Analogia entre vetores e sinais

V. C. Parro e-mail: *vparro@ieee.org*

17 de fevereiro de 2021

Objetivos Analogia entre vetores e sinais - *Série de fourier*

Esta atividade tem como objetivo permitir ao aluno que visualize a formação da base "ortogonal de"de Fourier e como esta base permite a descrição de um sinal em um espaço N-dimensional.

Na aula de teoria definimos como referência o sinal $g_n(t)$ e que a respectiva projeção de um sinal $g(t)$ pode ser calculada pela equação 1.

$$c_n = \frac{\int_{T_o} g(t)g_n(t)dt}{\int_{T_o} g_n(t)^2 dt} \tag{1}$$

Proposta de análise.

1. Um sinal periódico $g(t)$ é definido pela equação 2 no intervalo $0 \leq t \leq 1$ que representa exatamente a equação de um período deste sinal que equivale a $T_0 = 1s$.

$$g(t) = e^{-t} \tag{2}$$

2. Utilizando como base a função descrita pela Equação 2 e a função a ser decomposta pela Equação 3.

$$g_n(t) = e^{-jn\omega_o t} \tag{3}$$

3. Determine o sinal resultante da primeira projeção - $p_1(t)$ determinando os coeficientes c_1 e c_{-1}. Verifique o resíduo - $r_1(t)$ que pode ser calculado pela Equação 4. Compare a projeção $p_1(t)$ e o resíduo $r_1(t)$ com o sinal original - g(t).

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\int_{T_o} g(t)g_1(t)dt}{\int_{T_o} g_1(t)^2 dt} \\ c_{-1} &= \frac{\int_{T_o} g(t)g_{-1}(t)dt}{\int_{T_o} g_{-1}(t)^2 dt} \\ p_1(t) &= c_1 e^{-j\omega_o t} + c_{-1} e^{j\omega_o t} \\ r_1(t) &= g(t) - p_1(t) \end{aligned} \tag{4}$$

4. Determine o sinal resultante da segunda projeção - $p_2(t)$ determinando os coeficientes c_2 e c_{-2}. Verifique o resíduo - $r_2(t)$ que pode ser calculado pela Equação 5. Compare a projeção $p_2(t)$ e o resíduo $r_2(t)$ com o sinal original - g(t). Determine os coeficientes c_2 e c_{-2} pela Equação 6 e compare com os valores previamente claculados, o que você conclui?

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{\int_{T_o} g(t)g_2(t)dt}{\int_{T_o} g_2(t)^2dt} \\ c_{-2} &= \frac{\int_{T_o} g(t)g_{-2}(t)dt}{\int_{T_o} g_{-2}(t)^2dt} \\ p_2(t) &= c_2e^{-2j\omega_o t} + c_{-2}e^{2j\omega_o t} \\ r_2(t) &= g(t) - (p_1(t) + p_2(t)) \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{\int_{T_o} r_1(t)g_2(t)dt}{\int_{T_o} g_2(t)^2dt} \\ c_{-2} &= \frac{\int_{T_o} r_1(t)g_{-2}(t)dt}{\int_{T_o} g_{-2}(t)^2dt} \end{aligned} \tag{6}$$

5. Crie uma estrutura recorrente que permita determinar a projeção - $p_n(t)$, determinando os coeficientes c_n e c_{-n}. Verifique o resíduo - $r_n(t)$ que pode ser calculado pela Equação 7. Compare a projeção $p_n(t)$ e o resíduo $r_n(t)$ com o sinal original - g(t).

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{\int_{T_o} g(t)g_n(t)dt}{\int_{T_o} g_n(t)^2dt} \\ c_{-n} &= \frac{\int_{T_o} g(t)g_{-n}(t)dt}{\int_{T_o} g_{-n}(t)^2dt} \\ p_n(t) &= c_ne^{-nj\omega_o t} + c_{-n}e^{nj\omega_o t} \\ r_n(t) &= g(t) - (p_1(t) + p_2(t) + \dots p_n(t)) \end{aligned} \tag{7}$$

1 Estudo de um caso

Vamos eleger como base para o estudo inicial o sinal pulsado indicado na figura 1.

Para medirmos o grau de semelhança entre o sinal $g(t)$ e um sinal harmônico de mesma frequência angular $\omega_0 = \frac{\pi}{2}\frac{rd}{s}$ utulizaremos como variável de ajuste a amplitude deste sinal c. Para estabelecer um critério sobre o grau de semelhança elaboramos a equação 21 que determina o erro quadrático entre o sinal $g(t)$ e o sinal harmônico.

$$Erro = \int_{T_o} (g(t) - c\ sin(\frac{\pi}{2}t))^2dt \tag{8}$$

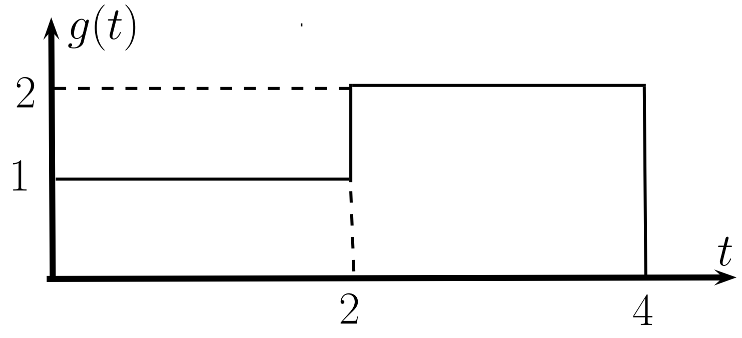

Figura 1: Sinal $g(t)$

1.1 Qual o valor de c que minimiza o erro?

Vamos utilizar a abordagem de determinação de máximos e mínimos estudado em cálculo 1.

$$\frac{d\ Erro}{dc} = \frac{d\ \int_{T_o}(g(t) - c\ sin(\frac{\pi}{2}t)^2 dt}{dc} = 0 \tag{9}$$

1.2 Como resolver este problema usando Matlab?

Primeiro vamos definir a função que desejamos minimizar:

Matlab - função a ser minimizada

```
function [J] = Erro(c,n)
% função mérito

syms t   % indica que a variável t será tratada como simbólica

% determina o erro instantâneo
erro1 = @(c,n,t) (1-(-c*sin(t*n*pi/2))).^2;
erro2 = @(c,n,t) (2-(-c*sin(t*n*pi/2))).^2;

% faz a integral do erro
J = int(erro1(c,n,t),t,0,2)+int(erro2(c,n,t),t,2,4);

% converte a expressão obtida em valor numérico
J = eval(J);

end
```

Após definida a função mérito que determina o valor do **Erro** de acordo com a equação 21, vamos construir o código que implementa a solução proposta ppela equação 22.

```
Matlab
%% Análise de otimização


for k=1:Total
    n=k;
    x(k) = fminsearch(@(c) Erro(c,n),0)
end

figure(11)

stem(n,abs(x),'LineWidth',2)
grid minor; title('Entrada'); grid minor;xlabel('Frequência')
```

O resultado quando escolhemos $Total = 1$ corresponde a $c = 0.6366$. Podemos comparar ambas as funções no mesmo gráfico 1. Indica também a potência obtida na frequência de $0.25Hz$ é de:

$$P_g = \frac{0.6366^2}{2} = 0.2026W \tag{10}$$

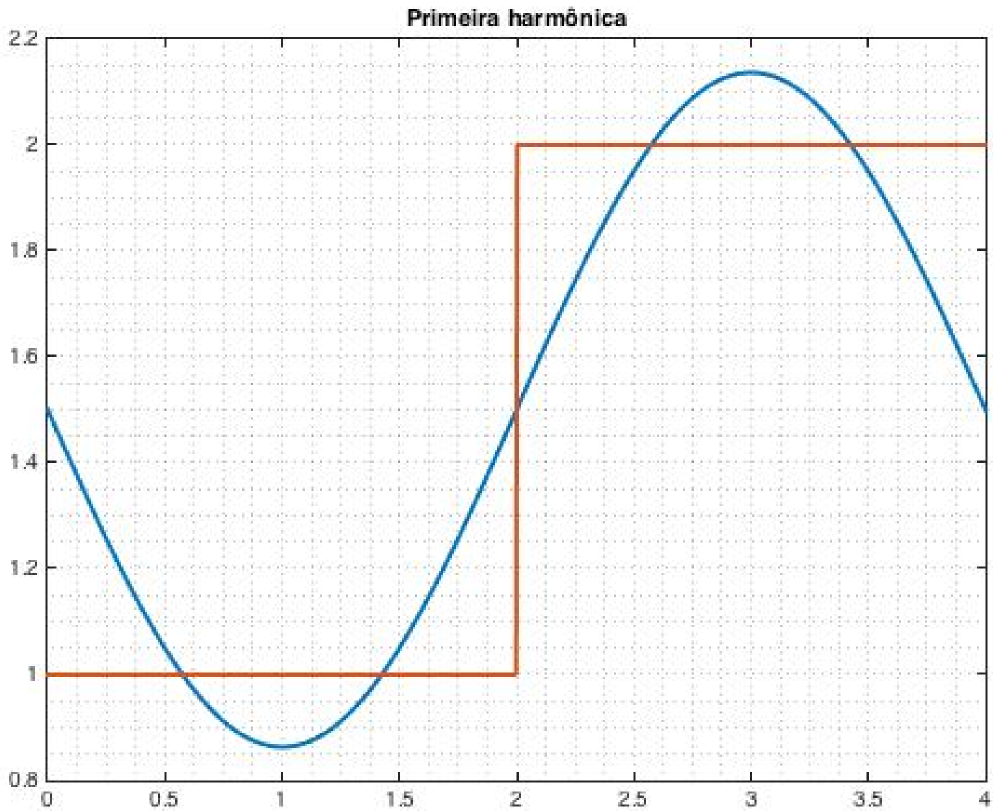

Figura 2: Comparação entre $g(t)$ e a primeira harmônica resultante.

Quando optamos por $Total = 10$ podemos observar quais outras harmônicas fazem parte da composição do sinal $g(t)$. Há um aspecto interesssante que as harmôniacs que correspondem aos valores pares de n são todas nulas, indicando que o sinal $g(t)$ não tem ”projeções não nulas”nestas frequências.

O que contece se verificamos as ”projeções”em sinais harmônicos do tipo cossenos? Observamos que todos os valores de $c(n)$ são nulos indicando que o sinal $g(t)$ não tem projeções em harmônicas do tipo cosseno.

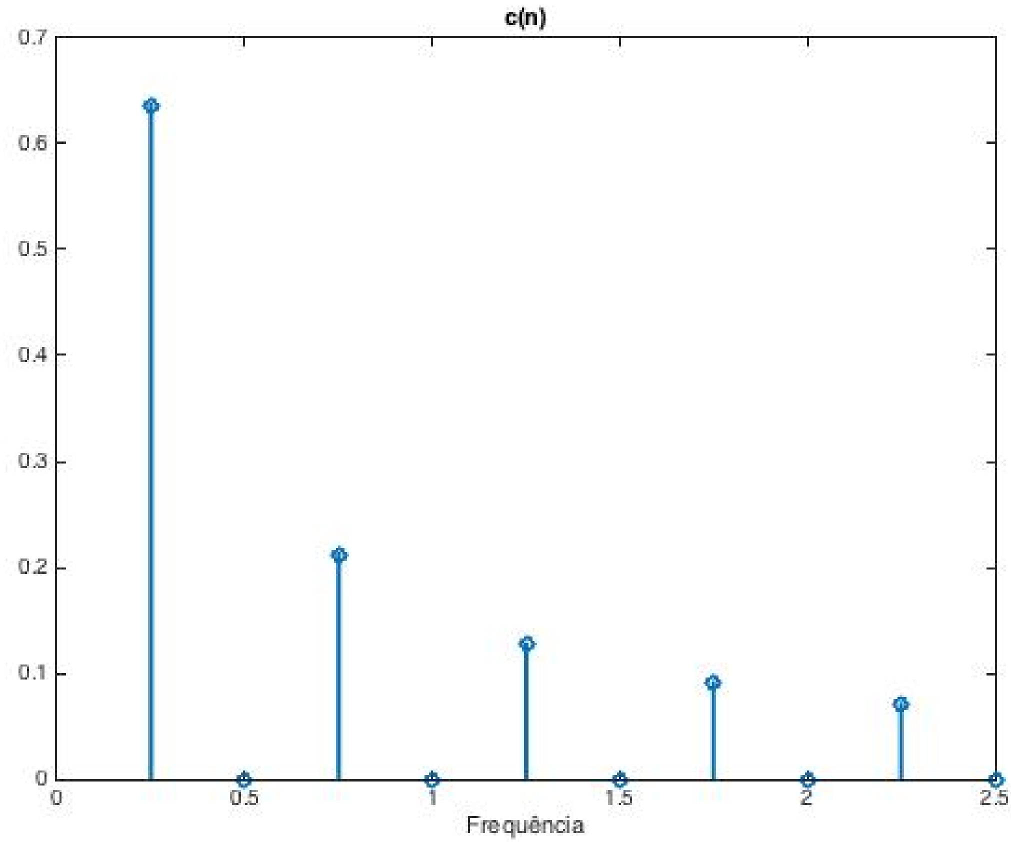

Figura 3: Coeficientes considerando $Total = 10$.

2 Formalizando o problema

Em aula estudamos que um sinal periódico $g(t)$ pode ser decomposto em uma soma ponderada de sinais como indicado na equação 11 e chamamos este processo de Síntese.

$$g(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + c_3x_3(t) + c_4x_4(t) + c_5x_5(t) + \cdots \tag{11}$$

em sua forma compacta temos 24.

$$g(t) = \sum_{n=0}^{N} c_n x_n(t) \tag{12}$$

Uma questão importante é como escolher o conjunto de sinais que compõem a base sobre a qual o sinal será analisado. Usando uma analogia com vetores, estes sinais tem de ser ortogonais e respeitar a condição imposta em 13.

$$\int_{T_o} x_m(t)x_n(t)dt = 0 \tag{13}$$

Para o caso onde a base atenda a equação 13 os coeficientes c_n podem ser calculados utilizando 14 que é a solução analítica da equação 22 que chamamos de Análise.

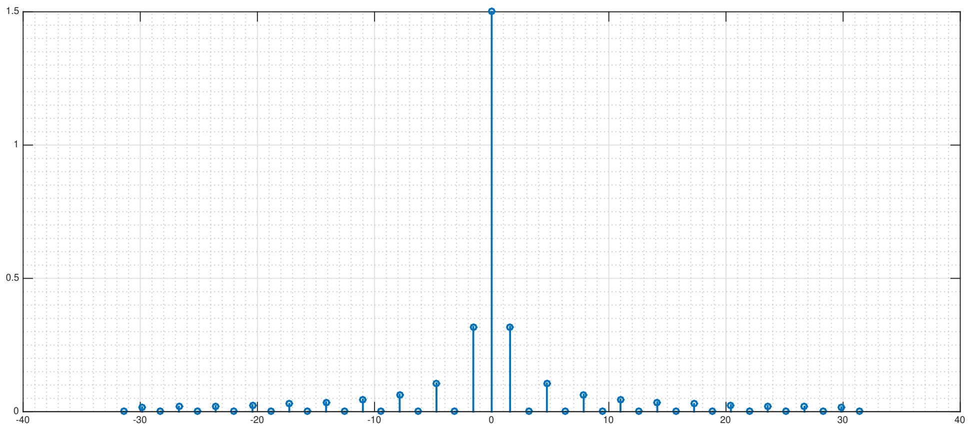

Figura 4: Distribuição dos coeficientes em função da frequência para o problema 1.

$$c_n = \frac{\int_{T_o} g(t)x_n(t)dt}{\int_{T_o} x_n^2(t)dt} \tag{14}$$

Análise de Fourier

Considerando o sinal g(t) ilustrado na figura 1 representando um período completo, determinar as projeções do sinal considerando uma base exponencial 17.

$$x_n(t) = e^{-jn\omega_o t} \tag{15}$$

Solução analítica - title filled

Resolvendo o numerador da equação 14 considerando $\omega_o = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$:

$$N = \int_0^2 e^{-jn\frac{\pi}{2}t}dt + \int_2^4 2e^{-jn\frac{\pi}{2}t}dt \tag{16}$$

Resolvendo o denominador:

$$D = \int_0^4 e^{-jn\frac{\pi}{2}t}e^{jn\frac{\pi}{2}t}dt \tag{17}$$

```
Matlab
%% solução do problema 01

clc;                              % limpa a tela
clear;                            % limpa as variáveis
close all;                        % fecha as figuras ativas
syms t;                           % configura modo de simulação literal

%% Configura variáveis de entrada

To=4;                             % período do sinal
wo=2*pi/To;                       % frequência fundamental
N=20;
n=linspace(-20,20,41);            % n indexador de harmônica
w=n.*wo;                          % vetor de frequência

% A amplitude do sinal


%% Configura o numerador da equação (4)

xn=@(wo,A,n,t) A*exp(-j*n*wo*t);
N= int(xn(wo,1,n,t),t,0,2)+int(xn(wo,2,n,t),t,2,4);
resN=eval(N);                      % coloca N na forma numérica

%% Configura o numerador da equação (4)

D= int(xn(wo,1,n,t).*xn(-wo,1,n,t),t,0,4);
resD=eval(D);                      % coloca D na forma numérica

% determinando Dn

Dn=resN./resD;

%% Visualizando os resultados

stem(w,abs(Dn),'LineWidth',2)
```

2.1 O que siginficam os coeficientes determinados? D_n

Calculando o termo para $n = 0$ temos $D_0 = 1.5$ que indica que o sinal $g(t)$ tem valor médio de 1.5 (a unidade neste caso está relacionada a grandeza em análise). Repetindo processo para $n = 1$ temos $D_1 = j0.3183$, qual seu siginficado? Na verdade podemos dizer que o sinal $g(t)$ pode ser aproximado por 18.

$$g(t) = 1.5 + j0.3183e^{j\frac{\pi}{2}t} \tag{18}$$

Obviamente não é possível representar neste caso o sinal $g(t)$ com uma função complexa em t. Se formos atentos, quando estamos no domínio ω devemos considerar a condição quando $n = -1$ que representa a mesma frequência. Desta forma aproximamos por 19.

$$g_1(t) = 1.5 + j0.3183e^{j\frac{\pi}{2}t} - j0.3183e^{-j\frac{\pi}{2}t} \tag{19}$$

$$g_1(t) = 1.5 + 0.3183[-2sin(\frac{\pi}{2}t)] \tag{20}$$

Manipulando a equação 19 podemos obter 23. Neste ponto vamos voltar a proposta inicial: o valor encontrado 0.6366 é o que mais aproxima o sinal $g(t)$ de um sinal harmônico $x_1(t) = 0.6366sin(\frac{\pi}{2}t)$. Como podemos verificar suando o matlab? A medida do erro foi estabelecida como:

$$Erro = \int_{T_o} (g(t) - c\ sin(\frac{\pi}{2}t)^2 dt \tag{21}$$

Neste ponto o Matlab pode ajudar bastante na simulação de um número elevado de n para uma análise mais detalhada.

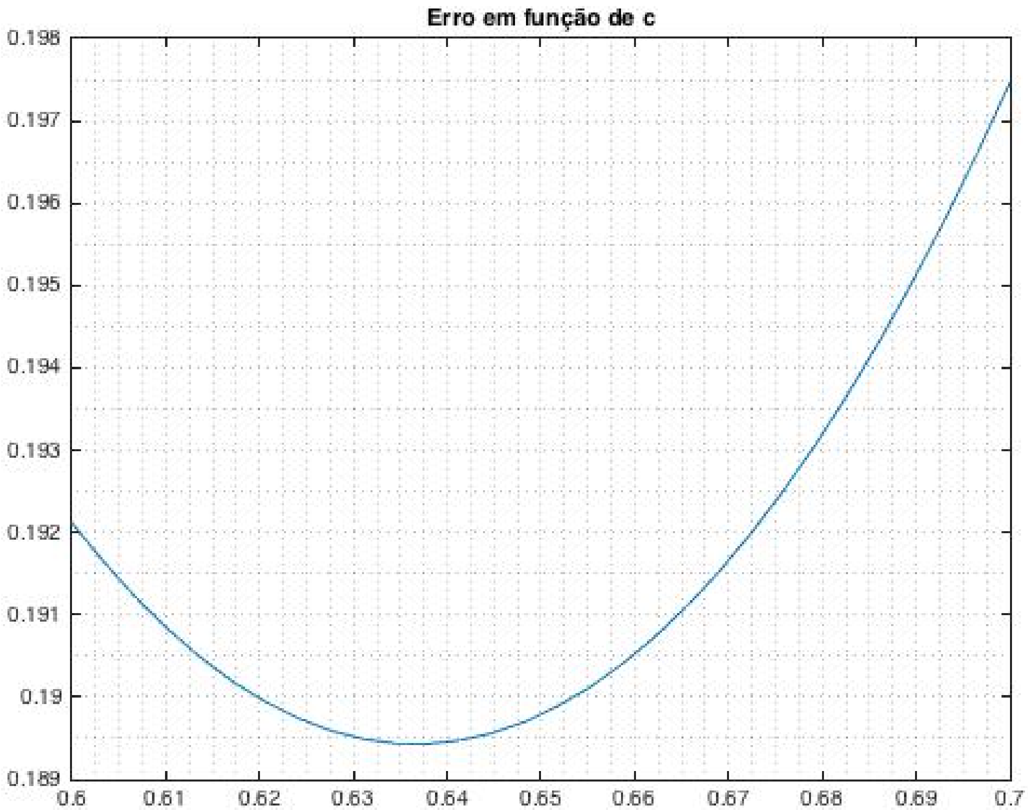

Figura 5: Erro em função do coeficiente c.

Análise do erro

```
%% Análise de erro conforme aumenta-se a ordem de Fourier

syms t

erro1 = @(c,n) (1-(1.5-c*sin(t*n*pi/2))).^2 % erro no nivel baixo
erro2 = @(c,n) (2-(1.5-c*sin(t*n*pi/2))).^2     % erro no nivel alto

c=linspace(0.6,0.7,30); % coeficiente c

for k=1:30
      E(k)= eval(int(erro1(c(k),1),t,0,2)+int(erro2(c(k),1),t,2,4));
end

figure(4)

set(findall(gcf,'Type','line'),'LineWidth',2);
set(gca,'FontSize',14,'LineWidth',1.5);

plot(c,E); grid minor; title('Erro em função de c')
```

Concluimos que o coeficiente encontrado minimiza o erro definido por 21 quando a frequência do sinal em análise $g(t)$ é a mesma do sinal comparativo $x_1(t)$. Vamos formular o problema para $n = 3$. Temos que $D_3 = j0.1061$ e $D_{-3} = -j0.1061$ que resulta em um sinal do tipo 22.

$$g_3(t) = g_1(t) + j0.1061e^{j3\frac{\pi}{2}t} - j0.1061e^{-j3\frac{\pi}{2}t} \tag{22}$$

$$g_3(t) = g_1(t) + 0.1061[-2sin(3\frac{\pi}{2}t)] \tag{23}$$

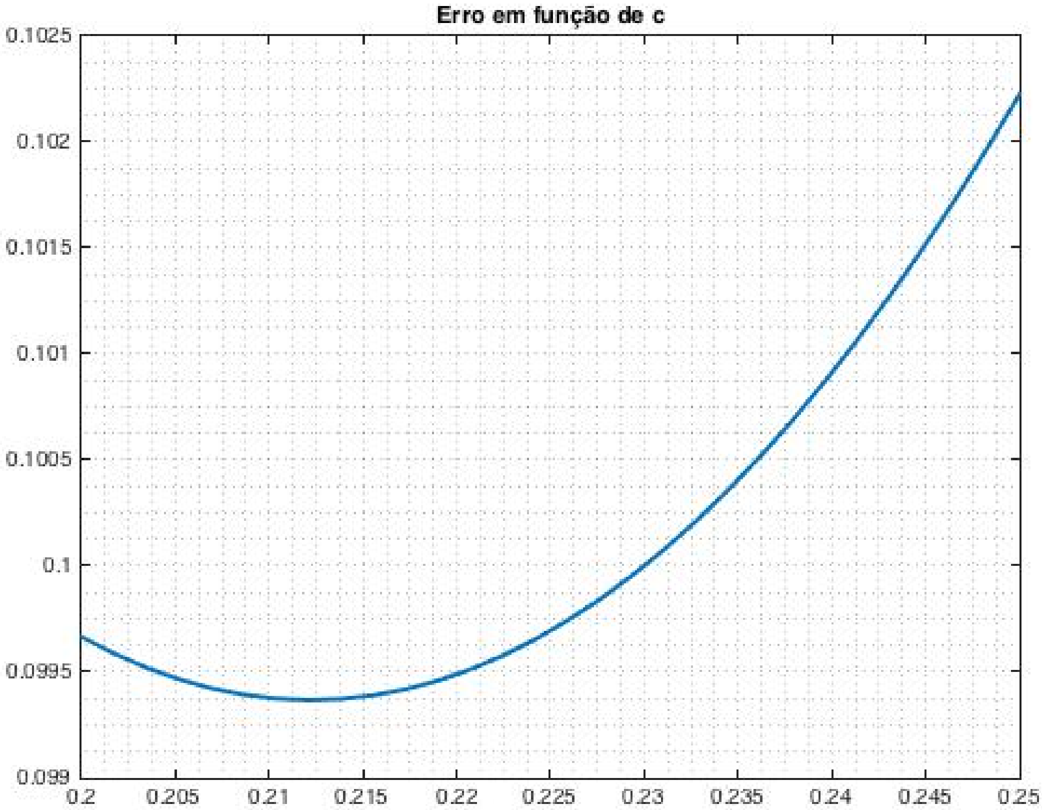

Figura 6: Erro em função do coeficiente c.

Análise do erro

```
%% Analisando para n=3

syms t

erro1 = @(c,n) (1-(1.5-0.6366*sin(t*pi/2)-c*sin(3*t*pi/2))).^2
erro2 = @(c,n) (2-(1.5-0.6366*sin(t*pi/2)-c*sin(3*t*pi/2))).^2

c=linspace(0.2,0.25,30);

for k=1:30
 E(k)= eval(int(erro1(c(k),1),t,0,2)+int(erro2(c(k),1),t,2,4));
end

figure(6)

set(findall(gcf,'Type','line'),'LineWidth',2);
set(gca,'FontSize',14,'LineWidth',1.5);

plot(c,E,'LineWidth',2); grid minor; title('Erro em função de c')
```

Síntese

Neste ponto o Matlab pode ajudar bastante na simulação de um número elevado de n para uma análise mais detalhada.

$$g(t) = \sum_{n=0}^{N} c_n x_n(t) \tag{24}$$

Matlab - complementando o código anterior

```
%% Fazendo a sintese dos sinais
% Análise de primeira harmônica

M=1000;
gt=Dn(Total+1);             % inciai sempre com o valor médio do sinal
t= linspace(0,To,M);        % cria o vetor tempo com 1000 pontos em 1
                            % período

for k=1:1
 gt = gt + Dn(Total+1+k)*exp(k*j*wo*t) + Dn(Total+1-k)*exp(-k*j*wo*t);
end

figure(2)
plot(t,gt,'LineWidth',2), title('Primeira harmônica'); grid minor

%% Criando o sinal g(t) para compararmos

gtr=[ones(1,M/2) 2*ones(1,M/2)];
hold; plot(t,gtr,'LineWidth',2)

%% Análise para a enésima harmônica

Nx=10;                        % Nx representa qual harmoônica
                              % estamos interessados em analisar

for k=2:Nx
 gt = gt + Dn(Total+1+k)*exp(k*j*wo*t) + Dn(Total+1-k)*exp(-k*j*wo*t);
end

figure(3)

plot(t,gt,'LineWidth',2), title('Nx=10'); grid minor
hold; plot(t,gtr,'LineWidth',2)
```

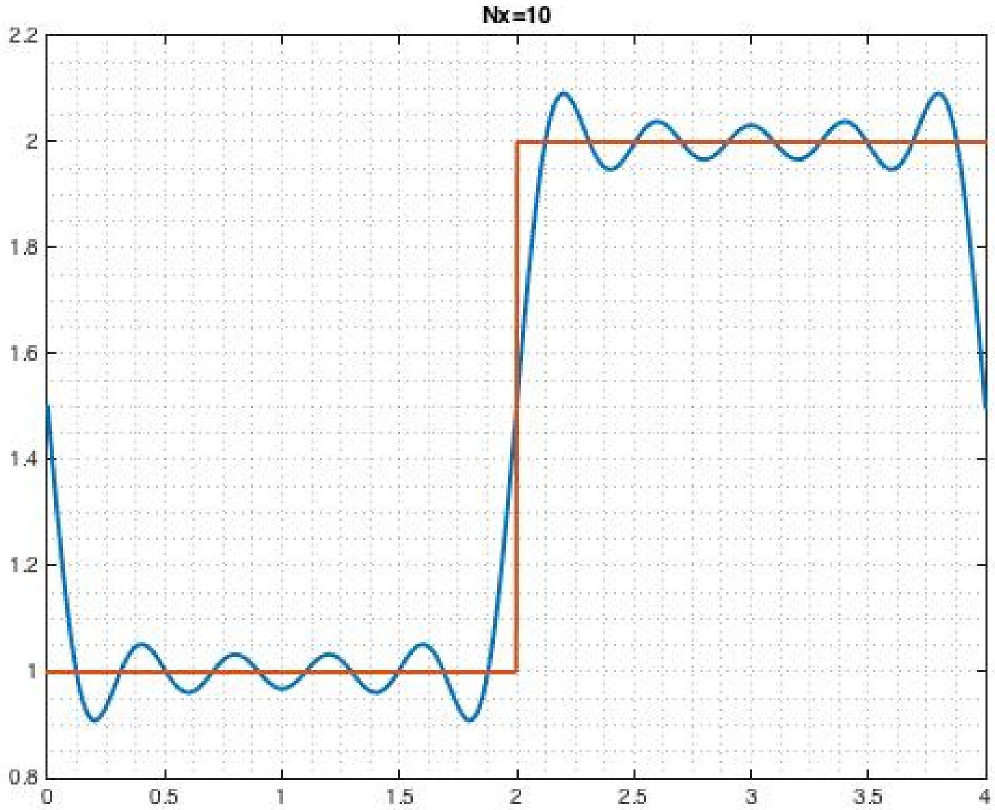

Figura 7: Comparação entre $g(t)$ e a somatória referente a $N_x = 10$.