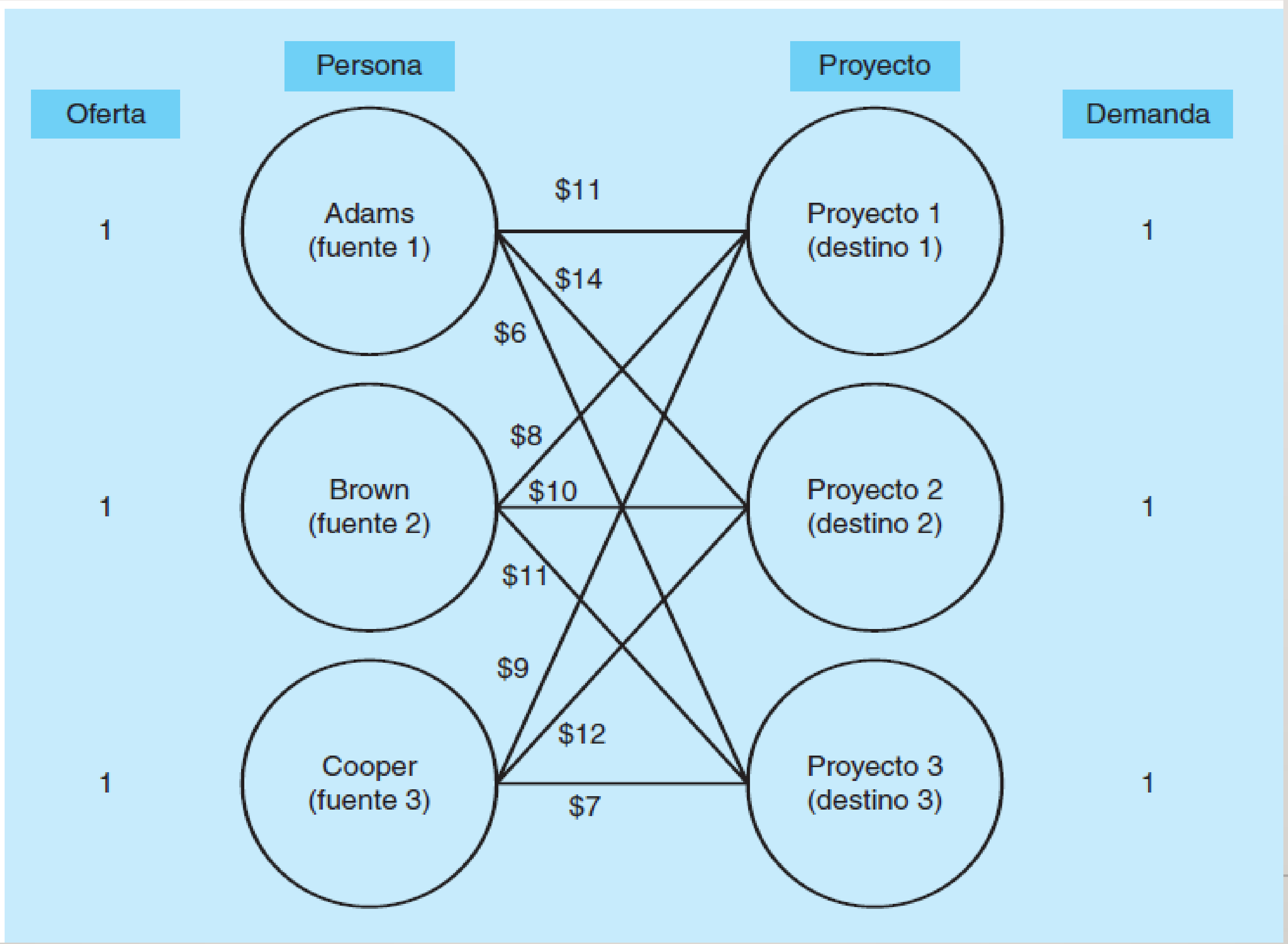
Problema de asignación

- Este tipo de problema determina la asignación más eficiente de personas a tareas específicas, etc.
- El objetivo es casi siempre minimizar el costo total o el tiempo total para realizar las tareas.

Programa lineal
para el ejemplo asignación

- Fix-it shop acaba de recibir tres nuevos proyectos de reparación que deben repararse rápidamente: una radio, un horno tostador y una mesa de café.
- Se dispone de tres personas que reparan, cada una con talentos diferentes, para realizar los trabajos.
- El dueño del taller estima el costo en salarios, si los empleados se asignan a cada uno de los tres proyectos.
- Objetivo: minimizar el costo total.

Ejemplo de un problema de Asignación en el formato de una red de transporte



Programación lineal para un ejemplo de asignación

Sea:

- $X_{ij} = 1$ si la persona *i* se asigna al proyecto *j*, o

  0 de otra manera

Donde:

- *i* = 1, 2, 3 con 1 = Adams, 2 = Brown y 3 = Cooper
- *j* = 1, 2, 3 con 1 = Proyecto 1, 2 = Proyecto 2

  y 3 = Proyecto 3.

ProgramaCIÓN lineal para el ejemplo de asignación

Minimizar el costo total = $11X_{11} + 14X_{12} + 6X_{13} + 8X_{21} + 10X_{22} + 11X_{23} + 9X_{31} + 12X_{32} + 7X_{33}$

sujeto a:

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} \leq 1$$

$$X_{21} + X_{22} + X_{23} \leq 1$$

$$X_{31} + X_{32} + X_{33} \leq 1$$

$$X_{11} + X_{21} + X_{31} = 1$$

$$X_{12} + X_{22} + X_{32} = 1$$

$$X_{13} + X_{23} + X_{33} = 1$$

X_{ij} = 0 o 1 para toda *i* y *j*

Programación lineal para el ejemplo de asignación

- $X_{13} = 1$, de modo que Adams se asigna al proyecto 3.
- $X_{22} = 1$, de modo que Brown se asigna al proyecto 2.
- $X_{31} = 1$, de modo que Cooper se asigna al proyecto 1.
- El costo total de las reparaciones son $25.

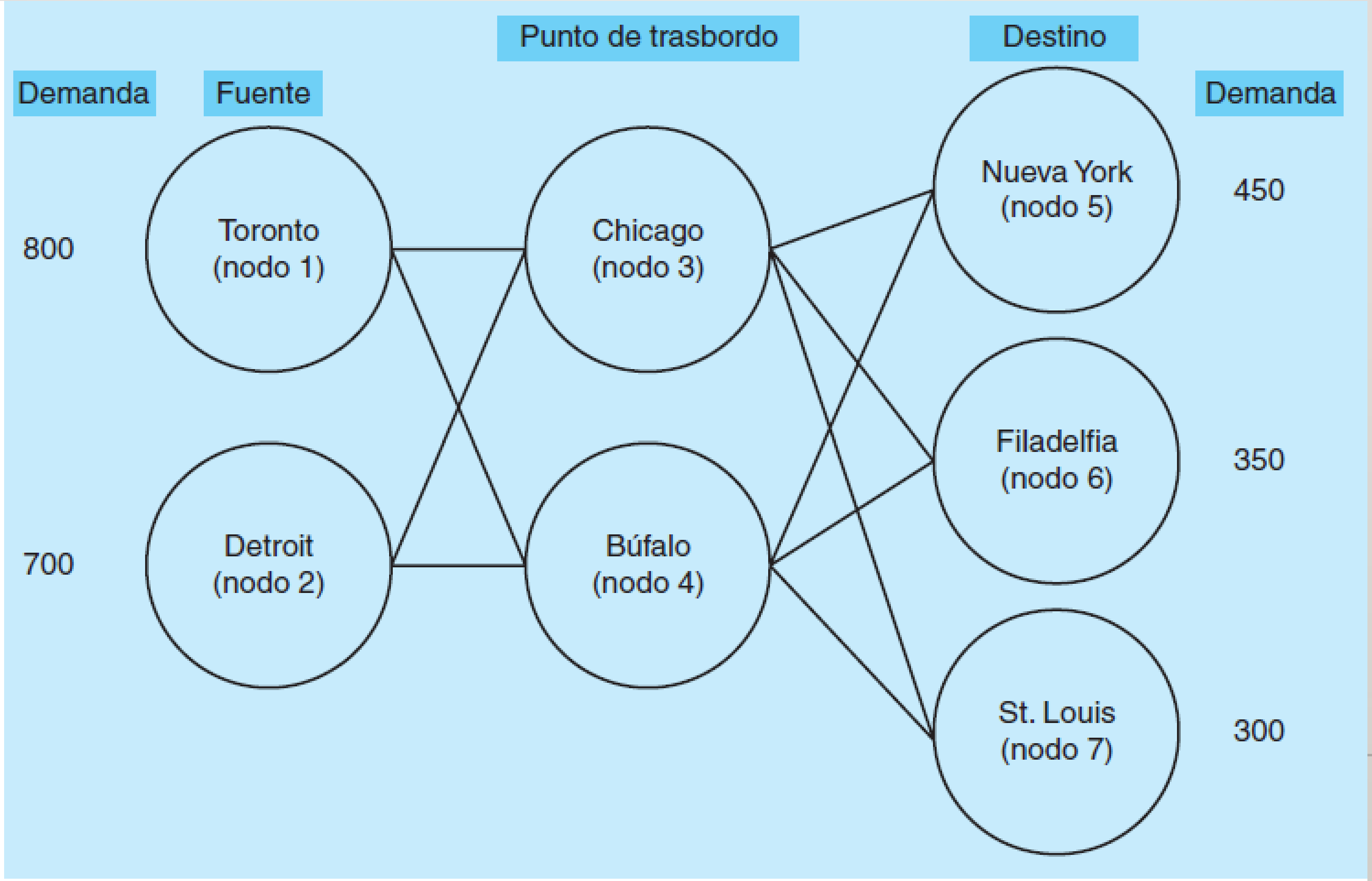
Aplicaciones de trasbordo

Cuando los artículos deben pasar por un punto intermedio (llamado *punto de trasbordo*) antes de llegar al destino final, es un *problema de trasbordo*.

Centros de Distribución

- Frosty Machines fabrica barredoras de nieve en fábricas localizadas en Toronto y Detroit.
- Los productos se envían a centros de distribución regionales en Chicago y Búfalo.
- Desde allí se reparten a las casas de oferta en Nueva York, Filadelfia y St. Louis.
- Los costos de envío varían según la ubicación y el destino.
- Las barredoras de nieve no pueden enviarse directamente desde las fábricas a las casas de oferta.

Representación en red de un ejemplo de trasbordo



Problema de transbordo

Datos para el trasbordo de Frosty Machine

	A					
DE	CHICAGO	BÚFALO	NUEVA YORK	FILADELFIA	ST. LOUIS	OFERTA
Toronto	**$4**	**$7**	**—**	**—**	**—**	**800**
Detroit	**$5**	**$7**	**—**	**—**	**—**	**700**
Chicago	**—**	**—**	**$6**	**$4**	**$5**	**—**
Búfalo	**—**	**—**	**$2**	**$3**	**$4**	**—**
Demanda	**—**	**—**	**450**	**350**	**300**	

Frosty quiere minimizar los costos de transporte asociados con el envío de suficientes barredoras de nieve, para cumplir con la demanda los destinos sin exceder la oferta en cada fábrica.

Problema de transbordo

Una descripción del problema sería reducir al mínimo costo sujeto a:

1. El número de unidades enviadas desde Toronto no es mayor que 800.
2. El número de unidades enviadas desde Detroit no es mayor que 700.
3. El número de unidades enviadas a Nueva York son 450.
4. El número de unidades enviadas a Filadelfia son 350.
5. El número de unidades enviadas a St. Louis son 300.
6. El número de unidades que salen de Chicago es igual al número de unidades que llegan a Búfalo.
7. El número de unidades que salen de Búfalo es igual al número de unidades que llegan a Búfalo.

Problemas de transbordo

Las variables de decisión deberían representar el número de unidades enviadas desde cada fuente hasta cada punto de transbordo, y de aquí a los destinos finales.

X_{13} = número de unidades enviadas de Toronto a Chicago

X_{14} = número de unidades enviadas deToronto a Buffalo

X_{23} = número de unidades enviadas de Detroit a Chicago

X_{24} = número de unidades enviadas de Detroit a Buffalo

X_{35} = número de unidades enviadas de Chicago a Nueva York

X_{36} = número de unidades enviadas de Chicago a Filadelfia

X_{37} = número de unidades enviadas de Chicago a St. Louis

X_{45} = número de unidades enviadas de Buffalo a Nueva York

X_{46} = número de unidades enviadas de Buffalo a Filadelfia

X_{47} = número de unidades enviadas de Buffalo a St. Louis

Problemas de transbordo

El modelo de PL es:

F.O. Minimizar el costo total = $4X_{13} + 7X_{14} + 5X_{23} + 7X_{24} + 6X_{35} + 4X_{36} + 5X_{37} + 2X_{45} + 3X_{46} + 4X_{47}$

sujeto a

$X_{13} + X_{14} \leq 800$ (oferta en Toronto)

$X_{23} + X_{24} \leq 700$ (oferta en Detroit)

$X_{35} + X_{45} = 450$ (demanda en Nueva York)

$X_{36} + X_{46} = 350$ (demanda en Filadelfia)

$X_{37} + X_{47} = 300$ (demanda en St. Louis)

$X_{13} + X_{23} = X_{35} + X_{36} + X_{37}$ (envío por Chicago)

$X_{14} + X_{24} = X_{45} + X_{46} + X_{47}$ (envío por Búfalo)

$X_{ij} \geq 0$ para toda i y j (no negativa)

Solución para el problema de trasbordo de Frosty Machines

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Frosty Machines Transshipment Problem							
2								
3				**Shipping Cost Per Unit**				
4	**From\To**	Chicago	Buffalo	NYC	Phil.	St.Louis		
5	Toronto	4	7					
6	Detroit	5	7					
7	Chicago			6	4	5		
8	Buffalo			2	3	4		
9								
10				**Solution - Number of units shipped**				
11		Chicago	Buffalo	NYC	Phil.	St.Louis	**Total shipped**	**Supply**
12	Toronto	650	150				800	800
13	Detroit	0	300				300	700
14	Chicago			0	350	300	650	
15	Buffalo			450	0	0	450	
16	**Total received**	650	450	450	350	300		
17	**Demand**			450	350	300		
18								
19	**Total cost =**	9550						

	G
11	**Total shipped**
12	=SUM(B12:C12)

	G
14	=SUM(D14:F14)

	B
16	=SUM(B12:B13)

	D
16	=SUM(D14:D15)

	B
19	=SUMPRODUCT(B5:F8,B12:F15)

Algoritmo de transporte

- Es un procedimiento iterativo donde se encuentra y evalúa una solución a un problema de transporte, mediante un procedimiento especial para determinar si la solución es óptima.

  - si la solución es óptima, el proceso se detiene.
  - si no es óptima, se genera una nueva solución.

Tabla de transporte para la corporación Executive Furniture

DE \ A	ALMACÉN EN ALBUQUERQUE	ALMACÉN EN BOSTON	ALMACÉN EN CLEVELAND	CAPACIDAD DE LA FÁBRICA
FÁBRICA DE DES MOINES	$5	$4	$3	100
FÁBRICA DE EVANSVILLE	$8	$4	$3	300
FÁBRICA DE FORT LAUDERDALE	$9	$7	$5	300
REQUERIMIENTOS DEL ALMACÉN	300	200	200	700

Restricción de capacidad de Des Moines

Celda que representa una asignación de embarque "fuente a destino" (de Evansville a Cleveland) que se puede hacer

Demanda del almacén de Cleveland

Demanda total y oferta total

Costo de enviar una unidad de la fábrica de Fort Lauderdale al almacén Boston

PROGRAMACIÓN ENTERA, PROGRAMACIÓN POR METAS

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

1. Entender la diferencia entre PL y programación entera.
2. Entender y resolver los tres tipos de problemas de programación entera.

CONTENIDO

- Programación entera
- Programación entera binaria con variables 0-1 (binaria)
- Programación entera mixta
- Programación por metas

INTRODUCCIÓN

- No todos los problemas que enfrentan las empresas se definen en el contexto de programación lineal ordenada.
- Un gran número de problemas tan solo pueden resolverse, si las variables tienen valores enteros.
- Diversos problemas tienen múltiples objetivos y la programación por metas es una extensión de la PL que permite establecer más de un objetivo.

PROGRAMACIÓN ENTERA

- Un modelo de programación entera es donde una o más de las variables de decisión tienen que asumir un valor entero en la solución final.
- Existen tres tipos de problemas de programación entera:

1. Programación entera pura, la cual requiere que todas las variables tengan valores enteros.
2. La programación entera mixta requiere que algunas variables de decisión, no todas, tengan valores enteros.
3. La programación entera cero-uno maneja son casos especiales en los que todas las variables de decisión deben tener valores enteros de solución de 0 o 1.

EJEMPLO DE PROGRAMACIÓN ENTERA DE LA COMPAÑÍA HARRISON ELECTRIC

10-6

- La empresa produce dos productos muy populares entre los restauradores de casas: candelabros antiguos y ventiladores de techo.
- Ambos productos requieren un proceso de producción de dos pasos que implica cableado y ensamble.
- Se requieren 2 horas para cablear cada candelabro y 3 para el ventilador de techo.
- El ensamble final de los candelabros y los ventiladores requiere de 6 y 5 horas, respectivamente.
- La capacidad de producción tan solo permite la disponibilidad de 12 horas para cableado y 30 para el ensamble.

EJEMPLO DE PROGRAMACIÓN ENTERA DE LA COMPAÑÍA HARRISON ELECTRIC

- Cada candelabro producido reditúa $7 y cada ventilador $6.
- La decisión de mezcla de producción de Harrison se formula con PL como sigue:

F. O. Maximizar la utilidad Z = 7X_1$ + 6X_2$

sujeta a $2X_1 + 3X_2 \leq 12$ **(horas de cableado)**

$6X_1 + 5X_2 \leq 30$ **(horas de ensamble)**

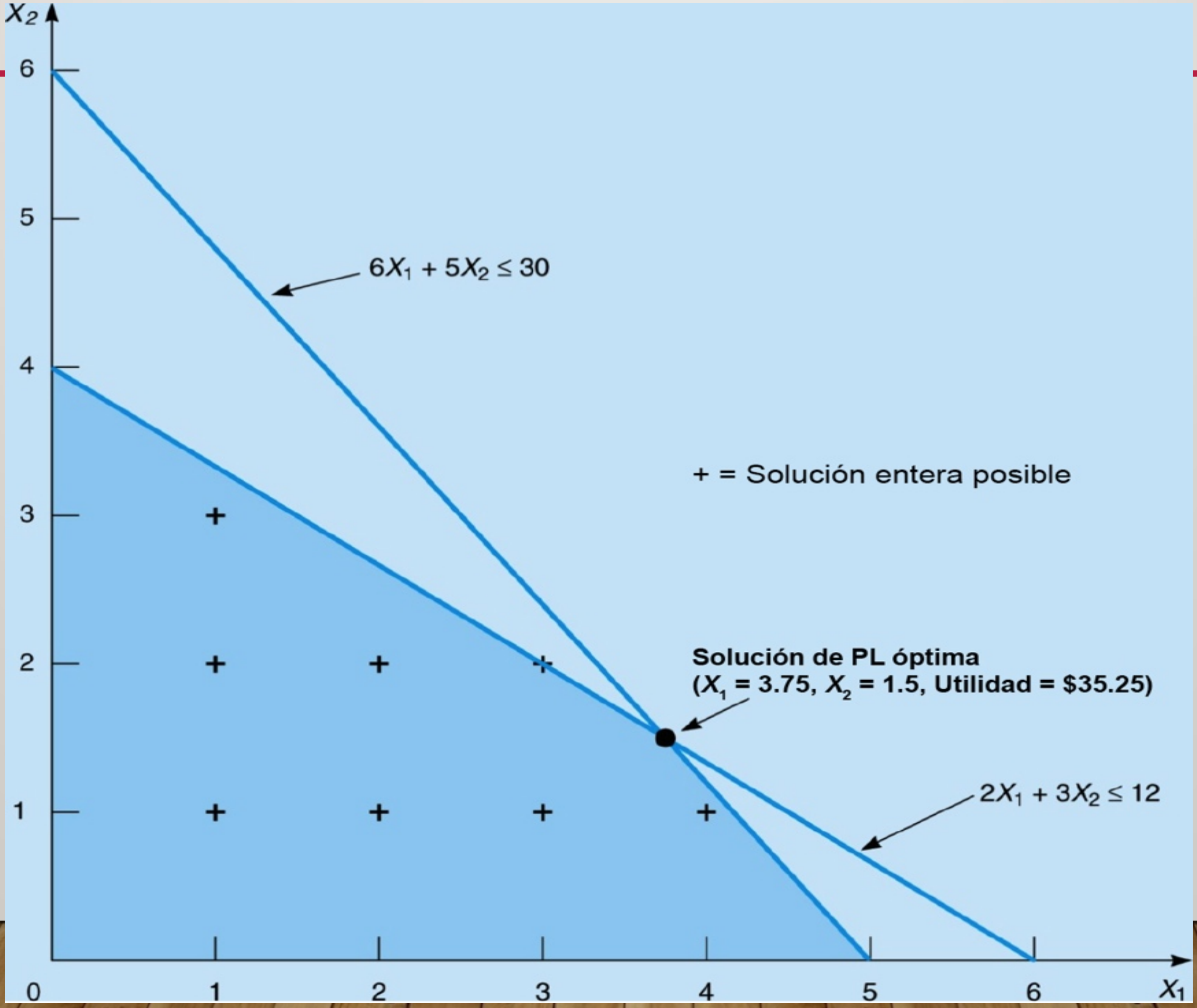
$X_1, X_2 \geq 0$ **(no negatividad)**

donde

X_1 **= número de candelabros producidos**

X_2 **= número de ventiladores de techo producidos**

PROBLEMA DE HARRISON ELECTRIC



LA COMPAÑÍA HARRISON ELECTRIC

- El planeador de producción reconoce que se trata de un problema de programación entera.
- Su primer intento de resolverlo es redondear los valores de $X_1 = 4$ y $X_2 = 2$.
- Sin embargo, lo anterior no es factible.
- Redondear X_2 hacia abajo a 1 es una solución viable, pero no es una solución *óptima*.
- Este problema podría resolverse utilizando el método de *numeración*, pero dicho método es imposible para el manejo de problemas grandes.

SOLUCIONES ENTERAS DEL PROBLEMA DE LA COMPAÑÍA HARRISON ELECTRIC

CANDELABROS (X_1)	VENTILADORES DE TECHO (X_2)	UTILIDAD ($\$7X_1 + \$6X_2$)
0	0	$0
1	0	7
2	0	14
3	0	21
4	0	28
5	0	35
0	1	6
1	1	13
2	1	20
3	1	27
4	1	34
0	2	12
1	2	19
2	2	26
3	2	33
0	3	18
1	3	25
0	4	24

Solución óptima de un problema de programación entera

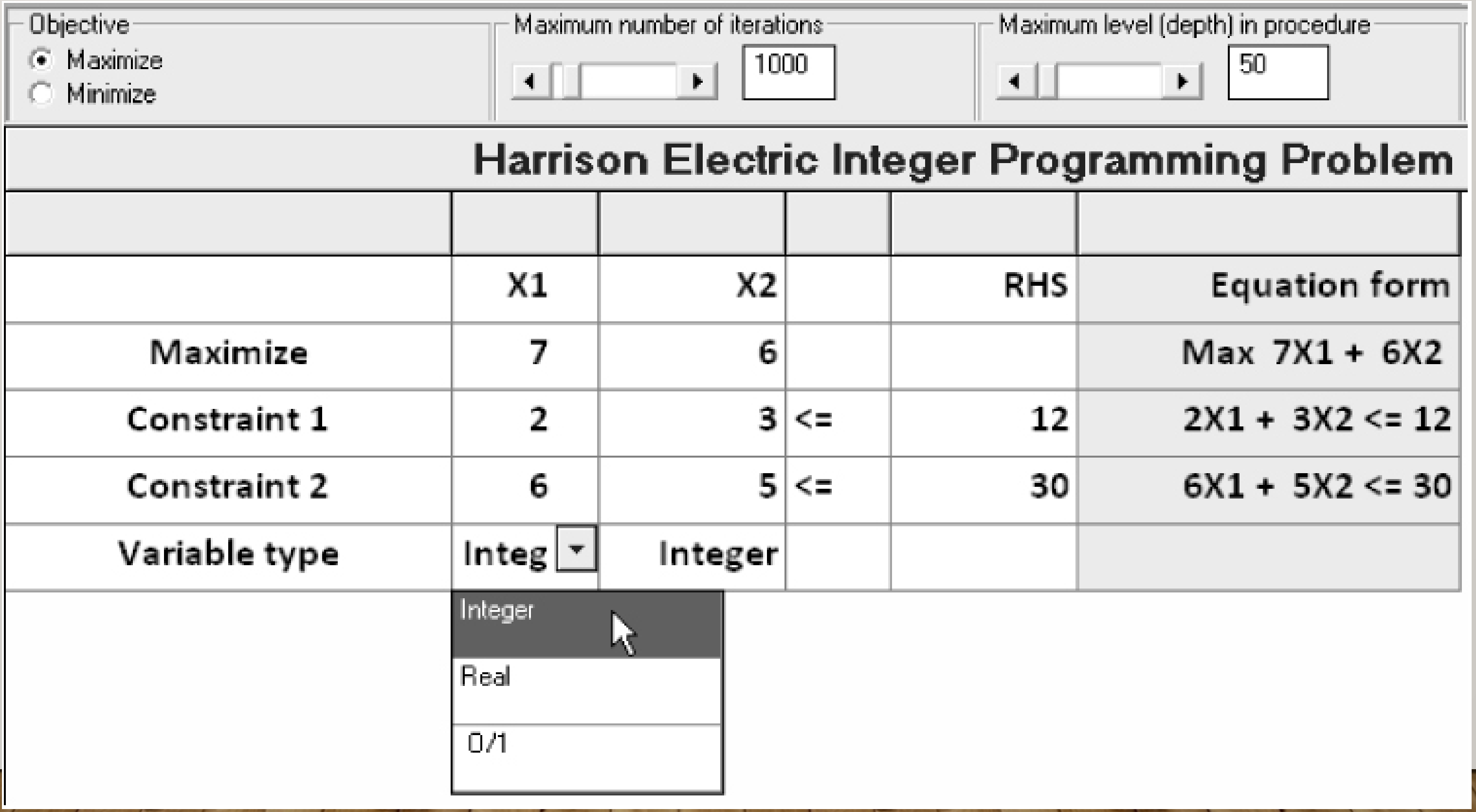
Solución si se utiliza redondeo

LA COMPAÑÍA HARRISON ELECTRIC

- La solución de redondeo de $X_1 = 4$, $X_2 = 1$ ofrece una utilidad de $34.
- La solución óptima de $X_1 = 5$, $X_2 = 0$ proporciona una utilidad de $35.
- La solución entera óptima es menor a la solución óptima de PL.
- Una solución entera *nunca* representará una mejor solución como la que ofrece PL y, *por lo regular*, ofrece un nivel menor de utilidad.

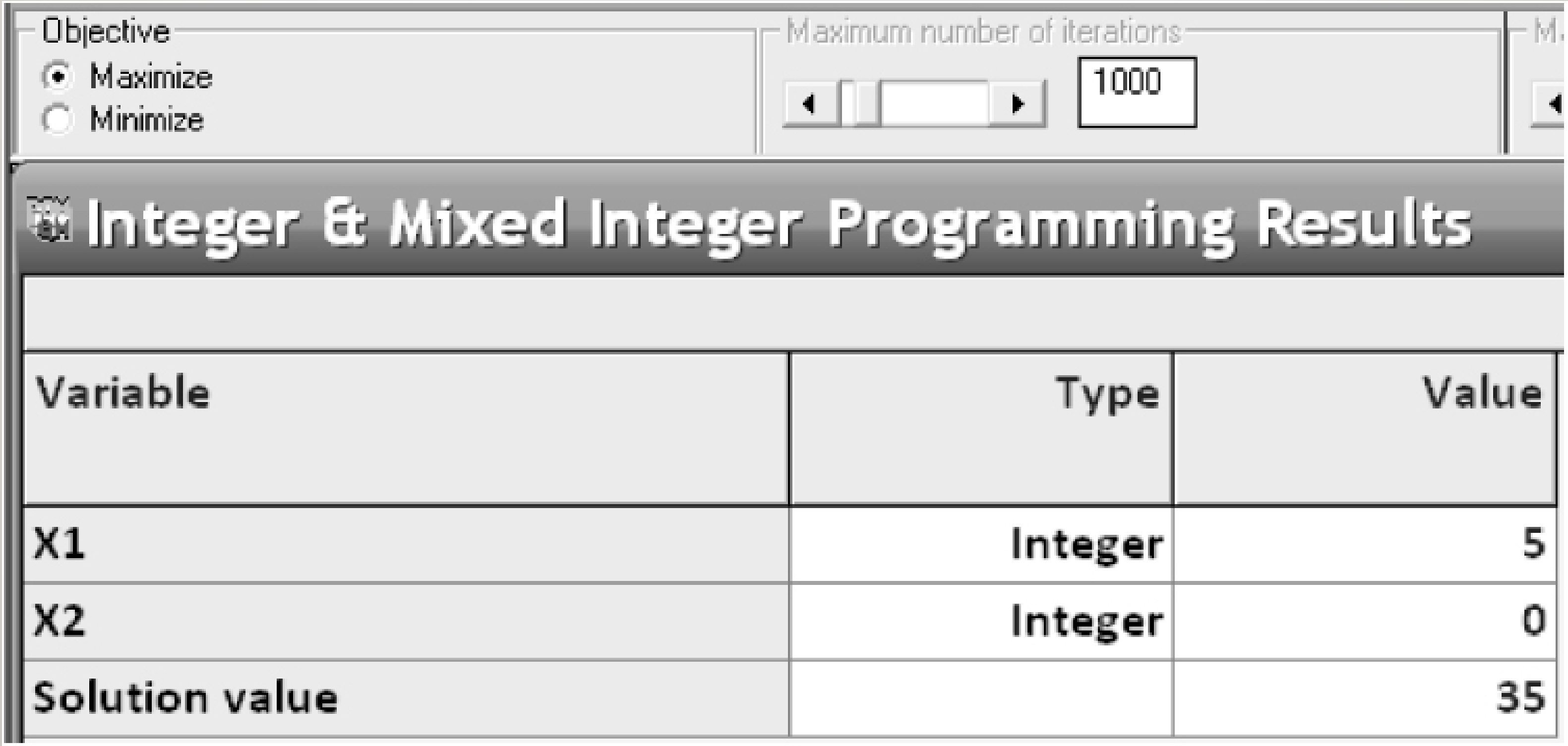
USO DE SOFTWARE PARA EL PROBLEMA DE PROGRAMACIÓN ENTERA DE HARRISON

Pantalla de datos de QM para Windows del problema de la compañía Harrison Electric



USO DE SOFTWARE PARA EL PROBLEMA DE PROGRAMACIÓN ENTERA DE HARRISON

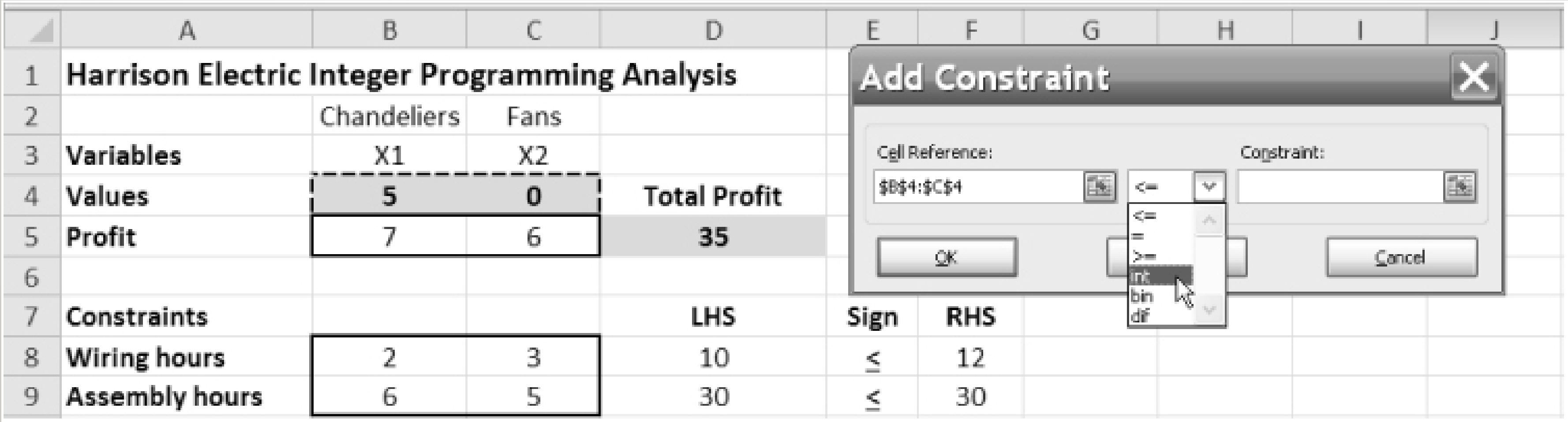
Pantalla de solución con QM para Windows del problema de la compañía Harrison Electric



Variable	Type	Value
X1	Integer	5
X2	Integer	0
Solution value		35

USO DE SOFTWARE PARA EL PROBLEMA DE PROGRAMACIÓN ENTERA DE HARRISON

Solución con Solver de Excel 2010 para el problema de la compañía Harrison Electric



	A	B	C	D	E	F
1	**Harrison Electric Integer Programming Analysis**					
2		Chandeliers	Fans			
3	**Variables**	X1	X2			
4	**Values**	**5**	**0**	**Total Profit**		
5	**Profit**	7	6	**35**		
6						
7	**Constraints**			**LHS**	**Sign**	**RHS**
8	**Wiring hours**	2	3	10	≤	12
9	**Assembly hours**	6	5	30	≤	30

	D
5	=SUMPRODUCT($B$4:$C$4,B5:C5)

EJEMPLO DE PROBLEMA DE PROGRAMACIÓN ENTERA MIXTA

- Existen diversas situaciones en las cuales algunas variables están restringidas a ser enteros y en otras no.
- La compañía Bagwell Chemical se dedica a la elaboración de productos químicos.
- Xyline que se debe producir en sacos de 50 libras.
- Y hexall se vende por libras a granel en seco, por lo tanto, se puede elaborar en cualquier cantidad.
- Ambos productos se componen de tres ingredientes: *A*, *B* y *C.*
- Bagwell vende sacos de xyline por $85 y cualquier cantidad de hexall por $1.50 la libra.

EJEMPLO DE PROBLEMA DE PROGRAMACIÓN ENTERA MIXTA

CANTIDAD POR SACO DE 50 LIBRAS DE XLINE (LB)	CANTIDAD POR LIBRA DE HEXALL (LB)	CANTIDAD DE INGREDIENTES DISPONIBLE
30	**0.5**	**2,000 lb-ingrediente *A***
18	**0.4**	**800 lb-ingrediente *B***
2	**0.1**	**200 lb-ingrediente *C***

- Bagwell desea maximizar la utilidad.
- Sea X = número de sacos de 50 libras de xyline.
- Sea Y = número libras de hexall.
- Este es un problema de programación entera mixta y como Y representa peso a granel, no es necesario que sea un número entero.

EJEMPLO DE PROBLEMA DE PROGRAMACIÓN ENTERA MIXTA

El modelo es:

F.O. Maximizar la utilidad $Z = \$85X + \$1.50Y$

sujeta a

$$30X + 0.5Y \leq 2{,}000$$

$$18X + 0.4Y \leq 800$$

$$2X + 0.1Y \leq 200$$

$$X, Y \geq 0 \text{ y } X \text{ enteros}$$

EJEMPLO DE PROBLEMA DE PROGRAMACIÓN ENTERA MIXTA

Solución con QM para Windows para el problema de Bagwell Chemical

Objective
Maximize
Minimize

Maximum number of iterations: 1000

Maximum level (depth) in procedure: 50

Se usan límites y se presenta la mejor solución disponible después de un tiempo dado.

Observe que tan sólo *X* debe ser entero, mientras que *Y* puede ser cualquier número real.

Bagwell Chemical Company Solution

	X	Y		RHS
	85	1.5		
C	30	0.5	<=	2000
Constraint 2	18	0.4	<=	800
Constraint 3	2	0.1	<=	200
Variable type	Integer	Real		
Solution->	44	20	Optimal Z->	3770

EJEMPLO DE PROBLEMA DE PROGRAMACIÓN ENTERA MIXTA

Solución con Solver de Excel para el problema de Bagwell Chemical

	A	B	C	D	E	F
1	**Bagwell Chemical Company**					
2		**Xyline (bags)**	**Hexall (lbs)**			
3	**Variables**	**X**	**Y**			
4	**Values**	**44**	**20**	**Total Profit**		
5	**Profit**	85	1.5	**3770**		
6						
7	**Constraints**			**LHS**	**sign**	**RHS**
8	**Ingredient A**	30	0.5	1330	≤	2000
9	**Ingredient B**	18	0.4	800	≤	800
10	**Ingredient C**	2	0.1	90	≤	200

	E
5	**=SUMPRODUCT($B$4:$D$4,B5:D5)**

PLANTEAMIENTO CON VARIABLES 0-1 (BINARIAS)

- En esta sección se demuestra cómo las variables 0-1 se pueden utilizar para modelar diversas situaciones.
- En general, una variable 0-1 se le asigna un valor de 0 si no se satisface una cierta condición, y 1 si se satisface.
- Otro nombre de la variable 0-1 es *variable binaria*.

EJEMPLO DE PRESUPUESTO DE CAPITAL

- Una decisión de presupuesto de capital común implica seleccionar de entre un conjunto de posibles proyectos, cuando las limitaciones de presupuestos hacen imposible seleccionar a todos.
- Una variable 0-1 es definida por cada proyecto.
- La compañía Quemo Chemical considera tres posibles proyectos para mejorar su planta:
  - Un nuevo convertidor catalítico.
  - Un nuevo software para controlar las operaciones.
  - La expansión del almacén.
- No se pueden realizar todos los proyectos.
- Se quiere maximizar el valor presente neto de los proyectos emprendidos.

PRESUPUESTO DE CAPITAL DE QUEMO CHEMICAL

Información de la empresa Quemo Chemical

PROYECTO	VALOR PRESENTE NETO	AÑO 1	AÑO 2
Convertidor catalítico	**$25,000**	**$8,000**	**$7,000**
Software	**$18,000**	**$6,000**	**$4,000**
Ampliación del almacén	**$32,000**	**$12,000**	**$8,000**
Fondos disponibles		**$20,000**	**$16,000**

El modelo básico es:

Maximizar el valor presente neto de los proyectos emprendidos sujeto a

Fondos totales utilizados en el año 1 ≤ $20,000
Fondos totales utilizados en el año 2 ≤ $16,000

PRESUPUESTO DE CAPITAL DE QUEMO CHEMICAL

Las variables de decisión son:

$$X_1 = \begin{cases} 1 \text{ si se financia el proyecto del convertidor catalítico} \\ 0 \text{ de otra manera} \end{cases}$$

$$X_2 = \begin{cases} 1 \text{ si se financia el proyecto del software} \\ 0 \text{ de otra manera} \end{cases}$$

$$X_3 = \begin{cases} 1 \text{ si se financia el proyecto de expansión del almacén} \\ 0 \text{ de otra manera} \end{cases}$$

El planteamiento matemático del problema de programación entera será:

F.O. Maximizar el VPN $Z = 25{,}000X_1 + 18{,}000X_2 + 32{,}000X_3$

sujeto a

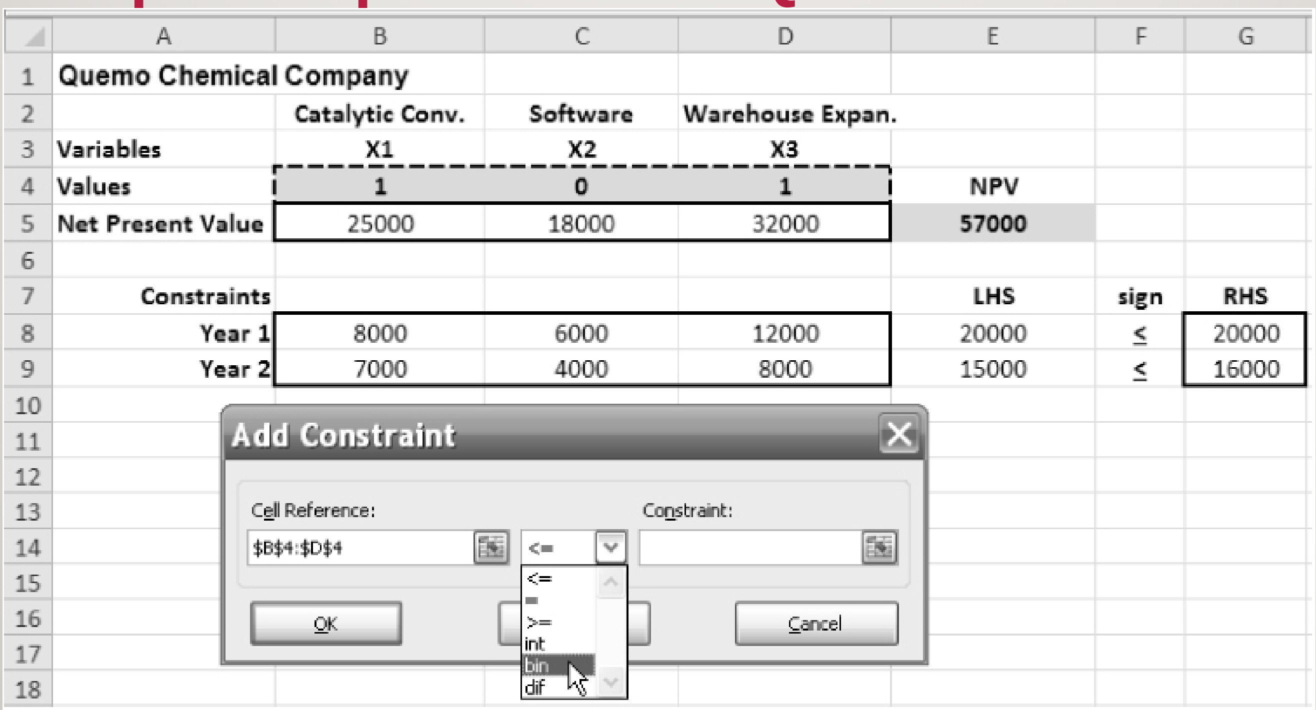
$$8{,}000X_1 + 6{,}000X_2 + 12{,}000X_3 \leq 20{,}000$$

$$7{,}000X_1 + 4{,}000X_2 + 8{,}000X_3 \leq 16{,}000$$

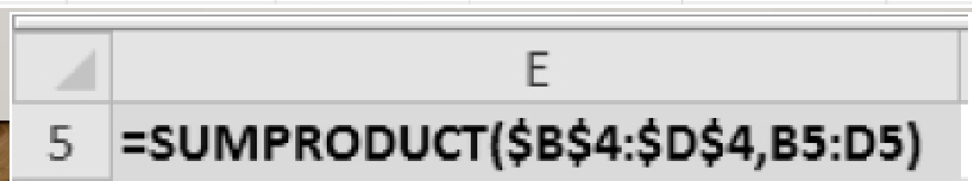
$$X_1, X_2, X_3 = 0 \text{ o bien } 1$$

PRESUPUESTO DE CAPITAL DE QUEMO CHEMICAL

Solución con Solver de Excel para el problema de Quemo Chemical



	A	B	C	D	E	F	G
1	Quemo Chemical Company						
2		Catalytic Conv.	Software	Warehouse Expan.			
3	Variables	X1	X2	X3			
4	Values	1	0	1	NPV		
5	Net Present Value	25000	18000	32000	57000		
6							
7	Constraints				LHS	sign	RHS
8	Year 1	8000	6000	12000	20000	≤	20000
9	Year 2	7000	4000	8000	15000	≤	16000



	E
5	=SUMPRODUCT($B$4:$D$4,B5:D5)

PRESUPUESTO DE CAPITAL DE QUEMO CHEMICAL

- La solución óptima con Solver de Excel es $X_1 = 1$, $X_2 = 0$ y $X_3 = 1$ con un valor de la función de objetivo de 57,000.
- Lo cual significa que la compañía Quemo Chemical debería financiar tan solo los proyectos del convertidor catalítico y la expansión del almacén.
- El valor presente neto de estas inversiones será de $57,000.

LIMITACIÓN DEL NÚMERO DE ALTERNATIVAS SELECCIONADAS

- El uso común de las variables 0-1 implica limitar el número de proyectos seleccionados de un grupo.
- Suponga que en el ejemplo de la compañía Quemo Chemical se requiere elegir no más de dos proyectos de los tres *sin importar* los fondos disponibles.
- Lo cual se podría modelar con la suma de la siguiente restricción:

$$X_1 + X_2 + X_3 \leq 2$$

- Si tuvieran que financiar dos proyectos *exactamente* la restricción sería:

SELECCIONES DEPENDIENTES

- En ocasiones, la selección de un proyecto depende de cierto modo de la selección de otro proyecto.
- Suponga que el convertidor catalítico tan solo podría adquirirse si se compra el software.
- La siguiente restricción haría que esto ocurra:

$$X_1 \leq X_2 \quad \text{o} \quad X_1 - X_2 \leq 0$$

- Si se requiere que ambos proyectos, el convertidor catalítico y el software, se seleccionen o no se seleccionen, se debería utilizar la siguiente restricción:

$$X_1 = X_2 \quad \text{o} \quad X_1 - X_2 = 0$$

EJEMPLO DE PROBLEMA DE CARGO FIJO

- Con frecuencia, los negocios enfrentan decisiones que implican un cargo fijo que afectará el costo de las operaciones futuras.
- Sitka Manufacturing planea construir por lo menos una nueva planta y está considerando una de las siguientes ciudades:
    - Baytown, Texas
    - Lake Charles, Louisiana
    - Mobile, Alabama
- Una vez que se haya construido la planta, la empresa desea tener la capacidad para producir 38,000 unidades al año.

PROBLEMA DE CARGO FIJO

Costos fijos y variable de Sitka Manufacturing

SITIO	COSTO ANNUAL FIJO	COSTO VARIABLE POR UNIDAD	CAPACIDAD ANUAL
Baytown, TX	$340,000	$32	21,000
Lake Charles, LA	$270,000	$33	20,000
Mobile, AL	$290,000	$30	19,000

PROBLEMA DE CARGO FIJO

Las variables de decisión se definen como:

$$X_1 = \begin{cases} 1 \text{ si la fábrica se construye en Baytown} \\ 0 \text{ de otra manera} \end{cases}$$

$$X_2 = \begin{cases} 1 \text{ si la fábrica se construye en Lake Charles} \\ 0 \text{ de otra manera} \end{cases}$$

$$X_3 = \begin{cases} 1 \text{ si la fábrica se construye en Mobile} \\ 0 \text{ de otra manera} \end{cases}$$

X_4 = **Número de unidades producidas en la planta de Baytown**

X_5 = **Número de unidades producidas en la planta de Lake Charles**

X_6 = **Número de unidades producidas en la planta de Mobile**

PROBLEMA DE CARGO FIJO

La formulación del problema de programación entera será:

Minimizar el costo = 340,000X_1 + 270,000X_2 +

290,000X_3 + 32X_4 + 33X_5 + 30X_6

$$
\begin{aligned}
\textbf{sujeto a}\quad & X_4 + X_5 + X_6 \geq 38{,}000 \\
& X_4 \leq 21{,}000X_1 \\
& X_5 \leq 20{,}000X_2 \\
& X_6 \leq 19{,}000X_3 \\
& X_1, X_2, X_3 = 0 \text{ o } 1; \\
& X_4, X_5, X_6 \geq 0 \text{ y entero}
\end{aligned}
$$

La solución óptima es

$X_1 = 0$, $X_2 = 1$, $X_3 = 1$, $X_4 = 0$, $X_5 = 19{,}000$, $X_6 = 19{,}000$

Valor de la función objetivo = $1,757,000

PROBLEMA DE CARGO FIJO

Solución con Solver de Excel para el problema de Sitka Manufacturing

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Sitka Manufacturing Company									
2		Baytown	Lake Charles	Mobile	Baytown units	L. Charles units	Mobile units			
3	Variables	X1	X2	X3	X4	X5	X6			
4	Values	0	1	1	0	19000	19000	Cost		
5	Cost	340000	270000	290000	32	33	30	1757000		
6										
7	Constraints							LHS	Sign	RHS
8	Minimum capacity				1	1	1	38000	≥	38000
9	Maximum in Baytown	-21000			1			0	≤	0
10	Maximum in L. C.		-20000			1		-1000	≤	0
11	Maximum in Mobile			-19000			1	0	≤	0

	H
5	=SUMPRODUCT($B$4:$G$4,B5:G5)

EJEMPLO DE INVERSIÓN FINANCIERA

- La firma Simkin, Simkin y Steinberg se especializa en recomendar carteras de acciones petroleras a clientes adinerados.
- Uno de sus clientes hizo las siguientes especificaciones:
  - Por lo menos dos empresas tejanas deberían estar en el portafolio.
  - No se puede hacer más de una inversión en compañías petroleras extranjeras.
  - Se tiene que adquirir una de las dos carteras de empresas petroleras californianas.
- El cliente dispone de $3 millones para invertir e insiste en adquirir grandes bloques de acciones.

EJEMPLO DE INVERSIÓN FINANCIERA

Oportunidades de inversión en petróleo			
CARTERA DE ACCIONES	**NOMBRE DE LA COMPAÑÍA**	**RENDIMIENTO ANNUAL ESPERADO (EN MILES)**	**COSTO POR BLOQUE DE ACCIONES (EN MILES)**
1	Trans-Texas Oil	50	480
2	British Petroleum	80	540
3	Dutch Shell	90	680
4	Houston Drilling	120	1,000
5	Texas Petroleum	110	700
6	San Diego Oil	40	510
7	California Petro	75	900

EJEMPLO DE INVERSIÓN FINANCIERA

Formulación del modelo:

Maximizar el rendimiento

$$= 50X_1 + 80X_2 + 90X_3 + 120X_4 + 110X_5 + 40X_6 + 75X_7$$

sujeto a

$$X_1 + X_4 + X_5 \geq 2 \quad \text{(restricción de Texas)}$$

$$X_2 + X_3 \leq 1 \quad \text{(restricción de petróleo extranjero)}$$

$$X_6 + X_7 = 1 \quad \text{(restricción de California)}$$

$$480X_1 + 540X_2 + 680X_3 + 1{,}000X_4 + 700X_5$$
$$+ 510X_6 + 900X_7 \leq 3{,}000 \text{ (límite de \$3 millones)}$$

Todas las variables deben ser 0 o bien 1

EJEMPLO DE INVERSIÓN FINANCIERA

Solución con Solver de Excel para el problema de inversión financiera

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Simkin, Simkin and Steinberg										
2											
3	Variables	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7			
4	Values	0	0	1	1	1	1	0	Return		
5	Return ($1,000s)	50	80	90	120	110	40	75	360		
6	Constraints								LHS	Sign	RHS
7	Texas	1			1	1			2	≥	2
8	Foreign Oil		1	1					1	≤	1
9	California						1	1	1	=	1
10	$3 Million	480	540	680	1000	700	510	900	2890	≤	3000

	I
5	=SUMPRODUCT($B$4:$H$4,B5:H5)

PROGRAMACIÓN POR METAS

- En general, las empresas tienen más de una meta.
- En los métodos de programación lineal y entera la función objetivo se mide en una única dimensión.
- No es posible para la PL tener *múltiples metas*, a menos que se midan en las mismas unidades, lo cual es una situación bastante inusual.
- Una técnica importante que se ha desarrollado para complementar la PL es la *programación por metas*.

PROGRAMACIÓN POR METAS

- Las metas establecidas por la gerencia solo pueden lograrse a expensas de otras metas.
- Se debe establecer una jerarquía de importancia, de modo que las metas de mayor prioridad se satisfagan antes de aquellas de menor importancia.
- No siempre es posible alcanzar las metas de forma satisfactoria, y la programación por metas intenta alcanzar un nivel satisfactorio de objetivos múltiples.
- La diferencia principal se encuentra en la función objetivo de la *programación* de metas, que trata de minimizar las desviaciones entre las metas y lo que se puede lograr realmente dentro de las restricciones dadas.

EJEMPLO DE PROGRAMACIÓN POR METAS: REVISIÓN A LA COMPAÑÍA HARRISON ELECTRIC

La formulación en PL para el problema de Harrison Electric es:

Maximizar la utilidad = $\$7X_1 + \$6X_2$

sujeta a $2X_1 + 3X_2 \leq 12$ **(horas de cableado)**

$6X_1 + 5X_2 \leq 30$ **(horas de ensamble)**

$X_1, X_2 \geq 0$

donde

X_1 **= número de candelabros fabricados**

X_2 **= número de ventiladores de techo fabricados**

EJEMPLO DE PROGRAMACIÓN POR METAS: REVISIÓN A LA COMPAÑÍA HARRISON ELECTRIC

- Harrison se muda a una nueva ubicación y siente que la maximización de las utilidades no es un objetivo realista.
- La gerencia fija un nivel de beneficios de $30 que sea satisfactorio durante este periodo.
- El problema de programación por metas es encontrar la mezcla de producción que logre esta meta lo más cerca posible, dadas las limitaciones de tiempo de producción.
- Se deben definir dos variables de desviación:

d_1^- = resultado por debajo del objetivo de la utilidad d_1^+ = resultado por arriba del objetivo de la utilidad

EJEMPLO DE PROGRAMACIÓN POR METAS: REVISIÓN A LA COMPAÑÍA HARRISON ELECTRIC

Se establece el problema de Harrison Electric como un modelo de programación de una sola meta:

Minimizar el resultado por debajo o por arriba del objetivo de utilidad $= d_1^- + d_1^+$

sujeto a $\$7X_1 + \$6X_2 + d_1^- - d_1^+ = \$30$ **(restricción de meta de utilidad)**

$2X_1 + 3X_2 \leq 12$ **(horas de cableado)**

$6X_1 + 5X_2 \leq 30$ **(horas de ensamble)**

$X_1, X_2, d_1^-, d_1^+ \geq 0$

EXTENSIÓN A METAS MÚLTIPLES IGUALMENTE IMPORTANTES

- La gerencia de Harrison quiere alcanzar varias metas, cada una con igual prioridad:

  Meta 1: generar una utilidad de $30 si es posible durante el periodo de producción.

  Meta 2: utilizar por completo las horas disponibles en el departamento de cableado.

  Meta 3: evitar el tiempo extra en el departamento de ensamble.

  Meta 4: satisfacer el requisito contractual de fabricar por lo menos siete ventiladores de techo.

EXTENSIÓN A METAS MÚLTIPLES IGUALMENTE IMPORTANTES

Las variables de desviación son:

d_1^- = resultado por debajo de la utilidad objetivo

d_1^+ = resultado por arriba de la utilidad objetivo

d_2^- = tiempo ocioso del departamento de cableado (subutilización)

d_2^+ = tiempo extra del departamento de cableado (subutilización)

d_3^- = tiempo ocioso del departamento de ensamble (subutilización)

d_3^+ = tiempo extra del departamento de ensamble (subutilización)

d_4^- = resultado por debajo de la meta de ventiladores de techo

d_4^+ = resultado por arriba de la meta de ventiladores de techo

EXTENSIÓN A METAS MÚLTIPLES IGUALMENTE IMPORTANTES

A la gerencia no le preocupan que el resultado esté por arriba de la meta de utilidad, de modo que d_1^+, d_2^+, d_3^- y d_4^+ se pueden omitir de la función objetivo.

- La nueva función objetivo y las restricciones son:

Minimizar la desviación total = $d_1^- + d_2^- + d_3^+ + d_4^-$

sujeta a $7X_1 + 6X_2 + d_1^- - d_1^+ = 30$ **(restricción de utilidades)**

$2X_1 + 3X_2 + d_2^- - d_2^+ = 12$ **(restricción de horas de cableado)**

$6X_1 + 5X_2 + d_3^- - d_3^+ = 30$ **(restricción de horas de ensamble)**

$X_2 + d_4^- - d_4^+ = 7$ **(restricción de ventiladores de techo)**

Todas las variables X_i, $d_i \geq 0$

EXTENSIÓN A METAS MÚLTIPLES IGUALMENTE IMPOTANTES

A la gerencia no le preocupan que el resultado esté por arriba de la meta de utilidad, de modo que d_1^+, d_2^+, d_3^- y d_4^+ se pueden omitir de la función objetivo.

- La nueva función objetivo y las restricciones son:

Minimizar la desviación total = $d_1^- + d_2^- + d_3^+ + d_4^-$

sujeta a $7X_1 + 6X_2 + d_1^- - d_1^+ = 30$ **(restricción de utilidades)**

$2X_1 + 3X_2 + d_2^- - d_2^+ = 12$ **(restricción de horas de cableado)**

$6X_1 + 5X_2 + d_3^- - d_3^+ = 30$ **(restricción de horas de ensamble)**

$X_2 + d_4^- - d_4^+ = 7$ **(restricción de ventiladores de techo)**

Todas las variables $X_i, d_i \geq 0$

CLASIFICACIÓN DE METAS POR NIVELES DE PRIORIDAD

- En la mayoría de los problemas de programación por meta, una será más importante que otra, la que a su vez será más importante que una tercera.
- Las metas de orden superior se satisfacen antes que las metas de orden inferior.
- Se asignan prioridades (P_i) a cada variable de desviación, donde P_1 es la meta más importante, P_2 la siguiente más importante, en seguida P_3 y así sucesivamente.

CLASIFICACIÓN DE METAS POR NIVELES DE PRIORIDAD

La compañía Harrison Electric establece prioridades que se muestran en la siguiente tabla:

META	PRIORIDAD
Alcanzar la mayor utilidad posible por arriba de $30	P_1
Uso completo de las horas disponibles en el departamento de cableado	P_2
Evitar tiempo extra en el departamento de ensamble	P_3
Fabricar al menos siete ventiladores de techo	P_4

CLASIFICACIÓN DE METAS POR NIVELES DE PRIORIDAD

- Lo anterior significa, que cada meta es infinitamente más importante que la meta inmediata inferior.
- En la clasificación de metas, la nueva función objetiva es:

Minimizar la desviación total = $P_1 d_1^- + P_2 d_2^- + P_3 d_3^+ + P_4 d_4^-$

Las restricciones permanecen idénticas a las anteriores.

PROGRAMACIÓN POR METAS CON METAS PONDERADAS

- Cuando los niveles de prioridad se utilizan en la programación por metas, cualquier meta superior es infinitamente más importante que una meta inferior.
- A veces, una meta puede ser solo dos o tres veces más importante que otra.
- En vez de colocar estas metas en diferentes niveles de prioridad, se colocarán en el mismo nivel, pero con diferentes pesos.
- Los coeficientes de la función objetivo para las variables de desviación incluyen tanto el nivel de prioridad como el peso.

PROGRAMACIÓN POR METAS CON METAS PONDERADAS

- La compañía Harrison decide agregar otra meta de producir dos candelabros.
- La meta de producir siete ventiladores de techo se considera dos veces más importante que la meta anterior.
- A la meta de dos candelabros se le asigna un peso 1, en tanto que la meta de siete ventiladores de techo se le dará un peso de 2. Ambas metas tendrán un nivel de prioridad de 4.
- La nuevas restricción (meta) y función objetivo quedan así:

$$X_1 + d_5^- - d_5^+ = 2 \quad \text{(candelabros)}$$

$$\text{Minimizar} = P_1 d_1^- + P_2 d_2^- + P_3 d_3^+ + P_4 (2 d_4^-) + P_4 d_5^-$$

USO DE QM PARA WINDOWS PARA RESOLVER EL PROBLEMA DE HARRISON

Introducción de datos para el análisis de programación por metas de Harrison Electric con QM para Windows

Harrison Electric Company								
	Wt(d+)	Prty(d+)	Wt(d-)	Prty(d-)	X1	X2		RHS
Constraint 1	0	0	1	1	7	6	=	30
Constraint 2	0	0	1	2	2	3	=	12
Constraint 3	1	3	0	0	6	5	=	30
Constraint 4	0	0	1	4	0	1	=	7

USO DE QM PARA WINDOWS PARA RESOLVER EL PROBLEMA DE HARRISON

Pantalla del resumen de la solución del problema de programación por metas de Harrison Electric con QM para Windows

Summary

Harrison Electric Company Solution

Item			
Decision variable analysis	Value		
X1	0.		
X2	6.		
Priority analysis	Nonachievement		
Priority 1	0.		
Priority 2	0.		
Priority 3	0.		
Priority 4	1.		
Constraint Analysis	RHS	d+ (row i)	d- (row i)
Constraint 1	30.	6.	0.
Constraint 2	12.	6.	0.
Constraint 3	30.	0.	0.
Constraint 4	7.	0.	1.

EXTENSIÓN A METAS MÚLTIPLES IGUALMENTE IMPOTANTES

Prioridad 1: Fabricar por lo menos 4 candelabros y 3 ventiladores
Prioridad 2 Limitar el tiempo extra en el departamento de ensamble a 10 horas y en el departamento de cableado a 6 horas
Prioridad 3 Tener una utilidad de 30

Mi … d_5^-

sujeta a

$$
\begin{aligned}
X_1 \quad & + d_1^- - d_1^+ = 4 \\
X_2 & + d_2^- - d_2^+ = 3 \\
2X_1 + 3X_2 & + d_3^- - d_3^+ = 18 \\
6X_1 + 5X_2 & + d_4^- - d_4^+ = 40 \\
7X_1 + 6X_2 & + d_5^- - d_5^+ = 30
\end{aligned}
$$

Todas las variables $X_i, d_i \geq 0$

Contenidos

I. **Introducción a la Investigación de Operaciones**

II. **Modelos de Programación Matemática**

Programación Lineal

Programación Entera

Programación No- lineal

III. **Modelos Probabilísticos**

Procesos Estocásticos y Cadenas de Markov

Sistemas de Espera

I. Introducción a la Investigación de Operaciones

I.1. Introducción.

El principal objetivo de esta área de conocimientos consiste en formular y resolver diversos problemas orientados a la toma de decisiones.

La naturaleza de los problemas abordados puede ser determinística, como en los **Modelos de Programación Matemática**, donde la teoría de probabilidades no es necesaria, o bien de problemas donde la presencia de incertidumbre tiene un rol preponderante, como en los **Modelos Probabilísticos**.

I. Introducción a la Investigación de Operaciones

Hoy en día, la toma de decisiones abarca una gran cantidad de problemas reales cada más complejos y especializados, que necesariamente requieren del uso de metodologías para la formulación matemática de estos problemas y, conjuntamente, de métodos y herramientas de resolución, como los que provee la Investigación de Operaciones.

I. Introducción a la Investigación de Operaciones

I.2 Elementos de un modelo de optimización.

Supongamos que se dispone de determinadas piezas para la elaboración de dos productos finales. Se dispone de 8 “piezas pequeñas” y 6 “piezas grandes”, que son utilizadas para elaborar sillas (usando 2 piezas pequeñas y 1 pieza grande) y mesas (usando 2 piezas de cada tipo).

Interesa decidir cuántas sillas y mesas fabricar de modo de obtener la máxima utilidad, dado un beneficio neto de U$ 15 por cada silla y de U$20 por cada mesa fabricada.

I. Introducción a la Investigación de Operaciones

Posibles soluciones factibles a considerar, esto es soluciones que respetan las restricciones del número de piezas disponibles, son por ejemplo, fabricar:

- 4 sillas, que reportan una utilidad de U$60
- 1 sillas y 2 mesas , utilidad de U$55
- 3 mesas, utilidad de U$60
- 1 mesa y tres sillas, utilidad de U$65
- 2 sillas y 2 mesas, utilidad de U$70
- etc.

I. Introducción a la Investigación de Operaciones

Un **modelo matemático** para hallar la mejor solución factible a este problema tiene tres componentes básicas:

i) <u>Las variables de decisión</u>, que consiste en definir cuáles son las decisiones que se debe tomar. En el ejemplo,

x: número de sillas elaboradas.

y: número de mesas elaboradas.

I. Introducción a la Investigación de Operaciones

ii) **La función objetivo** del problema, que permita tener un criterio para decidir entre todas las soluciones factibles. En el ejemplo, maximizar la utilidad dada por:

$$z = f(x,y) = 15x + 20y$$

iii) **<u>Restricciones del problema</u>**, que consiste en definir un conjunto de ecuaciones e inecuaciones que restringen los valores de las variables de decisión a aquellos considerados como factibles. En el ejemplo, respetar la disponibilidad de piezas para la fabricación de sillas y mesas:

Piezas pequeñas: $\mathbf{2x + 2y \leq 8}$

Piezas grandes : $\mathbf{x + 2y \leq 6}$

También se impone restricciones de no – negatividad:

$$\mathbf{x, y \geq 0}$$

I. Introducción a la Investigación de Operaciones

En resumen:

F.O. Max $Z=15x + 20y$

S.A. $2x + 2y \leq 8$

$x + 2y \leq 6$

$x,y \geq 0$

El ejemplo corresponde a un modelo de Programación Lineal. Si además restringimos los valores de **x** e **y** a números enteros, tendríamos un modelo de Programación Entera. Por otra parte, si hubiese retornos crecientes a escala, deberíamos emplear una función objetivo no lineal como **$f(x,y) = cx^a + dy^b$** con **$a,b >1$**, y tendríamos un modelo de Programación No Lineal.

I. Introducción a la Investigación de Operaciones

BIBLIOGRÁFIA EN INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

1. **Introducción a la Investigación de Operaciones**, F.S. Hillier y G.J. Lieberman, McGraw Hill, Sexta Edición, 1997.
2. **Investigación de Operaciones, una introducción**, H.A. Taha, Prentice Hall, México, Sexta Edición, 1998.
3. **Introduction to Management Science**, F. Hillier, M. Hillier and G.J. Lieberman. Irwin McGraw-Hill, 1999.
4. **Model Operations Research: A practical Introduction**. M.W. Carter and C.C.Price. CRC Press, 2000.
5. **Practical Management Science: Spreadsheet Modeling and Applications**, Winston, W.L., Albright S.C. y Broadie M., International Thomson Publishing Company, 1997.

Contenidos

II. Modelos de Programación Matemática
Programación Lineal

Temario:

II.1. Introducción y ejemplos de modelamiento.

II.2. Resolución gráfica de problemas.

II.3. Análisis de Sensibilidad.

II.4. El Método Simplex.

II.5. Dualidad en Programación Lineal.

II.6. Análisis de Sensibilidad o Post-Optimal

II. Modelos de Programación Matemática
Programación Lineal

II.1 Introducción y ejemplos de modelamiento.

i) <u>Problema de Transporte</u>. El problema consiste en decidir cuántas unidades trasladar desde ciertos puntos de origen (plantas, ciudades, etc.) a ciertos puntos de destino (centros de distribución, ciudades, etc..) de modo de minimizar los costos de transporte, dada la oferta y demanda en dichos puntos.

Se suponen conocidos los costos unitarios de transporte, los requerimientos de demanda y la oferta disponible.

II.1 Introducción y ejemplos de modelamiento.

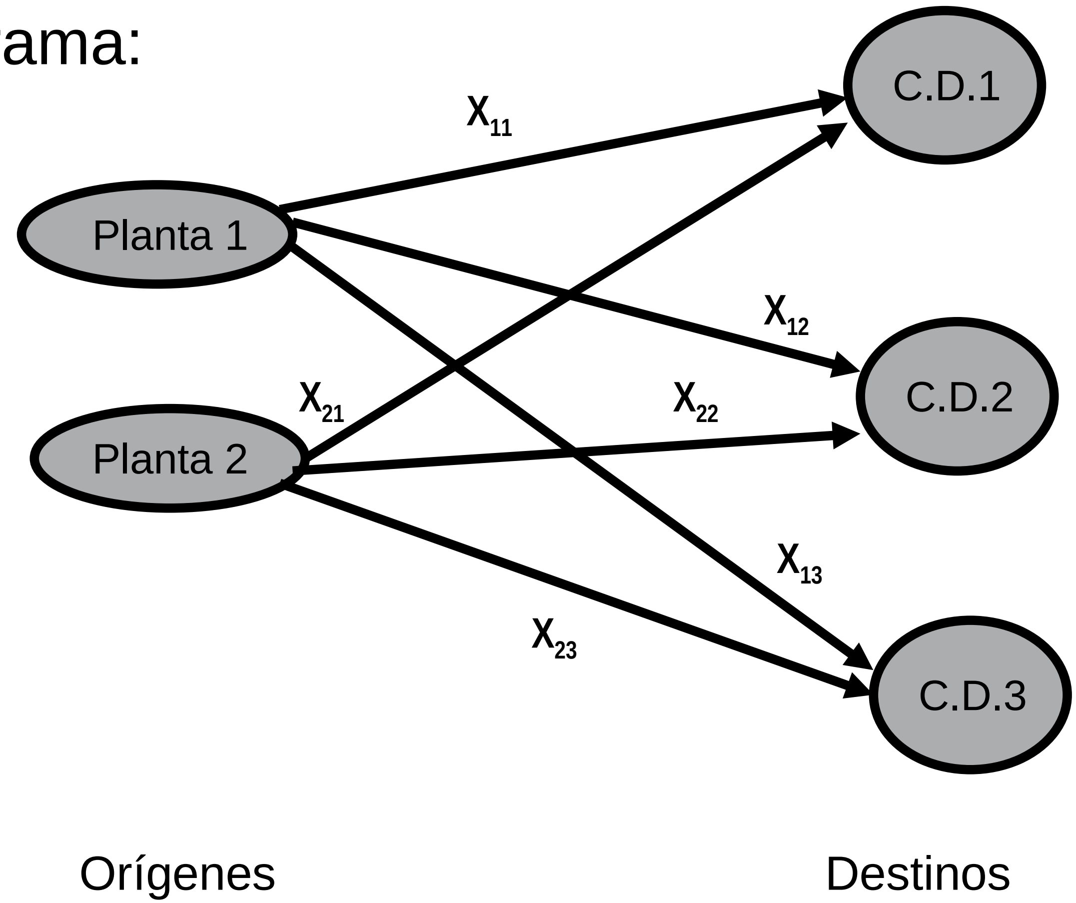
Por ejemplo, suponga que una empresa posee dos plantas que elaboran un determinado producto en cantidades de 250 y 450 unidades diarias, respectivamente. Dichas unidades deben ser trasladadas a tres centros de distribución con demandas diarias de 200, 200 y 250 unidades, respectivamente. Los costos de transporte (en $/unidad) son:

	C.Dist. 1	C.Dist.2	C.Dist.3
Planta 1	21	25	15
Planta 2	28	13	19

II. Modelos de Programación Matemática
Programación Lineal

II.1 Introducción y ejemplos de modelamiento.

Diagrama:



Investigación de Operaciones

II.1 Introducción y ejemplos de modelamiento.

Variables de decisión:

$\mathbf{x_{ij}}$ = Unidades transportadas desde la planta i (i=1,2), hasta el centro de distribución j (j=1,2,3)

Función Objetivo:

Minimizar el costo total de transporte dado por la función:

$$\mathbf{21x_{11}+25x_{12}+15x_{13}+28x_{21}+13x_{22}+19x_{23}}$$

II.1 Introducción y ejemplos de modelamiento.

Restricciones del problema:

1) No Negatividad: $x_{ij} \geq 0$

2) Demanda:

$$
\begin{array}{llllllll}
CD_1 & : & x_{11} & & & +x_{21} & & & = 200 \\
CD_2 & : & & x_{12} & & & +x_{22} & & = 200 \\
CD_3 & : & & & x_{13} & & & +x_{23} & = 250
\end{array}
$$

II.1 Introducción y ejemplos de modelamiento.

3) Oferta :

P_1 : $\mathbf{x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 250}$

P_2 : $\mathbf{x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 450}$

Las variables de decisión deben aceptar soluciones como números reales para tener un modelo de P.L.

$\mathbf{x_{i,j} \geq 0 \; ; \; i = 1,2 \; ; \; j = 1,2,3}$

II.1 Introducción y ejemplos de modelamiento.

ii) **<u>Problema de la dieta</u>**: este consiste en determinar una dieta de manera eficiente, a partir de un conjunto dado de alimentos, de modo de satisfacer ciertos requerimientos nutricionales.

Supongamos que se tiene la siguiente información:

	Leche (galon)	**Legumbre (1 porción)**	**Naranjas (unidad)**	**Requerimientos Nutricionales**
Niacina	3,2	4,9	0,8	13
Tianina	1,12	1,3	0,19	15
Vitamina C	32	0	93	45
Costo	2	0,2	0,25	

II.1 Introducción y ejemplos de modelamiento.

Variables de decisión:

x_1 : galones de leche utilizados en la dieta.

x_2 : porciones de legumbre utilizadas en la dieta.

x_3 : unidades de naranja utilizadas en la dieta.

Función Objetivo:

Minimizar el costo total de la dieta, dado por:

$$2\,x_1 + 0.2\,x_2 + 0.25\,x_3$$

II.1 Introducción y ejemplos de modelamiento.

Restricciones del problema:

Requerimientos mínimos de los nutrientes considerados:

$$3.2\ x_1 + 4.9\ x_2 + 0.8\ x_3 \geq 13$$

$$1.12\ x_1 + 1.3\ x_2 + 0.19\ x_3 \geq 15$$

$$32\ x_1 + \quad + 93\ x_3 \geq 45$$

$$x_1 \geq 0\ ;\ x_2 \geq 0\ ;\ x_3 \geq 0$$

II.1 Introducción y ejemplos de modelamiento.

iii) Problema de dimensionamiento de lotes: este consiste en hallar una política óptima de producción para satisfacer demandas fluctuantes en el tiempo, de modo de minimizar costos de producción e inventario, considerando la disponibilidad de diversos recursos escasos.

Supongamos que una fabrica puede elaborar hasta 150 unidades en cada uno de los 4 periodos en que se ha subdividido el horizonte de planificación y se tiene adicionalmente la siguiente información:

Investigación de Operaciones

II.1 Introducción y ejemplos de modelamiento.

Periodos	Demandas (unidades)	Costo Prod. (US$/unidad)	Costo de Inventario (US$/unidad)
1	130	6	2
2	80	4	1
3	125	8	2.5
4	195	9	3

Supuestos adicionales:

1) Existe un inventario inicial de 15 unidades.

2) No se acepta demanda pendiente o faltante (es decir, se debe satisfacer toda la demanda del periodo).

II.1 Introducción y ejemplos de modelamiento.

Variables de decisión:

$\mathbf{x_t}$: número de unidades elaboradas en el periodo t.

$\mathbf{I_t}$: número de unidades de inventario al final del periodo t.

Función objetivo:

Consiste en minimizar los costos de producción y el costo de mantenimiento de inventario.

$$\mathbf{6x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 9x_4 + 2I_1 + I_2 + 2.5I_3 + 3I_4}$$

II.1 Introducción y ejemplos de modelamiento.

Notar que en el óptimo $\mathbf{I_4}$ va a ser 0, así que incluso podríamos no incluirla, pero de todos modos la consideramos.

Restricciones del problema:

1) Restricciones de cotas, que reflejan la capacidad de producción.

$$\mathbf{x_t \leq 150 \; ; \; t=1,2,3,4}$$

II.1 Introducción y ejemplos de modelamiento.

2) Restricciones de no negatividad

$$x_t \geq 0$$

3) Restricciones de demanda

$x_1 + I_0 - I_1 = 130$ Periodo 1 $I_0 = 15$

$x_2 + I_1 - I_2 = 80$ Periodo 2

$x_3 + I_2 - I_3 = 125$ Periodo 3

$x_4 + I_3 - I_4 = 195$ Periodo 4

II.1 Introducción y ejemplos de modelamiento.

iv) Problema de planificación financiera:

Supongamos que un banco dispone de $250 millones para destinar a 4 tipo de créditos ofrecidos, los cuales tienen las siguientes, tasas de crédito:

- Primer crédito corriente :12%
- Segundo crédito corriente :16%
- Crédito para el hogar :16%
- Crédito personal :10%

II.1 Introducción y ejemplos de modelamiento.

La asignación de estos créditos, debe satisfacer la siguiente política utilizada por la institución:

El monto asignado a los PCC, debe ser al menos, el 55% del monto asignado a los créditos corrientes, y al menos un 25% del total del dinero prestado.

El SCC, no puede exceder el 30% del total del dinero prestado, por políticas tributarias el interés recibido por el banco no debe exceder a un retorno del 14% sobre el capital prestado.

II. Modelos de Programación Matemática
Programación Lineal

II.1 Introducción y ejemplos de modelamiento.

¿Cuánto asignar a cada tipo de crédito, de la manera más eficiente, respetando la política del banco?

Variables de decisión:

$\mathbf{x_1}$:Monto asignado al PCC.

$\mathbf{x_2}$: Monto asignado SCC.

$\mathbf{x_3}$: Monto asignado al crédito para el hogar.

$\mathbf{x_4}$: Monto asignado al crédito personal.

II.1 Introducción y ejemplos de modelamiento.

Función Objetivo:

Se propone maximizar los retornos recibidos en la asignación, dados por:

F. O. Max Z = $\mathbf{0.12\ x_1 + 0.16\ x_2 + 0.16\ x_3 + 0.10\ x_4}$

II.1 Introducción y ejemplos de modelamiento.

Restricciones del problema:

$$x_1 \geq 0.55\,(x_1 + x_2)$$

$$x_1 \geq 0.25\,(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$$

$$x_2 \leq 0.30\,(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$$

$$(0.12x_1 + 0.16x_2 + 0.16x_3 + 0.10x_4) \leq 0.14\,(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$$

Adicionalmente: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 250$

Restricción de no negatividad $x_i \geq 0$; $i = 1,2,3,4$

II.1 Introducción y ejemplos de modelamiento.

v) Problema de mezcla de productos: en este problema una refinería produce 4 tipos de gasolina (gas 1, gas 2, gas 3 y gas 4). Dos características importantes de cada gasolina son su número de performance (NP) y su presión de vapor (RVP), que están dados por:

	NP	RVP	Barriles diarios
gas 1	107	5	3814
gas 2	93	8	2666
gas 3	87	4	4016
gas 4	108	21	1300

II.1 Introducción y ejemplos de modelamiento.

Estas gasolinas pueden ser vendidas directamente a un precio de $24,83 por barril o bien mezcladas para obtener gasolinas de aviación (avgas A y avgas B). La calidad de estas dos últimas junto con sus precios de venta son:

	NP	RV	Precio por barril (US$)
avgas A	Al menos 100	A lo más 7	26,45
Avgas B	Al menos 91	A lo más 6	25,91

II.1 Introducción y ejemplos de modelamiento.

El NP y RVP de cada mezcla es un promedio de los respectivos NP y RVP de las gasolinas empleadas.

Se desea obtener un plan de venta de las distintas gasolinas que maximice los retornos.

II.1 Introducción y ejemplos de modelamiento.

Variables de decisión:

$\mathbf{x_j}$: cantidad de barriles del gas j que son vendidos sin mezclar, con j = 1, 2, 3, 4.

$\mathbf{x_A}$: cantidad de barriles de avgas A.

$\mathbf{x_B}$: cantidad de barriles de avgas B.

$\mathbf{x_{jA}}$: cantidad de gas j usado en avgas A.

$\mathbf{x_{jB}}$: cantidad de gas j usado en avgas B.

II. Modelos de Programación Matemática
Programación Lineal

II.1 Introducción y ejemplos de modelamiento.

Función objetivo:

Max $24{,}83\,(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + 26{,}45x_A + 25{,}91x_B$

Restricciones:

$$x_1 + x_{1A} + x_{1B} = 3814$$

$$x_2 + x_{2A} + x_{2B} = 2666$$

$$x_3 + x_{3A} + x_{3B} = 4016$$

$$x_4 + x_{4A} + x_{4B} = 1300$$

$$x_{1A} + x_{2A} + x_{3A} + x_{4A} = x_A$$

$$x_{1B} + x_{2B} + x_{3B} + x_{4B} = x_B$$

Investigación de Operaciones

II. Modelos de Programación Matemática
Programación Lineal

II.1 Introducción y ejemplos de modelamiento.

NP, avgas A:

$$\frac{107x_{1A} + 93x_{2A} + 87x_{3A} + 108x_{4A}}{x_A} \geq 100$$

NP, avgas B:

$$\frac{107x_{1B} + 93x_{2B} + 87x_{3B} + 108x_{4B}}{x_B} \geq 91$$

RVP, avgas A:

$$\frac{5x_{1A} + 8x_{2A} + 4x_{3A} + 21x_{4A}}{x_A} \leq 7$$

RVP, avgas B:

$$\frac{5x_{1B} + 8x_{2B} + 4x_{3B} + 21x_{4B}}{x_B} \leq 7$$

Restricción de no negatividad: $x_j \geq 0$; $j = 1,2,3,4$

$x_{jA} \geq 0$; $x_{jB} \geq 0$; $j = 1,2,3,4$; $x_A \geq 0$; $x_B \geq 0$

II.1 Introducción y ejemplos de modelamiento.

vi) Problema de expansión de la capacidad de un Sistema de Potencia Eléctrica:

En este problema se desea planificar la expansión de la capacidad de un sistema eléctrico para los siguientes T años. La demanda (estimada) para el año t corresponde a d_t MW para t = 1, 2, ..., T. La capacidad existente del sistema corresponde a c_t MW para el año t = 1, 2, ..., T.

II.1 Introducción y ejemplos de modelamiento.

Existen 2 alternativas para la expansión de la capacidad del sistema:

- Usar plantas térmicas a petróleo.
- Usar plantas térmicas a gas.

Se requiere una inversión p_t por MW instalado de una planta a petróleo que esté operativa al comienzo del año t, y el correspondiente costo para una planta a gas es g_t.

II.1 Introducción y ejemplos de modelamiento.

Por razones políticas y de seguridad, se ha decidido que no más del 30% de la capacidad instalada, corresponda a plantas a gas (nuevas).

Cada planta a petróleo tiene una vida de 20 años y una planta a gas una vida de 15 años.

Se desea proponer un plan de expansión al mínimo costo posible.

II.1 Introducción y ejemplos de modelamiento.

Variables de decisión:

x_t : cantidad de MW expandidos en planta a petróleo al inicio del año t, con t = 1, 2, ..., T.

y_t : cantidad de MW expandidos en planta a gas al inicio del año t, con t = 1, 2, ..., T.

z_t : cantidad total de MW disponible en plantas nuevas a petróleo al inicio del año t.

w_t : cantidad total de MW disponible en plantas nuevas a gas al inicio del año t.

II.1 Introducción y ejemplos de modelamiento.

Función Objetivo:

$$\text{Min} \quad \sum_{t=1}^{T} \left[p_t x_t + g_t y_t \right]$$

Restricciones:

$$c_t + z_t + w_t \geq d_t$$

$$z_t = \sum_{k=1}^{t} x_k \qquad t \leq 20$$

$$z_t = \sum_{k=t-19}^{t} x_k \qquad t > 20$$

II. Modelos de Programación Matemática
Programación Lineal

II.1 Introducción y ejemplos de modelamiento.

$$w_t = \sum_{k=1}^{t} y_k \quad t \leq 15$$

$$w_t = \sum_{k=t-14}^{t} y_k \quad t > 15$$

$$\frac{w_t}{c_t + z_t + w_t} \leq 0{,}30 \quad t = 1 \ldots T$$

$$x_t, y_t, z_t, w_t \geq 0$$

II. Modelos de Programación Matemática
Programación Lineal

Temario:

II.1. Introducción y ejemplos de modelamiento.

II.2. Resolución gráfica de problemas.

II.3. Análisis de Sensibilidad.

II.4. El Método Simplex.

II.5. Dualidad en Programación Lineal.

II.6. Análisis de Sensibilidad o Post-Optimal

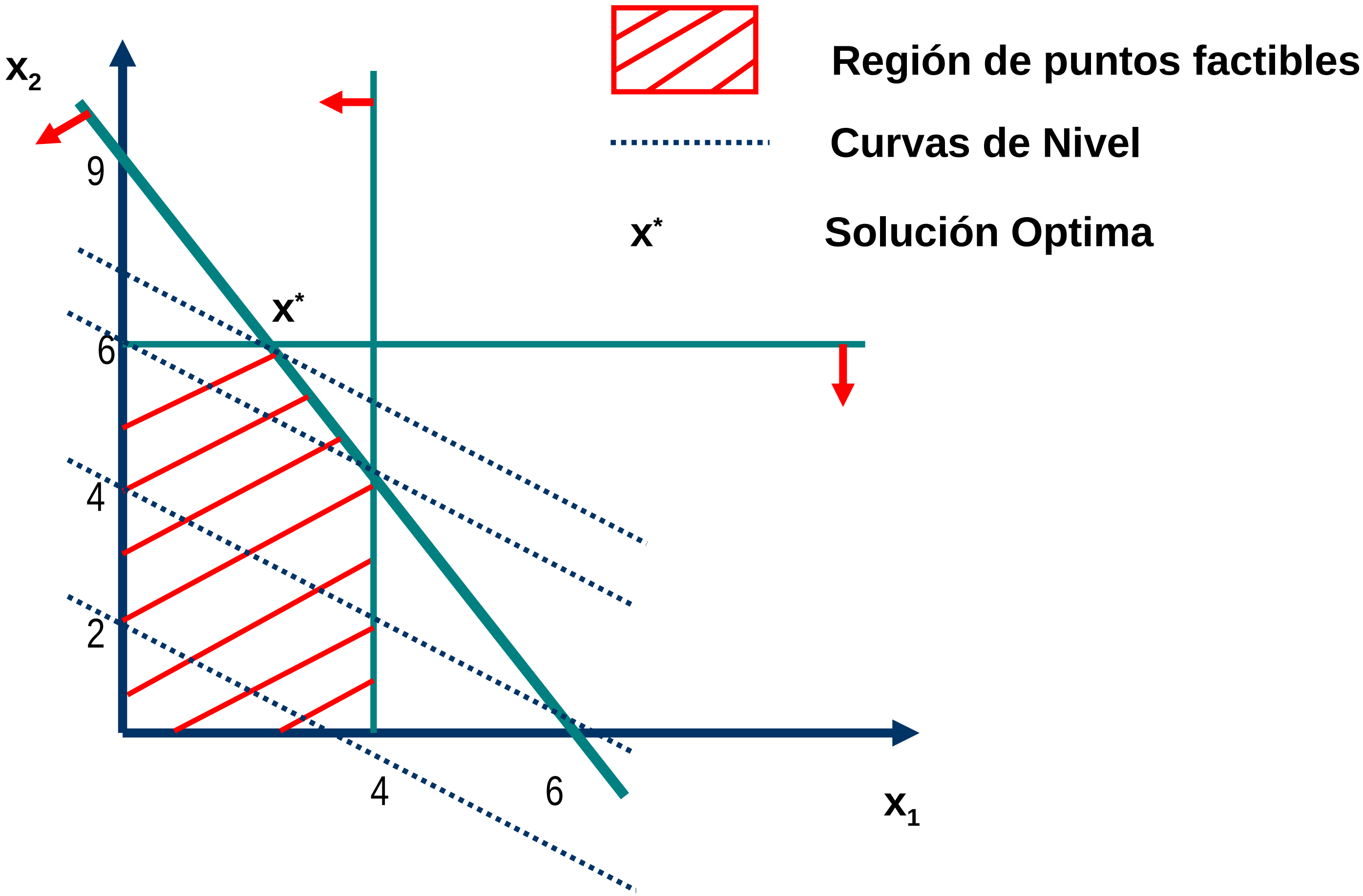
II.2. Resolución gráfica de problemas.

Consideremos el siguiente problema a resolver gráficamente:

$$
\begin{array}{ll}
\textbf{Max} & z = 3x_1 + 5x_2 \\
\textbf{sa:} & x_1 \leq 4 \\
 & 2x_2 \leq 12 \\
 & 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

II. Modelos de Programación Matemática
Programación Lineal

II.2. Resolución gráfica de problemas.



II.2. Resolución gráfica de problemas.

En primer lugar, se debe obtener la región de puntos factibles en el plano, obtenida por medio de la intersección de todos los semi - espacios que determinan cada una de las inecuaciones presentes en las restricciones del problema.

II.2. Resolución gráfica de problemas.

Enseguida, con el desplazamiento de las curvas de nivel de la función objetivo en la dirección de crecimiento de la función (que corresponde a la dirección del vector gradiente de la función, $\mathbf{\nabla z(x_1,x_2) = (3,5)^T}$), se obtiene la solución óptima del problema en la intersección de las rectas: $\mathbf{2x_2 = 12}$ y $\mathbf{3x_1+2x_2 = 18}$ (restricciones activas). Esto es:

$$x_1^* = 2 \qquad x_2^* = 6$$

$$z^* = 3\,x_1^* + 5\,x_2^* = 36$$

II.2. Resolución gráfica de problemas.

Notar que se pueden dar otras situaciones en la búsqueda de una solución óptima para esta clase de problemas:

1) La solución óptima exista pero haya más de una. En el ejemplo, considere la nueva función objetivo: $\mathbf{z = 6x_1+4x_2}$.

2) El problema no tenga solución, dada una región de puntos factibles no - acotada. En el ejemplo, reemplace cada desigualdad $\leq$ por una $\geq$.

3) El problema no tenga solución, porque no existen puntos factibles. En el ejemplo, suponga que agregamos la restricción: $\mathbf{x_1 \geq 5}$.

II. Modelos de Programación Matemática
Programación Lineal

Temario:

II.1. Introducción y ejemplos de modelamiento.

II.2. Resolución gráfica de problemas.

II.3. Análisis de Sensibilidad.

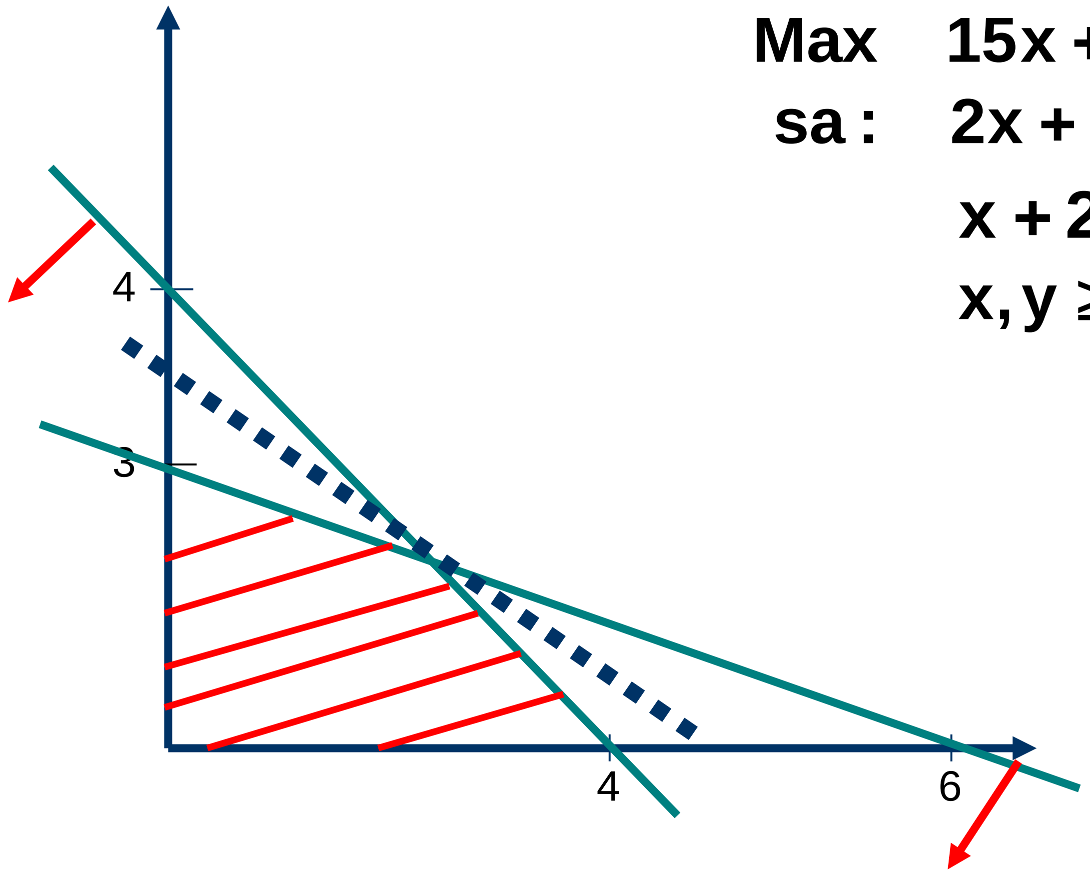
II.4. El Método Simplex.

II.5. Dualidad en Programación Lineal.

II.6. Análisis de Sensibilidad o Post-Optimal

II. Modelos de Programación Matemática
Programación Lineal

II.3. Análisis de sensibilidad.



$$\text{Max} \quad 15x + 20y$$
$$\text{sa:} \quad 2x + 2y \le 8$$
$$x + 2y \le 8$$
$$x, y \ge 0$$

II.3. Análisis de sensibilidad.

A partir de la resolución gráfica del problema se tiene:

Solución óptima : $\mathbf{x_1^* = 2 \ ; \ x_2^* = 2}$

Valor óptimo : $\mathbf{z = z(2,2) = 70}$

El análisis de sensibilidad permite responder, entre otras, las siguientes preguntas:

II.3. Análisis de sensibilidad.

1) ¿Cuál es el intervalo de variación de algún coeficiente de la función objetivo, de modo que la actual solución siga siendo la óptima?

Sea $\mathbf{z = c_1x_1+c_2x_2}$

La solución óptima de la nueva función, seguirá siendo: $\mathbf{x_1^* = 2 \,;\, x_2^* = 2}$ ssi:

$$-1 \leq \frac{-c_1}{c_2} \leq -\frac{1}{2}$$

II.3. Análisis de sensibilidad.

También podemos estudiar el intervalo de un sólo coeficiente, dejando el resto de los parámetros fijos:

Para C_1: $$-1 \le \frac{-c_1}{20} \le -\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 10 \le c_1 \le 20$$

Para C_2: $$-1 \le \frac{-15}{c_2} \le -\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 15 \le c_2 \le 30$$

II.3. Análisis de sensibilidad.

2) ¿ Cuál es la variación del actual valor óptimo de la función objetivo, si cambamos en una unidad algún coeficiente del lado derecho de las restricciones ?

Estudiaremos por separado las variaciones de cada uno de los coeficientes del lado derecho de las restricciones, de modo preservar la geometría del problema, esto es, que se conserven las mismas restricciones activas de la solución óptima inicial.

II.3. Análisis de sensibilidad.

Primera restricción.

La mayor variación del coeficiente del lado derecho se alcanza en $\mathbf{x_1 = 0}$ y $\mathbf{x_2 = 4}$, de donde se obtiene:

$$\mathbf{z(0,4) = 15 \times 0 + 20 \times 4 = 80} \quad \text{y} \quad \mathbf{b_1^* = 0 + 2 \times 4 = 8}$$

La menor variación del coeficiente del lado derecho se alcanza en: $\mathbf{x_1 = 4 \,;\, x_2 = 0}$, de donde se obtiene:

$$\mathbf{z(4,0) = 15 \times 4 + 20 \times 0 = 60} \quad \text{y} \quad \mathbf{b_1 = 4 + 2 \times 0 = 4}$$

II.3. Análisis de sensibilidad.

De aquí, se calcula el **precio sombra** Π_1, que indica la razón o tasa de cambio de la función objetivo con respecto al cambio en una unidad del lado derecho:

$$\Pi_1 = \frac{z(0,4) - z(4,0)}{b_1^* - b_1} = \frac{80 - 60}{8 - 4} = 5$$

II.3. Análisis de sensibilidad.

Segunda restricción.

La mayor variación del coeficiente del lado derecho se alcanza en **$x_1 = 6$** y **$x_2 = 0$**, de donde se obtiene:

$z(0,4) = 15 \times 6 + 20 \times 0 = 90$ y **$b_1^* = 2 \times 6 + 2 \times 0 = 12$**

La menor variación del coeficiente del lado derecho se alcanza en: **$x_1 = 0$; $x_2 = 3$**, de donde se obtiene:

$z(4,0) = 15 \times 0 + 20 \times 3 = 60$ y **$b_1 = 2 \times 0 + 2 \times 3 = 6$**

II.3. Análisis de sensibilidad.

De aquí, se calcula el **precio sombra** $\mathbf{P_2}$, que indica la razón o tasa de cambio de la función objetivo con respecto al cambio en una unidad del lado derecho:

$$\Pi_2 = \frac{z(6,0) - z(0,3)}{b_2^* - b_2} = \frac{90 - 60}{12 - 6} = 5$$

II. Modelos de Programación Matemática
Programación Lineal

Temario:

II.4. El Método Simplex.

En lo que sigue consideremos el siguiente problema de programación lineal en su forma estándar.

$$
\begin{array}{ll}
\textbf{Min} & c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\
\textbf{sa} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\
 & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\
 & \dots \qquad \dots \qquad\qquad \dots \\
 & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \\
 & \\
 & x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \text{y} \quad m \leq n
\end{array}
$$

II.4. El Método Simplex.

Matricialmente escrito como:

$$\begin{array}{ll} \textbf{Min} & c^T x \\ \textbf{sa} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

No existe pérdida de la generalidad al suponer que un problema viene dado en la forma estándar. En efecto, si tuviésemos el siguiente problema:

II.4. El Método Simplex.

$$
\begin{array}{lll}
P) & \text{Max} & 9u + 2v + 5z \\
 & \text{sa} & 4u + 3v + 6z \leq 50 \\
 & & u + 2v + 3z \geq 8 \\
 & & 2u - 4v + z = 5 \\
 & & u,v \geq 0 \\
 & & z \in IR
\end{array}
$$

Es posible reformular de manera equivalente el problema anterior usando que:

II.4. El Método Simplex.

1) Siempre es posible llevar un problema de maximización a uno de minimización. Si **f(x)** es la función objetivo a maximizar y $\mathbf{x^*}$ es la solución óptima:

$$f(x^*) \geq f(x) , \quad \forall x \text{ factible}$$

$$- f(x^*) \leq - f(x) , \quad \forall x \text{ factible}$$

$\therefore$ $\mathbf{x^*}$ es también mínimo de **- f(x)**

II.4. El Método Simplex.

2) Cada restricción del tipo $\leq$ puede ser llevada a una ecuación de igualdad usando una (nueva) variable de **holgura** no negativa, con un coeficiente nulo en la función objetivo.

3) De igual modo, cada restricción del tipo $\geq$ puede ser llevada a una ecuación de igualdad usando una variable de **exceso** no negativa.

4) Siempre es posible escribir una variable libre de signo como la diferencia de dos variables no negativas.

Investigación de Operaciones

II.4. El Método Simplex.

En resumen el problema **P)** puede ser escrito de manera equivalente como:

$$
\begin{array}{lrcl}
\textbf{Min} & -9x_1 - 2x_2 - 5x_3 + 5x_4 + 0x_5 + 0x_6 & & \\
\textbf{sa:} & 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 6x_4 + x_5 & = & 50 \\
 & x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 - x_6 & = & 8 \\
 & 2x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 & = & 5 \\
 & & & \\
 & x_i \geq 0, \quad i=1,2,3,4,5,6. & &
\end{array}
$$

II.4. El Método Simplex.

Con $\mathbf{u} = \mathbf{x_1}$

$\mathbf{v} = \mathbf{x_2}$

$\mathbf{z} = \mathbf{x_3 - x_4}$

$\mathbf{s_1} = \mathbf{x_5}$ **(HOLGURA)**

$\mathbf{s_2} = \mathbf{x_6}$ **(EXCESO)**

La búsqueda de la solución óptima se restringe a encontrar un vértice óptimo y cada vértice del conjunto de las restricciones del problema, llamado **región de puntos factibles**, corresponde a una **solución básica factible** del sistema **Ax = b.**

II.4. El Método Simplex.

Esta solución básica factible, corresponde a su vez a aquellas soluciones que resultan de resolver el sistema para exactamente **m** variables, fijando las restantes **n-m** en **cero**, llamadas respectivamente variables básicas y no-básicas, que además deben satisfacer condiciones de no-negatividad.

II.4. El Método Simplex.

Teorema Fundamental de la Programación Lineal:

Si un problema tiene solución óptima, tiene una solución básica factible óptima.

Dada una matriz **B** de **m** $_{\mathbf{x}}$ **m** invertible, esta induce una partición de las variables y parámetros del modelo como lo muestra la siguiente diapositiva.

II.4. El Método Simplex.

$$A = \overbrace{\left[\begin{array}{c|c} \underbrace{\quad B \quad}_{m} & \underbrace{\quad D \quad}_{n-m} \end{array}\right]}^{n} \Bigg\} m$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_B \\ \cdots \\ x_D \end{bmatrix} \begin{array}{l} \} \ m \\ \\ \} \ n-m \end{array} \qquad c = \begin{bmatrix} c_B \\ \cdots \\ c_D \end{bmatrix} \begin{array}{l} \} \ m \\ \\ \} \ n-m \end{array}$$

x_B :variables básicas.

x_D :variables no básicas.

c_B :costos básicos.

c_D :costos no básicos.

B : es llamada una matriz de base

II.4. El Método Simplex.

Criterio de Optimalidad:

$$
\begin{aligned}
c^T x &= c_B^T x_B + c_D^D x_D \\
&= c_B^T \left(B^{-1} b - B^{-1} D x_B \right) + c_D^T x_D \\
&= \underbrace{c_B^T B^{-1} b}_{\text{valor actual de la función obj.}} + \underbrace{\left(c_D^T - c_D^T B^{-1} D x_B \right) x_D}_{\text{vector de costos reducidos.}}
\end{aligned}
$$

II.4. El Método Simplex.

La ecuación que define cada uno de los costos reducidos es:

$$r_j = c_j - c_B^T B^{-1} A_j$$

Donde **j** es el índice de variable no-básica y $\mathbf{A_j}$ la respectiva columna en **A** de esa variable.

La actual solución básica factible es óptima ssi $\mathbf{r_j} \geq \ \forall \mathbf{j}$, existe una variable no básica $\mathbf{x_p}$ con costo reducido negativo, que entra a la nueva base.

II.4. El Método Simplex.

Para decidir quién deja la base, es necesario calcular el mayor valor que puede tomar la variable entrante que garantiza la factibilidad de la nueva solución básica, con:

$$\mathbf{B^{-1}b} = \begin{bmatrix} y_{10} \\ x_{20} \\ \vdots \\ x_{m0} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B^{-1}A_j} = \begin{bmatrix} y_{1p} \\ y_{2p} \\ \vdots \\ y_{mp} \end{bmatrix}$$

y se debe calcular:

$$\frac{y_{k0}}{y_{kp}} = \mathrm{Min}\left\{ \frac{y_{i0}}{y_{ip}} \,/\, y_{ip} > 0 \right\} \Rightarrow x_k \text{ deja la base}$$

II.4. El Método Simplex.

Ejemplo.

Resolver el siguiente problema de P.L.

$$
\begin{array}{ll}
\textbf{Max} & 40x + 60y \\
\textbf{sa:} & 2x + y \leq 70 \\
 & x + y \leq 40 \\
 & x + 3y \leq 90 \\
 & x,y \geq 0
\end{array}
$$

II.4. El Método Simplex.

Se deben agregar 3 variables de holgura (x_1 , x_2 , x_3 var.básicas), y llevar a forma estándar ($x_4 = x$ y $x_5 = y$).

$$
\begin{array}{llllll}
\textbf{Min} & & & -40x_4 - 60x_5 & & \\
\textbf{sa:} & x_1 & & + 2x_4 & + x_5 & = 70 \\
 & & x_2 & + x_4 & + x_5 & = 40 \\
 & & x_3 & + x_4 & + 3x_5 & = 90 \\
\end{array}
$$

$$x_i \geq 0, \qquad i = 1, 2, 3, 4, 5$$

II.4. El Método Simplex.

Tabla inicial:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	0	0	2	1	70
0	1	0	1	1	40
0	0	1	1	3	90
0	0	0	-40	-60	0

Investigación de Operaciones

II.4. El Método Simplex.

Usamos como variable entrante a la base $\mathbf{x_5}$ (pues $\mathbf{r_5<0}$).

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	0	0	2	1	70
0	1	0	1	1	40
0	0	1	1	**3**	90
0	0	0	-40	-60	0

Se calcula Min { 70/1, 40/1, 90/3 } = 30, por lo tanto sale $\mathbf{x_3}$.

II.4. El Método Simplex.

Actualizando, queda la siguiente tabla (no óptima), donde la variable entrante a la base es $\mathbf{x_4}$ (pues $\mathbf{r_4<0}$).

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	0	-1/3	5/3	0	40
0	1	-1/3	**2/3**	0	10
0	0	1/3	1/3	1	30
0	0	20	-20	0	1800

Se calcula Min { 40/(5/3), 10/(2/3), 30/(1/3) } = 15, por lo tanto $\mathbf{x_2}$ deja la base actual.

II.4. El Método Simplex.

Actualizando, queda la siguiente tabla final:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	-5/2	½	0	0	15
0	-1/3	-1/2	1	0	15
0	1/3	½	0	1	25
0	20	10	0	0	2100

Como todos los costos reducidos son mayores o iguales que cero nos encontramos en la **solución óptima**.

II.4. El Método Simplex.

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 15 \\ 25 \end{bmatrix} \qquad x_D = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$z^* = -40 \times 15 - 60 \times 25 = -2100$$

En la formulación inicial, tenemos como solución óptima **x*=15, y *=25**, con valor óptimo **2.100.**

II.4. El Método Simplex.

Resumen del Método Simplex:

Paso 0 : Escribir el problema de programación lineal en su forma estándar.

Paso 1 : Escoger una solución básica factible inicial.

Paso 2 : Escoger una variable no - básica con costo reducido negativo que determina la variable entrante y seguir al paso tres. Sin embargo, si todos los costos reducidos son mayores que cero , parar, ya que la actual solución es la óptima.

II.4. El Método Simplex.

Paso 3 : Calcular el criterio de factibilidad que determina que variable deja la base. Si todos los cuocientes son negativos: problema no - acotado, parar.

Paso 4 :Actualizar la tabla de modo de despejar el valor de las nuevas variables básicas, los costos reducidos y el valor de la función objetivo. Volver al Paso 2.

II.4. El Método Simplex.

No siempre es fácil obtener una solución básica factible inicial, en las variables originales del modelo. Para conseguir esto existen varios procedimientos como son:

- **Método Simplex de dos fases**.
- **Método de la M – grande.**

II.4. El Método Simplex.

Método Simplex de dos Fases.

Fase 1: Se considera un problema auxiliar que resulta de agregar tantas variables auxiliares a las restricciones del problema, de modo de obtener una solución básica factible. Resolver por Simplex un nuevo problema que considera como función objetivo la suma de las variables auxiliares. Si el valor óptimo es cero ir a la Fase 2. En caso contrario, no existe solución factible.

II.4. El Método Simplex.

Método Simplex de dos Fases.

Fase 2: Resolver por Simplex el problema original a partir de la solución básica factible hallada en la Fase1.

Ejemplo: **Max** $2x_1 + x_2$

sa: $10x_1 + 10x_2 \leq 9$

$10x_1 + 5x_2 \geq 1$

$x_1, x_2 \geq 0$

II.4. El Método Simplex.

Método Simplex de dos Fases.

Se debe agregar una variable de holgura (**x_3**) y una variable de exceso (**x_4**), y llevarlo a su forma estándar.

$$\begin{array}{ll} \textbf{Min} & -2x_1 - x_2 \\ \textbf{sa:} & 10x_1 + 10x_2 + x_3 = 9 \\ & 10x_1 + 5x_2 - x_4 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

II.4. El Método Simplex.

Método Simplex de dos Fases.

Aplicamos Simplex de dos Fases :

Fase 1: **Min** x_5

sa:

$$10x_1 + 10x_2 + x_3 = 9$$

$$10x_1 + 5x_2 - x_4 + x_5 = 1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Investigación de Operaciones

II.4. El Método Simplex.

Método Simplex de dos Fases.

Quedando la siguiente tabla:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
10	10	1	0	0	9
10	5	0	-1	1	1
0	0	0	0	1	0

donde:

$$\mathbf{x_B} = \begin{bmatrix} \mathbf{x_3} \\ \mathbf{x_5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{9} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{x_D} = \begin{bmatrix} \mathbf{x_1} \\ \mathbf{x_2} \\ \mathbf{x_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

II.4. El Método Simplex.

Método Simplex de dos Fases.

Luego se hace cero el costo reducido de la variable $\mathbf{x_5}$ de la tabla anterior, y queda la siguiente tabla inicial.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
10	10	1	0	0	9
10	5	0	-1	1	1
-10	-5	0	1	0	-1

Investigación de Operaciones

II.4. El Método Simplex.

Método Simplex de dos Fases.

La variable entrante a la base es $\mathbf{x_1}$ (pues $\mathbf{r_1 < 0}$).

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
10	10	1	0	0	9
10	5	0	-1	1	1
-10	-5	0	1	0	-1

Calculamos Min { 9/10, 1/10}= 1/10, por lo tanto sale $\mathbf{x_5}$.

Investigación de Operaciones

II.4. El Método Simplex.

Método Simplex de dos Fases.

Obteniéndose la siguiente tabla final:

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
0	5	1	1	-1	8
1	½	0	-1/10	1/10	1/10
0	0	0	0	1	0

$$\mathbf{x_B} = \begin{bmatrix} \mathbf{x_1} \\ \mathbf{x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1/10} \\ \mathbf{8} \end{bmatrix} \quad \mathbf{x_D} = \begin{bmatrix} \mathbf{x_2} \\ \mathbf{x_4} \\ \mathbf{x_5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

II.4. El Método Simplex.

Método Simplex de dos Fases.

Donde, al anterior, corresponde a la solución óptima del problema en la Fase 1, con valor óptimo **0**. De aquí entonces tomamos $\mathbf{x_1}$ y $\mathbf{x_3}$ como variables básicas.

Fase 2:

x_1	x_2	x_3	x_4	
0	5	1	1	8
1	½	0	-1/10	1/10
-2	-1	0	0	0

II.4. El Método Simplex.

Método Simplex de dos Fases.

En la tabla hacemos 0 los costos reducidos de variables básicas

x_1	x_2	x_3	x_4	
0	5	1	**1**	8
1	½	0	-1/10	1/10
0	0	0	-1/5	1/5

Luego la variable entrante a la base es $\mathbf{x_4}$ (pues $\mathbf{r_4<0}$). Y calculando Min { 8/1, (-1/10)/(1/10) } = 8, se tiene que sale $\mathbf{x_3}$.

II.4. El Método Simplex.

Método Simplex de dos Fases.

Quedando:

x_1	x_2	x_3	x_4	
0	5	1	1	8
1	1	0	1/10	9/10
0	1	1/5	0	9/5

donde la solución óptima del problema resulta ser:

$$\mathbf{x_B} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9/10 \\ 8 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x_D} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

II.4. El Método Simplex.

Método Simplex de dos Fases.

Algunos casos especiales

1) **Problema Infactible**. Esta situación se detecta cuando el valor óptimo del problema de la Fase 1 da mayor que cero.

2) **Múltiples soluciones óptimas**. Esta situación se detecta cuando existen costos reducidos iguales a cero en una o más de las variables básicas óptimas.

II.4. El Método Simplex.

Método Simplex de dos Fases.

3) **Problema no acotado**. Esta situación se detecta cuando al realizar el cálculo de la variable que deja la base, todos los elementos y_{kj} de la columna j en la tabla, son negativos para j el índice de una variable no básica con costo reducido negativo.

II. Modelos de Programación Matemática
Programación Lineal

Temario:

II.1. Introducción y ejemplos de modelamiento.

II.2. Resolución gráfica de problemas.

II.3. Análisis de Sensibilidad.

II.4. El Método Simplex.

II.5. Dualidad en Programación Lineal.

II.6. Análisis de Sensibilidad o Post-Optimal

II.5. Dualidad en Programación Lineal.

Consideremos un ejemplo de producción de 2 productos finales que hacen uso de tres recursos escasos (máquinas), cuyas disponibilidades en horas corresponden a los lados derechos de las restricciones.

$$
\begin{array}{lll}
\textbf{P)} & \textbf{Max} & 40x_1 + 60x_2 \\
\textbf{sa:} & 2x_1+2x_2 \leq 70 & \\
x_1 + x_2 \leq 40 & & \\
x_1 + 3x_2 \leq 90 & & \\
x_1, x_2 \geq 0 & &
\end{array}
$$

II.5. Dualidad en Programación Lineal.

La solución óptima y el valor óptimo del problema P) esta dada por:

$$x_1^* = 5$$

$$x_2^* = 25$$

$$z = v(p) = 2100$$

II.5. Dualidad en Programación Lineal.

En lo que sigue, combinaremos las distintas restricciones del problema, ponderando por los valores π_1, π_2 y π_3 cada una, respectivamente, de modo de obtener la mejor cota superior del valor óptimo del problema P). Vale decir:

$$\pi_1(2x_1+2x_2) + \pi_2(x_1+x_2) + \pi_3(x_1+3x_2) \leq 70\,\pi_1 + 40\,\pi_2 + 90\,\pi_3$$

II.5. Dualidad en Programación Lineal.

Para garantizar que el lado derecho de esta última desigualdad sea una cota superior de la función objetivo se debe cumplir que :

$$2\,\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 \geq 40$$
$$2\pi_1 + \pi_2 + 3\,\pi_3 \geq 60$$

II.5. Dualidad en Programación Lineal.

La mejor elección de esta cota se obtendría al resolver:

$$
\begin{array}{lll}
\textbf{D)} & \textbf{Min} & 70\,\pi_1 + 40\,\pi_2 + 90\,\pi_3 \\
 & \textbf{sa:} & 2\,\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 \geq 40 \\
 & & 2\pi_1 + \pi_2 + 3\,\pi_3 \geq 60 \\
 & & \pi_1, \pi_2, \pi_3 \geq 0
\end{array}
$$

II.5. Dualidad en Programación Lineal.

Este problema se conoce como el problema “ Dual” D) asociado al problema “Primal” P).

También resulta que al formular el problema dual de D) se obtiene el problema primal (o uno equivalente).

Cualquiera de los dos entrega la misma información y el valor óptimo alcanzado es el mismo.

Investigación de Operaciones

II.5. Dualidad en Programación Lineal.

Más generalmente, si el problema primal es:

$$\text{P)} \quad \text{Max} \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{sa:} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1,2,\ldots,n$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1,2,\ldots,m$$

II.5. Dualidad en Programación Lineal.

su dual resulta el problema:

$$
\begin{aligned}
\text{D)}\quad \text{Min} \quad & \sum_{i=1}^{m} b_i \pi_i \\
\text{sa:} \quad & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \pi_i \geq c_j \qquad j = 1,2,\ldots,n \\
& \pi_i \geq 0 \qquad i = 1,2,\ldots,m
\end{aligned}
$$

II.5. Dualidad en Programación Lineal.

Lo que se puede expresar en forma matricial como:

P) Max $c^T x$
sa: $Ax \leq b$
$x \geq 0$

D) Min $b^T \pi$
sa: $A^T \pi \geq c$
$\pi \geq 0$

II.5. Dualidad en Programación Lineal.

Si el problema primal corresponde a:

$$\text{P)} \quad \text{Max} \quad -c^T x$$
$$\text{sa:} \quad Ax \geq b$$
$$x \geq 0$$

Su dual resulta ser:

$$\text{D)} \quad \text{Min} \quad -b^T \pi$$
$$\text{sa:} \quad A^T \pi \leq c$$
$$\pi \geq 0$$

Es decir, el dual del dual es el problema primal

II.5. Dualidad en Programación Lineal.

Teorema de dualidad débil:

Si $\mathbf{x} \in \mathbf{IR}^n$, es una solución factible del problema primal P) y $\boldsymbol{\pi} \in \mathbf{IR}^m$, una solución factible del problema dual D), entonces:

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i \pi_i = \mathbf{b}^T \boldsymbol{\pi}$$

En particular, si ambas soluciones son los óptimos de sus respectivos problemas, sus valores óptimos cumplen que :

$$\mathbf{v(P) \leq v(D)}$$

II.5. Dualidad en Programación Lineal.

Teorema de dualidad fuerte:

Si $\mathbf{x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)^T}$, es una solución óptima problema primal P), entonces el problema dual D) tiene solución óptima $\boldsymbol{\pi^* = (\pi_1^*, \pi_2^*, \ldots, \pi_m^*)^T}$ que satisface:

$$\mathbf{v(P) = c^T x^* = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i \pi_i^* = b^T \pi = v(D)}$$

Además:

i)Si P) es no-acotado entonces D) es infactible.

ii)Si D) es no-acotado entonces P) es infactible.

II.5. Dualidad en Programación Lineal.

Ejemplo: **P)** **Min** $3x_1 + 4x_2 + 5x_3$

sa: $x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 5$

$2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

D) **Max** $5\pi_1 + 6\pi_2$

sa: $\pi_1 + 2\pi_2 \leq 3$

$2\pi_1 + 2\pi_2 \leq 4$

$3\pi_1 + \pi_2 \leq 5$

$\pi_1, \pi_2 \geq 0$

Investigación de Operaciones

II.5. Dualidad en Programación Lineal.

Resolvemos D) por Simplex, en su forma estándar:

π_1	π_2	π_3	π_4	π_5	
1	**2**	1	0	0	3
2	2	0	1	0	4
3	1	0	0	1	5
-5	-6	0	0	0	0

$$\mathbf{x_B} = \begin{bmatrix} \pi_3 \\ \pi_4 \\ \pi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x_D} = \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Luego la variable entrante a la base es $\boldsymbol{\pi_2}$ (pues $r_2<0$). Y calculando Min { 3/2, 4/2, 5/1 } = 3/2, se tiene que sale $\boldsymbol{\pi_3}$

Investigación de Operaciones

II.5. Dualidad en Programación Lineal.

π_1	π_2	π_3	π_4	π_5	
½	1	½	0	0	3/2
1	0	-1	1	0	1
5/2	0	-1/2	0	1	7/2
-2	0	3	0	0	9

$$x_B = \begin{bmatrix} \pi_2 \\ \pi_4 \\ \pi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1 \\ 7/2 \end{bmatrix}$$

$$x_D = \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Luego la variable entrante a la base es π_1 (pues $r_2<0$). Y calculando Min { (3/2)/(1/2), 1/1, (7/2)/(5/2)} = 1, se tiene que sale π_4

II.5. Dualidad en Programación Lineal.

π_1	π_2	π_3	π_4	π_5	
0	1	1	-1/2	0	1
1	0	-1	1	0	1
0	0	2	-5/2	1	1
0	0	1	2	0	11

$$\mathbf{x_B} = \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x_D} = \begin{bmatrix} \pi_3 \\ \pi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sol. óptima de D):

$\boldsymbol{\pi_1^* = 1;\ \pi_2^* = 1;}$ **v(D) = 11**

Sol. óptima de P):

$\mathbf{x_1^* = 1;\ x_2^* = 2;\ x_3^* = 0;}$ **v(P) = 11**

II.5. Dualidad en Programación Lineal.

Método Simplex Dual:

La idea de este método consiste en resolver de alguna manera el problema dual asociado a P) en la tabla y variables del problema primal P), según veremos en su aplicación a un problema primal (ejercicio anterior).

$$\begin{aligned} \textbf{Min} \quad & 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \\ \textbf{sa:} \quad & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 5 \\ & 2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

II.5. Dualidad en Programación Lineal.

Método Simplex Dual:

$$\begin{array}{llll}
\textbf{Min} & 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 0x_4 + 0x_5 & & \\
\textbf{sa:} & x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 \geq 5 & & \times(-1) \\
 & 2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_5 \geq 6 & & \times(-1) \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 & &
\end{array}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
-1	-2	-3	1	0	-5
-2	-2	-1	0	1	-6
3	4	5	0	0	0

II.5. Dualidad en Programación Lineal.

Método Simplex Dual:

En la tabla anterior se toman dos variables de exceso $\mathbf{x_4}$ y $\mathbf{x_5}$, y se multiplica por un número negativo con la finalidad de encontrar la matriz identidad IR^n, además es necesaria la condición de que los costos reducidos de la tabla sean mayores que cero (lo que en este caso se cumple).

II.5. Dualidad en Programación Lineal.

Método Simplex Dual:

En la tabla anterior se escoge, usando el lado derecho, alguna variable con valor negativo.

Escogemos $\mathbf{x_5}$, variable que dejará la base. Enseguida , se obtiene la variable entrante calculando:

$$\text{Min } \{ (-3/-2) , (-4/-2),(-5/-1)\} = 3/2.$$

De donde resulta que $\mathbf{x_1}$ entra a la base.

II.5. Dualidad en Programación Lineal.

Método Simplex Dual:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	-1	-5/2	1	-1/2	-2
1	1	1/2	0	-1/2	3
0	1	7/2	0	3/2	-9

La tabla posee aún un lado derecho negativo (costos reducidos negativos del problema dual), por lo cual no es factible en P).

II.5. Dualidad en Programación Lineal.

Método Simplex Dual:

$\mathbf{x_4}$ (=-2) deja la base, luego calculamos :

Min {(-1/-1),((-7/2)/(-5/2)),((-3/2)/(-1/2))} = 1, por lo que $\mathbf{x_2}$ entra a la base.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	1	5/2	-1	½	2
1	0	-2	1	-1	1
0	0	1	1	1	-11

II.5. Dualidad en Programación Lineal.

Método Simplex Dual:

La tabla posee lados derechos no-negativos (costos reducidos positivos del problema dual) y también los costos reducidos de las variables no básicas $\mathbf{x_3}$, $\mathbf{x_4}$ y $\mathbf{x_5}$ son no-negativos , por lo que tenemos una solución factible en P) que es la solución óptima del problema.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad v(P) = 11$$

Investigación de Operaciones

II. Modelos de Programación Matemática
Programación Lineal

Temario:

II.1. Introducción y ejemplos de modelamiento.

II.2. Resolución gráfica de problemas.

II.3. Análisis de Sensibilidad.

II.4. El Método Simplex.

II.5. Dualidad en Programación Lineal.

II.6. Análisis de Sensibilidad o Post-Optimal

II.6. Análisis de Sensibilidad o Post-Optimal

1) ¿Qué ocurre con las actuales variables básicas si se cambia algún coeficiente del lado derecho (**b**)?

Si calculamos: $\overline{\mathbf{x}_B} = \mathbf{B}^{-1}\overline{\mathbf{b}}$ y se cumple: $\overline{\mathbf{x}_B} \geq \mathbf{0}$

Las mismas variables básicas lo son también de la nueva solución óptima, calculada con el nuevo $\overline{\mathbf{b}}$.

Si lo anterior no se cumple, se puede aplicar el Método Simplex Dual.

II.6. Análisis de Sensibilidad o Post-Optimal

2) ¿ Qué ocurre con la actual solución óptima si se agrega una nueva variable al problema ?

Para decidir si la actual solución básica es óptima para el nuevo problema, calculamos el costo reducido de la nueva variable mediante la formula:

$$\mathbf{r_k = c_k - c_B^T B^{-1} A_k}$$

Investigación de Operaciones

II.6. Análisis de Sensibilidad o Post-Optimal

donde **k** es el índice de la nueva variable y $\mathbf{A_k}$ su respectiva columna en la matriz de coeficientes. Si se cumple que $\mathbf{r_k \geq 0}$ se conserva la actual solución óptima. En caso contrario, se sigue con el Simplex.

II.6. Análisis de Sensibilidad o Post-Optimal

3) ¿ Que ocurre con la actual solución óptima del problema P) si se cambian los coeficientes que definen la función objetivo ?

Supongamos que el vector de coeficientes en la función objetivo cambia a un vector $\bar{c} \in IR^n$

La actual solución óptima también lo es para $\bar{P}$ con:

$$\begin{aligned} \bar{P})\quad & \text{Min } \bar{c}^{T} x \\ & \text{sa}: Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

II.6. Análisis de Sensibilidad o Post-Optimal

Siempre que los nuevos costos reducidos sean mayores o iguales a cero (notar que también cambia el valor de la función objetivo en la actual solución óptima). Es decir se debe cumplir que:

$$\bar{r}_D = \bar{c}_D - c_B^T B^{-1} D \geq 0 \qquad \textbf{o equivalentemente}$$

$$\bar{r}_j = \bar{c}_j - \bar{c}_B^T B^{-1} A_j \geq 0 \qquad \forall\, j$$

En caso contrario, se aplica el Simplex a partir de la tabla final de P) con los nuevos costos reducidos y nuevo valor de la actual solución básica.

II.6. Análisis de Sensibilidad o Post-Optimal

Veamos los cambios que tienen lugar cuando sólo varía un coeficiente del vector **c** de la función obj.

a) <u>Cambio de un coeficiente asociado a una variable no-básica $\mathbf{x_J}$:</u>

Se conserva la misma solución óptima del problema P) ssi. para esa variable $\mathbf{x_J}$:

$$\bar{r}_j = \bar{c}_j - \bar{c}_B^T B^{-1} A_j \geq 0 \qquad \forall\, j$$

II.6. Análisis de Sensibilidad o Post-Optimal

Consideremos :

$$\overline{c_j} = c_j + \Delta j$$

Por lo tanto se conserva la misma solución ssi:

$$\Delta j \geq - r_j \quad \Rightarrow \quad \overline{c_j} \geq c_j - r_j$$

II.6. Análisis de Sensibilidad o Post-Optimal

b) Cambio en un coeficiente de la función objetivo asociado a una variable básica:

En este caso para tener la misma solución óptima, se debe cumplir que el costo reducido de todas las variables.

$$\overline{r}_j = \overline{c}_j - \overline{c}_B^T B^{-1} A_j \geq 0$$

$$\overline{c}_i = c_i + \Delta i \qquad \overline{c}_B = c_B + \Delta i \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = c_B + \Delta i e_i$$

II.6. Análisis de Sensibilidad o Post-Optimal

Si el incremento es cualquiera en el siguiente intervalo, se conserva la misma solución óptima:

$$\mathbf{Max}\left\{\frac{\mathbf{r_j}}{\mathbf{y_{ij}}} \,/\, \mathbf{y_{ij}} < 0\right\} \leq \Delta \mathbf{i} \leq \mathbf{Min}\left\{\frac{\mathbf{r_j}}{\mathbf{y_{ij}}} \,/\, \mathbf{y_{ij}} > 0\right\}$$

donde $\mathbf{r_j}$ es el costo reducido de la respectiva variable no básica en la actual solución óptima y los coeficientes $\mathbf{y_{ij}}$ denotan las entradas en la tabla final del Simplex asociadas a la variable básica $\mathbf{x_i}$ (cuyo costo cambia) y la respectiva variable no básica $\mathbf{x_j}$

II.6. Análisis de Sensibilidad o Post-Optimal

Ejemplo:

La siguiente tabla, es la tabla final de un problema de programación lineal.

1,00	2,33	1,67	0,00	0,27	-0,07	1333,33
0,00	-0,03	0,03	1,00	-0,01	0,03	66,67
0,00	6,67	3,33	0,00	2,93	0,27	18666,67

Con esta tabla realizaremos un análisis de sensibilidad:

II.6. Análisis de Sensibilidad o Post-Optimal

a) Variar los recursos (lado derecho):
Las $\mathbf{x_B}$ del problema primal no cambian como base óptima, si los valores asociados a estas variables.

$$\overline{\mathbf{x_B}} = \mathbf{B^{-1}\overline{b}} \quad \mathbf{y\ se\ cumple} \quad \overline{\mathbf{x_B}} \geq \mathbf{0}$$

Para calcular estos intervalos de recursos, se necesita la matriz inversa asociada a las variables básicas del tabla final.

II.6. Análisis de Sensibilidad o Post-Optimal

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 1 & 40 \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 4/15 & -1/15 \\ -1/150 & 2/75 \end{bmatrix}$$

Intervalo recurso 1:

$$\begin{bmatrix} 4/15 & -1/15 \\ -1/150 & 2/75 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} 6000 + \Delta b_1 \\ 4000 \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\frac{20000}{15} + \frac{4\Delta b_1}{15} \geq 0 \quad \wedge \quad \frac{10000}{150} - \frac{\Delta b_1}{150} \geq 0$$

$$\Delta b_1 \geq -5000 \quad \wedge \quad \Delta b_1 \leq 10000$$

II.6. Análisis de Sensibilidad o Post-Optimal

$$-5000 \leq \Delta b_1 \leq 10000$$

$$1000 \leq b_1 \leq 16000$$

Intervalo recurso 2:

$$\begin{bmatrix} 4/15 & -1/15 \\ -1/150 & 2/75 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} 6000 \\ 4000 + \Delta b_2 \end{bmatrix} \geq 0$$

$$-2500 \leq \Delta b_2 \leq 20000$$

$$1500 \leq b_2 \leq 24000$$

II.6. Análisis de Sensibilidad o Post-Optimal

Variable x_1:

$$\textbf{Max}\ \{0\} \leq C_1 \leq \textbf{Min}\ \{((20/3)/(7/3)),((10/3)/(5/3))\}$$

$$0 \leq D_1 \leq 2 \Rightarrow 10 \leq C_1^* \leq 12$$

Variable x_4:

$$\textbf{Máx}\ \{((20/3)/(-1/30))\} \leq D_4 \leq \textbf{Min}\ \{((10/3)/(1/30))\}$$

$$-200 \leq D_4 \leq 100 \Rightarrow -60 \leq C_4^* \leq 240$$

Investigación de Operaciones

II.6. Análisis de Sensibilidad o Post-Optimal

Variable x_2:

$C_2^* = C_2 + \Delta_2$ $C_2 = -20$

$\Delta_2 \geq - r_2$ $C_2^* \geq - 20 - (20/3)$

$C_2^* \geq - 80/3$

Variable x_3:

$C_3^* = C_3 + \Delta_3$ $C_3 = -18$

$\Delta_3 \geq - r_3$ $C_3^* \geq - 18 - (10/3)$

$C_3^* \geq - 64/3$

BIBLIOGRÁFIA EN PROGRAMACIÓN LINEAL

1. **Linear Programming and Network Flow**, M.Bazaraa, J.Jarvis and H.Sherali. John Wiley & Sons, Inc., New York, Second Edition 1990.
2. **Introduction to Linear Optimization**, D.Bertsekas and J.Tsitsiklis. Athena Scientific USA, 1997.
3. **Linear Programming**, V.Chvátal. W.H. Freeman and Company, New York, 1983.
4. **Linear Programming and Extensions**, G. Dantzig. Princeton University Press, New Jersey, tenth printing, 1993.
5. **Introducción a la Programación Lineal y No Lineal**, D.Luenberger. Adisson Wesley Iberoamericana, 1989.
6. **Linear and Combinatorial Programming**, K. Murty. John Wiley & Sons, Inc., New York, Second Edition 1976.
7. **Model Building in Mathematical Programming**, H.P. Williams. John Wiley & Sons, Inc., New York, 4rd Edition 1999.

II. Modelos de Programación Matemática
Programación Lineal

DIRECCIONES ELECTRÓNICAS EN PROGRAMACIÓN LINEAL

•Preguntas de consulta frecuente en Programación Lineal:
http://www-unix.mcs.anl.gov/otc/Guide/faq/linear-programming-faq.html

•Servidor NEOS, guía de software de Programación Lineal:
http://www-fp.mcs.anl.gov/otc/Guide/SoftwareGuide/Categories/linearprog.html

•Servidor NEOS, ejemplo problema de la dieta:
http://www-fp.mcs.anl.gov/otc/Guide/CaseStudies/diet/index.html

•Guía de software de Programación Lineal en revista OR&MS Today (INFORMS Magazine):
http://lionhrtpub.com/software-surveys.shtml

Contenidos

II. Modelos de Programación Matemática
Programación Entera

Temario:

III.1. Introducción y ejemplos de modelamiento.

III.2. Resolución de problemas de P. E.

III.3. Método de Branch and Bound.

III.1. Introducción y ejemplos de modelamiento.

a) Problema de la mochila.

Una empresa está pensando invertir en cuatro proyectos diferentes, cada proyecto se finaliza a lo más en 3 años. Los flujos de caja requeridos en cada año junto con el Valor Presente Neto de cada proyecto, concluídos los años de ejecución, y las disponibilidades de recursos financieros se resumen en la siguiente tabla:

III.1. Introducción y ejemplos de modelamiento.

	Proy 1	Proy 2	Proy 3	Proy 4	Disp. Recursos
Año 1	10	8	6	12	30
Año 2	8	15	4	0	15
Año 3	18	0	16	0	12
V.P.N.	35	18	24	16	

Interesa determinar en cuáles proyectos invertir de modo de conseguir el mayor V.P.N. de la inversión.

II. Modelos de Programación Matemática
Programación Entera

III.1. Introducción y ejemplos de modelamiento.

Variables de decisión:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{si se invierte en el proyecto } i \\ 0, & \text{sino} \end{cases} \qquad \text{con } i = 1,2,3,4$$

Función objetivo:

$$\text{Max } 35x_1 + 18x_2 + 24x_3 + 16x_4$$

Investigación de Operaciones

III.1. Introducción y ejemplos de modelamiento.

Restricciones (tres alternativas):

1) Reinvirtiendo el dinero no utilizado en un período:

Año1: $\mathbf{10x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 12x_4 + s_1 = 30}$

Año2: $\mathbf{8x_1 + 15x_2 + 4x_3 + s_2 = 15 + s_1}$

Año3: $\mathbf{18x_1 + 16x_3 \leq 12 + s_2}$

$\mathbf{x_i \in \{0,1\} \qquad i = 1,2,3,4}$

III.1. Introducción y ejemplos de modelamiento.

2) Sin invertir el dinero no utilizado en un período, pero utilizando el retorno de los proyectos concluídos:

Año1: $\mathbf{10x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 12x_4 \leq 30}$

Año2: $\mathbf{8x_1 + 15x_2 + 4x_3 \leq 15 + 16x_4}$

Año3: $\mathbf{18x_1 + 16x_3 \leq 12 + 18x_2}$

$\mathbf{x_i \in \{0,1\} \qquad i = 1,2,3,4}$

II. Modelos de Programación Matemática
Programación Entera

III.1. Introducción y ejemplos de modelamiento.

3) Reinvirtiendo el dinero no utilizado en un período y, también el retorno de proyectos concluídos:

Año1: $\mathbf{10x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 12x_4 + s_1 = 30}$

Año2: $\mathbf{8x_1 + 15x_2 + 4x_3 + s_2 = 15 + s_1 + 16x_4}$

Año3: $\mathbf{18x_1 + 16x_3 \leq 12 + s_2 + 18x_2}$

$\mathbf{x_i \in \{0,1\} \quad i = 1,2,3,4}$

III.1. Introducción y ejemplos de modelamiento.

Notar que el conjunto de las soluciones factibles es finito. Esto ocurrirá generalmente con los problemas de Programación Entera (puros). En el ejemplo, el número de soluciones factibles no supera el número de las soluciones binarias del problema (variables restringidas sólo a valores 0 o 1) que son $\mathbf{2^4 = 16}$, dado el número de variables utilizadas, de hecho las soluciones factibles son menos de 16 pues en particular $\mathbf{x_i=1}$ para **i=1,2,3,4** no satisface las disponibilidades de capital en cualquiera de las tres alternativas.

III.1. Introducción y ejemplos de modelamiento.

Supongamos que adicionalmente la inversión efectuada requiera nuevas restricciones.

i) Se debe invertir en al menos 1 de los 3 primeros proyectos:

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 1$$

i) El proyecto 2 no puede ser tomado a menos que el proyecto 3 si sea tomado:

$$x_2 \leq x_3$$

III.1. Introducción y ejemplos de modelamiento.

iii) Se puede tomar el proyecto 3 o 4 pero no ambos:

$$\mathbf{x_3 + x_4 \leq 1}$$

iv) No se puede invertir en más de dos proyectos:

$$\mathbf{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 2}$$

III.1. Introducción y ejemplos de modelamiento.

b) Cumplimiento de un subconjunto de las restricciones de un problema.

Consideremos un problema que posee las siguientes restricciones:

$$12x_1 + 24x_2 + 18x_3 \leq 2400$$

$$15x_1 + 32x_2 + 12x_3 \leq 1800$$

$$20x_1 + 15x_2 + 20x_3 \leq 2000$$

III.1. Introducción y ejemplos de modelamiento.

Supongamos además, que nos basta con obtener alguna solucion óptima que verifique el cumplimiento de al menos 2 de las 3 restricciones anteriores.

Variables de decisión:

$$y_j = \begin{cases} 1, & \text{si la restricción } j \text{ se satisface} \\ 0, & \text{sino} \end{cases}$$

III.1. Introducción y ejemplos de modelamiento.

Cada inecuación anterior la reemplazamos por:

$$\mathbf{12x_1 + 24x_2 + 18x_3 \leq 2400 + M_1\,(1- y_1)}$$

$$\mathbf{15x_1 + 32x_2 + 12x_3 \leq 1800 + M_2\,(1- y_2)}$$

$$\mathbf{20x_1 + 15x_2 + 20x_3 \leq 2000 + M_3\,(1- y_3)}$$

Además, debemos agregar la restricción que permita que a lo más una de las restricciones no se cumpla:

$\mathbf{y_1 + y_2 + y_3 \geq 2}$ $\qquad$ $\mathbf{M_i}$ = constante lo suf. grande

III.1. Introducción y ejemplos de modelamiento.

c) Inclusión de costos fijos.

Supongamos que se desea tener lotes de compra de un producto dado, para satisfacer demandas que fluctúan en el tiempo sobre un horizonte de planificación dividido en T períodos.

Asumimos conocidos: una estimación de la demanda $\mathbf{d_t}$, con $\mathbf{t = 1, 2, ..., T}$, los costos fijos asociados a la compra de una unidad $\mathbf{p_t}$,

Investigación de Operaciones

III.1. Introducción y ejemplos de modelamiento.

los costos asociados al mantenimiento de una unidad en inventario de cada período $\mathbf{h_t}$ y los costos fijos asociados a la gestión de compra en el período t, $\mathbf{s_t}$.

Observación: no se permite unidades de faltante.

III.1. Introducción y ejemplos de modelamiento.

Variables de decisión

x_t: número de unidades compradas en t.

I_t : nivel de inventario al final del período t.

$$y_t = \begin{cases} 1, & \text{si se hace una compra en el periodo } t \\ 0, & \text{sino} \end{cases}$$

con **t: 1, 2, ..., T**

III.1. Introducción y ejemplos de modelamiento.

Función objetivo

$$\text{Min} \quad \sum_{t=1}^{T} s_t\, y_t + p_t\, x_t + h_t\, I_t$$

Restricciones

$x_t + I_{t-1} - I_t = d_t \qquad t = 1, 2, ..., T$

I_0 = inventario inicial

$x_t \leq M_t\, y_t \qquad t = 1, 2, ..., T$

M_t = cte. grande

III.1. Introducción y ejemplos de modelamiento.

d) Problema de cobertura:

Dado un número de regiones o zonas, en las cuales se ha subdividido una comuna, cuidad, país, etc., digamos que un total de **m**, se desea instalar un cierto número de servidores (escuelas, centros de atención primaria de salud, compañías de bomberos, etc.) de entre un conjunto de **n** potenciales servidores ubicados en alguna de las zonas dadas.

III.1. Introducción y ejemplos de modelamiento.

Se conoce la información relativa a que zonas pueden ser atendidas por cada uno de los n potenciales servidores, es decir, se conoce la matriz de incidencia **A = (a_{ij})** donde :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si la zona } i \text{ puede ser atendida por el servidor } j \\ 0, & \text{sino} \end{cases}$$

$$\text{con} \quad i = 1,2,\ldots,m \quad \text{y} \quad j = 1,2,\ldots,n$$

III.1. Introducción y ejemplos de modelamiento.

Se desea determinar cuáles son los servidores que deben ser instalados de modo de dar cobertura a cada zona, dados los costos de instalación $\mathbf{c}_j$ del servidor j.

Variables de desición:

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{si se instala el servidor } j \\ 0, & \text{sino} \end{cases}$$

III.1. Introducción y ejemplos de modelamiento.

Función objetivo:

$$\text{Min} \quad \sum_{j=1}^{n} c_j \, x_j$$

Restricciones: Para cada zona i

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, x_j \geq 1$$

Se agrega la siguiente restricción, si adicionalmente, hay algún límite en el número de servidores que se pueden instalar (digamos k) :

$$\sum_{j=1}^{m} x_j \leq k$$

III.1. Introducción y ejemplos de modelamiento.

e) Problema de transporte y localización :

Si se tiene un conjunto de **m** clientes que demandan $\mathbf{d}_i$ unidades de un producto determinado. Una compañía desea satisfacer esas demandas desde un cierto conjunto de plantas elegidas de **n** potenciales lugares donde se instalarán.

III.1. Introducción y ejemplos de modelamiento.

Sean $\mathbf{c}_j$ los costos asociados a la instalación de la planta j , $\mathbf{v}_j$ el costo unitario de producción de la planta j y $\mathbf{t}_{ij}$ el costo de transporte de una unidad desde la planta j al cliente i .

Se desea decidir cuáles plantas abrir y el tamaño de cada una de modo de satisfacer las demandas estimadas.

III.1. Introducción y ejemplos de modelamiento.

Variables de decisión:

$$y_j = \begin{cases} 1, & \text{si se abre la planta } j \\ 0, & \text{sino} \end{cases}$$

x_{ij} = el número de unidades elaboradas en la **planta j** para satisfacer el **cliente i**, con j = 1,...,n y i = 1,....,m.

III.1. Introducción y ejemplos de modelamiento.

Función objetivo:

$$\text{Min} \quad \sum_{j=1}^{n} c_j y_j + \sum_{j=1}^{n} v_j \left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \right) + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} t_{ij} x_{ij}$$

Costo de Instalación	Costo de Producción	Costo de Transporte

III.1. Introducción y ejemplos de modelamiento.

Restricciones:

1) Demanda cliente i:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq d_i$$

2) Relacionar variables de producción con las asociadas a la apertura de plantas (variables binarias):

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq M_j \, y_j$$

donde $\mathbf{M_j}$ es una constante grande (por ejemplo, capacidad máxima de producción de la planta j), con $\mathbf{x_{ij} \geq 0}$ e $\mathbf{y_j \in \{0,1\}}$.

II. Modelos de Programación Matemática
Programación Entera

Temario:

III.1. Introducción y ejemplos de modelamiento.

III.2. Resolución de problemas de P. E.

III.3. Método de Branch and Bound.

III.2. Resolución de problemas de P. E.

Supongamos que tenemos el siguiente problema de programación lineal:

$$
\begin{array}{lll}
\textbf{PL)} & \textbf{Max} & \mathbf{c^T x} \\
 & \textbf{s.a.} & \mathbf{A\,x = b} \\
 & & \mathbf{x \geq 0}
\end{array}
$$

Pero todas o una parte de las variables deben restringir su valor a números enteros, dando origen a un problema de **Programación Entera (puro)** o de **Programación Entera- Mixta**, respectivamente.

III.2. Resolución de problemas de P. E.

Por ejemplo:

$$\text{PLE)} \quad \mathbf{Max} \quad c^T x$$
$$\text{s.a.} \quad A\,x = b$$
$$x \geq 0,\ x_j \text{ entero}$$

El problema PL) corresponde a la relajación continua del problema PLE), que resulta de eliminar las condiciones de integralidad de las variables de decisión en PLE).

III.2. Resolución de problemas de P. E.

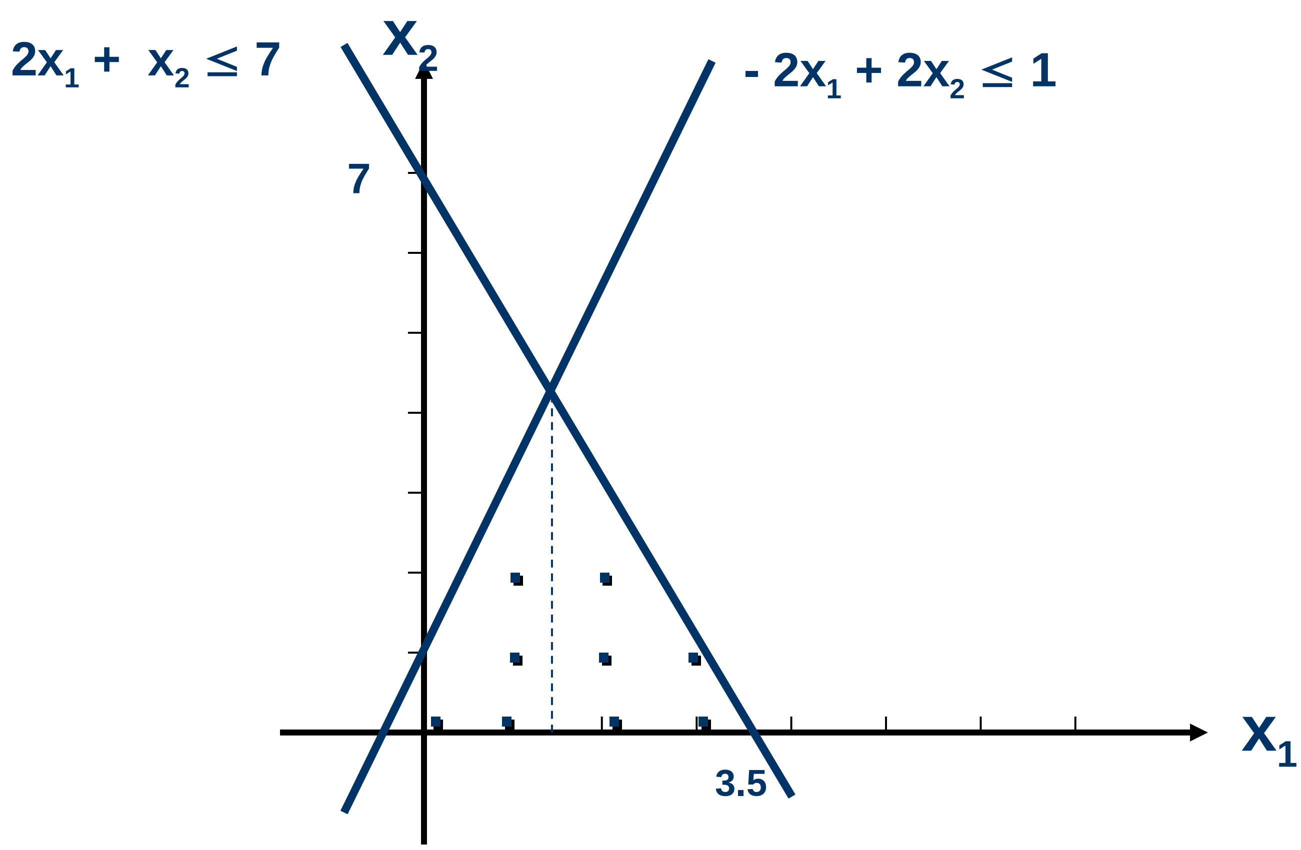
El valor óptimo de PL) provee sólo una cota superior del valor óptimo de PLE). Notar sin embargo, que si la solución óptima de PL) cumple con la integralidad de los valores requiridos, entonces esta solución es también solución óptima de PLE).

III.2. Resolución de problemas de P. E.

Ejemplo

$$
\begin{array}{lll}
\textbf{PLE)} & \textbf{Max} & x_2 \\
 & \textbf{s.a.} & -2x_1 + 2x_2 \leq 1 \\
 & & 2x_1 + x_2 \leq 7 \\
 & & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \quad \textbf{enteros}
\end{array}
$$

III.2. Resolución de problemas de P. E.



III.2. Resolución de problemas de P. E.

Notar que en el ejemplo la solución óptima puede ser hallada por simple enumeración de todas las soluciones factibles. Aquí las soluciones óptimas son:

$\mathbf{x_1^* = 1}$ o $\mathbf{x_1^* = 2}$

$\mathbf{x_2^* = 1}$ $\mathbf{x_2^* = 1}$

Esta alternativa de enumeración queda naturalmente restringida a problemas muy pequeños.

III.2. Resolución de problemas de P. E.

Alternativamente, podemos resolver la relajación continua asociada al problema PLE). Si la solución óptima de la relajación continua da una solución entera, esa es la solución óptima no solo del problema lineal sino que también lo es del problema lineal entero.

En el ejemplo, la solución de la relajación continua es:

$$\mathbf{x_1 = 3/2}$$

$$\mathbf{x_2 = 2}$$

III.2. Resolución de problemas de P. E.

A partir de esta última solución podemos redondear o truncar los valores que no salieron enteros, obteniendo respectivamente en el ejemplo:

$$\mathbf{x_1 = 2} \qquad\qquad \mathbf{x_1 = 1}$$

$$\mathbf{x_2 = 2} \qquad\qquad \mathbf{x_2 = 2}$$

las cuales no son soluciones factibles de PLE), de modo que desde el punto de vista de una resolución numérica no es suficiente con resolver la relajación continua.

III.2. Resolución de problemas de P. E.

Todavía podrían resultar soluciones factibles de PLE), pero no neceasariamente óptimas. Por ejemplo:

$$
\begin{array}{lll}
\textbf{PLE)} & \textbf{Max} & f(x_1, x_2) = x_1 + 5x_2 \\
 & \textbf{s.a.} & x_1 + 10x_2 \leq 10 \\
 & & x_1 \leq 1 \\
 & & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \qquad \textbf{enteros}
\end{array}
$$

III.2. Resolución de problemas de P. E.

Solución óptima de PL)

$$x_1 = 1 \qquad f(1,9/10)=5,5$$

$$x_2 = 9/10$$

Redondeando o truncando los valores

$$x_1 = 1 \quad \text{infactible} \qquad x_1 = 1 \quad f(1,0)=1$$

$$x_2 = 1 \qquad\qquad\qquad x_2 = 0$$

Pero la solución óptima de PLE) es:

$$x_1 = 0; \qquad x_2 = 1; \qquad v(PLE) = 5$$

III.3. Método de Branch and Bound.

Si el problema **P_i)** resulta agotado y da solución entera, mejorar el valor de la cota inferior de **v(PLE).**

Si todos los problemas están agotados, parar.

Solución óptima de **PLE),** la solución entera asociada a la actual cota inferior de **v(PLE),** si existe (si no existe entonces PLE) es infactible)

Si el problema no está agotado pasar al paso 2.

III.3. Método de Branch and Bound.

Paso 2

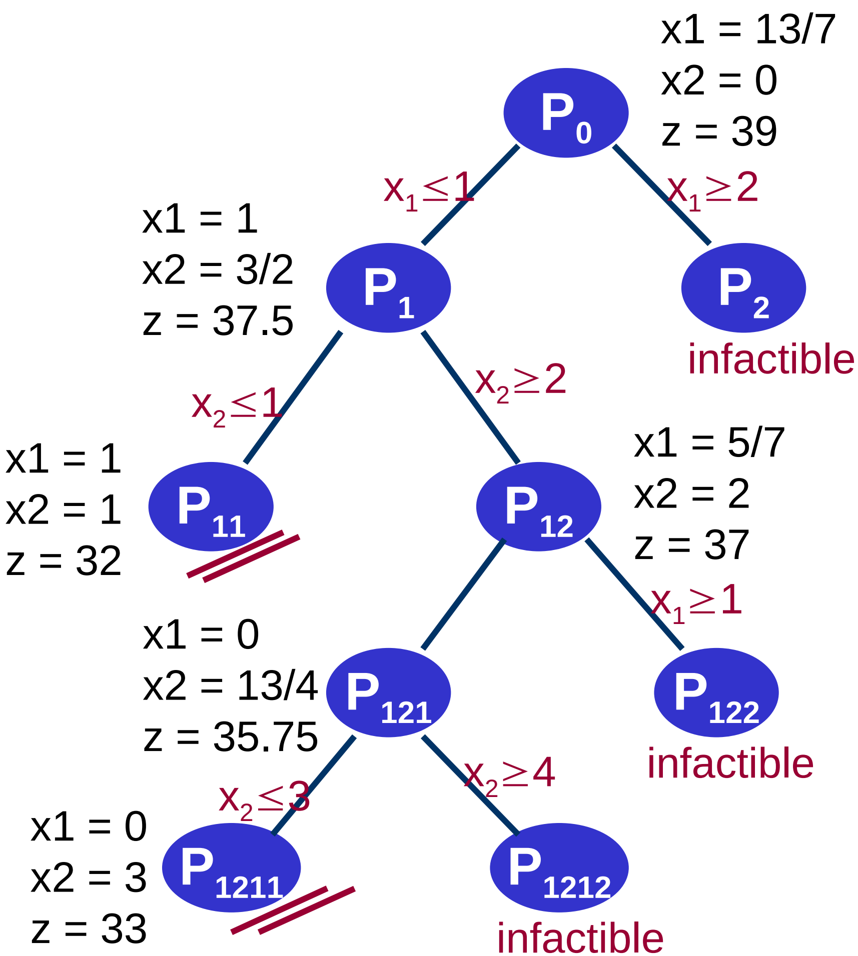
Seleccionar una variable $\mathbf{x_j = \hat{u}_j}$, cuyo valor en la solución óptima de $\mathbf{P_i)}$ no de entero.

Eliminar la región correspondiente a

$$\lfloor \hat{u}_j \rfloor < \hat{u}_j < \lfloor \hat{u}_j \rfloor + 1$$

Crear dos nuevos problemas de programación lineal que incorporen a $\mathbf{P_i)}$ dos restricciones mutuamente excluyentes: $\mathbf{x_j \leq \lfloor \hat{u}_j \rfloor}$, $\mathbf{x_j \geq \lfloor \hat{u}_j \rfloor + 1}$ una en cada problema y volver al paso 1.

III.3. Método de Branch and Bound.



P_0) **Relajación continua**

$-\infty < z \leq 39$

P_1) **Max $\quad 21x_1 + 11x_2$**

s.a. $\quad 7x_1 + 4x_2 \leq 13$

$x_1 \leq 1$

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$

P2) **Max $\quad 21\,x_1 + 11x_2$**

s.a. $\quad 7x_1 + 4x_2 \leq 13$

$x_1 \leq 1$

$x_2 \leq 1$

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$

De donde $32 \leq z \leq 39$

↓

Solución óptima

II. Modelos de Programación Matemática
Programación Entera

BIBLIOGRÁFIA EN PROGRAMACIÓN ENTERA

1) **Integer Programming**, L.A.Wolsey. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1998.

2) **Combinatorial Optimization** C.H.Papadimitriou and K.Steiglitz. Prentice Hall Inc., USA, 1982.

3) **Linear and Combinatorial Programming**, K. Murty. John Wiley & Sons, Inc., New York, Second Edition 1976.

4) **Integer and Combinatorial Optimization**, George L. Nemhauser and Laurence A. Wolsey. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999.

5) **Model Building in Mathematical Programming**, H.P. Williams. John Wiley & Sons, Inc., New York, 4rd Edition 1999.

II. Modelos de Programación Matemática
Programación Entera

DIRECCIONES ELECTRÓNICAS EN PROGRAMACIÓN ENTERA

- Preguntas de consulta frecuente en Programación Lineal:
http://www-unix.mcs.anl.gov/otc/Guide/faq/linear-programming-faq.html

- Servidor NEOS, guía de software de Programación Entera:
http://www-fp.mcs.anl.gov/otc/Guide/SoftwareGuide/Categories/intprog.html

- Servidor NEOS, ejemplo problema corte de rollos:
http://www-fp.mcs.anl.gov/otc/Guide/CaseStudies/cutting/index.html

- Guía de software de Programación Lineal en revista OR&MS Today (INFORMS Magazine):
http://lionhrtpub.com/software-surveys.shtml

Capítulo 5

Pronósticos

Objetivos de aprendizaje

Al terminar de estudiar este capítulo, el alumno será capaz de:

1. **Entender y saber cuándo usar las diferentes familias de modelos de pronósticos.**
2. **Comparar promedios móviles, suavizamiento exponencial y otro modelo de series de tiempo.**
3. **Ajustar los datos estacionalmente.**
4. **Comprender el enfoque Delphi y otros enfoques cualitativos para la toma de decisiones.**
5. **Calcular varias medidas de error.**

- **The Sales VP is agitated…very agitated.**
- **“Don’t tell me what you CANNOT do, I made the sale, now you fill the orders!!!”**
- **The Operations VP responds in kind, “Your forecast was not even close to what you just booked. We cannot increase supply that fast!”**

Forecasting

A Business Needs a Forecast of What Might Happen, Not Just a Real-time View

Introducción

- **Los gerentes tratan siempre de reducir la incertidumbre e intentan hacer mejores estimaciones de lo que sucederá en el futuro.**
  - **Lograr esto es el objetivo principal de la elaboración de los pronósticos.**
  - **En muchas empresas (sobre todo las pequeñas), el proceso completo es subjetivo e incluye los métodos improvisados, la intuición y los años de experiencia.**
  - **También hay varias técnicas cuantitativas, entre ellos:**
    - **Promedios móviles**
    - **Suavizamiento exponencial**
    - **Proyecciones de tendencias**
    - **Análisis de regresión por mínimos cuadrados.**

Introducción

- **Ocho pasos para elaborar pronósticos:**

  1. **Determinar el uso del pronóstico: ¿qué meta tratamos de alcanzar?**
  2. **Seleccionar los artículos o las cantidades que se van a pronosticar.**
  3. **Determinar el horizonte de tiempo del pronóstico**
  4. **Elegir el modelo o los modelos de pronósticos.**
  5. **Reunir los datos o la información necesaria para realizar el pronóstico.**
  6. **Validar el modelo del pronóstico.**
  7. **Efectuar el pronóstico.**
  8. **Implementar los resultados.**

Introducción

- Estos pasos indican de una manera sistemática cómo iniciar, diseñar e implementar un sistema de pronósticos.
- Cuando el sistema de pronósticos se usa para generar pronósticos periódicamente, los datos deben recolectarse por rutina, y los cálculos o procedimientos reales utilizados para hacer el pronóstico pueden hacerse de forma automática.
- Pocas veces existe un único método de pronósticos que sea superior.
  - Diferentes organizaciones pueden usar técnicas diferentes.
  - Cualquiera que sea la herramienta que funcione para una empresa, esa es la que debería usarse.

Modelos de pronósticos

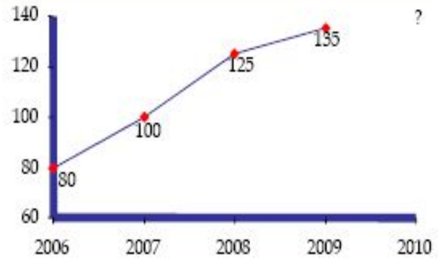
Técnicas de pronóstico

- **Modelos cualitativos**
  - Métodos Delphi
  - Jurado de opinión ejecutiva
  - Compuesto de fuerza de ventas
  - Encuesta al mercado de consumidores
- **Métodos de series de tiempo**
  - Promedios móviles
  - Suavizamiento exponencial
  - Proyecciones de tendencia
  - Descomposición
- **Métodos Causales**
  - Análisis de regresión
  - Regresión Múltiple

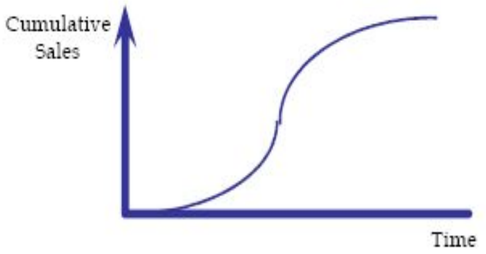
Figura 5.1

Forecasting Methods: Several methods can be used to forecast

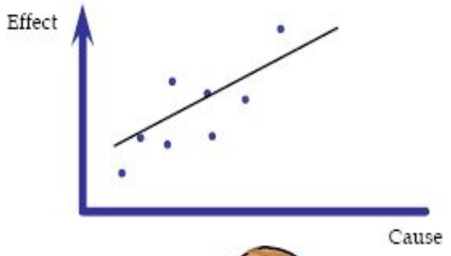
Times Series ➔ Uses prior history to project



Life Cycle ➔ Uses the sales curve of similar products or product lines



Cause-Effect ➔ Uses cause-effect relationships, uses forecast of cause to predict effect



Judgmental ➔ Uses opinion-based information

Modelos cualitativos

- **Los *modelos cualitativos* intentan incorporar factores subjetivos.**
- **Los modelos cualitativos son útiles sobre todo cuando se espera que los factores subjetivos sean muy importantes o cuando es difícil obtener datos cuantitativos precisos.**
- **Las técnicas cualitativas de pronósticos son:**
  - **Método Delphi**
  - **Jurado de opinión ejecutiva**
  - **Consulta a vendedores**
  - **Encuesta al mercado de consumidores**

Modelos cualitativos

- ***Método Delphi*** **– Este proceso iterativo de grupo permite que expertos, quienes podrían encontrarse en diferentes lugares, hagan pronósticos; los encuestados brindan información a quienes toman las decisiones.**
- ***Jurado de opinión*** **– Este método toma las opiniones de un pequeño grupo de gerentes de alto nivel, con frecuencia en combinación con modelos estadísticos para el análisis.**
- ***Consulta a vendedores*** **– En este enfoque, cada persona de ventas estima las ventas en su región; tales datos después se combinan a niveles estatal y nacional.**
- ***Encuesta al mercado de consumidores*** **– Este método solicita información a los consumidores o clientes potenciales respecto a sus planes de compra futuros.**

Modelo de pronósticos de series de tiempo

- Los **modelos de pronósticos de series de tiempo** predicen valores futuros *tan solo* a partir de datos históricos de esa variable.
- Los modelos comunes de una series de tiempo son:
  - Promedios móviles
  - Suavizamiento exponencial
  - Proyecciones de tendencia
  - Descomposición
- El análisis de regresión se usa en las proyecciones de tendencia y en un tipo de modelo de descomposición.

Modelos causales

- Los *modelos causales* incorporan las variables o factores que pueden influir en la cantidad que se pronostica.
- El objetivo es desarrollar un modelo con la mejor relación estadística entre la variable que pronosticamos, y el conjunto de variables independientes.
- El modelo causal cuantitativo más común es el análisis de regresión

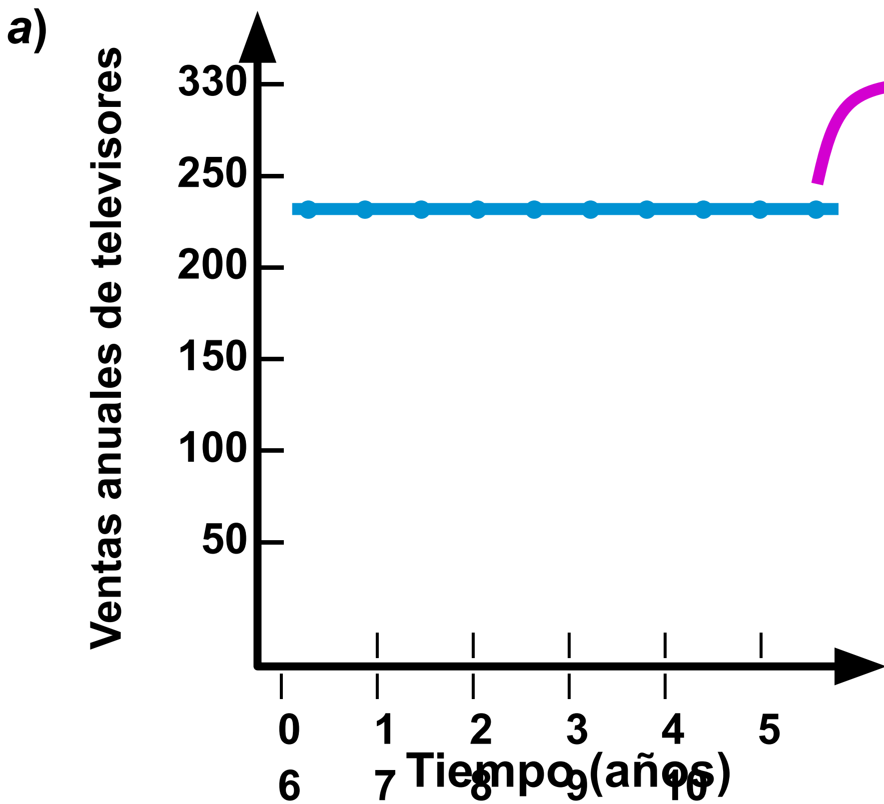
Diagrama de dispersión

Wacker Distributors necesita pronosticar las ventas para tres productos diferentes (en la tabla vetas anuales en unidades):

AÑO	TELEVISORES	RADIOS	REPRODUCTORES DE CD
1	250	300	110
2	250	310	100
3	250	320	120
4	250	330	140
5	250	340	170
6	250	350	150
7	250	360	160
8	250	370	190
9	250	380	200
10	250	390	190

Tabla 5.1

Diagrama de dispersión para televisores



- Las ventas parecen constantes en el tiempo.

Ventas = 250

- Una buena estimación de ventas en el año 11 es de 250 televisores.

Figura 5.2a

Diagrama de dispersión para radios

b)

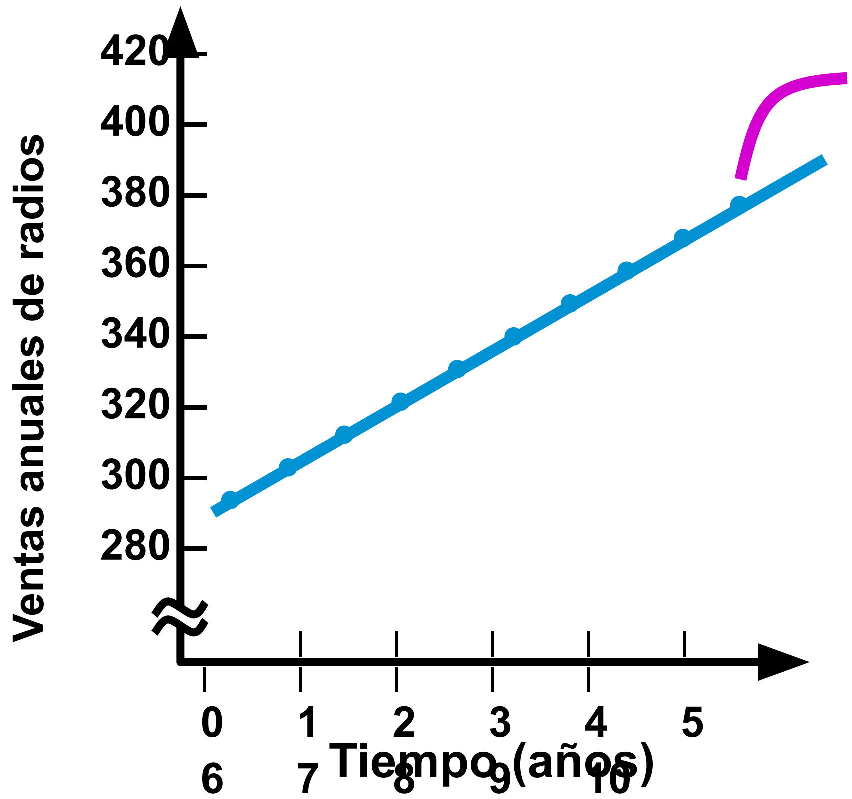


Figura 5.2b

- Las ventas parecen aumentar a una tasa constante de 10 radios cada año.

ventas = 290 + 10(años)

- Una estimación razonable de ventas de radios en el año 11 es de 400.

Diagrama de dispersión para reproductores de CD

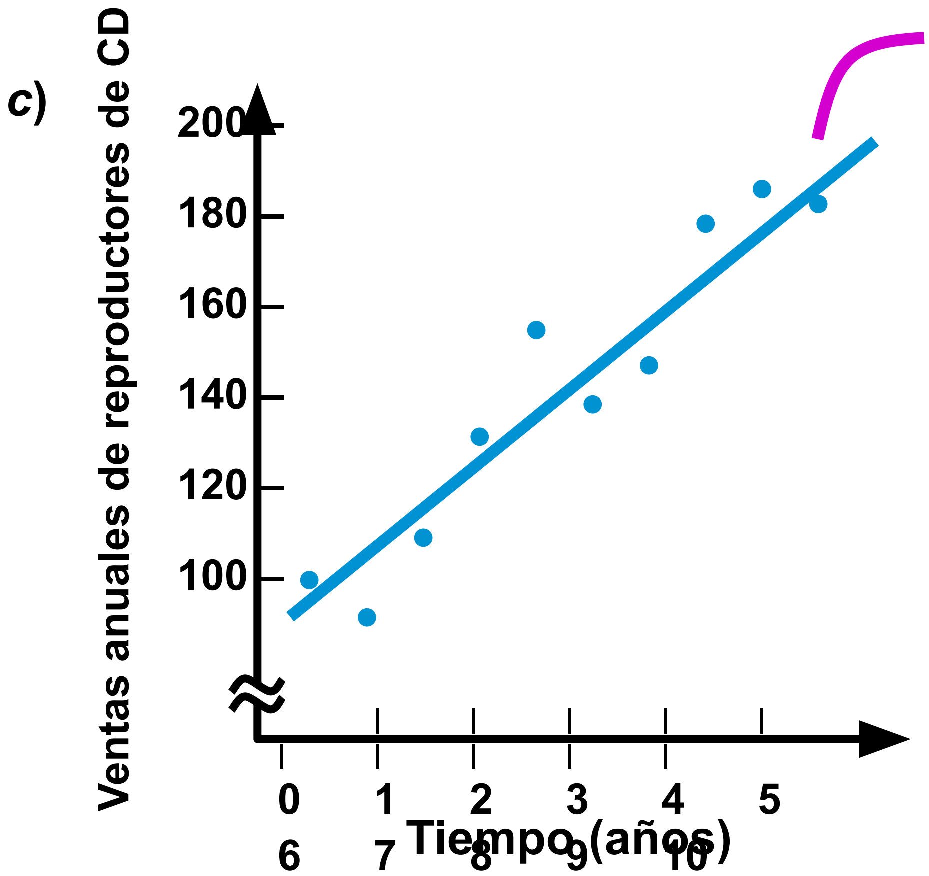


Figura 5.2c

- Esta recta de tendencia quizá no tenga una buena exactitud debido a la variación de un año a otro.
- Las ventas de reproductores sí parecen haber aumentado.
- Si tuviéramos que pronosticar las ventas futuras, tal vez elegiríamos una cifra más grande cada año.

Medidas de exactitud del pronóstico

- **Al comparar los valores pronosticados con los valores reales, se observa que tan bien funciona el modelo en comparación con otros.**

Error de pronóstico = Valor real – valor pronosticado

- **Una medida de exactitud es la *desviación media absoluta* (*DMA*):**

$$\mathbf{DMA} = \frac{\sum \left|\text{error del pronóstico}\right|}{n}$$

Medidas de exactitud del pronóstico

Con un modelo de pronósticos sencillo calculamos la DMA:

AÑO	VENTAS REALES DE REPRODUCTORES DE CD	PRONÓSTICO DE VENTAS	VALOR ABSOLUTO DE LOS ERRORES (DESVIACIÓN) [REAL – PRONÓSTICO]
1	110	—	—
2	100	110	|100 – 110| = 10
3	120	100	|120 – 110| = 20
4	140	120	|140 – 120| = 20
5	170	140	|170 – 140| = 30
6	150	170	|150 – 170| = 20
7	160	150	|160 – 150| = 10
8	190	160	|190 – 160| = 30
9	200	190	|200 – 190| = 10
10	190	200	|190 – 200| = 10
11	—	190	—
			Suma de |errores| = 160
			DMA = 160/9 = 17.8

Tabla 5.2

Medidas de exactitud del pronóstico

Con un modelo de pronósticos sencillo calculamos la DMA:

$$\text{DMA} = \frac{\sum |\text{error del pronóstico}|}{n} = \frac{160}{9} = 17.8$$

AÑO	VENTAS REALES DE REPRODUCTORES DE CD	PRONÓSTICO DE VENTAS	VALOR ABSOLUTO DE LOS ERRORES (DESVIACIÓN) [REAL – PRONÓSTICO]
1	110	—	—
			| = 10
			| = 20
			| = 20
			| = 30
			| = 20
			| = 10
8	190	160	|190 – 160| = 30
9	200	190	|200 – 190| = 10
10	190	200	|190 – 200| = 10
11	—	190	—
			Suma de |errores| = 160
			DMA = 160/9 = 17.8

Tabla 5.2

Medidas de exactitud del pronóstico

- **En ocasiones se emplean otras medidas de la exactitud al pronosticar.**
- **El *error cuadrado medio* (ECM):**

$$\mathbf{ECM} = \frac{\sum(\text{error})^2}{n}$$

- **El *error medio absoluto porcentual* (EMAP):**

$$\text{EMAP} = \frac{\sum \left| \frac{\text{error}}{\text{real}} \right|}{n} 100\%$$

- **Y el *sesgo* es el error promedio.**

Modelos de pronósticos de series de tiempo

- **Una serie de tiempo se basa en una secuencia de datos igualmente espaciados.**
- **Pronosticar con datos de series de tiempo implica que se predicen valores futuros tan solo a partir de datos históricos de esa variable, y que se ignoran otras.**

Componentes de una serie de tiempo

Cuatro componentes comunes de una serie de tiempo:

1. **Tendencia (*T*) es el movimiento gradual hacia arriba o hacia abajo de los datos en el tiempo.**
2. **Estacionalidad (*S*) es el patrón de la fluctuación de la demanda arriba o abajo de la recta de tendencia, que se repite a intervalos regulares.**
3. **Ciclos (*C*) son patrones en los datos anuales que ocurren cada cierto número de años.**
4. **Variaciones aleatorias (*R*) son "saltos" en los datos ocasionados por el azar y por situaciones inusuales; no siguen un patrón discernible.**

Descomposición de una serie de tiempo

Demanda de productos graficada para 4 años, con tendencia y estacionalidad

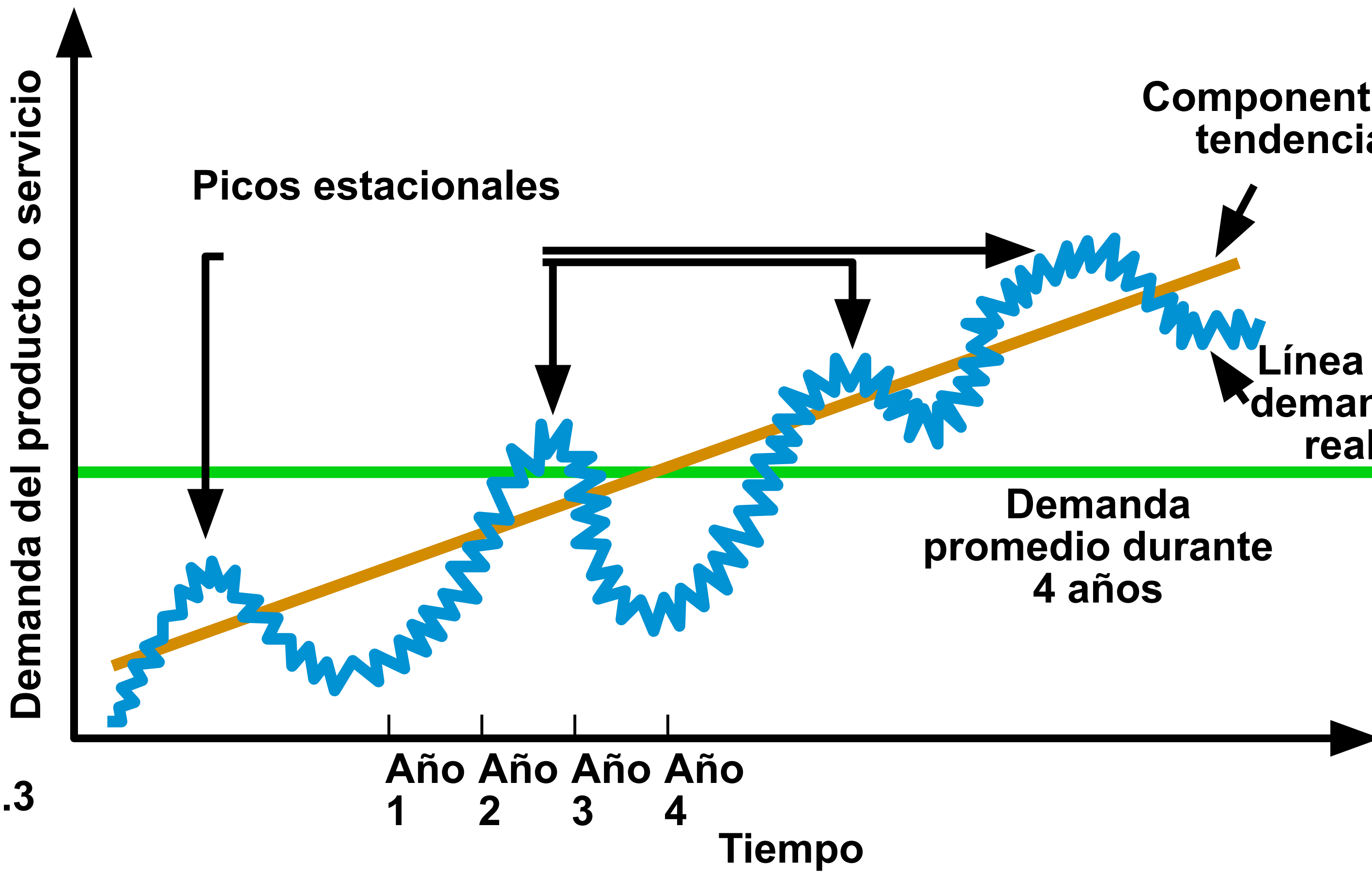


Figura 5.3

Descomposición de una serie de tiempo

- Existen dos formas generales de los modelos de series de tiempo :
  - Modelo multiplicativo:

$$\text{Demanda} = T \times S \times C \times R$$

  - Modelo aditivo:

$$\text{Demanda} = T + S + C + R$$

- Hay otros modelos que pueden ser una combinación de estos.
- Con frecuencia, quienes realizan pronósticos suponen que los errores se distribuyen normalmente con una media de cero.

Promedios móviles

- Los *promedios móviles* son útiles si suponemos que las demandas del mercado permanecerán bastante estables en el tiempo.
- Un pronóstico de promedio móvil de *n periodos, que sirve como estimación de la demanda del* siguiente periodo.
- Esto tiende a suavizar las irregularidades del corto plazo en la serie de datos.

$$\text{Pronóstico de promedio móvil} = \frac{\text{suma de demandas de } n \text{ periodos anteriores}}{n}$$

Promedios móviles

- **Matemáticamente:**

$$F_{t+1} = \frac{Y_t + Y_{t-1} + \ldots + Y_{t-n+1}}{n}$$

Donde:

F_{t+1} = **pronóstico para el periodo t + 1**

Y_t = **valor real en el periodo t**

n = **número de periodos para promediar**

Suministros de Wallace Garden

- **Suministros Wallace Garden quiere pronosticar la demanda para sus naves de almacenamiento.**
- **Se han recabado datos del año pasado.**
- **Están utilizando un promedio móvil de tres meses para pronosticar la demanda (n = 3).**

Suministros de Wallace Garden

MES	VENTAS REALES DE NAVES DE ALMACENAMIENTO	PROMEDIO MOVIL DE 3 MESES
Enero	10	
Febrero	12	
Marzo	13	
Abril	16	(10 + 12 + 13)/3 = 11.67
Mayo	19	(12 + 13 + 16)/3 = 13.67
Junio	23	(13 + 16 + 19)/3 = 16.00
Julio	26	(16 + 19 + 23)/3 = 19.33
Agosto	30	(19 + 23 + 26)/3 = 22.67
Septiembre	28	(23 + 26 + 30)/3 = 26.33
Octubre	18	(26 + 30 + 28)/3 = 28.00
Noviembre	16	(30 + 28 + 18)/3 = 25.33
Diciembre	14	(28 + 18 + 16)/3 = 20.67
Enero	—	$\boxed{(18 + 16 + 14)/3 = 16.00}$

Tabla 5.3

Promedio móvil ponderado

- El *promedio móvil ponderado* permite asignar diferentes pesos a las observaciones previas.
- Se suele utilizar cuando surge una tendencia u otro patrón.

$$F_{t+1} = \frac{\sum (\text{peso del periodo } i)(\text{valor real del periodo})}{\sum (\text{peso})}$$

- Matemáticamente:

$$F_{t+1} = \frac{w_1 Y_t + w_2 Y_{t-1} + \ldots + w_n Y_{t-n+1}}{w_1 + w_2 + \ldots + w_n}$$

donde

w_i = peso para la $i^{ésima}$ observación

Suministros de Wallace Garden

- Wallace Garden decide usar un modelo de promedio móvil ponderado para pronosticar la demanda para su nave de almacenamiento.
- Lo cual se implementa como sigue:

	PESOS APLICADOS	PERIODO
	3	Último mes
	2	Hace 2 meses
	1	Hace 3 meses

3 x venta del mes pasado + 2 x ventas de hace 2 meses + 1 X venta de hace 3 meses

6

Suma de los pesos

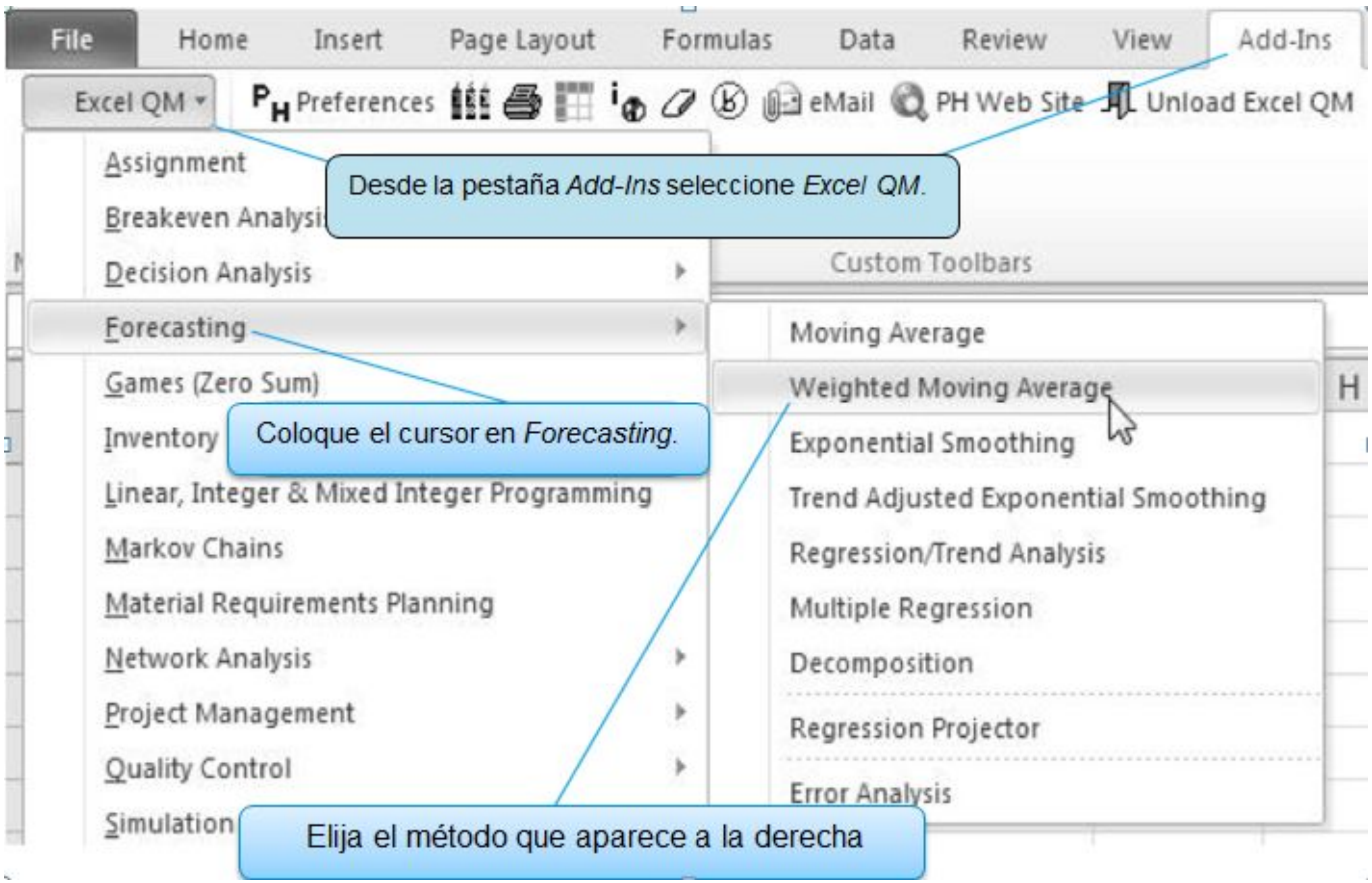
Suministros de Wallace Garden

MES	VENTAS REALES DE NAVES DE ALMACENAMINIENTO	PROMEDIO MÓVIL DE 3 MESES
Enero	10	
Febrero	12	
Marzo	13	
Abril	16	[(3 X 13) + (2 X 12) + (10)]/6 = 12.17
Mayo	19	[(3 X 16) + (2 X 13) + (12)]/6 = 14.33
Junio	23	[(3 X 19) + (2 X 16) + (13)]/6 = 17.00
Julio	26	[(3 X 23) + (2 X 19) + (16)]/6 = 20.50
Agosto	30	[(3 X 26) + (2 X 23) + (19)]/6 = 23.83
Septiembre	28	[(3 X 30) + (2 X 26) + (23)]/6 = 27.50
Octubre	18	[(3 X 28) + (2 X 30) + (26)]/6 = 28.33
Noviembre	16	[(3 X 18) + (2 X 28) + (30)]/6 = 23.33
Diciembre	14	[(3 X 16) + (2 X 18) + (28)]/6 = 18.67
Enero	—	[(3 X 14) + (2 X 16) + (18)]/6 = 15.33

Tabla 5.4

Suministros de Wallace Garden

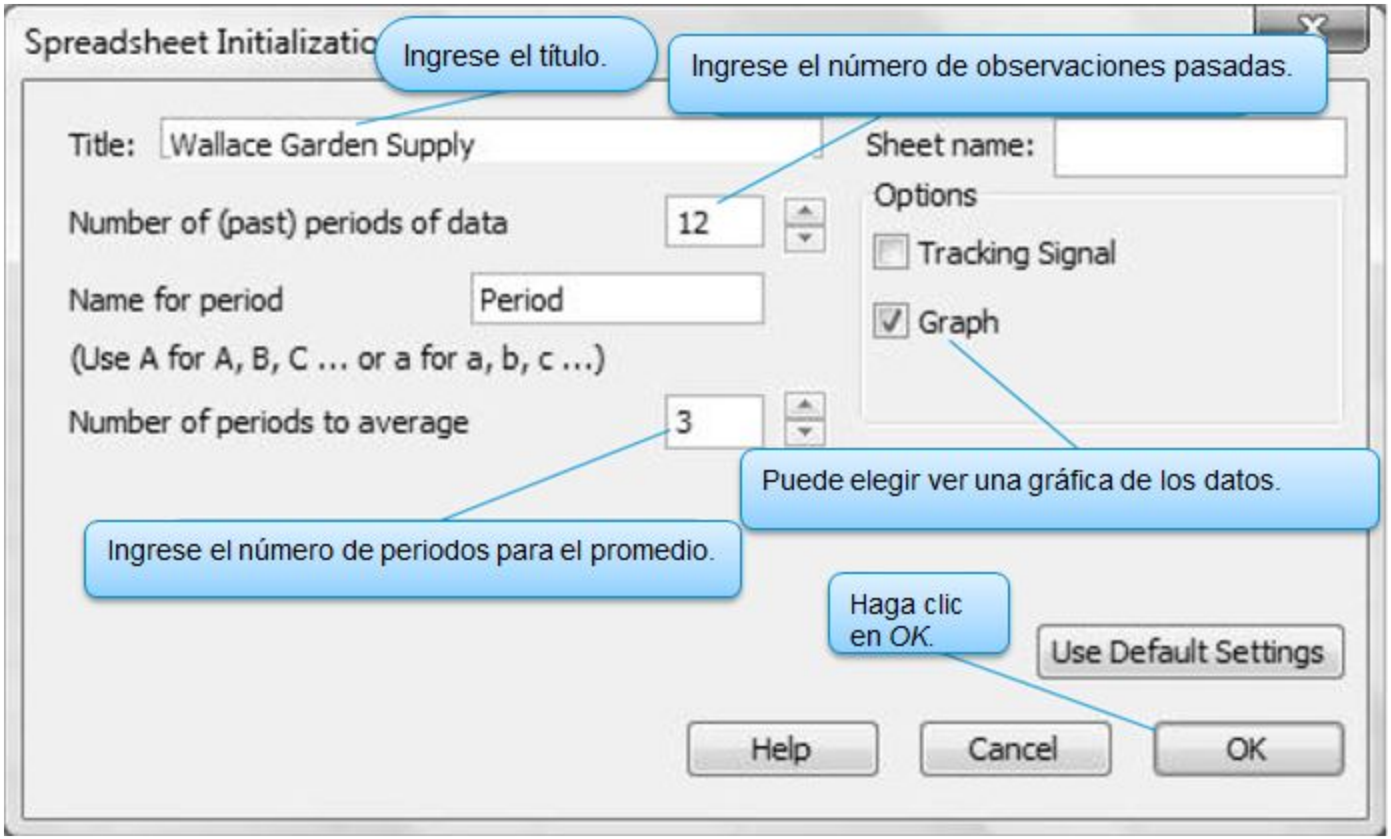
Selección del módulo de pronósticos en Excel QM



Programa 5.1A

Suministros de Wallace Garden

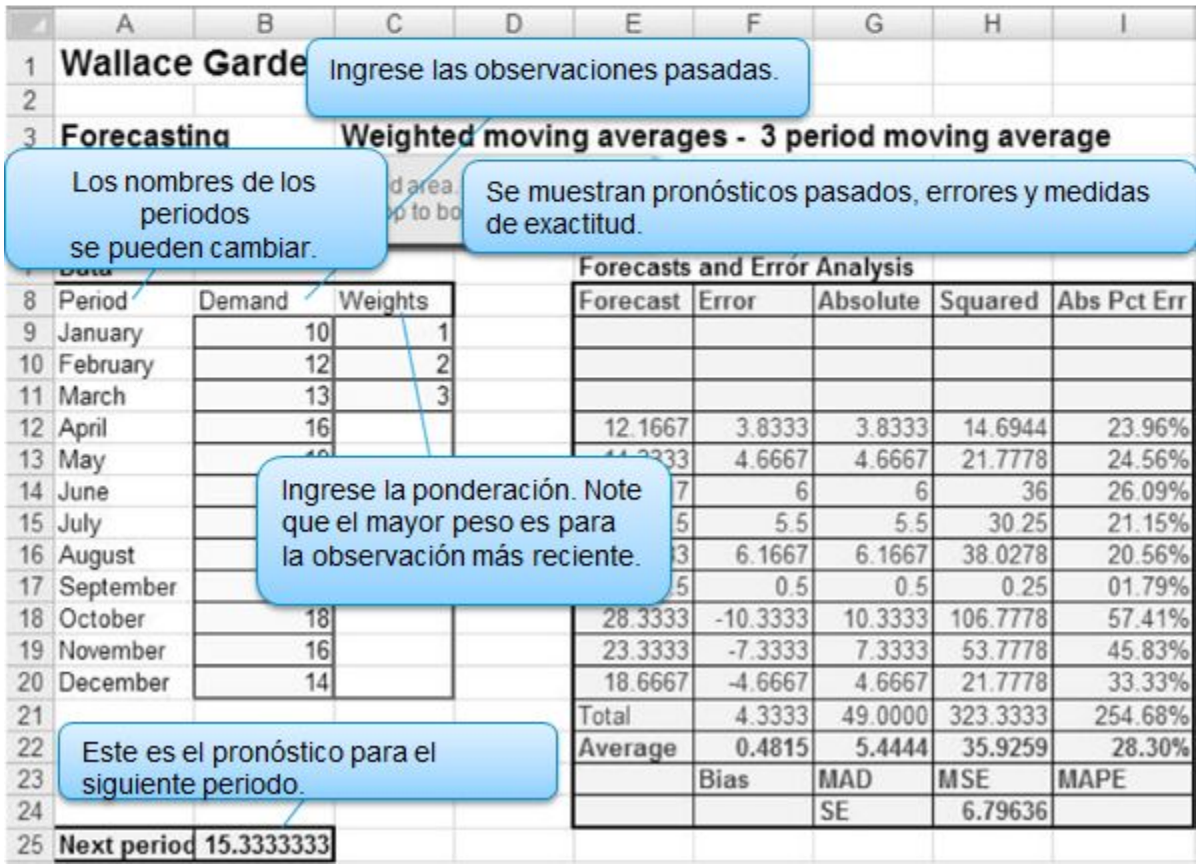
Ventana de inicio para el promedio móvil ponderado



Programa 5.1B

Suministros Wallace Garden

Promedio móvil ponderado en Excel QM para Wallace Garden.



Programa 5.1C

Suavizamiento exponencial

- El ***suavizamiento exponencial*** **es un tipo de promedio móvil de uso sencillo y que necesita llevar algún registro de datos pasados.**

Nuevo pronóstico = pronóstico del último periodo
+ α (demanda real del último periodo
– pronóstico del último periodo)

donde α es un peso (o *constante de suavizamiento*) donde $0 \leq \alpha \leq 1$.

Suavizamiento exponential

Matemáticamente:

$$F_{t+1} = F_t + \alpha(Y_t - F_t)$$

donde:

- F_{t+1} = nuevo pronóstico (para el periodo t + 1)
- F_t = pronóstico previo (para el periodo t)
- α = constante de suavizamiento ($0 \leq \alpha \leq 1$)
- Y_t = demanda real para el periodo anterior

El concepto no es complejo: la última estimación es igual a la estimación previa más una fracción del error del último periodo.

Ejemplo de suavizamiento exponencial

- **En enero, un distribuidor predijo una demanda de 142 automóviles de cierto modelo para febrero.**
- **La demanda real en febrero fue de 153 autos.**
- **Utilizando una constante de suavizamiento $\alpha = 0.20$, podemos pronosticar la demanda para marzo.**

Pronóstico nuevo (para demanda de marzo) = 142 + 0.2(153 – 142)
= 144.2 o 144 autos

- **Si la demanda real en marzo fue de 136 autos, el pronóstico para abril sería el siguiente:**

Pronóstico nuevo (para demanda de abril) = 144.2 + 0.2(136 – 144.2)
= 142.6 o 143 autos

Selección de la constante de suavizamiento

- Seleccionar el valor adecuado para α es clave para obtener un buen pronóstico.
- El propósito es obtener el pronóstico más exacto.
- El enfoque general consiste en desarrollar pronósticos de prueba con diferentes valores de α y seleccionar la que resulta en la menor DMA.

Suavizamiento exponencial

Pronósticos para el puerto de Baltimore con suavizamiento exponencial para para α = 0.1 y α = 0.5.

TRIMESTRE	TONELADAS DESCARGADAS REALES	PRONÓSTICO CON $\alpha = 0.10$	PRONOSTICO CON $\alpha = 0.50$
1	180	175	175
2	168	175.5 $= 175.00 + 0.10(180 - 175)$	177.5
3	159	174.75 $= 175.50 + 0.10(168 - 175.50)$	172.75
4	175	173.18 $= 174.75 + 0.10(159 - 174.75)$	165.88
5	190	173.36 $= 173.18 + 0.10(175 - 173.18)$	170.44
6	205	175.02 $= 173.36 + 0.10(190 - 173.36)$	180.22
7	180	178.02 $= 175.02 + 0.10(205 - 175.02)$	192.61
8	182	178.22 $= 178.02 + 0.10(180 - 178.02)$	186.30
9	?	178.60 $= 178.22 + 0.10(182 - 178.22)$	184.15

Tabla 5.5

Suavizamiento exponencial

Desviaciones absolutas y DMA para el ejemplo del puerto de Baltimore

TRI-MESTRE	TONELADAS DESCARGADAS REALES	PRONÓSTICO CON $\alpha = 0.10$	DESVIACIONES ABSOLUTAS PARA $\alpha = 0.10$	PRONÓSTICO CON $\alpha = 0.50$	DESVIACIONES ABSOLUTAS PARA $\alpha = 0.50$
1	180	175	5	175	5
2	168	175.5	7.5	177.5	9.5
3	159	174.75	15.75	172.75	13.75
4	175	173.18	1.82	165.88	9.12
5	190	173.36	16.64	170.44	19.56
6	205	175.02	29.98	180.22	24.78
7	180	178.02	1.98	192.61	12.61
8	182	178.22	3.78	186.30	4.3
Suma de las desviaciones absolutas			82.45		98.63

$$\text{DMA} = \frac{\sum|\text{desviación}|}{n} = 10.31 \qquad \text{DMA} = 12.33$$

Tabla 5.6

La mejor elección

Ejemplo de suavizamiento exponencial del puerto de Baltimore en Excel QM

Port of Baltimore

Si el pronóstico inicial está dado, ingréselo aquí. Si no quiere incluir el error para este pronóstico inicial, celdas E10:H10.

Forecasting **Exponential smoothing**

Enter alpha (between 0 and 1), enter the past demands in the shaded column then enter a starting forecast. If the starting forecast is not in the first period then delete the error analysis for all rows above the starting forecast.

Alpha

Ingrese los datos y alfa.

Data

Period	Demand
Quarter 1	180
Quarter 2	168
Quarter 3	159
Quarter 4	175
Quarter 5	190
Quarter 6	205
Quarter 7	180
Quarter 8	182

Forecasts and Error Analysis

Forecast	Error	Absolut	Squared	Abs Pct E
175	5	5	25	02.78%
175.5	-7.5	7.5	56.25	04.46%
174.75	-15.75	15.75	248.06	09.91%
173.175	1.825	1.825	3.3306	01.04%
173.358	16.643	16.643	276.97	08.76%
175.022	29.978	29.978	898.7	14.62%
178.02	1.9804	1.9804	3.9221	01.10%
178.218	3.7824	3.7824	14.306	0.02078
Total	**35.959**	**82.459**	**1526.5**	**44.75%**
Average	**4.4948**	**10.307**	**190.82**	**05.59%**
	Bias	**MAD**	**MSE**	**MAPE**
		SE	**15.951**	

Este es el pronóstico para el trimestre 9.

Next peri **178.596**

Programa 5.2

Suavizamiento exponencial con ajuste de tendencia

- **Como todas las técnicas de promedio, el suavización exponencial no responde a las tendencias.**
- **Un modelo más complejo puede utilizarse para el ajuste de las tendencias.**
- **El enfoque básico es desarrollar un pronóstico de suavización exponencial y, luego, ajustarlo a la tendencia.**

Pronóstico con tendencia (FIT_{t+1}) = pronóstico suavizamiento(F_{t+1}) + tendencia suavizada (T_{t+1})

Suavizamiento exponencial con ajuste de tendencia

- **La ecuación para la tendencia de corrección utiliza una nueva constante de suavizamiento *β*.**
- **T_t debe estimarse. T_{t+1} se calcula con la ecuación:**

$$T_{t+1} = (1-\beta)T_t + \beta(F_{t+1} - FIT_t)$$

donde

T_t = tendencia suavizada para el periodo *t*
F_t = pronóstico suavizamiento para el periodo *t*
FIT_t = pronóstico incluyendo tendencia para el periodo *t*
α = constante de suavizamiento para el pronóstico
β = constante de suavizamiento para la tendencia

Selección de una constante de suavizamiento

- **Al igual que con el suavizamiento exponencial, un valor grande de β hace que el pronóstico sea más susceptible ante los cambios en la tendencia.**
- **Un valor pequeño de β da menos peso a la tendencia reciente y suele alisar la tendencia.**
- **A menudo, los valores se eligen usando un enfoque de ensayo y error con base en el valor de la *DMA* para distintos valores de β.**

Midwestern Manufacturing

- **En el periodo 2004-2010, la demanda de generadores eléctricos para esa empresa fue como se indica en la siguiente tabla.**
- **Para predecir la demanda, Midwest supone:**
  - F_1 **es perfecto**
  - $T_1 = 0$
  - $\alpha = 0.3$
  - $\beta = 0.4$

AÑO	GENERADORES ELECTRICOS VENDIDOS
2004	74
2005	79
2006	80
2007	90
2008	105
2009	142
2010	122

Tabla 5.7

Midwestern Manufacturing

- De acuerdo con los supuestos,

$$FIT_1 = F_1 + T_1 = 74 + 0 = 74$$

- Paso 1: Calcular F_{t+1} con la ecuación:

$$FIT_{t+1} = F_t + \alpha(Y_t - FIT_t)$$
$$= 74 + 0.3(74\text{-}74) = 74$$

- Paso 2: Actualizar la tendencia con:

$$T_{t+1} = T_t + \beta(F_{t+1} - FIT_t)$$
$$T_2 = T_1 + .4(F_2 - FIT_1)$$
$$= 0 + .4(74 - 74) = 0$$

Midwestern Manufacturing

- **Paso 3**: **Calcular el pronóstico de suavizamiento exponencial de ajuste de tendencia (F_{t+1}) usando la ecuación :**

$$
\begin{aligned}
FIT_2 &= F_2 + T_2 \\
&= 74 + 0 = 74
\end{aligned}
$$

Midwestern Manufacturing

- Para 2006 (periodo 3) tenemos:
- Paso 1: $F_3 = FIT_2 + 0.3(Y_2 - FIT_2)$
  $= 74 + .3(79 - 74)$
  $= 75.5$
- Paso 2: $T_3 = T_2 + 0.4(F_3 - FIT_2)$
  $= 0 + 0.4(75.5 - 74)$
  $= 0.6$
- Paso 3: $FIT_3 = F_3 + T_3$
  $= 75.5 + 0.6$
  $= 76.1$

Pronósticos con suavizamiento exponencial con tendencia para Midwestern Manufacturing

Tiempo (t)	Demanda (Y_t)	$FIT_{t+1} = F_t + 0.3(Y_t – FIT_t)$	$T_{t+1} = T_t + 0.4(F_{t+1} – FIT_t)$	$FIT_{t+1} = F_{t+1} + T_{t+1}$
1	74	74	0	74
2	79	74=74+0.3(74-74)	0 = 0+0.4(74-74)	74 = 74+0
3	80	75.5=74+0.3(79-74)	0.6 = 0+0.4(75.5-74)	76.1 = 75.5+0.6
4	90	77.270=76.1+0.3(80-76.1)	1.068 = 0.6+0.4(77.27-76.1)	78.338 = 77.270+1.068
5	105	81.837=78.338+0.3(90-78.338)	2.468 = 1.068+0.4(81.837-78.338)	84.305 = 81.837+2.468
6	142	90.514=84.305+0.3(105-84.305)	4.952 = 2.468+0.4(90.514-84.305)	95.466 = 90.514+4.952
7	122	109.426=95.466+0.3(142-95.466)	10.536 = 4.952+0.4(109.426-95.466)	119.962 = 109.426+10.536
8		120.573=119.962+0.3(122-119.962)	10.780 = 10.536+0.4(120.573-119.962)	131.353 = 120.573+10.780

Tabla 5.8

Midwestern Manufacturing

Suavizamiento exponencial con ajuste de tendencia para Midwestern Manufacturing con Excel QM

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	**Midwestern Manufacturing**									
2										
3	**Forecasting**		**Trend adjus**							
4	Enter alpha and beta (between 0 and 1), enter the past demands in the shaded column then enter a starting forecast. If the starting forecast is not in the first period then delete the error analysis for all rows above the starting forecast.									
5										
6										
7	Alpha	0.3								
8	Beta	0.4								
9	**Data**			**Forecasts and Error Analysis**						
10	Period	Demand		Forecast, F_t	Smoothed Trend, T_t	Forecast Including Trend, FIT_t	Error	Absolute	Squared	Abs Pct Err
11	Period 1	74		74		74	0	0	0	00.00%
12	Period 2	79		74	0	74	5	5	25	06.33%
13	Period 3	80		75.5	0.6	76.1	4.5	4.5	20.25	05.63%
14	Period 4	90		77.27	1.068	78.338	12.73	12.73	162.053	14.14%
15	Period 5	105		81.8366	2.46744	84.30404	23.1634	23.1634	536.543	22.06%
16	Period 6	142		90.512828	4.9509552	95.4637832	51.4872	51.4872	2650.93	36.26%
17	Period 7	122		109.424648	10.5353012	119.9599495	12.5754	12.5754	158.139	0.1030767
18		**Next period**		**120.571965**	**10.7801073**	**131.3520719**				
19				Total			109.456	109.456	3552.91	94.73%
20				**Average**			**15.6366**	**15.6366**	**507.559**	**13.53%**
21							**Bias**	**MAD**	**MSE**	**MAPE**
22								**SE**	**26.6568**	

Ingrese los valores de las constantes de suavizamiento.

Puede ingresar valores iniciales para F_1 y T_1.

Ingrese las observaciones pasadas.

Este es el pronóstico para el siguiente año.

Program 5.3

Proyecciones de tendencia

- La proyección de tendencia ajusta una recta de tendencia a una serie de datos históricos.
- Proyecta la línea al futuro para obtener pronósticos a mediano y largo plazos.
- Existen varias ecuaciones de tendencia que se pueden desarrollar con los modelos exponencial y cuadrático.
- La más sencilla es un modelo lineal desarrollado mediante análisis de regresión.

Proyecciones de tendencia

La forma matemática es

$$\hat{Y} = b_0 + b_1 X$$

Donde

$\hat{Y}$ **= valor predicho**

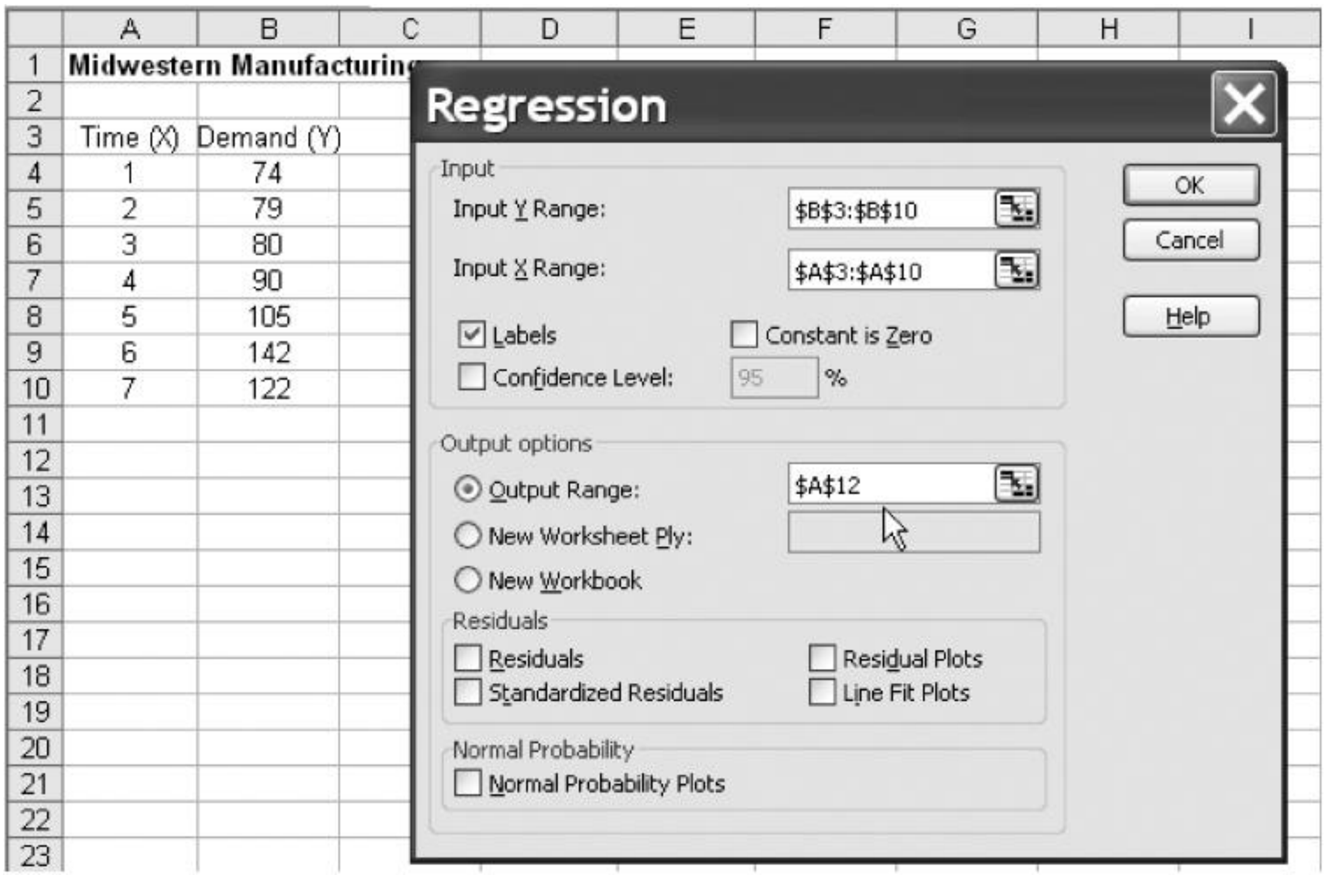
b_0 **= intersección**

b_1 **= pendiente de la recta**

X **= periodo (es decir,** X **= 1, 2, 3, …,** n**)**

Midwestern Manufacturing

Ventana de entrada de Excel para la recta de tendencia de Midwestern Manufacturing



Programa 5.4A

Midwestern Manufacturing

Salida de Excel para la recta de tendencia de Midwestern Manufacturing

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	**Midwestern Manufacturing**								
2									
3	Time (X)	Demand (Y)							
4	1	74							
5	2	79							
6	3	80							
7	4	90							
8	5	105							
9	6	142							
10	7	122							
11									
12	SUMMARY OUTPUT								
13									
14	*Regression Statistics*								
15	Multiple R	0.89491							
16	R Square	0.80086							
17	Adjusted R	0.76104							
18	Standard E	12.43239							
19	Observatio	7							
20									
21	ANOVA								
22		*df*	*SS*	*MS*	*F*	*Significance F*			
23	Regressior	1	3108.0357	3108.0357	20.1084	0.0065			
24	Residual	5	772.8214	154.5643					
25	Total	6	3880.8571						
26									
27		*Coefficients*	*Standard Error*	*t Stat*	*P-value*	*Lower 95%*	*Upper 95%*	*ower 95.0%*	*Upper 95.0%*
28	Intercept	56.71429	10.50729	5.39762	0.00295	29.70449	83.72408	29.70449	83.72408
29	Time (X)	10.53571	2.34950	4.48424	0.00649	4.49614	16.57529	4.49614	16.57529

El siguiente año será el periodo 8.

La pendiente de la recta de tendencia es de 10.54.

Programa 5.4B

Ejemplo de la compañía Midwestern Manufacturing

- **La ecuación de pronóstico es**

$$\hat{Y} = 56.71 + 10.54X$$

- **Para proyectar la demanda de 2011, se utiliza el sistema de codificación para definir X = 8**

(venta en 2011) = 56.71 + 10.54(8)
= 141.03, o 141 generadores

- **Del mismo modo para X = 9**

(venta en 2012) = 56.71 + 10.54(9)
= 151.57, o 152 generadores

Midwestern Manufacturing

Los generadores eléctricos y la recta de tendencia calculada

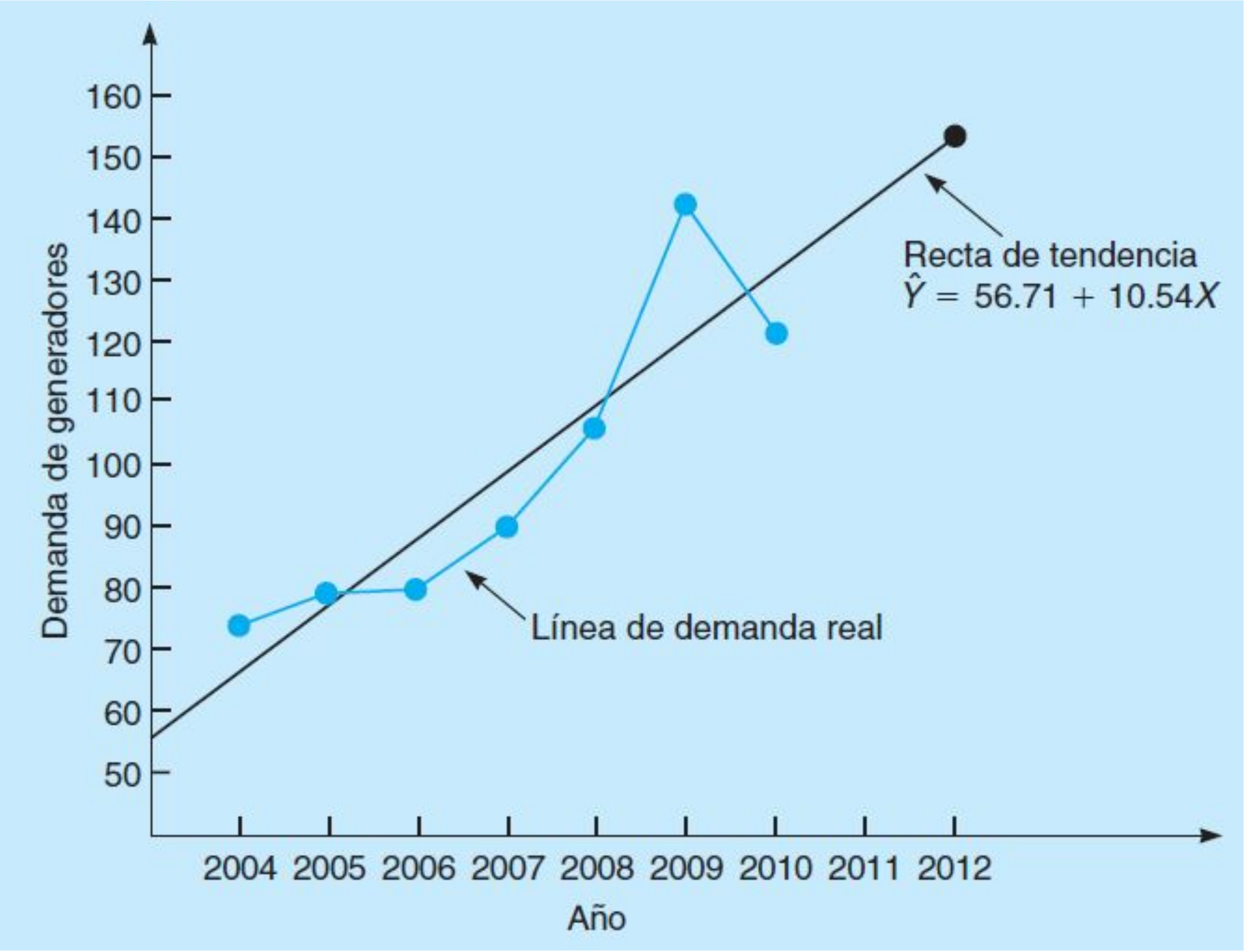
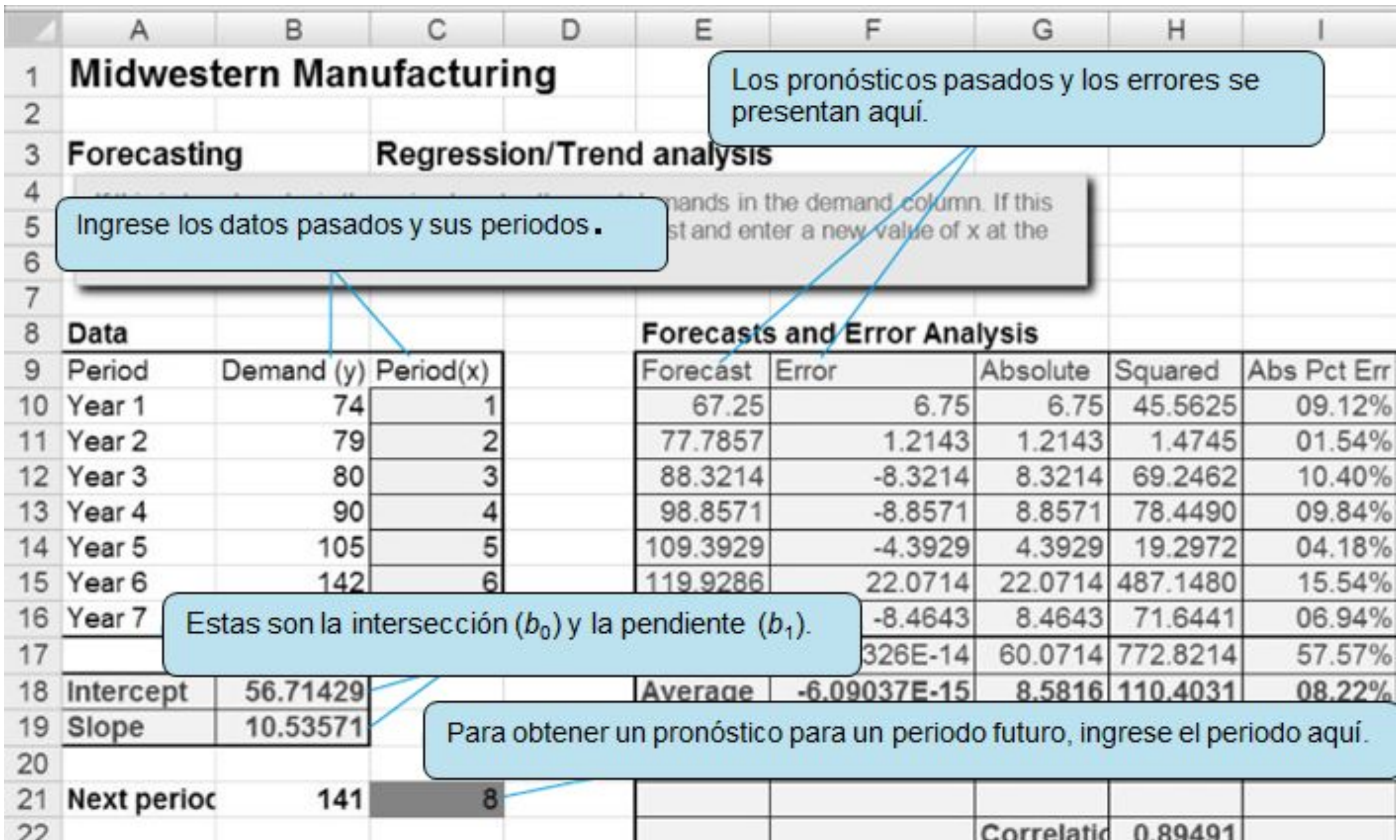


Figura 5.4

Midwestern Manufacturing

Modelo de proyección de tendencia en Excel QM



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Midwestern Manufacturing								
2									
3	Forecasting		Regression/Trend analysis						
8	Data				Forecasts and Error Analysis				
9	Period	Demand (y)	Period(x)		Forecast	Error	Absolute	Squared	Abs Pct Err
10	Year 1	74	1		67.25	6.75	6.75	45.5625	09.12%
11	Year 2	79	2		77.7857	1.2143	1.2143	1.4745	01.54%
12	Year 3	80	3		88.3214	-8.3214	8.3214	69.2462	10.40%
13	Year 4	90	4		98.8571	-8.8571	8.8571	78.4490	09.84%
14	Year 5	105	5		109.3929	-4.3929	4.3929	19.2972	04.18%
15	Year 6	142	6		119.9286	22.0714	22.0714	487.1480	15.54%
16	Year 7					-8.4643	8.4643	71.6441	06.94%
17						326E-14	60.0714	772.8214	57.57%
18	Intercept	56.71429			Average	-6.09037E-15	8.5816	110.4031	08.22%
19	Slope	10.53571							
20									
21	Next perioc	141	8						
22							Correlatio	0.89491	

Programa 5.5

Variaciones estacionales

- **Algunas veces las variaciones recurrentes en ciertas estaciones del año hacen necesario un ajuste *estacional* en el pronóstico de la recta de tendencia.**
- **Un índice estacional indica la comparación de una estación dada y una estación promedio.**
- **Cuando no hay una tendencia, el índice se determina dividiendo el valor promedio para una estación específica entre el promedio de todos los datos.**

Eichler Supplies

- Supplies Eichler vende contestadores telefónicos.
- Los datos de ventas de los últimos dos años se han recabado usando un modelo en particular.
- La empresa quiere crear una previsión que incluye la estacionalidad.

Ventas de contestadores e índices estacionales de Eichler Supplies

MES	DEMANDA DE VENTAS AÑO 1	AÑO 2	DEMANDA PROMEDIO DE 2 AÑOS	DEMANDA MENSUAL[a]	ÍNDICE ESTACIONAL PROMEDIO[b]
Enero	80	100	90	94	0.957
Febrero	85	75	80	94	0.851
Marzo	80	90	85	94	0.904
Abril	110	90	100	94	1.064
Mayo	115	131	123	94	1.309
Junio	120	110	115	94	1.223
Julio	100	110	105	94	1.117
Agosto	110	90	100	94	1.064
Septiembre	85	95	90	94	0.957
Octubre	75	85	80	94	0.851
Noviembre	85	75	80	94	0.851
Diciembre	80	80	80	94	0.851
	Demanda promedio total = 1,128				

[a]Demanda promedio mensual $= \dfrac{1{,}128}{12 \text{ meses}} = 94$

[b]Índice estacional $= \dfrac{\text{demanda promedio de 2 años}}{\text{demanda promedio mensual}}$

Tabla 5.9

Variaciones estacionales

- **Los cálculos de los índices estacionales son**

Enero	$\frac{1{,}200}{12} \times 0.957 = 96$	Julio	$\frac{1{,}200}{12} \times 1.117 = 112$
Febrero	$\frac{1{,}200}{12} \times 0.851 = 85$	Agosto	$\frac{1{,}200}{12} \times 1.064 = 106$
Marzo	$\frac{1{,}200}{12} \times 0.904 = 90$	Septiembre	$\frac{1{,}200}{12} \times 0.957 = 96$
Abril	$\frac{1{,}200}{12} \times 1.064 = 106$	Octubre	$\frac{1{,}200}{12} \times 0.851 = 85$
Mayo	$\frac{1{,}200}{12} \times 1.309 = 131$	Noviembre	$\frac{1{,}200}{12} \times 0.851 = 85$
Junio	$\frac{1{,}200}{12} \times 1.223 = 122$	Diciembre	$\frac{1{,}200}{12} \times 0.851 = 85$

Variaciones estacionales con tendencia

- Cuando los dos componentes de tendencia y estacionales están presentes, la tarea de predicción es más compleja.
- Los índices estacionales deberían calcularse utilizando un enfoque de promedio móvil centrado (PMC).
- Pasos para determinar los índices estacionales basados en los PMC:

1. Calcular el PMC para cada observación (cuando sea posible).
2. Calcular la razón estacional = observación/PMC para esa observación.
3. Promediar las razones estacionales para obtener los índices estacionales.
4. Si los índices estacionales no suman el número de estaciones, multiplicar cada índice por (número de estaciones)/(suma de índices).

Turner Industries

- La siguiente tabla muestra las cifras de ventas trimestrales de Turner Industries durante los últimos tres años, en millones de dólares:

TRIMESTRE	AÑO 1	AÑO 2	AÑO 3	PROMEDIO
1	108	116	123	115.67
2	125	134	142	133.67
3	150	159	168	159.00
4	141	152	165	152.67
PROMEDIO	131.0 0	140.2 5	149.5 0	140.25

Tabla 5.10

Tendencia definida

Patrón estacional

Turner Industries

- **Para el cálculo de la PMC para el trimestre 3 del año 1, se comparan las ventas reales con un trimestre medio centrado en ese periodo de tiempo.**
- **Necesitamos 1.5 trimestre antes del trimestre 3, y 1.5 trimestres después. Para obtener el PMC, tomamos los trimestres 2, 3 y 4 del año 1, más la mitad del trimestre 1 del año 1 y la mitad del trimestre 1 del año 2.**

$$\text{PMC(trimestre 3 del año1)} = \frac{0.5(108) + 125 + 150 + 141 + 0.5(116)}{4} = 132.00$$

Turner Industries

Comparamos las ventas reales en este trimestre con el PMC y tenemos la siguiente razón estacional:

$$\text{Razón estacional} = \frac{\text{ventas del trimestre 3}}{\text{PMC}} = \frac{150}{132.00} = 1.136$$

Turner Industries

AÑO	TRIMESTRE	VENTAS	*PMC*	RAZÓN ESTACIONAL
1	1	108		
	2	125		
	3	150	132.000	1.136
	4	141	134.125	1.051
2	1	116	136.375	0.851
	2	134	138.875	0.965
	3	159	141.125	1.127
	4	152	143.000	1.063
3	1	123	145.125	0.848
	2	142	147.875	0.960
	3	168		
	4	165		

Table 5.11

Turner Industries

Como hay dos razones estacionales para cada trimestre, las promediamos para obtener el índice estacional:

Índice trimestral 1 = I_1 = (0.851 + 0.848)/2 = 0.85
Índice trimestral 2 = I_2 = (0.965 + 0.960)/2 = 0.96
Índice trimestral 3 = I_3 = (1.136 + 1.127)/2 = 1.13
Índice trimestral 4 = I_4 = (1.051 + 1.063)/2 = 1.06

Turner Industries

Diagrama de dispersión de las ventas de Turner Industries y el promedio móvil centrado

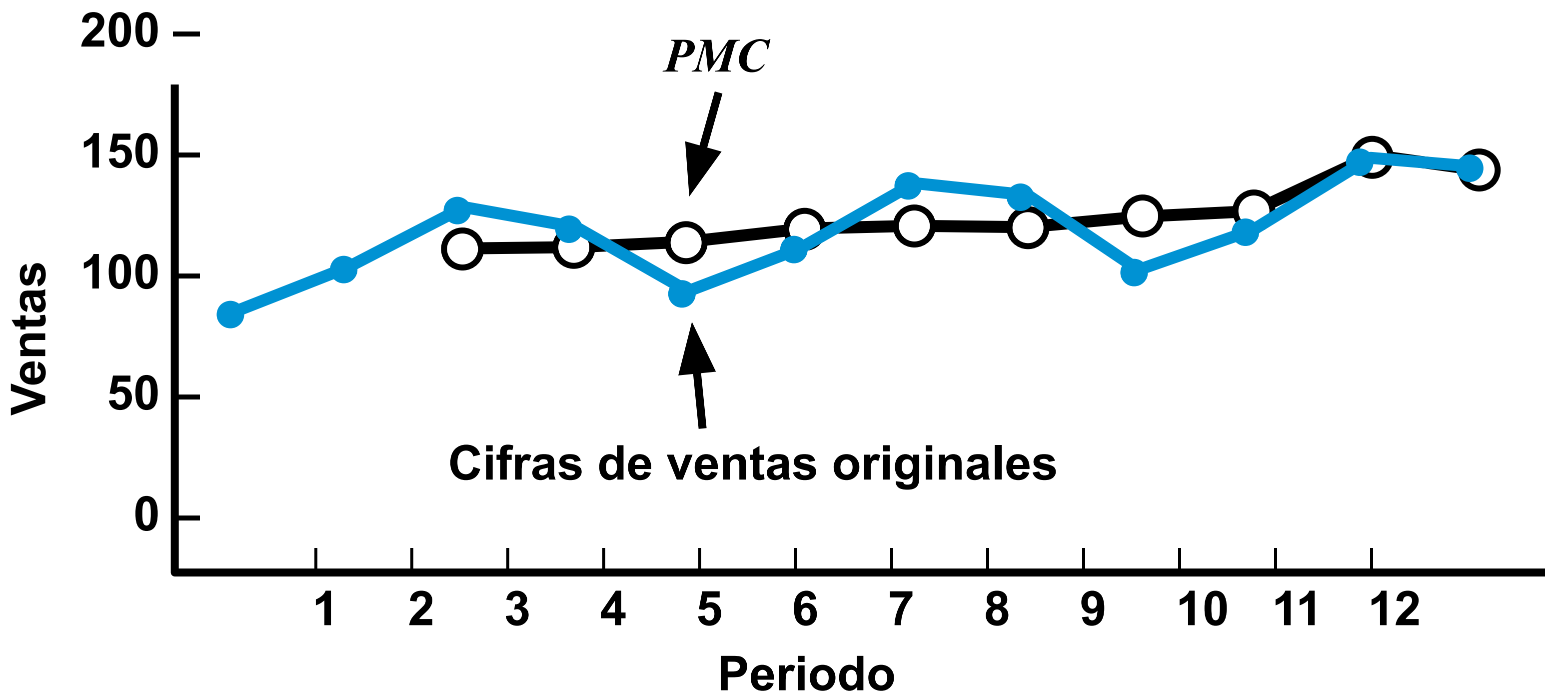


Figura 5.5

Método de descomposición del pronóstico con componentes de tendencia y estacional

- *Descomposición* es el proceso de aislar los factores de tendencia lineal y estacional para desarrollar pronósticos más exactos.
- Hay cinco pasos para desarrollar un pronóstico con el método de descomposición:

1. Calcular los índices estacionales usando los PMC.
2. Eliminar la estacionalidad de los datos dividiendo cada número entre su índice estacional.
3. Encontrar la ecuación de la recta de tendencia empleando los datos sin estacionalidad.
4. Pronosticar para periodos futuros con la recta de tendencia.
5. Multiplicar el pronóstico de la recta de tendencia por el índice estacional adecuado.

Datos sin estacionalidad para Turner Industries

- **Encuentre una recta de tendencia usando los datos sin estacionalidad:**

$$b_1 = 2.34 \quad b_0 = 124.78$$

- **Desarrolle un pronóstico utilizando esta tendencia y multiplique el pronóstico por el índice de estacionalidad adecuada.**

$$\hat{Y} = 124.78 + 2.34X$$
$$= 124.78 + 2.34(13)$$
$$= 155.2 \quad \text{(pronóstico antes del ajuste por estacionalidad)}$$

$$\hat{Y} \text{ x } I_1 = 155.2 \text{ x } 0.85 = 131.92$$

Datos sin estacionalidad para Turner Industries

VENTAS (millones)	ÍNDICE ESTACIONAL	VENTAS SIN ESTACIONALIDAD (millones)
108	0.85	127.059
125	0.96	130.208
150	1.13	132.743
141	1.06	133.019
116	0.85	136.471
134	0.96	139.583
159	1.13	140.708
152	1.06	143.396
123	0.85	144.706
142	0.96	147.917
168	1.13	148.673
165	1.06	155.660

Tabla 5.12

Hospital San Diego

Utilizó 66 meses de días de pacientes adultos para desarrollar los siguientes índices de estacionalidad.

MES	ÍNDICE DE ESTACIONALIDAD	MES	ÍNDICE DE ESTACIONALIDAD
Enero	1.0436	Julio	1.0302
Febrero	0.9669	Agosto	1.0405
Marzo	1.0203	Septiembre	0.9653
Abril	1.0087	Octubre	1.0048
Mayo	0.9935	Noviembre	0.9598
Junio	0.9906	Diciembre	0.9805

Tabla 5.13

Hospital San Diego

Con estos datos se desarrolló la siguiente ecuación:

$$\hat{Y} = 8{,}091 + 21.5X$$

Donde

$\hat{Y}$ = **pronóstico de días-paciente**

X = **tiempo en meses**

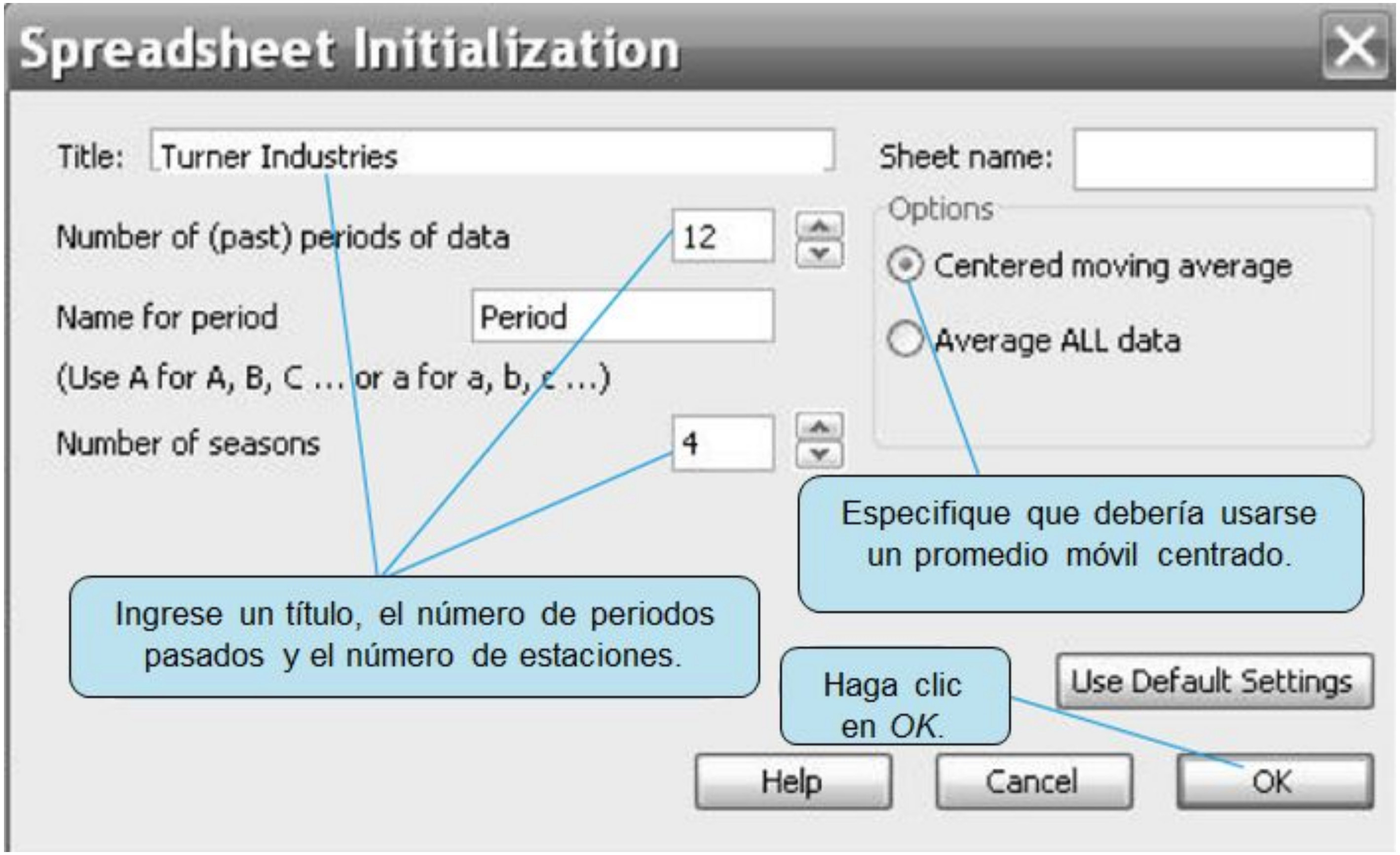
Con base en este modelo, el hospital pronostica los días-paciente para el siguiente mes (periodo 67) como :

Días-paciente = 8,091 + (21.5)(67) = 9,532 (solo tendencia)

Días-paciente = (9,532)(1.0436)
= 9,948 (tendencia y estacionalidad)

Hospital San Diego

Ventana de inicio para el método de descomposición en Excel QM



Programa 5.6A

Hospital San Diego

Pronósticos de Turner Industries usando el método de descomposición en Excel QM

Turner Industries

Forecasti… on

4 seasons

Ingrese la demanda pasada.

Estos son los PMC.

Los índices estacionales se basan en los PMC.

Data — **Forecasts and Error Analysis**

Period	Demand (y)	Time (x)		Average	Ratio	Seasonal	Smoothed	Unadjusted	Adjusted	Error	|Error|	Error^2	Abs Pct Err
Period 1	108	1				0.8491	127.1979	127.1187	107.9327	0.0673	0.0673	0.0045	00.06%
Period 2	125	2				0.9626	129.8589	129.4621	124.6181	0.3819	0.3819	0.1458	00.31%
Period 3	150	3	131	132.000	1.136	1.1315	132.5660	131.8056	149.1396	0.8604	0.8604	0.7403	00.57%
Period 4	141	4	133	134.125	1.051	1.0571	133.3841	134.1490	141.8086	-0.8086	0.8086	0.6538	00.57%
Period 5	116	5	135.25	136.375	0.851	0.8491	136.6200	136.4924	115.8917	0.1083	0.1083	0.0117	00.09%
Period 6	134	6	137.5	138.875	0.965	0.9626	139.2087	138.8359	133.6411	0.3589	0.3589	0.1288	00.27%
Period 7	159	7	140.25	141.125	1.127	1.1315	140.5199	141.1793	159.7461	-0.7461	0.7461	0.5567	00.47%
Period 8	152	8	142	143.000	1.063	1.0571	143.7899	143.5227	151.7175	0.2825	0.2825	0.0798	00.19%
Period 9	123	9	144	145.125	0.848	0.8491	144.8643	145.8662	123.8507	-0.8507	0.8507	0.7236	00.69%
Period 10	142	10	146.25	147.875	0.960	0.9626	147.5197	148.2096	142.6641	-0.6641	0.6641	0.4410	00.47%
Period 11	168	11	149.5			1.1315	148.4739	150.5530	170.3526	-2.3526	2.3526	5.5346	01.40%
Period 12	165	12				1.0571	156.0878	152.8965	161.6265	3.3735	3.3735	11.3807	02.04%
									Total	0.0107	10.8547	20.4014	07.14%
				Average		Intercept	124.7753			0.0009	0.9046	1.7001	00.59%
						Slope	2.3434			Bias	MAD	MSE	MAPE
											SE	1.8439709	

Aquí se encuentran la intersección y la pendiente.

Ratios

	Season 1	Season 2	Season 3	Season 4
			1.1364	1.0513
	0.8506	0.9649	1.1267	1.0629
	0.8475	0.9603		
Average	0.8491	0.9626	1.1315	1.0571

Forecasts

Period	Unadjusted	Seasonal	Adjusted
13	155.240	0.849	131.810
14	157.583	0.963	151.687
15	159.927	1.132	180.959
16	162.270	1.057	171.535

Programa 5.6B

Uso de regresión con componentes de tendencia y estacional

- La **regresión múltiple** para pronosticar cuando las componentes de tendencia y estacional están presentes en una serie de tiempo.
  - Una variable independiente es el tiempo.
  - Otras variables independientes son variables artificiales para indicar la estación.
- El modelo básico es un modelo de descomposición aditivo y se expresa como:

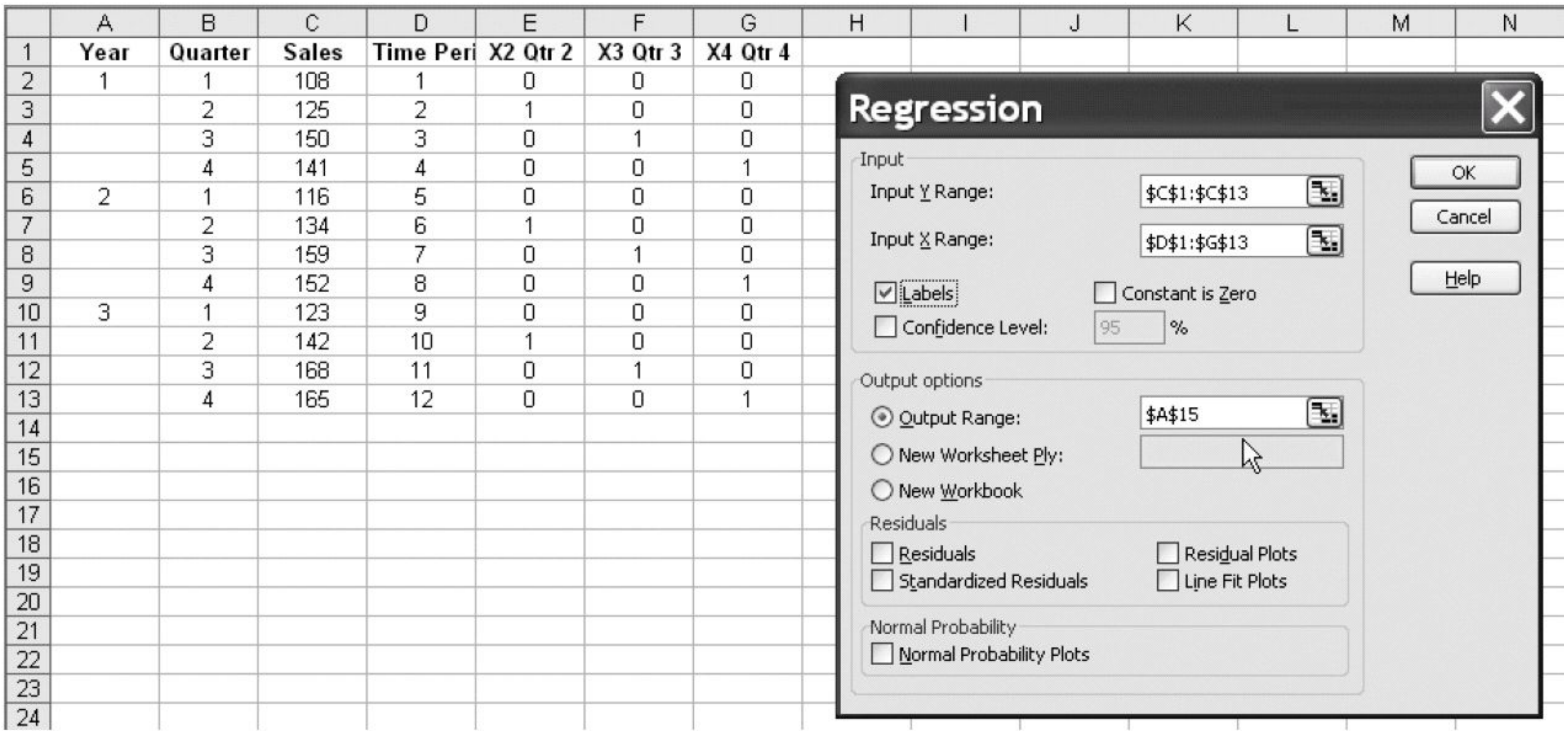
$$\hat{Y} = a + b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3 + b_4 X_4$$

Donde

X_1 = periodo de tiempo
X_2 = 1 si es el trimestre 2, 0 o de otra manera
X_3 = 1 si es el trimestre 3, 0 o de otra manera
X_4 = 1 si es el trimestre 4, 0 o de otra manera

Regresión con componentes de tendencia y estacionales

Entrada de Excel para el ejemplo de Turner Industries usando regresión múltiple



	A	B	C	D	E	F	G
1	Year	Quarter	Sales	Time Peri	X2 Qtr 2	X3 Qtr 3	X4 Qtr 4
2	1	1	108	1	0	0	0
3		2	125	2	1	0	0
4		3	150	3	0	1	0
5		4	141	4	0	0	1
6	2	1	116	5	0	0	0
7		2	134	6	1	0	0
8		3	159	7	0	1	0
9		4	152	8	0	0	1
10	3	1	123	9	0	0	0
11		2	142	10	1	0	0
12		3	168	11	0	1	0
13		4	165	12	0	0	1

Programa 5.7A

Uso de regresión con componentes de tendencia y estacional

Salida de Excel para el ejemplo de Turner Industries usando regresión múltiple

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Year	Quarter	Sales	X1 Time Period	X2 Qtr 2	X3 Qtr 3	X4 Qtr4		
2	1	1	108	1	0	0	0		
3		2	125	2	1	0	0		
4		3	150	3	0	1	0		
5		4	141	4	0	0	1		
6	2	1	116	5	0	0	0		
7		2	134	6	1	0	0		
8		3	159	7	0	1	0		
9		4	152	8	0	0	1		
10	3	1	123	9	0	0	0		
11		2	142	10	1	0	0		
12		3	168	11	0	1	0		
13		4	165	12	0	0	1		
14									
15	SUMMARY OUTPUT								
16									
17	*Regression Statistics*								
18	Multiple R	0.99718							
19	R Square	0.99436							
20	Adjusted R	0.99114							
21	Standard E	1.83225							
22	Observatior	12							
23									
24	ANOVA								
25		*df*	*SS*	*MS*	*F*	*Significance F*			
26	Regressior	4	4144.75	1.0362E+03	3.0865E+02	6.0284E-08			
27	Residual	7	23.5	3.3571E+00					
28	Total	11	4168.25						
29									
30		*Coefficient*	*standard Err*	*t Stat*	*p-value*	*Lower 95%*	*Upper 95%*	*ower 95.0%*	*Upper 95.0%*
31	Intercept	104.1042	1.3322	78.1449	0.0000	100.9540	107.2543	100.9540	107.2543
32	X1 Time Pe	2.3125	0.1619	14.2791	0.0000	1.9296	2.6954	1.9296	2.6954
33	X2 Qtr 2	15.6875	1.5048	10.4252	0.0000	12.1293	19.2457	12.1293	19.2457
34	X3 Qtr 3	38.7083	1.5307	25.2882	0.0000	35.0888	42.3278	35.0888	42.3278
35	X4 Qtr4	30.0625	1.5729	19.1123	0.0000	26.3431	33.7819	26.3431	33.7819

El trimestre 1 se indica con $X_2 = X_3 = X_4 = 0$.

Programa 5.7B

Uso de regresión con componentes de tendencia y estacional

- El resultado de la ecuación de regresión es:

$$\hat{Y} = 104.1 + 2.3X_1 + 15.7X_2 + 38.7X_3 + 30.1X_4$$

- Si se usa esta ecuación para pronosticar las ventas de los dos primeros trimestres del siguiente año, obtenemos:

$$\hat{Y} = 104.1 + 2.3(13) + 15.7(0) + 38.7(0) + 30.1(0) = 134$$

$$\hat{Y} = 104.1 + 2.3(14) + 15.7(1) + 38.7(0) + 30.1(0) = 152$$

- Observe que no son los mismos valores que los obtenidos usando el método de descomposición multiplicativa.
- Podemos comparar la DMA o el ECM que se obtiene con cada método y elegir aquel que sea mejor.

Monitoreo y control de los pronósticos

- La *señal de rastreo* se pueden utilizar para supervisar el rendimiento de un pronóstico.
- La señal de rastreo se calcula como la suma corriente de los errores de pronóstico (SCEP) dividida entre la desviación media absoluta:

$$\text{Señal de rastreo} = \frac{\text{SCEP}}{\text{DMA}}$$

Donde

$$\text{DMA} = \frac{\sum |\text{error del pronóstico}|}{n}$$

Monitoreo y control de los pronósticos

Gráfica de las señales de rastreo

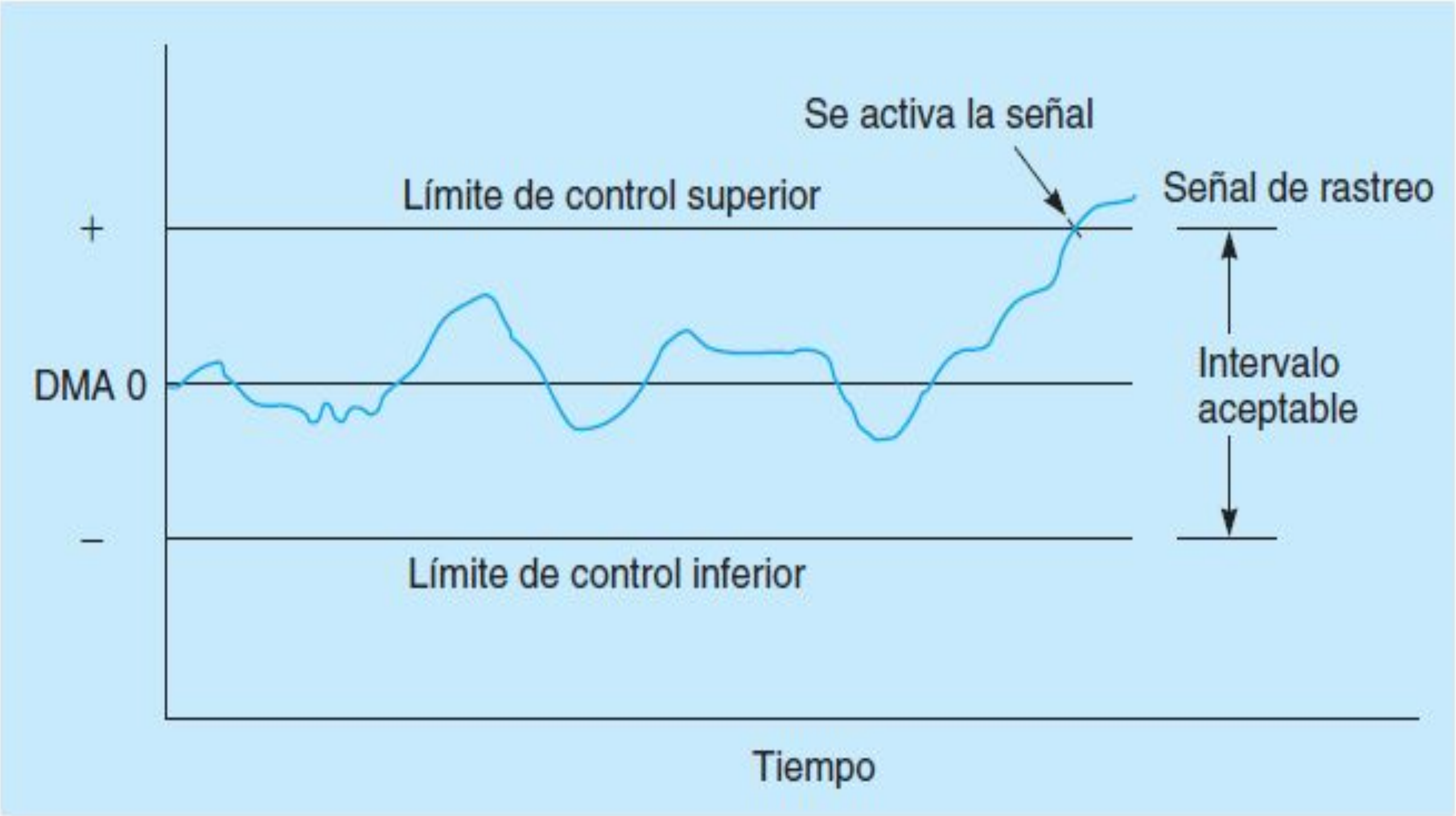


Figure 5.6

Monitoreo y control de los pronósticos

- **Las señales de rastreo positivas indican que la demanda es mayor que el pronóstico.**
- **Las señales negativas significan que la demanda es menor que el pronóstico.**
- **Una buena señal de rastreo tiene tantos errores positivos como negativos.**
- **Los problemas surgen cuando la señal llega más arriba o más abajo que los límites prestablecidos.**
- **Esto indica que ha habido una cantidad inaceptable de variación.**
- **Los límites deberían ser razonables y pueden variar de un artículo a otro.**

Kimball's Bakery

Las ventas trimestrales de *croissants* (en miles):

PERIODO	PRONÓSTICO DE DEMANDA	DEMANDA REAL	ERROR	SCEP	ERROR DEL PRONÓSTICO	ERROR ACUMULADO	DMA	SEÑAL DE RASTREO
1	100	90	−10	−10	10	10	10.0	−1
2	100	95	−5	−15	5	15	7.5	−2
3	100	115	+15	0	15	30	10.0	0
4	110	100	−10	−10	10	40	10.0	−1
5	110	125	+15	+5	15	55	11.0	+0.5
6	110	140	+30	+35	30	85	14.2	+2.5

$$\text{DMA} = \frac{\sum |\text{error de pronóstico}|}{n} = \frac{85}{6}$$

$$= 14.2$$

$$\text{Señal de rastreo} = \frac{\text{SCEP}}{\text{DMA}} = \frac{35}{14.2}$$

$$= 2.5\ \text{DMA}$$

Suavizamiento adaptable

- **El *suavizamiento adaptable* es la supervisión por computadora de las señales de rastreo y auto-ajuste, cuando el límite se dispara.**
- **En el suavizamiento exponencial, los coeficientes α y β se ajustan cuando la computadora detecta una señal de rastreo errante.**