Probabilidad y Estadística - 2024-A

Sección 2: Probabilidad

Preparado por:

Cátedra de Probabilidad y Estadística - EPN

0. Índice general

1 Probabilidad **3**

1.1 Definiciones 4

1.1.1 Diagrama de árbol 11

1.2 Métodos de enumeración 13

1.2.1 Permutaciones 13

1.2.2 Combinaciones 16

1.2.3 Permutaciones a partir un conjunto con elementos repetidos 18

1.3 Probabilidad Condicional e Independencia 21

1.4 Probabilidad Total y Regla de Bayes 26

1. Probabilidad

Resultados de aprendizaje

Conocimientos

1. Conocer los conceptos básicos de la probabilidad (Descripción, Espacio muestral, sucesos, etc).
2. Definir los conceptos de probabilidad distinguiendo entre sus respectivas notaciones en teoría de conjuntos y teoría de probabilidades.
3. Entender la definición matemática de la probabilidad.
4. Aprender y aplicar las propiedades de la probabilidad.
5. Distinguir los distintos tipos de espacios muestrales (Discreto o Continuo).
6. Aprender los distintos métodos de conteo.
7. Distinguir en que situaciones se utilizan el principio de la multiplicación o el principio de la adición.
8. Distinguir en que situaciones se utilizan combinaciones o permutaciones.
9. Entender la probabilidad condicional y la independencia de eventos.
10. Aplicar el teorema de Bayes.

Introducción

En sus inicios el desarrollo de la probabilidad fue financiada por los grandes apostadores en el siglo XVII, para conocer las probabilidad de los diferentes juegos de azar de la época, este desarrollo fue aprovechado después por los científicos en diferentes fenómenos físicos y en este capítulo se presenta los principales elementos de la probabilidad.

Desde muy pequeños desarrollamos la idea de probabilidad al jugar juegos de mesa y al enfrentarnos a situaciones **aleatorias**. Por ejemplo, en el lanzamiento de un dado, es claro que existen seis posibles resultados y que en cada nuevo lanzamiento no siempre se obtiene el mismo resultado anterior. Del mismo modo cuando lanzamos una moneda tenemos dos posibles opciones y en cada lanzamiento se puede obtener una u otra opción (cara o sello). De esta manera, el ser humano poco a poco adquiere una idea intuitiva de probabilidad y aunque no sepa definirla ni calcularla.

El enfoque más intuitivo desde el cual se aborda la probabilidad es a través de la frecuencia relativa, es decir, a través de la repetición del experimento. Por ejemplo, al lanzar una moneda un gran número de veces de tal manera que registramos el número de lanzamientos y el número de caras y sellos; en concreto, digamos que lanzamos 100 veces, la proporción de caras es cercano a la mitad (obviamente si la moneda no ha sido modificada), es decir, 50 caras; la frecuencia relativa en este experimento es $\frac{1}{2}$, la frecuencia es aproximadamente la probabilidad de que se obtenga cara en un lanzamiento de moneda.

La probabilidad juega un papel muy importante en diferentes ramas de la ciencia y es un instrumento básico y necesario para su abordaje, nos permitirá afrontar situaciones de la vida cotidiana, nos permitirá predecir, modelar, probar hipótesis, inclusive realizar control de calidad, entre muchas otras aplicaciones.

1.1. Definiciones

Antes de abordar la probabilidad vamos a establecer ciertos conceptos fundamentales en el contexto estadístico; primero vamos a distinguir el concepto de experimento aleatorio.

Existen dos tipos de fenómenos, los primeros son aquellos que bajo un conjunto específico de condiciones permiten obtener los mismos resultados. En particular, si se deja caer un objeto de cierta altura el tiempo que se demora en llegar al suelo es el mismo independientemente del número de veces que se repita el experimento. En cambio, hay ciertos fenómenos, a pesar de que se hagan bajo las mismas condiciones el resultado es diferente cada vez que se repite; por ejemplo, al sacar una bolita al azar en el bingo, el lanzamiento de un dado, sacar una carta al azar, etc. A este tipo de “fenómenos” los llamaremos experimentos aleatorios; así:

Definición 1 – Experimento Aleatorio

Es un fenómeno con un resultado que no se puede predecir con certeza.

Tomemos el experimento aleatorio *escoger de una bolsa de cuatro canicas de diferentes colores una al azar e identificar el color de la misma*, digamos que los colores de las canicas son NEGRO, ROJO, BLANCO y VERDE, así al sacar una bola al azar, el color de ésta será uno de los cuatro anteriores. Lo único que podremos es adivinar cuál es el color de la bola, pero nunca sabremos con certeza el color de la misma sin verla.

Definición 2 – Espacio Muestral

Al conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio se le denomina **espacio muestral**, notaremos al espacio muestral con Ω.

Del ejemplo anterior observemos que el espacio muestral es el conjunto de los cuatro colores que de cualquiera de las bolas, es decir,

$$\Omega = \{\text{NEGRO}, \text{ROJO}, \text{BLANCO}, \text{VERDE}\}.$$

Definición 3 – Suceso o evento

Cualquier subconjunto del espacio muestral se denomina **suceso** o **evento**.

En términos de conjuntos, es claro que el espacio muestral y el conjunto vacío son también eventos, también lo son cualquier evento individual o combinado. Por ejemplo, el evento de que la bola al azar sea verde o roja se puede representar por el conjunto

$$A = \{\text{ROJO}, \text{VERDE}\}.$$

Como observamos para estudiar la teoría de probabilidades es de vital importancia conocer la teoría de conjuntos, la cual se ha abordado en cursos anteriores. De esta manera, abordaremos esta teoría de forma sencilla haciendo las respectivas traducciones del lenguaje conjuntista al lenguaje estadístico. Es claro que cualquier conjunto, subconjunto del espacio muestral, es un evento o suceso. La clase universal, en cada experimento, será el espacio muestral; la clase vacía es un evento imposible o falso; el complemento de un conjunto A (A^c) es el evento contrario de A, en términos de conjuntos lo podemos expresar por $\Omega \smallsetminus A$.

De forma similar a como se hacen las operaciones entre conjuntos (unión, intersección, diferencia y complemento) se lo realiza con los eventos y de esta manera se puede obtener o caracterizar eventos particulares que juegan un papel fundamental en la estadística. El siguiente ejemplo permite aclarar estas definiciones.

Ejemplo 1. Consideremos un dado que está formado por seis lados en los cuales se tiene numerado desde el 1 hasta el 6. Supongamos que A es el evento de al lanzar un dado y obtener un número menor que 4. Luego, B sea el evento de al lanzar un dado se obtenga un número par.

Tenemos que: $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{2, 4, 6\}$

Ahora bien, $A \cup B$ representa el evento de que al lanzar un dado se obtenga un número que sea menor que 4 o que sea par. Es decir,

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$$

El evento de obtener un número menor que 4 y que sea un número par representa $A \cap B$. Luego,

$$A \cap B = \{2\}$$

El evento de obtener un número que sea menor a 4, pero que no sea par representa $A \smallsetminus B$. Es decir,

$$A \smallsetminus B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$$

Finalmente, el evento de al lanzar un dado y obtener un número impar representa B^c, es decir,

$$B^c = \{1, 3, 5\}$$

Así, se puede definir eventos importantes en el estudio de la estadística tales como eventos independientes, dependientes mutuamente excluyentes, etc y otros tipos de eventos que en lenguaje se puede observar frases como: "al menos", "a lo más", "todos a la vez" entre otras frases. Por ejemplo,

Ejemplo 2. Imaginemos que se tiene dos tetraedros regulares con cada una de sus caras numeradas. Se lanzan a una mesa y se anota los resultados.

a) Determine el espacio muestral para este experimento.

b) Determine los elementos del evento A que representa que la suma de los números sea al menos 6.

c) Determine los elementos del espacio B que representa que la suma de los números sea a lo mucho 3.

d) Determine los elementos del evento C que representa que la suma de los números sea más de 6.

e) Determine los elementos del evento D que representa que la suma de los números sea menos de 3.

Solución.

a) Para determinar el espacio muestral usaremos pares ordenados, la primera componente es el número del primer tetraedro, y la segunda componente es el número obtenido en el segundo tetraedro. Así,

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{cccc} (1,1), & (1,2), & (1,3), & (1,4), \\ (2,1), & (2,2), & (2,3), & (2,4), \\ (3,1), & (3,2), & (3,3), & (3,4), \\ (4,1), & (4,2), & (4,3), & (4,4) \end{array} \right\}.$$

b) El hecho de que la suma de los números de los tetraedros sea al menos 6 significa que la suma puede ser 6, 7 u 8, luego,

$$A = \{(3,3),(3,4),(4,3),(4,4)\}.$$

c) El hecho de que la suma de los números de los tetraedros sea a lo mucho 3 significa que la suma puede ser 2 o 3, luego,

$$B = \{(1,1),(1,2),(2,1)\}.$$

d) El hecho de que la suma de los números de los tetraedros sea más de 6 significa que la suma puede ser 7 u 8, luego,

$$C = \{(3,4),(4,3),(4,4)\}.$$

e) El hecho de que la suma de los números de los tetraedros sea menos de 3 significa que la suma puede ser 2, luego,

$$D = \{(1,1)\}.$$

□

Ahora, definamos lo que son eventos mutuamente excluyentes:

Definición 4

Dos eventos A y B son **mutuamente excluyentes** si no es posible que ocurran al mismo tiempo. En términos de conjuntos, estos eventos son mutuamente excluyentes si son disjuntos, es decir, si

$$A \cap B = \varnothing.$$

Ejemplo 3. Retomemos el ejemplo 1.

Ahora consideremos como C al evento de que al lanzar el dado se obtenga el número impar. Y, D como el evento de que al lanzar el dado se obtenga el número 2.

Esta claro que los dos eventos no se pueden dar al mismo tiempo pues no es posible obtener un número impar y el 2 a la vez. Estos dos eventos son los que se consideran mutuamente excluyentes.

Como se dijo al inicio de este capítulo la forma intuitiva de abordar la probabilidad es a través de la frecuencia relativa de un evento, para ello vamos a definir lo siguiente:

Definición 5 – Frecuencia relativa de un evento

Si un experimento aleatorio se realiza n veces y A es un evento que ocurre n_A veces, entonces la **frecuencia relativa del evento** A, lo que representaremos por f_A, es cociente de n_A y n, es decir,

$$f_A = \frac{n_A}{n}.$$

Es claro que bajo esta definición se cumple que

1. A no ocurre en los n experimentos si y solo si $f_A = 0$.
2. A ocurre siempre en los n experimentos si y solo si $f_A = 1$.
3. $0 \leqslant f_A \leqslant 1$
4. Si A y B son mutuamente excluyentes, entonces $f_{A \cup B} = f_A + f_B$
5. Si n aumenta f_A se establece en un valor determinado, esto es lo que llamaremos en el sentido probabilístico "converger".

Ejemplo 4. Se ha ubicado 10 bolas numeradas con los dígitos en una bolsa, cada vez que se saca una bola se escribe en una hoja el número de la bola sacada y se la vuelve a meter en la bolsa, así se obtiene lo siguiente:

Número de la bola	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Número de apariciones	5	3	3	2	5	7	2	5	4	6

Si se tiene los eventos

A: El número es par,
B: El número es divisible por 3,
C: El número es mayor que 3 e impar,
D: El número es primo.

Determinemos f_A, f_B, f_C, f_D, $f_{A\cup B}$, $f_{A\cup C}$, $f_{B\cap C}$ y $f_{D\smallsetminus C}$

Solución. En primera instancia determinemos el espacio muestral y los conjuntos A, B, C y D:

$$\Omega = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$
$$A = \{0,2,4,6,8\} \qquad B = \{0,3,6,9\}$$
$$C = \{5,7,9\} \qquad D = \{2,3,5,7\}$$

Luego, es claro que se han hecho 42 experimentos y de la definición de frecuencia relativa se tiene que

$$f_A = \frac{5+3+5+2+4}{42} = \frac{19}{42}, \qquad f_B = \frac{5+2+2+6}{42} = \frac{5}{14},$$
$$f_C = \frac{7+5+6}{42} = \frac{3}{7}, \qquad f_D = \frac{3+2+7+5}{42} = \frac{17}{42}.$$

Vamos a determinar los conjuntos

$$A\cup B = \{0,2,3,4,6,8,9\}, \quad A\cup C = \{0,2,4,5,6,7,8,9\}, \quad B\cap C = \{9\}, \quad D\smallsetminus C = \{2,3\};$$

después,

$$f_{A\cup B} = \frac{5+3+2+5+2+4+6}{42} = \frac{9}{14}, \qquad f_{A\cup C} = \frac{5+3+5+7+2+5+4+6}{42} = \frac{37}{42},$$
$$f_{B\cap C} = \frac{6}{42} = \frac{1}{7}, \qquad f_{D\smallsetminus C} = \frac{3+2}{42} = \frac{5}{42}.$$

Tomemos en cuenta que $f_{A\cup B} \neq f_A + f_B$ ya que A y B no son mutuamente, ya que $A\cap B = \{6\} \neq \varnothing$, pero $f_{A\cup C} = f_A + f_C$ ya que A y C sí son eventos mutuamente excluyentes, y se verifica que $A\cap C = \varnothing$. □

Definición 6 – Probabilidad

Dado un espacio muestral Ω y la función $P\colon \mathscr{P}(\Omega)^{a} \to \mathbb{R}$, la **probabilidad del evento** A es $P(A)$, tal que

I) $P(\Omega) = 1$;

II) $P(A) \geqslant 0$, para todo $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, y

III) si A y B son mutuamente excluyentes, $P(A\cup B) = P(A) + P(B)$.

[a] El signo $\mathscr{P}(\Omega)$ representa el conjunto de partes de Ω.

Las tres proposiciones anteriores son los que se conocen como **axiomas de la probabilidad**, de aquí se deducen las siguientes proposiciones:

Teorema 1 – Propiedades de la probabilidad

1. $P(\varnothing) = 0$.
2. $P(A^c) = 1 - P(A)$.
3. Si $A \subseteq B$, $P(A) \leqslant P(B)$.
4. $P(A) = P(A \setminus B) + P(A \cap B)$.
5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Observemos que de la definición de frecuencia relativa de un evento se tiene que el valor al que converge f_A cuando n tiende al infinito es justamente $P(A)$. Así, la manera más sencilla de calcular la probabilidad de un evento A está dada por

$$P(A) = \frac{\text{número de formas que el evento } A \text{ ocurra}}{\text{número de posibles resultados del experimento}}.$$

Ejemplo 5. Calcular la probabilidad de que al lanzar un dado,

a) salga un número par,

b) salga 4 o 6.

c) obtener un número mayor que 6.

d) obtener un número menor o igual a 6.

Solución. Observemos que el espacio muestral para este experimento es

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

y, en consecuencia, $|\Omega| = 6$ [1]. Vamos a definir el conjunto $A = \{2, 4, 6\}$ que representa al evento que al lanzar un dado salga un número par. Luego, que suceda este evento es:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Ahora, definamos el conjunto $B = \{4, 6\}$ que representa al evento de que al lanzar un dado salga 4 o 6.

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

El evento de que al lanzar un dado se obtenga un número mayor a 6 es un evento imposible, es decir, lo podemos representar por $C = \varnothing$, en consecuencia,

$$P(C) = P(\varnothing) = 0.$$

[1] El signo $|\Omega|$ representa la cardinalidad (número de elementos) del conjunto finito Ω. Y, para nuestros propósitos representará el número de formas en que ocurre el evento (Ω en particular).

Finalmente, el evento de que al lanzar un dado se obtenga un número menor o igual a 6 es el evento contrario al evento C, es decir, $D = C^c$, luego,

$$P(D) = P(C^c) = P(\Omega) = 1. \qquad \square$$

Ejemplo 6. Demostrar que

$$P(A^c) = 1 - P(A).$$

Demostración. Recordemos de la teoría de conjunto se sabe que $A \cap A^c = \varnothing$, de donde concluimos que A y A^c son eventos mutuamente excluyentes, luego,

$$P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c),$$

de donde,

$$P(\Omega) = P(A) + P(A^c);$$

ya que $A \cup A^c = \Omega$, y en consecuencia,

$$P(A^c) = 1 - P(A). \qquad \square$$

Definición 7 – Principio de la suma

Si $|A| = m$, $|B| = n$ y $A \cap B = \varnothing$, entonces

$$|A \cup B| = m + n.$$

Esto quiere decir que: "Si un suceso A puede ocurrir de m maneras ($|A| = m$), y otro suceso B puede ocurrir de n maneras ($|B| = n$), y no pueden ocurrir ambos simultáneamente, entonces el suceso $A \cup B$ puede ocurrir de $m + n$ maneras".

Esta definición se puede generalizar, si $A_1, \ldots, A_n$ son disjuntos dos a dos, entonces

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|.$$

Esto significa que si un evento A_1 puede ocurrir de m_1 maneras, un evento A_2 de m_2 maneras, etc., y un evento A_n ocurre de m_n maneras, entonces la unión de estos eventos ocurre de $m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ maneras.

Definición 8 – Principio del producto

Si $|A| = m$ y $|B| = n$, entonces

$$|A \times B| = |A| \cdot |B| = m \cdot n.$$

Este principio puede visualizarse disponiendo todos los elementos del producto cartesiano $A \times B$ en una tabla. Suponiendo que $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ y $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$, entonces los elementos de $A \times B$

son pares ordenados:

$$\begin{array}{cccc} (a_1, b_1) & (a_1, b_2) & \dots & (a_1, b_n) \\ (a_2, b_1) & (a_2, b_2) & \dots & (a_2, b_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_m, b_1) & (a_m, b_2) & \dots & (a_m, b_n) \end{array}$$

Se ve claramente que el cuadro tiene m filas y n columnas, y por lo tanto, $|A \times B| = m \cdot n = |A| \cdot |B|$.

Esta definición la usaremos para determinar la cardinalidad de eventos que se realizan de forma sucesiva, es decir, si un primer objeto puede escogerse entre m posibles, y después de realizada esta selección puede escogerse un segundo objeto entre n posibles, entonces pueden escogerse $m \cdot n$ pares diferentes.

Esta definición se puede generalizar, así

$$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_n|,$$

es decir, si un evento A_1 ocurre de m_1 formas, y después de realizado este evento se realiza A_2 y este puede ocurrir m_2 formas, etc., hasta que el n-ésimo evento (A_n) se realice y este ocurre de m_n formas; entonces los n eventos ocurren de forma sucesiva de $m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n$ formas.

Ejemplo 7. ¿De cuántas maneras pueden colocarse una torre blanca y una torre negra en un tablero de ajedrez de modo que se ataquen?

Respuesta. El tablero de ajedrez esta formado de 8 filas y 8 columnas, entonces, el número de casillas en que se puede ubicar la torre blanca es $8 \cdot 8 = 64$.

Una vez ubicada la torre blanca, la torre negra debe colocarse en una casilla de la misma columna o fila ocupada por la torre blanca, si consideramos como el suceso A la ubicación de la torre negra en una casilla de la misma fila donde se ubica la torre blanca tenemos que $|A| = 7$ es decir existe 7 maneras diferentes de ubicarse en las casillas y si consideramos como el suceso B la ubicación de la torre negra en una casilla de la misma columna donde se ubica la torre blanca tenemos que $|B| = 7$, es decir, existe otras 7 maneras diferentes de ubicarse en las casillas.

Como A y B son sucesos mutuamente excluyentes entonces por el principio de la suma se tienen $7 + 7 = 14$, diferentes maneras de ubicarse la torre negra.

Por lo tanto, del principio del producto podemos concluir que se tienen $64 \cdot 14 = 896$ maneras de colocarse la torre blanca y negra. Ya que primero se ubica la torre blanca y luego la torre negra. El orden de colocación de las piezas es indiferente, es decir, si se ubica primero la negra y luego la blanca el resultado es el mismo. $\square$

1.1.1.- Diagrama de árbol

Para determinar los elementos del espacio muestral es común hacer un listado de ellos, una forma para hacerlo de forma sistemática es justamente el **diagrama de árbol**. Este es un esquema en el cual se detalla como ocurren los eventos, en ocasiones de forma sucesiva, no es necesario que así ocurra.

Ejemplo 8. ¿Cuáles son los posibles resultados del lanzamiento de dos dados?

Respuesta. Para este experimento el orden en el que se lancen los dados no es relevante, es decir, no importa si lanzo uno u otro primero. Cada dado tiene 6 resultados posibles como se observa en la figura 1.1.

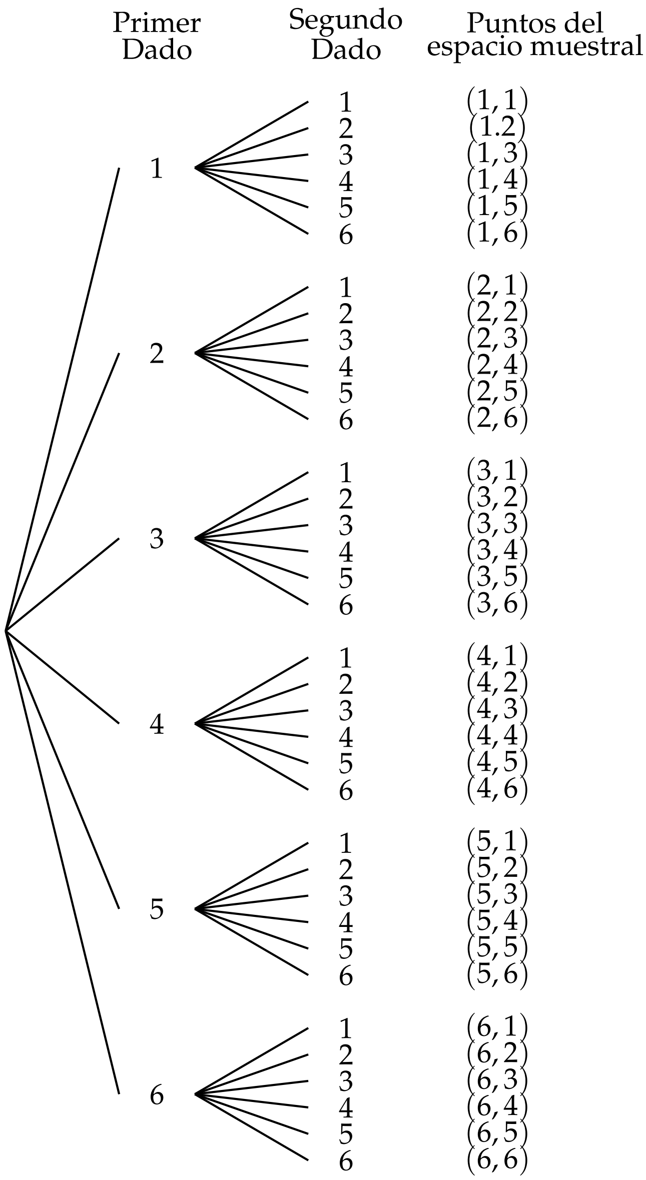


Figura 1.1: Diagrama de árbol de los resultados del lanzamiento de dos dados.

Así, el primer evento tiene 6 resultados posibles y el segundo también; en resumen, el lanzamiento de los dados se realiza de 36 formas diferentes en el diagrama de árbol se puede observar estos 36 "puntos" muestrales. □

Observemos que existe una fuerte relación entre el número de elementos del espacio muestral, las formas en que un evento ocurre y el cálculo de la probabilidad de que suceda dicho evento; por esta razón vamos a ver diversos métodos de enumeración.

1.2. Métodos de enumeración

Hemos visto que es necesario contar los elementos ya sean del espacio muestral o de los elementos de un evento. De aquí, que es necesario contar los grupos que se pueden formar a partir de un conjunto, al cual llamaremos conjunto base, y lo representaremos por Ψ, y que puede tener elementos diferentes o repetidos. Por ejemplo, tenemos los siguientes conjuntos

$$\Psi = \{a, a, b, b, b, c, d, e, e\}, \quad \Psi = \{\heartsuit, \diamondsuit, \spadesuit, \clubsuit\},$$

en donde, el primer conjunto tiene 9 elementos y algunos se repiten; en cambio, el segundo tiene 4 elementos todos distintos. Ahora, tomemos en cuenta el conjunto $\Psi = \{a, b, c, d\}$ y con los elementos de este conjunto podemos formar, por ejemplo, los siguientes conjuntos:

$$\{a\}, \quad \{a, b\}, \quad \{a, b, d\}, \quad \{b, a, d\}, \quad \{c, b, d\}, \quad \{a, a, a, a\}, \quad \{a, b, a, d\}.$$

Observemos que para formas estos grupos se toman en cuenta los siguientes criterios criterios:

1. número de elementos del grupo, este número puede variar entre 1 y el número de elementos del conjunto base;
2. repetición de elementos, es decir, si los grupos se los realiza con elementos repetidos y si son todos diferentes;
3. orden de los elementos, es decir, si el orden de los elementos en el grupo es relevante o no.

De esta manera surge la pregunta: ¿cuántos grupos de k elementos se puede formar a partir de un conjunto de n elementos?, aquí es importante resaltar los aspectos de **orden** y **repetición**, ya que son claves para las agrupaciones.

Cuando el **orden** no es un factor relevante en las agrupaciones, es decir, no importa el orden de los elementos en cada una de estas agrupaciones, se les denomina **combinaciones**; en cambio, si el orden es relevante las agrupaciones reciben el nombre de **permutaciones**. Y existen tanto combinaciones con y sin repetición como permutaciones con y sin repetición.

1.2.1.- Permutaciones

Definición 9 – Permutación

Dado un conjunto con n elementos diferentes, a cada uno de los arreglos de k elementos, en un orden predeterminado, tal que $1 \leqslant k \leqslant n$ se le denomina **permutación de n elementos tomados k a la vez**. Dos permutaciones son **diferentes** si al menos un elemento es diferente o si el orden de presentación es distinto. Además, **una permutación es sin repetición** si cada uno de los elementos aparece una sola vez.

Permutaciones sin repetición

Veamos como calcular el número de permutaciones sin repetición y como formar estas agrupaciones a partir de un conjunto base dado.

Ejemplo 9. Respondamos la pregunta: ¿de cuántas formas se pueden formar grupos de 2 elementos a partir del conjunto $\{\heartsuit, \diamondsuit, \spadesuit, \clubsuit\}$? En este caso, bajo el supuesto de que el orden sí importa, pero sin repetición de elementos.

Respuesta. Es claro que los grupos de 2 elementos que podemos formar a partir del conjunto base, sin repetir elementos, son:

$$\begin{array}{ccc} \{\heartsuit, \diamondsuit\} & \{\heartsuit, \spadesuit\} & \{\heartsuit, \clubsuit\} \\ \{\diamondsuit, \heartsuit\} & \{\diamondsuit, \spadesuit\} & \{\diamondsuit, \clubsuit\} \\ \{\spadesuit, \heartsuit\} & \{\spadesuit, \diamondsuit\} & \{\spadesuit, \clubsuit\} \\ \{\clubsuit, \heartsuit\} & \{\clubsuit, \diamondsuit\} & \{\clubsuit, \spadesuit\} \end{array}$$

Es decir, el número de permutaciones sin repetición diferentes de 4 elementos tomados 2 a la vez es 12. □

Teorema 2 – Permutaciones sin repetición

El número de permutaciones sin repetición diferentes de n elementos tomados k a la vez, representada por ${}_n\mathbb{P}_k$, es

$$\frac{n!}{(n-k)!},$$

es decir,

$${}_n\mathbb{P}_k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Ejemplo 10. Determine el número de formas que se puede sentar 8 personas en 4 sillas en un orden determinado.

Solución. Es claro que el orden es importante en esta situación y que si una persona se sienta en una silla ya no se puede sentar en otra. Por lo tanto, vamos a determinar el número de permutaciones sin repetición de 8 elementos tomados 4 a la vez,

$${}_8\mathbb{P}_4 = \frac{8!}{(8-4)!} = \frac{8 \cdot \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} = 8 \cdot \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1\,680.$$

En consecuencia, el número de posibles formar de sentar a estas 8 personas en las 4 sillas es 1 680. □

Ahora bien, si queremos determinar el número de formas que se puede sentar 8 personas en 8 sillas en un orden determinado, el valor de k en este caso sería 8 al igual que el valor de n, entonces la relación para las permutaciones sin repetición pasaría a ser la siguiente

$$\begin{aligned} {}_n\mathbb{P}_n &= \frac{n!}{(n-n)!} \\ &= \frac{n!}{1!} \end{aligned}$$

$$= n!$$

La respuesta a la interrogante planteada sería igual a 8!, es decir 40 320 formas.

Permutaciones con repetición

Ahora, observemos como formar a partir de un conjunto base agrupaciones con elementos repetidos y determinar el número de agrupaciones posibles que se pueden formar.

Ejemplo 11. Respondamos la pregunta: ¿de cuántas formas se pueden formar grupos de 2 elementos a partir del conjunto $\{\heartsuit, \diamondsuit, \spadesuit, \clubsuit\}$? En este caso, bajo el supuesto de que el orden sí importa, y los elementos se pueden repetir.

Respuesta. Es claro que los grupos de 2 elementos que podemos formar a partir del conjunto base son:

$$\begin{array}{cccc}
\{\heartsuit,\heartsuit\} & \{\heartsuit,\diamondsuit\} & \{\heartsuit,\spadesuit\} & \{\heartsuit,\clubsuit\} \\
\{\diamondsuit,\heartsuit\} & \{\diamondsuit,\diamondsuit\} & \{\diamondsuit,\spadesuit\} & \{\diamondsuit,\clubsuit\} \\
\{\spadesuit,\heartsuit\} & \{\spadesuit,\diamondsuit\} & \{\spadesuit,\spadesuit\} & \{\spadesuit,\clubsuit\} \\
\{\clubsuit,\heartsuit\} & \{\clubsuit,\diamondsuit\} & \{\clubsuit,\spadesuit\} & \{\clubsuit,\clubsuit\}
\end{array}$$

Es decir, el número de permutaciones con repetición diferentes de 4 elementos tomados 2 a la vez es 16. □

Teorema 3 – Permutaciones con repetición

El número de permutaciones con repetición diferentes de n elementos tomados k a la vez, representada por ${}_n\mathbb{PR}_k$, es

$$n^k,$$

es decir,

$${}_n\mathbb{PR}_k = n^k.$$

Ejemplo 12. Determine la cantidad de números diferentes de 4 cifras se pueden formar con los siguientes dígitos: 1, 3, 5, 7 y 9.

Solución. En este caso, es claro que los dígitos se pueden repetir, luego, se requiere se determinar el número de permutaciones con repetición de 5 elementos tomados 4 a la vez, es decir,

$${}_5\mathbb{PR}_4 = 5^4 = 625.$$

En consecuencia, la cantidad de números de 4 cifras que se puede formar con los dígitos 1, 3, 5, 7 y 9 es 625. □

1.2.2.- Combinaciones

Definición 10 – Combinación

Dado un conjunto con n elementos diferentes, a cada uno de los arreglos de k elementos, sin un orden predeterminado, tal que $1 \leqslant k \leqslant n$ se le denomina **combinación de n elementos tomados k a la vez**. Dos combinaciones son **diferentes** si al menos un elemento es diferente. Además, **una combinación es sin repetición** si cada uno de los elementos aparece una sola vez.

Combinaciones sin repetición

Veamos como calcular el número de combinaciones sin repetición y como formar estas agrupaciones a partir de un conjunto base dado.

Ejemplo 13. Respondamos la pregunta: ¿de cuántas formas se pueden formar grupos de 2 elementos a partir del conjunto $\{\heartsuit, \diamondsuit, \spadesuit, \clubsuit\}$? En este caso, bajo el supuesto de que el orden no importa y sin repetición de elementos.

Respuesta. Es claro que los grupos de 2 elementos que podemos formar a partir del conjunto base, sin repetir elementos, son:

$$\begin{array}{lll} \{\heartsuit, \diamondsuit\} & \{\heartsuit, \spadesuit\} & \{\heartsuit, \clubsuit\} \\ \{\diamondsuit, \spadesuit\} & \{\diamondsuit, \clubsuit\} & \\ \{\spadesuit, \clubsuit\} & & \end{array}$$

Es decir, el número de combinaciones sin repetición diferentes de 4 elementos tomados 2 a la vez es 6. □

Teorema 4 – Combinaciones sin repetición

El número de combinaciones sin repetición diferentes de n elementos tomados k a la vez, representada por ${}_n\mathbb{C}_k$, es

$$\frac{n!}{k!(n-k)!},$$

es decir,

$${}_n\mathbb{C}_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Ejemplo 14. Una persona tiene que escoger 5 preguntas de un banco de preguntas que contiene 15 preguntas, ¿de cuántas formas diferentes pueden escogerse las preguntas si el orden en que conteste las preguntas es irrelevante y si escoge una pregunta esta ya no se repite?

Respuesta. En esta situación se tiene que el orden es irrelevante y que no hay repetición de preguntas, por lo que se determina el número de combinaciones de 15 elementos tomados 5 a la vez, es decir

$${}_{15}\mathbb{C}_5 = \frac{15!}{5!(15-5)!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10!}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 10!} = 3\,003.$$

En consecuencia, el número de posibles formas en que esta persona puede escoger estas 5 preguntas es 3 003. □

Combinaciones con repetición

Veamos como calcular el número de combinaciones con repetición y como formar estas agrupaciones a partir de un conjunto base dado.

Ejemplo 15. Respondamos la pregunta: ¿de cuántas formas se pueden formar grupos de 2 elementos a partir del conjunto $\{\heartsuit, \diamondsuit, \spadesuit, \clubsuit\}$? En este caso, bajo el supuesto de que el orden no importa y con repetición de elementos.

Respuesta. Es claro que los grupos de 2 elementos que podemos formar a partir del conjunto base, con repetición de elementos, son:

$$\begin{array}{llll} \{\heartsuit,\heartsuit\} & \{\heartsuit,\diamondsuit\} & \{\heartsuit,\spadesuit\} & \{\heartsuit,\clubsuit\} \\ \{\diamondsuit,\diamondsuit\} & \{\diamondsuit,\spadesuit\} & \{\diamondsuit,\clubsuit\} & \\ \{\spadesuit,\spadesuit\} & \{\spadesuit,\clubsuit\} & & \\ \{\clubsuit,\clubsuit\}. & & & \end{array}$$

Es decir, el número de combinaciones sin repetición diferentes de 4 elementos tomados 2 a la vez es 10. □

Teorema 5 – Combinaciones con repetición

El número de combinaciones con repetición diferentes de n elementos tomados k a la vez, representada por ${}_n\mathbb{CR}_k$, es

$$\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!},$$

es decir,

$${}_n\mathbb{CR}_k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}.$$

Ejemplo 16. Se lanzan 2 dados iguales de forma simultánea, ¿cuántos posibles resultados se puede obtener?

Respuesta. En este experimento es claro que si un dado se obtiene un número determinado el otro dado también se puede obtener el mismo número, es decir, existen repeticiones. Es claro además que el orden de los dados no es relevante ya que se tiran simultáneamente. Después tenemos que determinar el número de combinaciones con repetición de 6 elementos tomados 2 a la vez, es decir,

$${}_6\mathbb{CR}_2 = \frac{(6+2-1)!}{2!(6-1)!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5!}{2\cdot 5!} = 21.$$

En conclusión, el número de resultados posibles en el lanzamiento de dos dados lanzados simultáneamente es 21. □

1.2.3.- Permutaciones a partir un conjunto con elementos repetidos

En ocasiones el conjunto base posee elementos repetidos y es relevante el orden en el que se ubiquen los elementos en grupos.

Ejemplo 17. A partir del conjunto base {🚗, 🚗, 🚗, 🚲, 🚲}, ¿cuántos grupos 5 elementos se pueden formar a partir del conjunto base tomando en cuenta el orden?

Respuesta. Los posibles grupos de 5 elementos que se pueden formar a partir del conjunto base dado y tomando en cuenta el orden es:

{🚗,🚗,🚗,🚲,🚲} {🚗,🚲,🚗,🚗,🚲} {🚗,🚲,🚲,🚗,🚗}
{🚗,🚗,🚲,🚗,🚲} {🚗,🚗,🚲,🚲,🚗} {🚲,🚗,🚗,🚗,🚲}
{🚲,🚲,🚗,🚗,🚗} {🚲,🚗,🚗,🚲,🚗} {🚲,🚗,🚲,🚗,🚗}
{🚗,🚲,🚗,🚲,🚗}

En consecuencia, se pueden formar 10 grupos distintos a partir del conjunto base dado. □

Teorema 6 – Permutaciones a partir de un conjunto con elementos repetidos

Dado un conjunto de n elementos tal que existen k elementos distintos ($k < n$) y cada elemento distinto se repite $n_1, \ldots, n_k$ veces, el número de permutaciones con repetición de n elementos tomados n a la vez es:

$$\frac{n!}{\prod_{j=1}^{k} n_j!}.$$

Ejemplo 18. A partir del conjunto base {🎧,🎧,🎮,🎮,💻,📱,📱,📱,📱}, ¿cuántos grupos 9 elementos se pueden formar a partir del conjunto base tomando en cuenta el orden?

Respuesta. Del teorema anterior tenemos que para calcular el número de permutaciones a par de un conjunto con elementos repetidos, así

$$\frac{9!}{2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 4!} = 3\,780.$$

Es decir, el número de grupos posibles es 3 780. □

A continuación, se presenta ejercicios de aplicación de la sección de enumeración.

Ejemplo 19. Se tiene una baraja de 52 naipes.

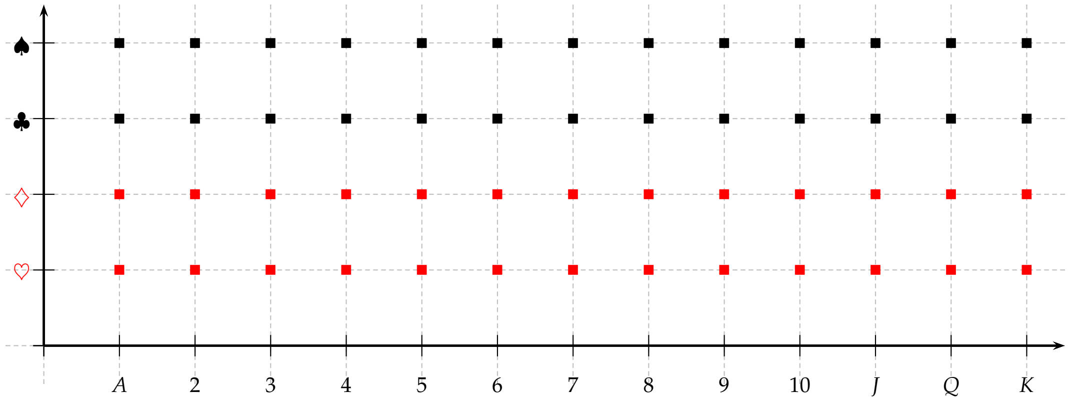
a) Si se saca una carta al azar, describa el espacio muestral en un diagrama donde el eje x sea la denominación de la carta sacada y el eje y el palo (corazones, picas, diamantes o tréboles).

b) Si se extraen dos cartas al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de ambas sea 7?, ¿11?, ¿4?.

c) ¿De cuántas maneras se pueden seleccionar cuatro cartas, de modo que haya una de cada palo?.

d) Si se extraen diez al azar. ¿Cuál es la probabilidad de no sacar ningún as?, ¿de sacar al menos un as? y ¿de sacar exactamente uno?.

Solución. *a*) El espacio muestral esta representado por:



b) Sea A el evento de que la suma de dos cartas sea 7, tenemos que las únicas formas de que la suma sea 7 son sacar A y 6; 2 y 5 o 3 y 4. Luego, para sacar cualquiera de estas opciones es equivalente a sacar individualmente cada carta, sin importar el orden, es decir,

$$\frac{\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{44}{0}}{\binom{52}{2}} = \frac{8}{663}.$$

Luego,

$$P(A) = 3\left(\frac{8}{663}\right) = \frac{8}{221}$$

Sea B el evento de que la suma de dos cartas sea 11, tenemos que las únicas formas de que la suma sea 11 son sacar A y 10; 2 y 9; 3 y 8; 4 y 7 o 5 y 6. Luego, para sacar cualquiera de estas opciones es equivalente a sacar individualmente cada carta, sin importar el orden, es decir,

$$\frac{8}{663}.$$

Luego,

$$P(B) = 5\left(\frac{8}{663}\right) = \frac{40}{663}$$

Sea C el evento de que la suma de dos cartas sea 4, tenemos que las únicas formas de que la suma sea 4 son sacar A y 3 o 2 y 2. Luego, para sacar la primera opción es equivalente a sacar individualmente cada carta, sin importar el orden, es decir,

$$\frac{8}{663}.$$

Luego, para sacar 2 cartas iguales es igual a:

$$\frac{\binom{4}{2}\binom{48}{0}}{\binom{52}{2}} = \frac{1}{221}$$

Finalmente,

$$P(C) = \frac{8}{663} + \frac{1}{221} = \frac{11}{663}$$

c) Hay 13 cartas de cada palo, por lo que el número de formas de seleccionar 4 de modo que exista una de cada palo.

$$\binom{13}{1}\binom{13}{1}\binom{13}{1}\binom{13}{1} = 13^4 = 28\,561$$

d) La probabilidad de sacar no sacar ningún as es igual a la probabilidad de sacar las diez cartas de las cuales ninguna es un as:

$$\frac{\binom{4}{0}\binom{48}{10}}{\binom{52}{10}} = \frac{246}{595}.$$

La probabilidad de sacar al menos un as es el evento complementario de no sacar ningún as:

$$1 - \frac{246}{595} = \frac{349}{595}.$$

La probabilidad de sacar exactamente un as es:

$$\frac{\binom{4}{1}\binom{48}{9}}{\binom{52}{10}} = \frac{656}{1547}.$$

□

Ejemplo 20. Delegados de 10 países, incluida Rusia, Francia, Inglaterra y los Estados Unidos deben estar sentados en una fila. ¿Cuántas formas diferentes de sentarse son posibles si el delegado francés y el delegado inglés deben sentarse juntos y los delegados de Rusia y Estados Unidos no?

Solución. Analicemos de la siguiente manera, dividamos a los 10 delegados en 9 grupos, ya que los delegados de Francia en Inglaterra den estar siempre juntos.

Estos grupos se pueden agrupar de 9! formas, pero en $8! \cdot 2!$ los delegados de Rusia y USA están juntos.

Ahora, hay 2! formas de agrupar a los delegados de Francia e Inglaterra, después existen

$$(9! - 8! \cdot 2!)(2!) = 564\,480$$

formas de sentar a los delegados. □

1.3. Probabilidad Condicional e Independencia

Definición 11 – Probabilidad Condicional

Dados dos eventos A y B tales que $P(B) > 0$, se define **la probabilidad del evento A condicionado a B**, lo que se representa por $P(A|B)$, como

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)};$$

también, se le conoce como la probabilidad de que ocurra A dado que B ha sucedido.

Ejemplo 21. En una bolsa hay 5 bolas rojas numeradas del 1 al 5; 7 bolas azules igualmente numeradas del 1 al 7 y 3 bolas amarillas, también numeradas del 1 al 3. Si todas las bolas son equiprobables (tienen la misma probabilidad de ser escogidas) y sean los eventos A el evento de que una bola sacada al azar sea roja y B el evento de que la bola saca este marcada con un número par, determine

a) la probabilidad de que ocurra A dado que B ha sucedido.

b) la probabilidad de que ocurra B dado que A ha sucedido.

Solución. La probabilidad de que ocurra B es

$$P(B) = \frac{2+3+1}{15} = \frac{2}{5},$$

ya que hay 2 números pares del 1 al 5, 3 del 1 al 7 y 1 del 1 al 3. Después, determinemos la probabilidad de que al mismo tiempo ocurra A y B, es decir, $P(A \cap B)$, es decir,

$$P(A \cap B) = \frac{2}{15},$$

ya que existen únicamente 2 bolas rojas con número par de las 15 que hay en la bolsa. Por lo tanto,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{2}{5}} = \frac{1}{3}.$$

La probabilidad de que ocurra el evento A se calcula de la siguiente manera:

$$P(A) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3},$$

ya que hay 5 bolas rojas. En consecuencia,

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{1}{3}} = \frac{2}{5}.$$ □

Observemos del ejemplo anterior es evidente que de forma general $P(A|B) \neq P(B|A)$. Además, $P(A|B) \neq P(A)$ y $P(B|A) \neq P(B)$. Veamos un ejemplo en que $P(A|B) = P(A)$:

Ejemplo 22. Se tiene un dado y una moneda justa y se los lanza simultáneamente tal que A es el evento sacar 5 o 6 en el dado y B es el evento de obtener cara en la moneda. Determine la probabilidad de que ocurra A dado que B a sucedido.

Solución. Para determinar $P(A|B)$ se requiere calcular $P(A \cap B)$ y $P(B)$, luego,

$$P(A \cap B) = \frac{2}{12}$$

ya que existen 12 posibles resultados en el espacio muestral $\{1C, 2C, 3C, 4C, 5C, 6C, 1S, 2S, 3S, 4S, 5S, 6S\}$ y únicamente 2 cumplen con el hecho de que el dado sea 5 o 6 y la moneda sea cara. También, hay 6 posibilidades de que la moneda sea cara, entonces

$$P(B) = \frac{6}{12}.$$

Finalmente,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{12}}{\frac{6}{12}} = \frac{1}{3}.$$

Se observa claramente que

$$P(A) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

□

En el ejemplo anterior $P(A|B) = P(A)$, es decir, el hecho que A ocurra es independiente de que que B ocurra o no, en otras palabras, B no incide en la ocurrencia de A. De aquí, se tiene la siguiente definición:

Definición 12 – Eventos Independientes

Dos eventos A y B **son independientes** si

$$P(A|B) = P(A).$$

De las definiciones de eventos independientes y probabilidad condicional se tiene el siguiente teorema:

Teorema 7 – Eventos independientes

Si A y B son eventos independientes, entonces

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Demostración. Demostremos el teorema 7 se sabe que si A y B son independientes

$$P(A|B) = P(A);$$

también, por definición de probabilidad condicional se tiene que

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

en consecuencia,

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

como queríamos. $\square$

Ejemplo 23. En una heladería se venden helados de 3 sabores: Vainilla (V), Chocolate (C) y Ron con Pasas (R) en un mes determinado se cuenta el número de helados vendidos a adultos (A) y jóvenes (J) y se resume en la siguiente tabla:

	V	C	R
A	25	30	12
J	42	72	15

Determine

a) La probabilidad de que una persona escoja un helado de chocolate.

b) La probabilidad de que una persona joven compre un helado.

c) La probabilidad que una persona que escogió un helado de vainilla sea un joven.

d) La probabilidad de que un adulto haya escogido un helado de Ron con Pasas.

e) La probabilidad de que una persona que escogió un helado de chocolate o vainilla sea un adulto.

Solución. Vamos a completar la tabla con los totales

	V	C	R	
A	25	30	12	67
J	42	72	15	129
	67	102	27	196

a) La probabilidad de que una persona escoja un helado de chocolate está dada por

$$P(C) = \frac{102}{196} \approx 0.5204.$$

b) La probabilidad de que una persona joven compre un helado está dada por

$$P(J) = \frac{129}{196} \approx 0.6582.$$

c) La probabilidad que una persona que escogió un helado de vainilla sea un joven está dada por

$$P(J|V) = \frac{P(J \cap V)}{P(V)} = \frac{\frac{42}{196}}{\frac{67}{196}} \approx 0.6269.$$

d) La probabilidad de que un adulto haya escogido un helado de Ron con Pasas está dada por

$$P(R|A) = \frac{P(R \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{12}{196}}{\frac{67}{196}} \approx 0.1791.$$

e) La probabilidad de que una persona que escogió un helado de chocolate o vainilla sea un adulto está dada por

$$\begin{aligned}
P(A|C\cup V) &= \frac{P(A\cap(C\cup V))}{P(C\cup V)}\\
&= \frac{P((A\cap C)\cup(A\cap V))}{P(C)+P(V)}\\
&= \frac{P(A\cap C)+P(A\cap V)}{P(C)+P(V)}\\
&= \frac{\frac{30}{196}+\frac{25}{196}}{\frac{102}{196}+\frac{67}{196}}\\
&\approx 0.3254.
\end{aligned}$$

□

Los diagramas de árbol también se usan para expresar probabilidades y se puede usar para expresar probabilidad condicional, por ejemplo,

Ejemplo 24. Una bolsa contiene 5 bolas rojas 3 bolas verdes y 8 bolas negras. Se sacan 3 bolas al azar en orden. Determine

a) La probabilidad de que la primera bola sea roja.

b) La probabilidad de que la dos primeras bolas son verdes.

c) La probabilidad de que la tercera bola sea negra dado que las dos primeras fueron rojas.

d) La probabilidad de que la primera bola sea verde, la segunda negra y la última roja.

e) La probabilidad de que la segunda bola sea negra o verde dado que la primera fue roja o verde.

f) La probabilidad de que se saque las 2 primeras bolas sean verde y negra, sin importar el orden en que se saquen.

Solución. Usaremos R, V y N para representar los eventos de sacar una bola roja, verde y negra respectivamente. Y, usaremos subíndices en estas variables para identificar en que lugar salió la bola.

a) La probabilidad de que la primera bola sea roja está dada por

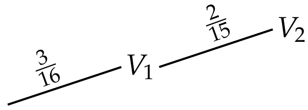
$$P(R_1) = \frac{5}{16}$$

ya que, hay 5 bolas rojas y en total hay 16.

b) La probabilidad de que la dos primeras bolas son verdes está dada por

$$P(V_1\cap V_2) = P(V_2|V_1)P(V_1) = \frac{2}{15}\cdot\frac{3}{16} = \frac{1}{40}$$

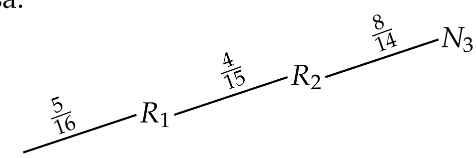
ya que, hay 3 bolas verdes de 16 antes de sacar la primera bola; cuando se saca la segunda bola ya solo quedan 2 de 15, porque ya se ha sacado una verde antes.



c) La probabilidad de que la tercera bola sea negra dado que las dos primeras fueron rojas está dada por

$$P(N_3|(R_1 \cap R_2)) = \frac{8}{14}$$

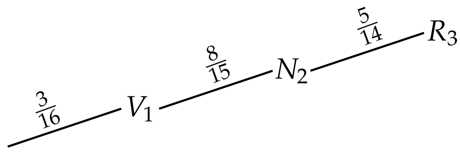
ya que, no se ha sacado ninguna bola negra (es decir, aún hay 8) en los primeros intentos y ya solo quedan 14 bolas en la bolsa.



d) La probabilidad de que la primera bola sea verde, la segunda negra y la última roja está dada por

$$\begin{aligned} P(V_1 \cap N_2 \cap R_3) &= P(N_2 \cap R_3|V_1)P(V_1) \\ &= P(R_3|(N_2 \cap V_1))P(N_2|V_1)P(V_1) \\ &= \frac{5}{14} \cdot \frac{8}{15} \cdot \frac{3}{16} \\ &= \frac{1}{28} \end{aligned}$$

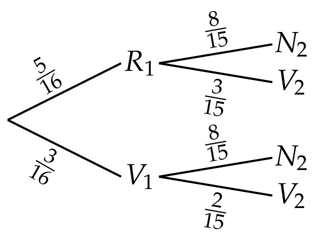
ya que, primero se saca una bola verde, en ese momento hay 3 de 16 bolas; luego, se saca una bola negra, es decir, hay 8 de 15. Finalmente, se saca una roja de las 5 y en la bola hay únicamente 14.



e) La probabilidad de que la segunda bola sea negra o verde dado que la primera fue roja o verde está dada por

$$\begin{aligned} P((N_2 \cup V_2)|(R_1 \cup V_1)) &= P(N_2 \cap R_1) + P(V_2 \cap R_1) + P(N_2 \cap V_1) + P(V_2 \cap V_1) \\ &= P(N_2|R_1)P(R_1) + P(V_2|R_1)P(R_1) + P(N_2|V_1)P(V_1) + P(V_2|V_1)P(V_1) \\ &= \frac{8}{15} \cdot \frac{5}{16} + \frac{3}{15} \cdot \frac{5}{16} + \frac{8}{15} \cdot \frac{3}{16} + \frac{2}{15} \cdot \frac{3}{16} \\ &= \frac{17}{48}. \end{aligned}$$

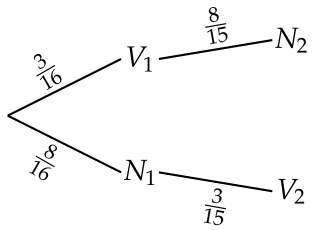
Se detalla a continuación el diagrama de árbol:



f) La probabilidad de que se saque las 2 primeras bolas sean verde y negra, sin importar el orden en que se saquen está dada por

$$\begin{aligned} P(V \cap N) &= P(V_1 \cap N_2) + P(N_1 \cap V_2) \\ &= P(N_2|V_1)P(V_1) + P(V_2|N_1)P(N_1) \\ &= \frac{8}{15} \cdot \frac{3}{16} + \frac{3}{15} \cdot \frac{8}{16} \\ &= \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Se detalla a continuación el diagrama de árbol:



Observemos que las ramas de los árboles se ubica siempre la probabilidad condicional del evento siguiente dado el anterior o anteriores; y el producto de los valores de estas ramas es igual la probabilidad de la intersección de los eventos de la rama en cuestión. □

1.4. Probabilidad Total y Regla de Bayes

Los teoremas que detallaremos a continuación son utilidad en muchos modelos estadísticos tales como: modelos factoriales discriminantes, teoría de decisiones, e incluso en redes neuronales que son la base de la inteligencia artificial.

Para ello, tomemos un espacio muestral Ω tal que se puede partir en n eventos mutuamente excluyentes, entonces si $B_1, B_2, \ldots, B_n$ son los estos n eventos mutuamente excluyentes, por lo tanto,

$$\bigcup_{k=1}^{n} B_k = \Omega \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^{n} P(B_k) = 1.$$

Después, dado un evento $A \subseteq \Omega$ cualesquiera, entonces

$$\begin{aligned} A &= A \cap \Omega \\ &= A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k \right) \\ &= \bigcup_{k=1}^{n} A \cap B_k; \end{aligned}$$

tome en cuenta que $A \cap B_1, A \cap B_2, \ldots A \cap B_n$ son disjuntos, es decir, son mutuamente excluyentes. En consecuencia,

$$P(A) = P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A \cap B_k \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} P(A \cap B_k).$$

Finalmente, por la definición de probabilidad condicional se tiene el siguiente teorema:

Teorema 8 – Probabilidad Total

Dados $B_1, B_2, \ldots, B_n$ eventos mutuamente excluyentes tal que $\bigcup_{k=1}^{n} B_k = \Omega$, se tiene que

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(A|B_k)P(B_k).$$

Ejemplo 25. En una mesa se ubican 3 pistolas las cuales tienen una probabilidad de acertar en un blanco de 0.4, 0.8 y 0.5 respectivamente. Determine la probabilidad de acertar en el blanco al escoger un pistola al azar de la mesa y disparar.

Solución. Tomemos en cuenta que la probabilidad de tomar cualquiera de las pistolas es $\frac{1}{3}$. Si representamos los eventos de escoger la pistola 1, 2 y 3 por B_1, B_2 y B_3 respectivamente y evento de acertar al blanco por A, se tiene que

$$P(A|B_1) = 0.4, \quad P(A|B_2) = 0.8 \quad \text{y} \quad P(A|B_3) = 0.5.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3) \\ &= 0.4 \cdot \frac{1}{3} + 0.8 \cdot \frac{1}{3} + 0.5 \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{17}{30} \\ &\approx 0.567. \end{aligned}$$

□

De este teorema y la definición de probabilidad condicional se deduce el siguiente teorema:

Teorema 9 – Regla de Bayes

Dados $B_1, B_2, \ldots, B_n$ eventos mutuamente excluyentes tal que $\bigcup_{k=1}^{n} B_k = \Omega$, se tiene que

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_{j=1}^{n} P(A|B_j)P(B_j)},$$

para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Ejemplo 26. Una compañía telefónica regional opera tres estaciones de retransmisión idénticas en diferentes sitios. Durante un periodo de un año, el número de desperfectos reportados por cada estación y las causas se muestran a continuación.

Estaciones	**A**	**B**	**C**
Problemas con el suministro de electricidad	2	1	1
Desperfecto de la computadora	4	3	2
Fallas del equipo eléctrico	5	4	2
Fallas ocasionadas por otros errores humanos	7	7	5

Suponga que se reporta una falla y que se encuentra que fue ocasionada por otros errores humanos. ¿Cuál es la probabilidad de que provenga de la estación **C**?

Solución. Supongamos que H representa las fallas ocasionadas por otros errores humanos y que A, B y C representan las fallas ocurridas en las estaciones **A**, **B** y **C** respectivamente.

Para determinar cuál es la probabilidad de que la falla provenga de la estación **C** dado que fue ocasionada por otros errores humanos, $P(C|H)$, vamos a utilizar la regla de Bayes, luego,

$$P(C|H) = \frac{P(H|C) \cdot P(C)}{P(H|A) \cdot P(A) + P(H|B) \cdot P(B) + P(H|C) \cdot P(C)},$$

donde,

$P(A) = \frac{18}{43}$, $P(B) = \frac{15}{43}$ y $P(C) = \frac{10}{43}$.

$P(H|A) = \frac{7}{18}$, $P(H|B) = \frac{7}{15}$ y $(H|C) = \frac{5}{10}$

$$P(C|H) = \frac{\frac{5}{10} \cdot \frac{10}{43}}{\frac{7}{18} \cdot \frac{18}{43} + \frac{7}{15} \cdot \frac{15}{43} + \frac{5}{10} \cdot \frac{10}{43}}$$

$$\approx 0.26$$

□