Computação Gráfica

Lista de Exercícios 1 - Teoria

Fernando Gonçalves Campos - 12542352

OBS: se o exercício não informar, então assumir transformação geométrica 2D.

Configuração da Listade Exercícios:
Variável $\mathbf{D = 7}$
Variável $\mathbf{M = 3}$

1) O que são e por qual motivo utilizar coordenadas homogêneas para especificar transformações geométricas em CG?

São representações de coordenadas que possuem uma "dimensão" a mais do que o necessário, essa "dimensão" extra facilita a manipulação das coordenadas.

Coordenadas homogêneas são utilizadas por facilitar manipular a posição dos objetos, já que possibilitam utilizar multiplicação de matrizes para representar transformações afins, além das transformações lineares.

2) Apresente a matriz que representa uma transformação geométrica consistindo de uma translação seguidade uma rotação.

$$\begin{bmatrix} cos\,\theta & -sen\,\theta & 0 \\ sen\,\theta & cos\,\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\,\theta & -sen\,\theta & t_x \cdot cos\,\theta - t_y \cdot sen\,\theta \\ sen\,\theta & cos\,\theta & t_x \cdot sen\,\theta + t_y \cdot cos\,\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3) Apresente a matriz que representa uma transformação consistindo de uma translação $\mathbf{t_x = M}$ e $\mathbf{t_y = D}$ seguida de uma escala uniforme $\mathbf{s = 2}$.

$$\begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & 0 & s \cdot t_x \\ 0 & s & s \cdot t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 14 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4) Verifique se $\mathbf{R(M + D)}$ irá obter a mesma matriz de transformação do que $\mathbf{R(M) * R(D)}$.

$R(M + D):$

$$R(M + D) = \begin{bmatrix} cos\,(M + D) & -sen\,(M + D) & 0 \\ sen\,(M + D) & cos\,(M + D) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$R(M) * R(D):$

$$R(M) = \begin{bmatrix} cos\,(M) & -sen\,(M) & 0 \\ sen\,(M) & cos\,(M) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ R(D) = \begin{bmatrix} cos\,(D) & -sen\,(D) & 0 \\ sen\,(D) & cos\,(D) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R(M) * R(D) = \begin{bmatrix} cos\,(M) \cdot cos\,(D) - sen\,(M) \cdot sen\,(D) & -cos\,(M) \cdot sen\,(D) - sen\,(M) \cdot cos\,(D) & 0 \\ cos\,(M) \cdot sen\,(D) + sen\,(M) \cdot cos\,(D) & cos\,(M) \cdot cos\,(D) - sen\,(M) \cdot sen\,(D) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como:

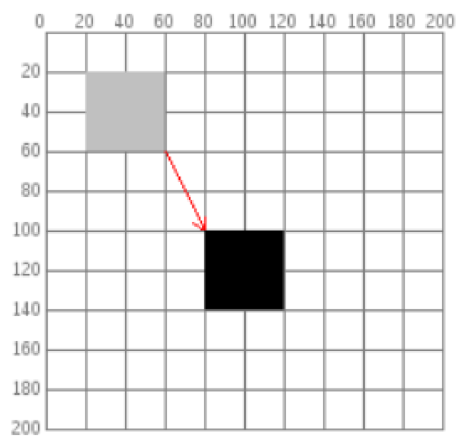
$$sen\,(\alpha + \beta) = sen\,(\alpha) \cdot cos\,(\beta) + sen\,(\beta) \cdot cos\,(\alpha)$$
$$cos\,(\alpha + \beta) = cos\,(\alpha) \cdot cos\,(\beta) - sen\,(\alpha) \cdot cos\,(\beta)$$

Então:

$$R(M) * R(D) = \begin{bmatrix} cos\,(M+D) & -sen\,(M+D) & 0 \\ sen\,(M+D) & cos\,(M+D) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = R(M+D)$$

Resposta: Assumindo um cenário ideal (em que não há arredondamentos em nenhuma das etapas), as matrizes de transformação são iguais.

5) Forneça a matriz de transformação que realiza a transformação abaixo (a seta indica o objeto inicial e o final após a transformação). Em seguida, apresente as coordenadas do objeto para uma escala uniforme $\mathrm{s} = \mathbf{M}$.



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 60 \\ 0 & 1 & 80 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Coordenadas depois da escala (sentido horário começando do superior esquerdo):

$P1 = (240, 300)$
$P2 = (360, 300)$
$P3 = (360, 420)$
$P4 = (240, 420)$

6) Abaixo é apresentada a matriz resultante de quatro transformações.
Aplique esta transformação em triângulo $\mathbf{ABC}\ (\mathbf{A} = (\mathbf{0}, \mathbf{0}), \mathbf{B} = (\mathbf{1}, \mathbf{0}), \mathbf{C} = (\mathbf{0}, \mathbf{1}))$ e mostre o resultado (novos vértices e o desenho). Em seguida, faça uma translação $\mathbf{tx} = \mathbf{M/10}$ e $\mathbf{ty} = \mathbf{M/10}$.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Translation by (3,-2)}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0.6 & -0.8 & 0 \\ 0.8 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Rotation through } 53.13^\circ} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Scaling by 2}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Shearing by 0.5}} = \begin{bmatrix} 1.2 & -1 & 3 \\ 1.6 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vértice A

$$\begin{bmatrix} 1.2 & -1 & 3 \\ 1.6 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$A = (3, -2)$

Vértice B

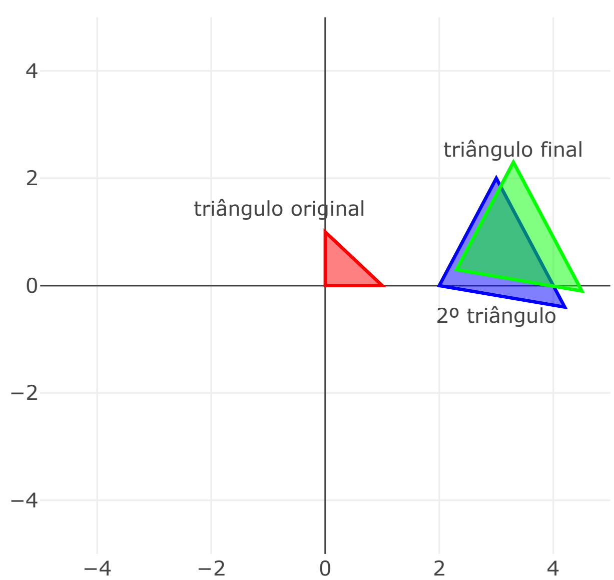
$$\begin{bmatrix} 1.2 & -1 & 3 \\ 1.6 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.2 \\ -0.4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$B = (4.2, -0.4)$

Vértice C

$$\begin{bmatrix} 1.2 & -1 & 3 \\ 1.6 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$C = (2, 0)$



Nova transformação

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.3 \\ 0 & 1 & 0.3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7) Mostre que a ordem das transformações pode modificar a matriz de transformação resultante (problema da comutatividade).
OBS: É suficiente fornecer um exemplo.

Exemplo: $T * S \neq S * T$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T * S = \begin{bmatrix} s & 0 & t_x \\ 0 & s & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S * T = \begin{bmatrix} s & 0 & s \cdot t_x \\ 0 & s & s \cdot t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} s & 0 & t_x \\ 0 & s & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} s & 0 & s \cdot t_x \\ 0 & s & s \cdot t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

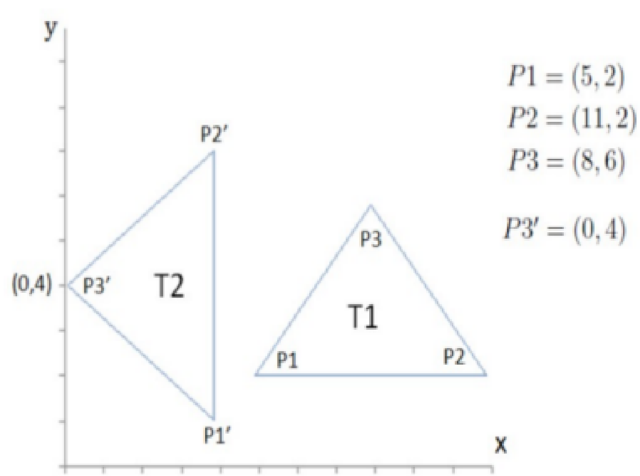
8) As transformações de rotação e escala são comutativas entre si?
OBS: a ordem da multiplicação dessas transformações altera a matriz de transformação resultante?

Não

9) As transformações de translação e escala são comutativas entre si? E entre translação e rotação?

Não e não

10) Forneça a sequência de transformações que leva o triângulo $\mathbf{T1}$ ao triângulo $\mathbf{T2}$ e dê a matriz resultante.



1ª transformação = Translação $(-8, -6)$, move o ponto $P3$ para a origem;

2ª transformação = Rotação de 90° no sentido anti-horário, faz com que $T1$ "aponte" na mesma direção que $T2$;

3ª transformação = Translação $(0, 4)$, posiciona os dois triângulos na mesma posição.

Matriz resultante:

$$\begin{bmatrix} cos\,(90^\circ) & -sen\,(90^\circ) & -8\,cos\,(90^\circ) + 6\,sen\,(90^\circ) \\ sen\,(90^\circ) & cos\,(90^\circ) & 4 - 6\,cos\,(90^\circ) - 8\,sen\,(90^\circ) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

11) Seja um quadrado de lado $\mathbf{L = 5}$, inicialmente posicionado em $\mathbf{x = M}$ e $\mathbf{y = D}$. Calcule e apresente a matriz de transformação que faça o quadrado rotacionar $\mathbf{45^\circ}$ em relação ao seu próprio centro.
Apresente os vértices iniciais e finais do quadrado.

$$\begin{bmatrix} cos\,(45^\circ) & -sen\,(45^\circ) & M - M\,cos\,(45^\circ) + D\,sen\,(45^\circ) \\ sen\,(45^\circ) & cos\,(45^\circ) & D - D\,cos\,(45^\circ) - M\,sen\,(45^\circ) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 3 + 2\sqrt{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 7 - 5\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Iniciais:
$P1 = (0.5, 4.5)$
$P2 = (5.5, 4.5)$
$P3 = (5.5, 9.5)$
$P4 = (0.5, 9.5)$

Finais:
$P1 = (3, 7 - \frac{5\sqrt{2}}{2})$
$P2 = (3 + \frac{5\sqrt{2}}{2}, 7)$
$P3 = (3, 7 + \frac{5\sqrt{2}}{2})$
$P4 = (3 - \frac{5\sqrt{2}}{2}, 7)$

12) Dado um vértice/ponto posicionado em $\mathbf{x = D}$ e $\mathbf{y = M}$, apresente as matrizes de transformação para *(1)* espelhar esse vértice em relação ao *eixo X* e *(2)* espelhar esse vértice em relação ao *eixo Y*.

$$\text{espelhar no eixo X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$\text{espelhar no eixo Y} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

13) Pesquisa e descreva sobre as matrizes de transformação 3D para fazer espelhamento de um objeto.

Para espelhar um objeto em relação a um plano $ax + by + cz + d = 0$ a matriz de transformação será:

$$\begin{bmatrix} 1-2a^2 & -2ab & -2ac & -2ad \\ -2ab & 1-2b^2 & -2bc & -2bd \\ -2ab & -2bc & 1-2c^2 & -2cd \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

14) Explique, com suas palavras, o mapeamento 2D de uma imagem de textura para um objeto 3D (apresente pelo menos 3 tipos de mapeamento).

O mapeamento é a escolha de quais partes da texturam correspondem a cada face do objeto 3D,

Tipos de mapeamento:

1. Mapeamento planar: Todos os pontos de uma mesma normal do plano escolhido possuem a mesma coordenada de textura.
2. Mapeamento cúbico: O objeto é envolto por um cubo (textura) e a textura é mapeada a partir das normais de cada face do cubo.
3. Mapeamento esférico: O objeto é envolto em uma esfera (textura) e a textura é mapeada com base nas intersecções dos raios da esfera com o objeto.

15) Em texturas, explique a relação entre Pixels e Texels.

Pixel: menor elemento de uma tela.

Texel: menor elemento de uma imagem.

Cada pixel representa a cor de um ou mais texels.

16) Na parametrização de texturas, explique a diferença entre os parâmetros *REPEAT* e *CLAMP*.

REPEAT: Quando uma se tenta utilizar o valor um texel que está fora da textura, o texel será escolhido "dando a volta na textura", isso fará com que a textura seja aplicada repetidas vezes.

CLAMP: Quando uma se tenta utilizar o valor um texel que está fora da textura, o texel escolhido será o mesmo da borda da textura, isso fará com que a textura seja aplicada de forma que as bordas fiquem esticadas.

17) Durante o mapeamento de pixels e texels, qual a diferença entre as técnicas *LINEAR* e *NEAREST*?

LINEAR: escolhe o valor com base na interpolação dos texels vizinhos da coordenada da textura.

NEAREST: escolhe o valor com base no texel mais próximo da coordenada da textura.