ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL
DEPARTAMENTO DE FORMACIÓN BÁSICA
PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA • PRUEBA 1
FECHA: 27 DE NOVIEMBRE 2019

Nombres:	CI:	Firma:
Profesor CD:		Grupo CD:

Instrucciones:

1. No se permite el uso de DISPOSITIVOS ELECTRÓNICOS.
2. La duración de la PRUEBA es de 120 minutos.
3. Se permite el uso de calculadora científica y del formulario plastificado.
4. Cualquier INTENTO DE COPIA se sancionará con una nota de CERO puntos.
5. JUSTIFICAR CADA RESPUESTA.

EJERCICIOS:

1. Sean los conjuntos A, B y C tales que A es mutuamente excluyente de C y B es independiente de C; además se sabe que:

$$\begin{aligned} P(A \cap C^c) &= 0{,}4 \\ P(A \cap B) &= 0{,}16 \\ P(B \cap C) &= 0{,}24 \\ P(C) &= 0{,}6 \end{aligned}$$

Determinar:

a) $P(B|A)$

b) $P(B)$

c) $P[B \cap (A \cup C^c)]$

d) $P[C \cup (A \cap B^c)]$

Solución:

a) $P(B|A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A \cap C) + P(A \cap C^c)} = \dfrac{0{,}16}{0 + 0{,}4} = 0{,}4$

b) $P(B \cap C) = P(B)P(C)$ entonces $P(B)P(C) = 0{,}24$, de donde $P(B) = \dfrac{0{,}24}{0{,}6} = 0{,}4$

c)

$$\begin{aligned} P[B \cap (A \cup C^c)] &= P[(B \cap A) \cup (B \cap C^c)] \\ &= P(B \cap A) + P(B \cap C^c) - P[(B \cap A) \cap (B \cap C^c)] \\ &= 0{,}16 + [P(B) - P(B \cap C)] - P[A \cap B \cap C^c] \\ &= 0{,}16 + [0{,}4 - 0{,}24] - P(A \cap B) = 0{,}16 + [0{,}4 - 0{,}24] - 0{,}16 = 0{,}16 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} P[C \cup (A \cap B^c)] &= P(C) + P(A \cap B^c) - P[C \cap (A \cap B^c)] \\ &= P(C) + P(A \cap B^c) - P[C \cap (A \cap B^c)] \\ &= P(C) + P(A \cap B^c) - P[C \cap A \cap B^c] \\ &= P(C) + [P(A) - P(A \cap B)] - P(\varnothing \cap B^c) \\ &= P(C) + [P(A) - P(A \cap B)] - P(\varnothing) \\ &= 0{,}6 + [0{,}4 - 0{,}16] - 0 = 0{,}84 \end{aligned}$$

2. Dos profesores A y B están interesados en estudiar los hábitos de sueño de los estudiantes en sus clases. Ambos profesores registran el tiempo en minutos que demoran en quedarse dormidos sus alumnos desde que empieza la clase. El gráfico muestra los tiempos que demoran en quedarse dormidos los alumnos del profesor A.

Los datos del Profesor B son los siguientes:

10,5 11,3 11,9 12 12,3 12,3 12,5 12,7 13,4 13,7 13,8 14,2 14,8 15,1 15,3 16,7 16,8 18,8 20,8

a) ¿Cuál es el valor aproximado de las medidas de dispersión del tiempo del Profesor A?. Explique

b) ¿Qué porcentaje de alumnos se queda dormido antes de los 14 minutos con el Profesor A?. Justifique.

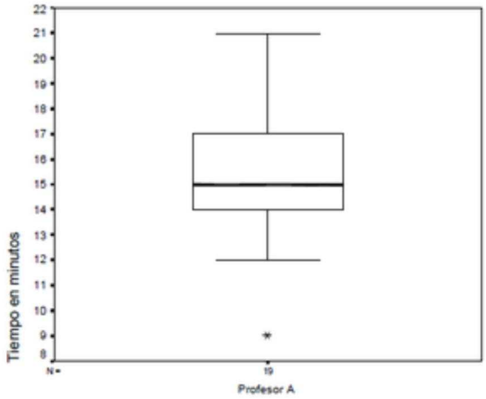


Figura 1: Diagrama de caja Profesor A

c) Construya un diagrama de caja correspondiente a los tiempos en que se quedan dormidos los alumnos en la clase del Profesor B.Analice los dos gráficos e interprete.

Solución

a) ¿Cuál es el valor aproximado de las medidas de dispersión del tiempo del Profesor A?. Explique

$$T_{min} = 12$$
$$T_{max} = 21$$
$$Rango = 9$$
$$Q_1 = 14$$
$$Q_2 = 15$$
$$Q_3 = 17$$
$$RIQ = 3$$

b) ¿Qué porcentaje de alumnos se queda dormido antes de los 14 minutos con el Profesor A?. Justifique.

25 %, ya que entre el tiempo mínimo y el cuartil Q_1, se acumula el 25 % de los datos.

c) Construya un diagrama de caja correspondiente a los tiempos en que se quedan dormidos los alumnos en la clase del Profesor B.Analice los dos gráficos e interprete.

$$T_{min} = 10,5$$
$$T_{max} = 20,8$$
$$Rango = 10,3$$
$$RIQ = 3$$

Ordenando los datos, obtenemos los cuartiles

Tiempo en quedarse dormidos	Cuartiles
10,5	
11,3	
11,9	
12,0	
12,3	Q_1
12,3	
12,5	
12,7	
13,4	
13,7	Q_2
13,8	
14,2	
14,8	
15,1	
15,3	Q_3
16,7	
16,8	
18,8	
20,8	

3. Un profesor califica sus pruebas en una escala de 4 puntos (1, 2, 3, 4). Supongamos que en un curso de 30 alumnos los resultados ordenados fueron:

   1 1 1 2 2 2 2 2 2 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 4 4 4 4 4 4 4 4 4

   Sea X = resultado de la prueba para un alumno del curso elegido al azar. Determine

   a) La ley de probabilidad para la v.a.d. X y su gráfica.

   b) La distribución acumulada y su gráfica.

   c) La esperanza y varianza de X.

   d) Si $Y = 0{,}5X + 5$, calcule $E(Y)$

   Solución

   a) La ley de probabilidad para la v.a.d. X y su gráfica. Sea X = resultado de la prueba para un alumno del curso elegido al azar, su ley de probabilidad es

x	1	2	3	4
p(x)	3/30	6/30	12/30	9/30

   b) La distribución acumulada y su gráfica.

x	1	2	3	4
F(x)	3/30	9/30	21/30	30/30

   c) La esperanza y varianza de X.

$$E(X) = (1)(3/30) + (2)(6/30) + (3)(12/30) + (4)(9/30) = 85/30$$

$$V(X) = (1)^2(3/30) + (2)^2(6/30) + (3)^2(12/30) + (4)^2(9/30) - (85/30)^2 = 229/180$$

   d) Si $Y = 0{,}5X + 5$, calcule $E(Y)$

$$Y = 0{,}5X + 5$$

   Entonces la esperanza de Y

$$E(Y) = 0{,}5E(X) + 5 = 0{,}5(85/30) + 5 = 385/60$$

4. Dada la función de distribución:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -2 \\ \dfrac{x^2 + kx + 4}{24} & \text{si } -2 \leq x < 1 \\ \dfrac{cx^2 + 12x + 4}{40} & \text{si } 1 \leq x \leq 6 \\ 1 & \text{si } x > 6 \end{cases}$$

a) Hallar los valores de c y k para que exista $f(x)$ y determine esta.

b) Hallar $P(0 \leq X \leq 4)$

c) Hallar $P(X \leq 5 | X \geq 0)$

d) Hallar la mediana

Solución:

a) De la continuidad de la función de distribución se obtiene que $c = -1$ y $k = 4$, además:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -2, \\ \dfrac{2x+4}{24} & \text{si } -2 \leq x < 1, \\ \dfrac{-2x+12}{40} & \text{si } 1 \leq x < 6, \\ 0 & \text{si } x \geq 6, \end{cases}$$

b) $P(0 \leq X \leq 4) = F(4) - F(0) = \dfrac{36}{40} - \dfrac{4}{24} = 0{,}733$

c) $P(X \leq 5 | X \geq 0) = \dfrac{P(X \leq 5 \cap X \geq 0)}{P(X \geq 0)} = \dfrac{P(0 \leq X \leq 5)}{P(X \geq 0)} = \dfrac{P(X \leq 5) - P(X \leq 0)}{1 - P(X \leq 0)} = \dfrac{F(5) - F(0)}{1 - F(0)} = 0{,}97$

d) $Med = x$ tal que $F(x) = 0{,}5$, por lo tanto

$$\frac{-x^2 + 12x + 4}{40} = 0{,}5$$

así, $x = \dfrac{12 - \sqrt{80}}{2} \approx 1{,}528$.

5. Se sabe que una prueba para la detección de una cierta enfermedad da positiva en el 96 % de los casos en que se está enfermo, y negativa en el 94 % de los sanos. Cierta persona se somete a la prueba y se sabe que, a su edad, una de cada 45 personas está enferma sin saberlo.

a) Cuál es la probabilidad de que la prueba de el resultado correcto?

Sean los eventos:
$E = \{$ persona enferma $\}$
$O = \{$ prueba da positivo $\}$
$C = \{$ prueba da resultado correcto $\}$
por tanto,

$$\begin{aligned} Pr(C) &= Pr(O|E) \cdot Pr(E) + Pr(O^c|E^c) \cdot Pr(E^c) \\ &= \left(\frac{96}{100}\right)\left(\frac{1}{45}\right) + \left(\frac{94}{100}\right)\left(\frac{44}{45}\right) \\ &= 0{,}9404 \end{aligned}$$

b) Si el resultado es positivo, cuál es la probabilidad de que esté enferma realmente?

$$\begin{aligned} Pr(E|O) &= \frac{Pr(O|E) \cdot Pr(E)}{Pr(O)} \\ &= \frac{\left(\frac{96}{100}\right)\left(\frac{1}{45}\right)}{\left(\frac{96}{100}\right)\left(\frac{1}{45}\right) + \left(\frac{6}{100}\right)\left(\frac{44}{45}\right)} \\ &= 0{,}2666 \end{aligned}$$

c) Si el resultado fuera negativo, cuál es la probabilidad de que a pesar de todo esté enferma?

$$\begin{aligned} Pr(E|O^c) &= \frac{Pr(O^c|E) \cdot Pr(E)}{Pr(O^c)} \\ &= \frac{\left(\frac{4}{100}\right)\left(\frac{1}{45}\right)}{\left(\frac{4}{100}\right)\left(\frac{1}{45}\right) + \left(\frac{94}{100}\right)\left(\frac{44}{45}\right)} \\ &= 0{,}000966 \end{aligned}$$

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL
DEPARTAMENTO DE FORMACIÓN BÁSICA
PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA • EXAMEN 1
FECHA: 04 DE DICIEMBRE 2019

Nombres:	CI:	Firma:
Profesor CD:		Grupo CD:

Instrucciones:

1. No se permite el uso de DISPOSITIVOS ELECTRÓNICOS.
2. La duración del EXAMEN es de 120 minutos.
3. Se permite el uso de calculadora científica y del formulario plastificado.
4. Cualquier INTENTO DE COPIA se sancionará con una nota de CERO puntos.
5. JUSTIFICAR CADA RESPUESTA.

EJERCICIOS:

1. En una estación de investigación de los recursos hídricos de una región se ha obtenido la siguiente muestra respecto al número de litros de aceite que se utilizaron y los días en los que se utilizó esa cantidad de litros

Litros de aceite	Número de días
25	14
27	13
28	9
29	11
31	7
32	12
33	15
34	10
35	8
37	11

Si el litro de aceite cuesta $ 5.50, calcule:

a) El costo total del aceite gastado en los 38 días de menor uso.

b) El número de días en los que se utilizó menos de 30 litros

c) El número de litros que en promedio se utilizó por día y el costo promedio diario

d) El mínimo número de litros del 15 % de los días de mayor uso

e) El percentil 70 de los litros de aceite utilizados

Se tiene que:

Litros de aceite	f(x)	F(x)	Fr(x)
25	14	14	0.13
27	13	27	0.25
28	9	36	0.33
29	11	47	0.43
31	7	54	0.49
32	12	66	0.6
33	15	81	0.74
34	10	91	0.83
35	8	99	0.9
37	11	110	1

Por lo tanto,

a)

$$C = [(25 \times 14) + (27 \times 13) + (28 \times 9) + (29 \times 11)] \times 5{,}50 = \$5560{,}5$$

b) $F(x)$ tal que $x < 30$, por lo tanto $F(29) = 47$ días *c*)

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{10} X_i \cdot f(X_i) = \frac{1}{110}[(25 \times 14) + (27 \times 13) + (28 \times 9) + \cdots + (37 \times 11)] = 30{,}86 \text{ lt}$$

Por lo tanto, el costo promedio viene dado por:

$$CP = 30{,}86 \times \$5{,}50 = \$169{,}75$$

d) Si $F(x) = 110 \times 0{,}85 = 93{,}5 \approx 94$, entonces $x = 35$ lt

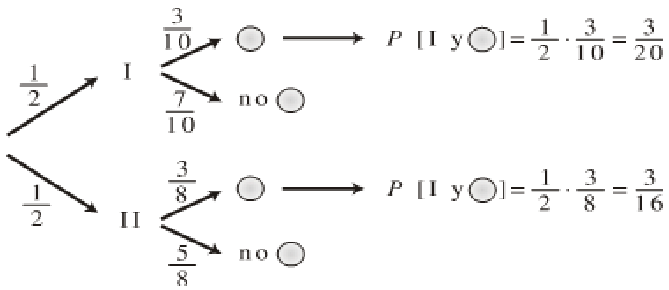
e) Si $F(x) = 110 \times 0{,}7 = 77$, entonces $x = 33$ lt

2. Tenemos dos urnas: la primera tiene 3 bolas rojas, 3 blancas y 4 negras; la segunda tiene 4 bolas rojas, 3 blancas y 1 negra. Elegimos una urna al azar y extraemos una bola.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea blanca?

I: representa la bola se extrae de la primera urna

II: representa la bola se extrae de la segunda urna B: elegimos una urna al azar y extraemos una bola y es blanca



$$P(B) = \frac{3}{20} + \frac{3}{16} = \frac{27}{80}$$

b) Sabiendo que la bola extraída fue blanca, ¿cuál es la probabilidad de que fuera de la primera urna?

$$P(I|B) = \frac{P(I \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{27}{80}} = \frac{4}{9}$$

c) Sabiendo que la bola extraída fue de la primera caja, ¿cuál es la probabilidad de que sea blanca?

$$P(B|I) = \frac{P(B \cap I)}{P(I)} = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{10}$$

3. Entre los candidatos a miembros del consejo estudiantil, que consta de 5 miembros, hay 3 estudiantes de primer año, 5 estudiantes de segundo año y 7 estudiantes de tercer año. Calcule las probabilidades de los siguientes eventos:

a) se elijan únicamente los estudiantes de tercer año.

$$\frac{C_7^5 \cdot C_8^0}{C_{15}^5} = \frac{1}{143} \approx 0{,}006993$$

b) todos los estudiantes del primer año fueron elegidos.

$$\frac{C_3^3 \cdot C_{12}^2}{C_{15}^5} = \frac{2}{91} \approx 0{,}021978$$

c) no se eligió ningún estudiante de segundo año.

$$\frac{C_{10}^5 \cdot C_5^0}{C_{15}^5} = \frac{12}{143} \approx 0{,}083916$$

d) la composición de los elegidos es la siguiente: 1 estudiante de primero, 2 estudiantes de segundo y 2 estudiantes de tercero.

$$\frac{C_3^1 \cdot C_5^2 \cdot C_7^2}{C_{15}^5} = \frac{30}{143} \approx 0{,}209790$$

4. Suponga que X es una variable aleatoria cuya función de densidad de probabilidad está representada en la Figura 1:

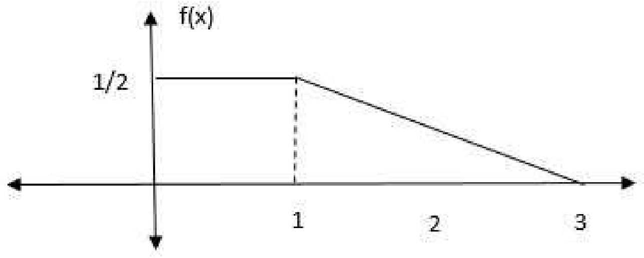


Figura 1: Función de densidad de probabilidad

a) Si $P\left(\frac{1}{3} \leq X \leq a\right) = \frac{1}{2}$, determine el valor de a.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ -\dfrac{x}{4} + \dfrac{3}{4} & \text{si } 1 \leq x < 3, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

$$P\left(\frac{1}{3} \leq X \leq a\right) = \int_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{1}{2} dx + \int_{1}^{a} \left(-\frac{x}{4} + \frac{3}{4}\right) dx$$

Evaluando estas integrales e igualando a $\frac{1}{2}$, el valor de a es

$$\frac{9 - 2\sqrt{6}}{3} \approx 1,367$$

b) Calcular $P\left(\frac{1}{2} \leq X \leq 2\right)$.

$$P\left(\frac{1}{2} \leq X \leq 2\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{2} dx + \int_{1}^{2} \left(-\frac{x}{4} + \frac{3}{4}\right) dx$$

Por tanto, integrando y evaluando las integrales

$$P\left(\frac{1}{2} \leq X \leq 2\right) = \frac{5}{8} \approx 0,625$$

c) Hallar $F(x)$.

5. Una empresa elabora ladrillos prensados para acabados de la construcción de los cuales, se sabe, que el 10 % de la producción presenta algún defecto en su fabricación.

a) Para un proceso de control de calidad, toman al azar 10 ladrillos, calcule la probabilidad de que al menos 9 ladrillos no tengan defecto alguno.
Solución: Se aplica la ley Binomial de probabilidades con $n = 10$, $p = 0{,}9$.
$P(X \geq 9) = P(X = 9) + P(X = 10) = 0,38742049 + 0,34867844 = 0,73609893$

b) La empresa envía lotes empacados de 30 ladrillos a sus clientes. Sabiendo que, si al inspeccionar el cliente al azar 8 ladrillos de un lote enviado, encuentra 2 o más ladrillos con algún defecto les devuelven el lote, cuál es la probabilidad de que no se rechace el envío.
Solución: Sea X : "Número de ladrillos defectuosos en los 8", se tiene en un lote de 30 ladrillos, 3 defectuosos, y 27 no defectuosos. Por lo tanto, X sigue una distribución hipergeométrica, así:

$$P(rechazar) = P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) = 0,1655$$
$$P(no\ rechazar) = 1 - P(rechazar) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0,3793 + 0,4552 = 0,8345$$

c) El cliente necesita 12 ladrillos sin defectos. Calcule la probabilidad de que tenga que inspeccionar máximo 14 ladrillos para obtener lo que necesita.
Solución: Sea X : "Número de ladrillos revisados hasta encontrar 12 sin defectos", entonces X sigue una distribución Binomial negativa con $k = 12$ éxitos y $p = 0{,}9$, por lo tanto:

$$P(X \leq 14) = P(X = 12) + P(X = 13) + P(X = 14) = 0,28243 + 0,33892 + 0,22030 = 0,84164$$

d) Para elaborar ladrillos refractarios, estos pasan por un horno de banda a altas temperaturas a un promedio de 6 ladrillos cada 2 minutos. Cuál es la probabilidad de ingresen cero ladrillos en 1 minuto.

Solución: Sea X : "Número de ladrillos que ingresan al horno en 1 minuto", entonces X sigue una distribución de Poisson, además sabemos que pasan 6 ladrillos en promedio en 2 minutos, por lo tanto $\lambda = 3 \dfrac{\text{ladrillos}}{\text{minuto}}$, de donde:

$$P(X = 0) = 0,049787068$$

Escuela Politécnica Nacional
Departamento de Formación Básica
Probabilidad y Estadística • Prueba 2
Fecha: 23 de enero 2020

DFB DEPARTAMENTO DE FORMACIÓN BÁSICA E P N

Nombre:	CI:	Firma:
Profesor CD:		Grupo CD:

Instrucciones:

1. Se permite el uso de calculadora científica, ningún otro DISPOSITIVO ELECTRÓNICO.
2. La duración de la PRUEBA es de 90 minutos.
3. Se permite el uso del formulario plastificado, tabla de distribución χ^2, tabla de distribución Normal y tabla de distribución t-Student.
4. Cualquier INTENTO DE COPIA se sancionará con una nota de CERO puntos.
5. JUSTIFICAR CADA RESPUESTA.

EJERCICIOS:

1. Una empresa de aviación desea comprar tornillos de seguridad para el anclaje de piezas y solicita una cotización a dos fabricantes X y Y. La empresa pone como condición que los tornillos tengan una resistencia de al menos 25,000 *psi*. El fabricante X ofrece unos tornillos de seguridad que se ajustan a una ley normal con media de 30,000 *psi* y desviación estándar de 4000 *psi*; mientras que el fabricante Y ofrece tornillos que siguen una ley normal con media 28,000 *psi* y desviación estándar de 2000 *psi*.

   a) ¿Cuál fabricante produce los tornillos más confiables y por qué?. **(1.25 pto)**

   b) ¿Cuánto debería valer la desviación estándar del fabricante X para tener el mismo valor de confiabilidad que el fabricante Y? **(1.25 pto)**

2. En cierta población se sabe que el gasto mensual por familia se distribuye uniformemente en el intervalo [600;1000] dólares. Determinar:

   a) Probabilidad de que una familia tenga un gasto mensual que difiera de la media de gasto por familia en menos de \$100. **(0.90 pto)**

   b) Cierta familia tiene un presupuesto de \$26.000 para cubrir sus gastos mensuales en un período de 3 años. ¿Cuál es la probabilidad de que este presupuesto sea suficiente? **(0.70 pto)**

   c) ¿Cuál debería ser el presupuesto para cubrir los gastos mensuales de un período de 2.5 años con una probabilidad del 95 %? **(0.90 pto)**

3. Los ingresos del impuesto sobre ventas en una ciudad que tiene un total de 300 establecimientos comerciales se recogen cada trimestre. Los siguientes datos representan los ingresos (en miles de dólares) cobrados durante el primer trimestre en una muestra de 9 establecimientos comerciales

   16 18 11 17 13 10 22 15 16

   a) Determine una estimación del intervalo con 95 % de confianza de los ingresos trimestrales del impuesto sobre ventas en los establecimientos comerciales. **(1.25 pto)**

   b) Determine una estimación del intervalo con 95 % de confianza de los ingresos totales por impuestos sobre ventas que recogerán este trimestre. **(1.25 pto)**

4. Supongamos que el 40 % de los votantes está a favor de la reelección del actual alcalde de la ciudad.

   a) Si se selecciona una muestra de 400 electores de la ciudad, ¿cuál es la probabilidad de que la proporción muestral de votos a favor del alcalde esté entre el 38 % y el 44 %?;**(1.25 pto)**

   b) ¿Cuál debe ser el tamaño muestral para tener una probabilidad del 95 % de que la proporción de votos a favor del alcalde en la muestra no se diferencie de la proporción supuesta en más del 3 %? **(1.25 pto)**

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL
DEPARTAMENTO DE FORMACIÓN BÁSICA
PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA • EXAMEN 2
FECHA: 14 DE FEBRERO 2020

Nombre:	CI:	Firma:
Profesor CD:		Grupo CD:

Instrucciones:

1. Se permite el uso de calculadora científica, ningún otro DISPOSITIVO ELECTRÓNICO.
2. La duración del EXAMEN es de 120 minutos.
3. Se permite el uso del formulario plastificado, tabla de distribución χ^2, tabla de distribución Normal y tabla de distribución t-Student.
4. Cualquier INTENTO DE COPIA se sancionará con una nota de CERO puntos.
5. JUSTIFICAR CADA RESPUESTA.

EJERCICIOS:

1. El tiempo de vida útil de cierto tipo de baterías se distribuye exponencialmente con media de 80 horas. Determinar:

   a) Probabilidad de que la vida útil de una batería difiera de la media en al menos 10 horas. **(0.9 pto)**

   Solución
   Sea X :"Tiempo de vida útil de una batería", entonces tenemos que X sigue una distribución exponencial con $\mu = 80$, como $\mu = \dfrac{1}{\lambda}$ se tiene que $\lambda = \dfrac{1}{80}$, además tenemos que $\sigma^2 = \dfrac{1}{\lambda^2} = 80^2$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} P(|X-\mu| \geq 10) &= 1 - P(|X-\mu| \leq 10) \\ &= 1 - P(-10 \leq X - \mu \leq 10) \\ &= 1 - P(70 \leq X \leq 90) \\ &= 1 - (F(90) - F(70)) = 1 - \left[\left(1 - e^{-90/80}\right) - \left(1 - e^{-70/80}\right)\right] = 1 + e^{-90/80} - e^{-70/80}. \end{aligned}$$

   b) En una instalación científica se necesitan 38 baterías para cierto proceso. ¿Cuál es la probabilidad de que su tiempo promedio de funcionamiento sea mayor a 86 horas? **(0.7 pto)**

   Solución
   Se tiene que $n = 38$ y por el teorema del límite central tenemos que:

$$\overline{X} \rightsquigarrow N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) = N\left(80, \frac{80^2}{38}\right)$$

   Por lo tanto,

$$P(\overline{X} > 86) = 1 - P(\overline{X} \leq 86) = 1 - P\left(Z \leq \frac{86-80}{\sqrt{80^2/38}}\right) = 1 - P(Z \leq 0{,}46) = 1 - 0{,}6772 = 0{,}3238.$$

   c) ¿Cuántas baterías se necesitarían en el proceso para que su tiempo promedio de funcionamiento sea mayor a 86 horas con una probabilidad de al menos el 15 %? **(0.9 pto)**

   Solución
   Por el teorema del límite central tenemos que:

$$\overline{X} \rightsquigarrow N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) = N\left(80, \frac{80^2}{n}\right)$$

   entonces,

$$P(\overline{X} > 86) = 0{,}15 \Rightarrow P(\overline{X} \leq 86) = 0{,}85 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{86-80}{\sqrt{80^2/n}}\right) = 0{,}85$$

   como,

$$P(Z \leq 1{,}04) \approx 0{,}85 \Rightarrow \frac{86-80}{\sqrt{80^2/n}} = 1{,}04 \Rightarrow n = \left(\frac{(1{,}04)(80)}{6}\right)^2 = 192{,}28 \Rightarrow n = 193.$$

2. Un portal de comercio electrónico sabe que el 60 % de todos sus visitantes a la web están interesados en adquirir sus productos, pero son reacios al comercio electrónico y no realizan finalmente la compra vía internet. Sin embargo, en la dirección del portal se piensa que en el último año el porcentaje de gente que está dispuesta a comprar por internet ha aumentado y esto se debe reflejar en los resultados empresariales. En esta línea, se tomó una muestra de 500 visitantes para conocer su opinión y se observó que el 55 % no estaba dispuesta a realizar compras vía on-line.

a) Contrastar con el 2 % de significancia si el último año se ha reducido el porcentaje de personas que no está dispuesta a comprar vía internet. **(1.25 pto)**

Solución

1) H_0: p = 0,60
2) H_1: p <0,60
3) Estadístico de prueba:

$$Z_{obs} = \frac{\hat{p} - po}{\sqrt{po(1-po)/n}}$$

$$Z_{obs} = -2,2821$$

4) Región de rechazo:
Se rechaza H0 si:

$$Z_{obs} < -Z_\alpha$$

$$Z_\alpha = -2,06$$

5) Decisión:
Como el valor de $Z_{obs} < -Z_\alpha$, se rechaza H0, existe evidencia empírica que la proporción de visitantes al portal que están dispuestos a comprar on-line ha disminuido, es decir, el porcentaje de visitantes que son reacios a comprar por internet ha aumentado.

b) Calcule el p-valor de la prueba. **(1.25 pto)**

Solución

El valor de

$$Z_{obs} = -2,2821,$$

entonces

$$\phi(-2,28) = 0,9887$$

por tanto el $p - valor = 1 - 0,9887 = 0,0113$

3. Un banco desea conocer el tiempo que se demoran los cajeros en despachar a los clientes. Para ello se recogió información sobre el tiempo que se demoraba cada cliente desde que llegaba frente a la caja hasta que completaba su transacción. Los siguientes datos resumen las mediciones:

Duración (min)	0 a 1	1 a 2	2 a 3	3 a 4	4 a 5	5 o más
Número de clientes	35	58	29	11	4	7

Pruebe si la distribución del tiempo de demora de los clientes sigue una ley exponencial. **(2.5 pto)**

Solución

a) H_0: La distribución del tiempo de demora de los clientes sigue una ley exponencial.
b) H_1: La distribución del tiempo de demora de los clientes no sigue una ley exponencial.
c) Estadístico de prueba:

$$\chi^2_{obs} = \sum \frac{(O_j - e_j)^2}{e_j}$$

$$\chi^2_{obs} = 31,147$$

d) Región de rechazo:

Nivel de significancia: 0,05
Grados de libertad: $k - 1 - m = 5 - 1 - 1 = 3$
Se rechaza H0 si:

$$\chi^2_{obs} > \chi^2_{0,05(3)}$$

$$\chi^2_{0,05(3)} = 7,8114$$

e) Decisión:
Como el estadístico observado es mayor que el estadístico de tabla, a un nivel de significacia del 0,05 y 3 grados de libertad, se rechaza H0, es decir, los datos no siguen una distribución exponencial.

4. Una empresa que se dedica a la venta de artículos de hogar está interesada en introducir una nueva línea de artículos, para ello se examinan las ganancias (en dólares) obtenidas durante 12 días:

$$23 \quad 38 \quad 15 \quad 7 \quad 12 \quad 10 \quad 10 \quad 11 \quad 18 \quad 13 \quad 9 \quad 10$$

Si se conoce que las ganancias de los artículos siguen una distribución normal cuya desviación estándar es 4,67 dólares.

a) Calcule un intervalo de confianza para la ganancia media, a un nivel de confianza del 96 %. **(0.9 pto)**

Solución:

Puesto que se conoce la desviación estándar de la población, el intervalo de confianza solicitado se obtiene mediante las expresiones:

- **Límite Inferior:** $\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
- **Límite Superior:** $\bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

donde:

$$P(z < z_{\alpha/2}) = 0{,}98 \qquad \text{es decir,} \qquad z_{\alpha/2} = 2{,}05$$

por tanto:

$$11{,}91 \leq \mu \leq 17{,}43$$

b) Calcule un intervalo de confianza para la varianza de la ganancia, a un nivel de confianza del 98 %. **(0.9 pto)**

Solución:

A partir de la muestra se tiene que: $s^2 = 73{,}1515$, por tanto:

- Límite inferior: $\dfrac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} = 32{,}55$
- Límite superior: $\dfrac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)} = 263{,}22$

de donde:

$$32,55 \leq \sigma^2 \leq 263,22$$

c) La empresa introducirá la nueva línea de productos si la desviación estándar es menor a 7 dólares. En base a los resultados, se introducirán al mercado los nuevos productos ?. Explique por qué. **(0.7 pto)**

Solución:

La probabilidad solicitada es:

$$\begin{aligned}
P(s < 7) &= P(s^2 < 49) \\
&= 1 - P(s^2 \geq 49) \\
&= 1 - P\left(\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \geq \frac{11(49)}{4{,}67^2}\right) \\
&= 1 - P(\chi^2(11) > 24{,}71) \\
&= 1 - 0{,}01 \\
&= 0{,}99
\end{aligned}$$

En base a los resultados le conviene introducir la nueva línea de productos, ya que la probabilidad de que la desviación estándar sea menor a 7 dólares es del 99 %.

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

DFB DE FORMACIÓN BÁSICA

PROBABILIDAD Y ESTADISTICA
EXAMEN 2-2019-B

NOMBRE [redacted] GRUPO CD..[redacted]........

Indicaciones:

- Se permite el uso de calculadora científica, ningún otro dispositivo electrónico.
- La duración del **EXAMEN** es de 120 minutos.
- Se permite el uso del formulario **plastificado, tabla de distribución Chi-cuadrado,** tabla de distribución Normal **y tabla de distribución t-Student.**
- Cualquier **Intento de copia** se sancionará con una nota de **cero puntos**.
- **Justificar cada respuesta.**

1. El peso X de los adornos que produce cierta empresa tienen media igual a 4.5 kg y varianza igual a 1.96 kg^2.
   a. Si se desea comercializar en cajas de 49 unidades cada una, calcule la probabilidad de que el peso promedio de las cajas se encuentre entre 4.2 y 5 kg. 0
   b. Calcule a partir de que valor, se encuentra el 20% de los promedios más altos de las cajas de 49 unidades cada una. 228.732
   c. Calcule el mínimo número de adornos que se deben tomar para que su promedio y la media de producción se diferencien en menos de 0.5 kg, con probabilidad mayor o igual a 0.985. 47
   d. Calcule el número de adornos que se deben tomar para que su promedio se halle entre 4.1 y 4.9 kg, con probabilidad aproximadamente igual a 0.985. 43
2. En una papelería se recibe, del fabricante, un envío de una cierta marca de plumas estilográficas desechables. El dueño de la papelería desea estimar la porción de plumas que tienen defectos. Se prueba una muestra aleatoria de 300 plumas, y se encuentra que 30 de ellas tienen defectos.
   a. Establezca una estimación de intervalo de confianza de 90% de la porción de plumas defectuosas del envío. $0.0716 \leq p \leq 0.1284$
   b. El envío puede ser regresado si tiene más de 5% de plumas defectuosas; basándose en los resultados de la muestra, ¿puede el dueño regresar el pedido? Si
3. Una máquina con la que se obtienen recipientes de aluminio, trabaja con comportamiento normal y las especificaciones de fabricación aseguran que la media es igual a 1.6 libras y la desviación estándar es igual a 0.2 libras.
   El supervisor de producción va a realizar pruebas de hipótesis respecto a las especificaciones. Si la muestra tomada al azar está dada por:

   1.5 1.3 2.1 1.3 1.6 1.8 1.6 1.2 2.3 1.4 2.2 1.8

   ¿Es posible aceptar las especificaciones que se aseguran para la desviación estándar y la media? $t_{obs} = 0.7029$ Si $\chi^2_{obs} = 37.565$ No
4. Una muestra aleatoria de la puntuación obtenida por los estudiantes que rindieron una prueba de ingreso a la Universidad, dio los siguientes resultados:

   85 87 91 93 95 96 98 99 100
   101 101 101 102 103 104 106

   En años anteriores la puntuación de la prueba seguía una distribución normal de media 98 y desviación 5. De acuerdo con esta muestra, ¿podemos pensar que ha variado la distribución de la variable en estudio?

19-02-2020