Engenharia de Computação

ECM253 – Linguagens Formais, Autômatos e Compiladores

Lógica Proposicional

Slides da disciplina ECM253 – Linguagens Formais, Autômatos e Compiladores
Curso de Engenharia de Computação
Instituto Mauá de Tecnologia
Prof. Marco Antonio Furlan de Souza

Conceitos

- Qualquer **lógica** emprega um **método organizado** e **cuidadoso de pensar** que **caracteriza** qualquer **investigação científica** ou qualquer outra **atividade de raciocínio**;
- Tem **aplicações diretas** em **Computação**:
  - **Suporte matemático** às **teorias**;
  - **Inteligência Artificial**: linguagem **Prolog**, **sistemas especialistas** e outros;
  - **Verificação** da **correção de programas** de computadores;
  - Projeto e verificação de **circuitos digitais**;
  - …
- **Existem diversos tipos de lógicas**: lógica proposicional, lógica de predicados, lógica modal, lógica temporal, etc, mas neste cursos serão estudadas apenas as lógicas proposicional e de predicados.

Proposição

- A **lógica proposicional** utiliza uma **formalização** para **descobrir** como obter **conclusões lógicas** a partir de **proposições existentes**;
- Lógica proposicional também é conhecida por **lógica de sentenças** ou **cálculo proposicional**;
- **Proposição** (ou **sentença**) é uma **frase** que **pode ser** apenas **verdadeira** ou **falsa**:
  - *Dez é menor do que sete*. **É** uma **sentença** e é **falsa**;
  - *Como vai você?* **NÃO É** uma **sentença** – é uma **pergunta**;
  - *Ela é muito talentosa*. **NÃO É** uma é uma **sentença** pois existe um **termo não definido** – “ela” – que **impede de avaliar** sua **veracidade**;
  - *Existem formas de vida em outros planetas do universo*. **É** uma **sentença.**

Símbolos

- As **sentenças da lógica proposicional** podem ser representadas por meio de **símbolos – símbolos proposicionais** – e convenciona-se em **utilizar letras maiúsculas** tais como A, Z, W etc para **representar** as **sentenças** envolvidas;
- **Exemplos**:
  - $A =$ Elefantes são grandes
  - $B =$ Bolas são redondas
- Uma **expressão lógica** é então **composta** por **símbolos proposicionais** e por **conectivos lógicos** (que serão apresentados a seguir);
- A **veracidade (ou não)** de uma **expressão lógica depende** de sua **interpretação** – interpretação dos **valores verdade** (verdadeiro ou falso) dos **símbolos** proposicionais e da aplicação de **conectivos lógicos** presentes na expressão;
- A **interpretação** de A (veja acima) é **verdadeiro** ou apenas o símbolo constante **V**.

Conectivos lógicos

- Os **conectivos** (ou **operadores**) **lógicos** permitem **compor expressões lógicas** mais **complexas** a **partir** dos **símbolos utilizados ou ainda** de **outras expressões**;
- O **valor-verdade** de uma **expressão** contendo **conectivos lógicos** se dá com a **aplicação destes conectivos** aos **valores-verdade dos símbolos proposicionais** e/ou **resultados de subexpressões** de acordo com a **semântica do conectivo** (seu significado).
- **Conectivos lógicos** da **lógica proposicional**:
  - **Conjunção** ($\wedge$);
  - **Disjunção** ($\vee$);
  - **Implicação** ($\rightarrow$);
  - **Bicondicional** ($\leftrightarrow$);
  - **Negação** ($\neg$);
- A **semântica** dos conectivos lógicos pode ser **explicada** por uma **tabela verdade**.

Conectivos lógicos

Conjunção lógica ($\wedge$)

- Se A e B representam **duas proposições ou expressões lógicas**, então o **resultado** de $A \wedge B$ **só** é **verdadeiro se ambos os termos** forem **verdadeiros**;
- Lê-se "A **E** B";
- **Tabela verdade de** $\wedge$:

A	B	A $\wedge$ B
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Disjunção lógica ($\vee$)

- Se A e B representam **duas proposições ou expressões lógicas**, então o **resultado** de $A \vee B$ **só** é **falso se ambos os termos** forem **falsos**;
- Também conhecido como **OU inclusivo**;
- Lê-se "A **OU** B";
- **Tabela verdade de** $\vee$:

A	B	A ∨ B
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Conectivos lógicos

- **Implicação lógica** ($\rightarrow$)
  - Se A e B representam **duas proposições ou expressões lógicas**, então o **resultado** de $A \rightarrow B$ **só** é **falso se** A for **verdadeiro** e B for **falso**;
  - Lê-se "**se** A **então** B" ou "A **é suficiente para** B" ou "A **é condição suficiente para** B" ou "A **somente se** B" ou "B **é necessário para** A" ou "B **é condição necessária para** A";
  - A é denominado de **antecedente**;
  - B é denominado de **consequente**;
  - **Tabela verdade de** $\vee$:

A	B	A $\rightarrow$ B
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

- **Implicação lógica** ($\rightarrow$)
  - É importante notar que a **implicação lógica não** tem relação com **causalidade**;
  - Para poder **entender o significado da implicação lógica**, considerar a **sentença**: *Se eu me formar vou tirar férias na Flórida*.
    - Se o aluno em questão se **formou** (A) e **tirou** as férias na Flórida (B), o valor da proposição é **verdadeiro**. Logo, se os valores de A e B forem **verdadeiros**, considera-se que o valor de $A \rightarrow B$ é **verdadeiro**.
    - Se o aluno em questão se **formou** (A) e **não tirou** as férias na Flórida (B), o valor da proposição é **falso** (pois não se cumpriu a viagem prometida por ter se formado). Logo, quando o valor de A é **verdadeiro** e B é **falso**, o valor da **implicação** $A \rightarrow B$ é **falso**.
    - Se o aluno em questão **não se formou**, **independentemente** de ele **tirar ou não férias** na Flórida, **não se pode afirmar que a sentença é falsa** – entra o **"benefício da dúvida"**. Por **convenção**, aceita-se que o valor de $A \rightarrow B$ seja **verdadeiro** se o valor de A for **falso**, **independentemente** do valor de B.

- **Implicação lógica** ($\rightarrow$)
  - Sobre **necessidade** e **suficiência** em lógica:
    - Em $A \rightarrow B$, pode-se entender que A *é uma condição suficiente para* B no seguinte sentido: quando o **valor** de $A \rightarrow B$ for **verdadeiro** (veja a tabela) e o valor de A for **verdadeiro**, tem-se obrigatoriamente que o **valor** de B é verdadeiro – nessas condições, o valor de A é **suficiente** para determinar o valor de B.
    - Em $A \rightarrow B$, pode-se entender que B *é uma condição necessária para* A no seguinte sentido: quando o **valor** de $A \rightarrow B$ for **verdadeiro** (veja a tabela), e o valor de B **negado** for **verdadeiro** (ou seja B com valor **falso**), tem-se obrigatoriamente que o **valor** de A é **falso** – nessas condições, tem-se a certeza de que se a implicação tiver valor **verdadeiro** e se B tiver valor **falso**, então certamente A terá valor **falso**. Ou seja, nas mesmas condições, se B tiver valor **verdadeiro**, então não se pode afirmar que A será verdadeiro ou falso – daí B ser **condição necessária** (mas não suficiente) para A.

- **Bicondicional** ($\leftrightarrow$)
  - Se A e B representam **duas proposições ou expressões lógicas**, então o **resultado** de $A \leftrightarrow B$ **só** é **falso se** os **valores verdade** de A e B forem **diferentes** entre si;
  - Trata-se de uma "**dupla implicação**": $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ (o símbolo $\Leftrightarrow$ é para indicar uma **equivalência lógica**: a expressão da esquerda tem sempre o mesmo valor lógico da expressão da direita, independente da interpretação);
  - Lê-se "A **se e somente se** B" ou "A **é necessário e suficiente para** B";
  - **Tabela verdade de** $\leftrightarrow$:

A	B	A $\leftrightarrow$ B
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Conectivos lógicos

- **Negação** (¬)
  - Resulta na **inversão lógica** da expressão;
  - É um conectivo **unário**;
  - **Tabela verdade de** ¬:

A	¬A
V	F
F	V

Fórmulas bem formadas

- **Expressões lógicas corretas** são denominadas de **fórmulas bem formadas** (**fbf**);
- A **sintaxe** da **linguagem da lógica proposicional** para se escrever **fbfs** é formada por:
  - **Alfabeto**: composto por um **conjunto** contendo **símbolos proposicionais** (A, B etc), **conectivos lógicos** ($\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ e $\neg$), **parênteses** ('(' e ')') e os símbolos **constantes** V e F.
  - **Regras para escrever fbfs**:
    - V e F são fbfs.
    - Um **símbolo proposicional** é uma fbf.
    - Se A **é uma** fbf, **então** $\neg A$ também é uma fbf.
    - Se A e B são fbfs, **então** também **são fbfs** $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$, $A \leftrightarrow B$.
    - Se A é uma fbf, então **também é** (A).

Precedência dos conectivos

- A tabela a seguir apresenta a **precedência dos conectivos lógicos**. Com ela pode-se reduzir a quantidade de parênteses em expressões:

Ordem	Conectivo
1	( )
2	$\neg$
3	$\wedge$
4	$\vee$
5	$\rightarrow$
6	$\leftrightarrow$

- Quanto menor o número de ordem nesta tabela, maior a precedência.

Conectivo principal

- É aquele que é **aplicado por último** em uma fbf.
- **Exemplo**:
  - Na fbf $\neg A \land B \to C$, o conectivo principal é $\to$, pois:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[dr] & & & B \arrow[ddl] & C \arrow[dddl] \\
& \neg A \text{ (1)} \arrow[dr] & & & \\
& & \neg A \land B \text{ (2)} \arrow[dr] & & \\
& & & \neg A \land B \to C \text{ (3)} &
\end{tikzcd}
$$

  - Basta verificar com a tabela de precedência dos conectivos.

Fórmulas bem formadas

- **Uso de tabela verdade para analisar uma fbf**
  - **Considerar** a seguinte **fbf**: $(A \to B) \land \neg B \lor (B \to A)$
  - Pode-se construir uma **tabela verdade** para analisar seus valores assim, seguindo nas colunas as precedências dos operadores:

$\mathbf{A}$	$\mathbf{B}$	$\mathbf{A} \to \mathbf{B}$	$\mathbf{B} \to \mathbf{A}$	$\neg\mathbf{B}$	$(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \land \neg\mathbf{B}$	$(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \land \neg\mathbf{B} \lor (\mathbf{B} \to \mathbf{A})$
V	V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	V	F	V
F	V	V	F	F	F	F
F	F	V	V	V	V	V

  - Como fica a tabela se forem removidos todos os parênteses?

Tautologia

- **Tautologia** é uma fbf que é **sempre verdadeira**.

$$A \vee \neg A$$

$$(A \to B) \leftrightarrow (\neg B \to \neg A)$$

- Pode-se provar estas tautologias com auxílio de uma tabela verdade – o resultado em cada linha sempre será verdadeiro.

Contradição

- **Contradição** é uma fbf que é **sempre falsa**.

$$A \wedge \neg A$$

$$(P \vee \neg P) \rightarrow (Q \wedge \neg Q)$$

- Pode-se provar estas contradições com auxílio de uma tabela verdade – o resultado em cada linha sempre será falso.

- Se P e Q são duas fbfs e **concordam em valores verdade** então P e Q são **fbfs equivalentes**, escrita assim: $P \Leftrightarrow Q$. **Exemplos** (De Morgan):

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$$

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$$

- A **equivalência lógica** $P \Leftrightarrow Q$ é o **mesmo que afirmar que** $P \leftrightarrow Q$ é uma tautologia.
- Pode-se provar uma equivalência lógica com auxílio de uma tabela verdade.

1) **Verificar** que as fbfs a seguir são **tautologias**:
   (a) $(\neg B \land (A \to B)) \to \neg A$
   (b) $((A \to B) \land A) \to B$
   (c) $(A \lor B) \land \neg A \to B$
   (d) $A \lor (A \land B) \to A$
2) O conectivo **"ou exclusivo"** ($\oplus$) quando aplicado a dois símbolos proposicionais resulta em verdadeiro apenas quando os dois símbolos possuem **valores lógicos distintos**. Prove que a equivalência deste operador apresentada a seguir:

$$A \oplus B \Leftrightarrow \neg(A \leftrightarrow B)$$

Teste seus conhecimentos

3) Sejam A, B e C as seguintes sentenças:

$A =$ *Rosas são vermelhas*.

$B =$ *Violetas são azuis*.

$C =$ *Açúcar é doce*.

Traduzir em **notação simbólica**: *Rosas são vermelhas apenas se as violetas não forem azuis e se o açúcar for azedo.*

Referências bibliográficas

[1] GERSTING, J.L. **Fundamentos matemáticos para a ciência da computação**. 4.ed. Rio de Janeiro, RJ: LTC, 2001. 538 p. ISBN 85-216-1263-X.