

**CONTENIDO:**

1. [Capacidades](#)
2. [Conceptos básicos](#)
3. [Permutación](#)
4. [Combinación](#)
5. [Problemas resueltos](#)
6. [Comprueba tus saberes](#)
7. [Desafíos](#)

**Capacidades**

1. Comprende los principios fundamentales del análisis combinatorio
2. Formula y resuelve problemas de análisis combinatorio que se presentan en su vida cotidiana
3. Aplica los métodos del conteo para resolver problemas diversos de numeración

**Conceptos básicos**

**Análisis Combinatorio** : Es la rama de la matemática que estudia los diversos arreglos o selecciones que podemos formar con los elementos de un conjunto dado, los cuales nos permite resolver muchos problemas prácticos. Por ejemplo podemos averiguar cuántos números diferentes de teléfonos , placas o loterías se pueden formar utilizando un conjunto dado de letras y dígitos.

Además el estudio y comprensión del análisis combinatorio no va a servir de andamiaje para poder resolver y comprender problemas sobre probabilidades

**Principios fundamentales del Análisis Combinatorio:** En la mayoría de los problemas de análisis combinatorio se observa que una operación o actividad aparece en forma repetitiva y es necesario conocer las formas o maneras que se puede realizar dicha operación. Para dichos casos es útil conocer determinadas técnicas o estrategias de conteo que facilitarán el cálculo señalado.

El análisis combinatorio también se define como una manera práctica y abreviada de contar; las operaciones o actividades que se presentan son designadas como eventos o sucesos.

Ejemplo :

1. Señalar las maneras diferentes de vestir de una persona, utilizando un número determinado de prendas de vestir
2. Ordenar 5 artículos en 7 casilleros
3. Contestar 7 preguntas de un examen de 10
4. Designar 5 personas de un total 50 para integrar una comisión
5. Sentarse en una fila de 5 asientos 4 personas
6. Escribir una palabra de 7 letras utilizando 4 consonantes y 3 vocales

**I) Principio de multiplicación :**

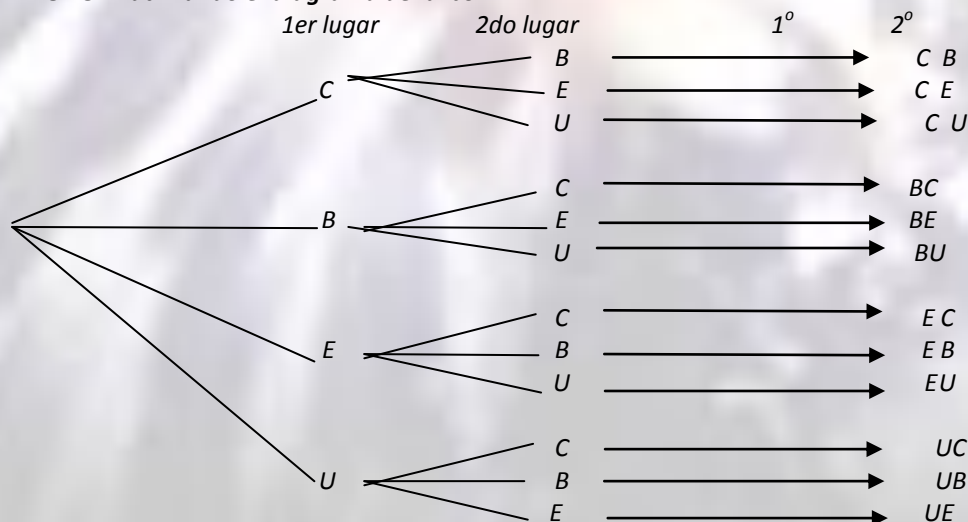
Si un evento o suceso "A" puede ocurrir , en forma independiente, de "m" maneras diferentes y otro suceso de "n" maneras diferentes, entonces el número de maneras distintas en que pueden suceder ambos sucesos es " $m \cdot n$ "

**Ejemplo 1:**

En la etapa final de fútbol profesional de primera, cuatro equipos : CRISTAL ( C ), BOYS ( B ), ESTUDIANTES ( E ), UNIVERSITARIO ( U ), disputan el primer y segundo lugar (campeón y subcampeón). ¿De cuántas maneras diferentes estos equipos pueden ubicarse en dichos lugares?

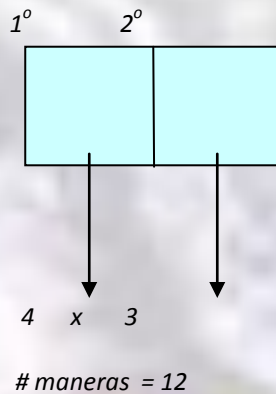
**Solución :**

- **METODO 1: utilizando el diagrama del árbol**



Existen 12 maneras diferentes en que estos equipos se pueden ubicarse en el primer y segundo lugar

- METODO 2: Utilizando el principio de multiplicación**



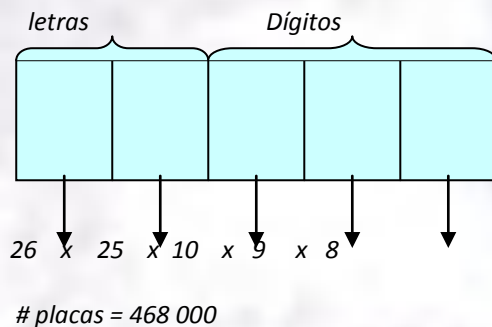
### EXPLICACIÓN:

- 1º El primer lugar puede ser ocupado por cualquiera de los cuatro equipos.
- 2º El segundo lugar puede ser ocupado por cualquiera de los otros tres equipos que restan
- 3º Por el principio de multiplicación, se observa que el evento del primer lugar se presenta de 4 maneras y el del segundo lugar de 3 maneras distintas, entonces el número de maneras totales será :  $4 \times 3 = 12$

### Ejemplo 2:

¿Cuántas placas para automóviles pueden hacerse si cada placa consta de dos letras diferentes seguidas de tres dígitos diferentes? (considerar 26 letras del alfabeto)

**Solución :**



### EXPLICACIÓN:

- 1º El primer casillero puede ser ocupado por cualquiera de las 26 letras
- 2º El segundo casillero puede ser ocupado por cualquiera de las 25 letras que restan
- 3º El tercer casillero puede ser ocupado por cualquiera de los 10 dígitos ( del 0 al 9)
- 4º El cuarto casillero lo pueden ocupar los 9 dígitos restantes
- 5º El quinto casillero puede ser ocupado por cualquiera de los 8 dígitos restantes
- 6º Por el principio de multiplicación, el número de placas será  $= 26 \times 25 \times 10 \times 9 \times 8 = 468\,000$

### II) Principio de adición :

Supongamos que un evento A se puede realizar de "m" maneras y otro evento B se puede realizar de "n" maneras diferentes, además, no es posible que ambos eventos se realicen juntos ( $A \cap B = \emptyset$ ), entonces el evento A o el evento B se realizarán de ( m + n) maneras.

### Ejemplo 1:

Un repuesto de automóvil se venden en 6 tiendas en la Victoria o en 8 tiendas de Breña. ¿De cuántas formas se puede adquirir el repuesto?

**Solución :**

- Por el principio de adición:  
Victoria ó Breña

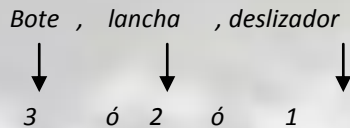
$$6 \text{ formas} + 8 \text{ formas} = 14 \text{ formas}$$

### Ejemplo 2:

Se desea cruzar un río, para ello se dispone de 3 botes, 2 lanchas y 1 deslizador. ¿De cuantas formas se puede cruzar el río utilizando los medios de transporte señalados?

**Solución :**

- Aplicando el principio de adición se tiene:



$$\# \text{ maneras} = 3 + 2 + 1 = 6$$

### RECUERDA

- 1) Si se desea que se realicen los eventos A y B , entonces se utiliza el principio de multiplicación (x)
- 2) Si se desea que se realicen los eventos A ó B , entonces se utiliza el principio de adición (+)

### MÉTODOS DE CONTEO

En diferentes casos se tomará de algún conjunto parte de sus elementos o todos ellos, para formar diferentes agrupaciones, que se van a distinguir por el orden de sus elementos o por la naturaleza de algunos de ellos. Si los elementos que forman una agrupación son diferentes entre si, serán llamados agrupaciones sin repetición y si alguno de ellos son iguales se dirá que son agrupaciones con repetición.

Entre los métodos de conteo más conocidos tenemos : Permutación, Variación y Combinación

### PERMUTACIÓN

Es un arreglo de todos o parte de un conjunto de objetos considerando el orden en su ubicación; cuando en el arreglo solo entran parte de los elementos del conjunto se llama **variación** . Es importante resaltar que el orden es una característica importante en la permutación, cuando variamos el orden de los elementos se dice que permutamos dichos elementos.

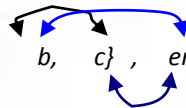
#### Ejemplo :

Determinar los diferentes arreglos o permutaciones que se pueden hacer con las letras a, b y c tomadas de dos en dos

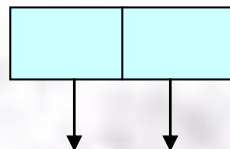
#### Solución :

##### Método 1:

- Sea el conjunto : {a, b, c} , entonces los arreglos pueden ser: **ab, ba, ac, ca, bc, cb**
- Número de arreglos = 6



##### Método 2: (principio de multiplicación)



$$\# \text{ arreglos} = 3 \times 2 = 6$$

### EXPLICACIÓN

- 1) El primer casillero puede ser ocupado por cualquiera de las tres letras, existiendo **3 posibilidades**
- 2) El segundo casillero puede ser ocupado por cualquiera de las otras dos letras restantes, existiendo **2 posibilidades**

### Teorema 1: (Permutación lineal con elementos diferentes)

"El número de permutaciones de "n" objetos diferentes, tomados en grupos de k elementos (siendo  $k \leq n$ ) y denotado por  $P_k^n$ , estará dado por:

$$P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

; donde:  $n, k \in \mathbb{N}$  y  $0 \leq k \leq n$

Estas permutaciones son llamadas lineales , porque los objetos son ordenados en una línea recta de referencia

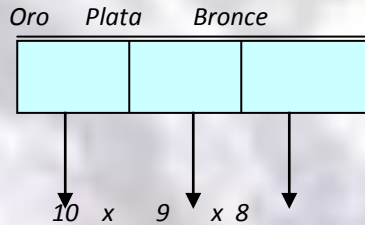


**Ejemplo:**

En una carrera de 400 metros participan 12 atletas. ¿De cuantas formas distintas podrán ser premiados los tres primeros lugares con medalla de oro, plata y bronce?

**Solución :**

**Método 1 : Empleando el principio de multiplicación**



# maneras = 720

**EXPLICACIÓN**

- 1) El primer casillero(MEDALLA DE ORO) puede ser ocupado por cualquiera de los diez atletas, existiendo **10 posibilidades**
- 2) El segundo casillero(MEDALLA DE PLATA) puede ser ocupado por cualquiera de los nueve atletas restantes, existiendo **9 posibilidades**
- 3) El tercer casillero (MEDALLA DE BRONCE) puede ser ocupado por cualquiera de los ocho atletas restantes, existiendo **8 posibilidades**

**Método 2: (usando la fórmula de permutación lineal)**

- Se busca las diferentes ternas ( $k = 3$ ) que se pueden formar con los 10 atletas ( $n = 10$ )

$$P_3^{10} = \frac{10!}{7!} = \frac{7! \times 8 \times 9 \times 10}{7!} = 720$$

**RECORDAR**

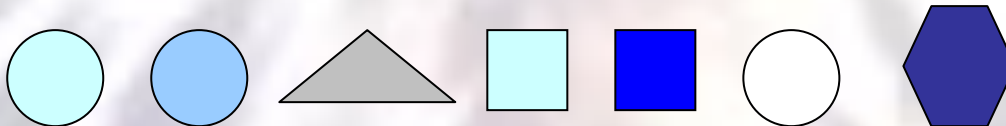
- 1)  $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$
- 2)  $0! = 1$
- 3)  $1! = 1$
- 4)  $n! = (n - 1)! \times n$

**Teorema 2: (Permutación lineal con elementos repetidos)**

El número de permutaciones (P) distintas de "n" elementos tomados de "n" en "n" en donde hay un primer grupo de  $n_1$  objetos iguales entre si;  $n_2$  objetos iguales entre si de un segundo tipo y así sucesivamente hasta  $n_k$  objetos iguales entre si de un último tipo, entonces:

$$P_{n_1, n_2, n_3, \dots, n_k}^n = \frac{n!}{n_1! n_2! n_3! \dots n_k!}$$

;Donde:  $n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k = n$


**Solución:**

- Como entran todos los elementos del conjunto y estos se repiten, se trata de una permutación con repetición, donde  $n_1 = 3$  (tres círculos),  $n_2 = 2$  (dos cuadrados),  $n_3 = 1$  (un triángulo),  $n_4 = 1$  (un rombo), luego:

$$P_{3,2,1,1}^7 = \frac{7!}{3! \times 2! \times 1! \times 1!} = \frac{3! \times 4 \times 5 \times 6 \times 7}{3! \times 2 \times 1 \times 1} = \frac{4 \times 5 \times 6 \times 7}{2} = 420$$

**PERMUTACIÓN CIRCULAR**

Son agrupaciones donde no hay primero ni último elemento, por hallarse todos en una línea cerrada. Para hallar el número de permutaciones circulares que se pueden formar con “n” objetos distintos de un conjunto, hay que considerar fija la posición de un elemento, los  $n - 1$  restantes podrán cambiar de lugar de  $(n - 1)!$  Formas diferentes tomando todas las posiciones sobre la circunferencia relativa al primer punto.

El número de permutaciones circulares será:

$$P_c^n = (n - 1)!$$

**Ejemplo1 :**

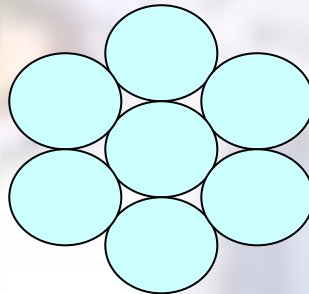
¿De cuántas formas diferentes puede sentarse al rededor de una mesa circular un padre y sus 5 hijos?

**Solución :**

- Se trata de una permutación circular :  $P_c^6 = (6 - 1)! = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

**Ejemplo 2:**

¿De cuántas maneras diferentes se podrán ubicar las cifras del 1 al 7 en la siguiente figura?



**Solución :**

- Este problema se puede resolver como la conjunción de dos eventos: **primero** ubico una cifra en el centro (7 posibilidades) y **segundo** las otras 6 cifras, las cuales por ordenarse en una circunferencia se podrán permutar de  $(6 - 1)!$  Formas, por lo tanto:

$$\# \text{ de maneras} = 7 \times 5! = 7 \times 120 = 840$$

**COMBINACIÓN**

Es cada uno de los diferentes arreglos que se pueden hacer con parte o todos los elementos de un conjunto dado sin considerar el orden en su ubicación

El número de combinaciones de " $n$ " elementos diferentes tomados de " $k$ " en " $k$ ", con  $k \leq n$ , está dada por:

$$C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\dots\dots\dots(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)\dots\dots\dots(1)}$$

**Ejemplo 1:**

Si disponemos de 5 puntos no colineales, ¿cuál es el máximo número de triángulos que se podrán formar?

**Solución:**

- Para dibujar un triángulo solo es necesario 3 puntos en el plano, luego se escogerán 3 puntos ( $k = 3$ ) de un total de 5 puntos ( $n = 5$ ). Además no importa el orden, ya que el triángulo ABC es igual al CBA; por lo tanto se trata de una combinación.

$$C_3^5 = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10$$

**OBSERVACIÓN**

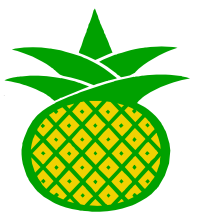
- 1) En las permutaciones interesa el orden, se buscan ordenaciones
- 2) En las combinaciones no interesa el orden, se busca agrupaciones

**Ejemplo 2:**

Una señora tiene 3 frutas : manzana, fresa y piña. ¿Cuántos sabores diferentes de jugo podrá preparar con estas frutas ?



Fresa (F) ,



Piña (P) ,



Manzana (M)

**Solución:****Método 1 : (en forma gráfica)**

- Cuando se escoge una fruta de las tres, los sabores son 3: **F, P, M**
- Cuando se escoge 2 de las tres frutas, los sabores son 3: **FP, FM, PM**
- Cuando se escoge las 3 frutas los sabores son 1: **FPM**

**Total de sabores diferentes :  $3 + 3 + 1 = 7$**

**Método 2 : (Empleando combinaciones)**

- Se puede escoger una fruta de las tres ó 2 frutas de las tres ó las tres frutas de las tres, además en este caso no importa el orden; por lo tanto usamos el principio de adición aplicado a la combinación:

$$\# \text{ maneras diferentes} = C_1^3 + C_2^3 + C_3^3$$

$$\# \text{ maneras diferentes} = \frac{3}{1} + \frac{3 \times 2}{2 \times 1} + \frac{3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1} = 3 + 3 + 1 = 7$$

**Total de sabores diferentes :  $3 + 3 + 1 = 7$**

**Ejemplo 3:**

Se desea formar un comité de 7 seleccionando 4 físicos y 3 matemáticos de un grupo de 8 físicos y 6 matemáticos. ¿De cuantas maneras podrá seleccionarse?

**Solución:**

- 1° Seleccionamos 4 físicos entre 8 en  $C_4^8$  formas

$$C_4^8 = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 70$$

- 2° Seleccionamos 3 matemáticos entre 6 en  $C_3^6$

$$C_3^6 = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$$

- Aplico el principio de multiplicación

$$C_4^8 \times C_3^6 = 70 \times 20 = 1400$$

**PROPIEDADES DE  $C_k^n$** 

$$1) C_1^n = n, C_n^n = 1, C_0^n = 1$$

$$2) C_k^n = C_{n-k}^n$$

$$3) C_k^n + C_{k+1}^n = C_{k+1}^{n+1}$$

$$4) C_k^n = \frac{n}{k} C_{k-1}^{n-1}$$

$$5) C_k^n = \frac{n}{n-k} C_k^{n-1}$$

$$6) C_k^n = \frac{n-k+1}{k} C_{k-1}^n$$

**OBSERVACIÓN:**

En la práctica se presentan diferentes combinaciones que no resultan sencillas, estas son las combinaciones con repetición. Para obtener las diferentes combinaciones con repetición de "n" elementos en el cual hay repetición de los elementos (CR) agrupados de k en k, se utiliza la siguiente fórmula:

$$CR_k^n = C_k^{n+k-1} = \frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+k-1)}{k!}$$

**PROBLEMAS RESUELTOS**

1. ¿Cuántos numerales de 2 cifras se pueden formar con los dígitos 1, 3, 5 y 7?

A) 16

B) 12

C) 10

D) 14

e) 8

**Solución :**

**MÉTODO 1 : ( mediante arreglo numérico)**

- Con los dígitos dados, formamos los siguientes números:

11	13	15	17
31	33	35	37
51	53	55	57
71	73	75	77

**Respuesta : se pueden formar 16 numerales**

**OBSERVACIÓN**

En estos casos el orden es importante, además los elementos del conjunto pueden repetirse, como por ejemplo : 11 , 33, 55, 77



**MÉTODO 2 : ( mediante la aplicación de los principios de análisis combinatorio)**

- La forma general del numeral pedido es :  $\overline{ab}$
- Los valores que pueden tomar los dígitos  $a$  y  $b$  en el numeral  $\overline{ab}$  son:

$$\overline{ab}$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \downarrow \\ 1 \ 1 \end{array}$$

$$3 \ 3$$

$$5 \ 5$$

$$7 \ 7$$

cantidad de números =  $4 \times 4 = 16$

**OBSERVACIÓN**

- 1)  $a$  toma 4 valores
- 2)  $b$  toma 4 valores
- 3) Para formar el numeral  $\overline{ab}$  primero escribo las cifras de las decenas (4 posibilidades) y luego la cifra de las unidades (4 posibilidades), luego por el principio de multiplicación, la cantidad de numerales será :  $4 \times 4 = 16$

2. Determinar cuántos numerales de 3 cifras existen en el sistema de base seis.

A) 160

B) 120

C) 100

D) 140

e) 180

**Solución :**

- La forma general del numeral es  $\overline{abc}$ , hallaremos las posibilidades que pueden tomar  $a$ ,  $b$  y  $c$  en base seis y luego multiplicamos el número de las posibilidades

$$\begin{array}{ccc} \overline{a \ b \ c} \\ 1 \ 0 \ 0 \\ 2 \ 1 \ 1 \\ . \ . \ . \\ 5 \ 5 \ 5 \end{array}$$

$5 \times 6 \times 6 = 180$  numerales

**Respuesta : se pueden formar 180 numerales**

**OBSERVACIÓN:**

- 1) En base seis solo se dispone de los dígitos : 0,1,2,3,4 y 5
- 2) La primera cifra  $a$  no puede ser cero, solo puede tomar las cifras : 1,2,3,4 y 5; es decir 5 posibilidades
- 3) Las cifras  $b$  y  $c$ , como no dicen que son diferentes, pueden tomar 6 valores o posibilidades

3. ¿Cuántos numerales de la forma:  $\overline{a(a+2)b(b-3)c_8}$  existen?

A) 260

B) 200

C) 300

D) 240

e) 180

**Solución:**

- En estos tipos de problemas hay que tener en cuenta que cuando una variable representa una cifra, y ésta se repite en el numeral, entonces a dicha variable se le considera una sola vez al calcular la cantidad de numerales.
- En nuestro problema, con la indicación anterior, tendremos:

$$\begin{array}{ccc} \overline{a(a+2)b(b-3)c_8} \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 1 \quad 3 \quad 0 \\ 2 \quad 4 \quad 1 \\ . \quad . \quad . \\ 5 \quad 7 \quad 7 \end{array}$$

cantidad de numerales =  $5 \times 5 \times 8 = 200$

**Respuesta : se pueden formar 200 numerales**

4. ¿Cuántos numerales de tres cifras diferentes existen en el sistema de base decimal?

A) 900

B) 780

C) 800

D) 648

e) 724

**Solución:**



- La forma general del numeral es  $\overline{abc}$ , hallaremos las posibilidades que pueden tomar  $a$ ,  $b$  y  $c$  en base diez y luego multiplicamos el número de las posibilidades, teniendo en cuenta que las tres cifras deben ser diferentes

$a$	$b$	$c$
↓	↓	↓
1	0	0
2	1	1
.	.	.
.	.	.
9	(10-1)	(10-2)

$$\# \text{ numerales} = 9 \times 9 \times 8 = 648$$

**Respuesta :** se pueden formar 648 numerales

5. ¿Cuántos numerales de la forma:  $a(\frac{14}{a})b(\frac{b}{3})_9$  existen?

A) 9                      B) 18                      C) 26                      D) 48                      e) 24

**Solución:**

- Los valores de " $a$ " deben ser factores de 14 y además menores que 9; luego los valores posibles de " $a$ " solo pueden ser : 1, 2, 7; es decir hay 3 posibilidades.
- Los valores de " $b$ " son múltiplos de 3, menores que 9; luego los valores de " $b$ " solo pueden ser: 0, 3 y 6; es decir hay 3 posibilidades

$a(\frac{14}{a})$	$b(\frac{b}{3})_9$
↓	↓
1	0
2	3
7	6

$$\text{cantidad de } \# = 3 \times 3 = 9 \text{ números}$$

**Respuesta :** se pueden formar 9 números

#### OBSERVACIÓN

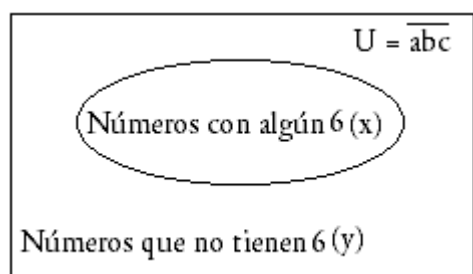
- " $a$ " por ser primera cifra no puede ser cero
- A las posibilidades de " $a$ " y " $b$ " se les aplica el principio de multiplicación

6. ¿Cuántos números de 3 cifras tienen por lo menos un 6 en su escritura?

A) 196                      B) 188                      C) 252                      D) 480                      e) 248

**Solución:**

- a) Podemos representar el procedimiento de solución mediante un diagrama de Venn:



#### OBSERVACIÓN:

Para hallar los números que tiene por lo menos un 6 en su escritura, se consideran:

- Los que tienen un solo 6
- Los que tienen dos 6
- Los que tienen tres 6

- b) Del gráfico anterior, se deduce que:

$$\# \text{ de cifras con por lo menos un 6} = \# \text{ de tres cifras} - \# \text{ de tres cifras que no usan el 6}$$

$$x = \overline{abc} - y$$

..... (1)

c) Calculamos el número de tres cifras que existen:

a	b	c
↓	↓	↓
1	0	0
2	1	1
.	.	.
.	.	.
9	10	10

cantidad de #s =  $9 \times 10 \times 10 = 900$

d) Cálculo del número de 3 cifras que no usan cifra "6"

a	b	c
↓	↓	↓
1	0	0
2	1	1
.	.	.
.	.	.
9	10	10

cantidad de #s =  $8 \times 9 \times 9 = 648$

e) Remplazando los valores obtenidos en los pasos "c" y "d" en la ecuación (1) de l paso (b), se tiene:

$$X = 900 - 648 = 252$$

**Respuesta : se pueden formar 252 números**

7) De un grupo de 5 estudiantes, cuantos grupos diferentes de tres alumnos podrían formarse.

A) 16

B) 10

C) 12

D) 15

e) 18

**Solución :**

**METODO 1: Por conteo directo**

- Sean A, B, C, D y E los alumnos, los diferentes grupos de 3 serían : ABC, ABD, ABE, ACD, ACE, ADE, BCD, BCE, BDE, CDE

**Respuesta : se pueden formar 10 grupos diferentes**

**METODO 2: Por fórmula**

- Como el grupo de alumnos ABC, CBA y BAC son el mismo grupo de alumnos, entonces no interesa el orden de los elementos y se trata de una combinación:

$$C_3^5 = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10$$

**Respuesta : se pueden formar 10 grupos diferentes**

8) Con 7 sumandos diferentes ¿Cuántas sumas distintas de 4 sumandos se podrán efectuar?

A) 56

B) 35

C) 42

D) 64

e) 70

**Solución :**

- En la suma no importa el orden que se dispongan los sumandos, por lo tanto se trata de una combinación; además para cada suma se escogen grupos de 4 sumandos de los siete de que se disponen.

$$C_4^7 = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 35$$

**Respuesta : se pueden formar 35 sumas diferentes**

9) ¿De cuántas formas se pueden ubicar en una fila de 7 asientos 3 hombres y 4 mujeres, si estas deben ocupar los lugares impares?

#### EXPLICACIÓN:

- 1) "a" puede tomar los valores del "1" al 9, es decir hay 9 posibilidades para las centenas
- 2) para "b" y "c" hay 10 posibilidades, ya que b y c pueden tomar los valores del "0" al 9
- 3) Para hallar la cantidad de números de 3 cifras aplicamos el principio de multiplicación

#### EXPLICACIÓN:

- 1) "a" puede tomar los valores del "1" al "9"; sin considerar el "7" es decir hay 9 posibilidades para las centenas
- 2) para "b" y "c" hay 9 posibilidades, ya que b y c pueden tomar los valores del "0" al "9", exceptuando a "7"
- 3) Para hallar la cantidad de números de 3 cifras aplicamos el principio de multiplicación

A) 160

B) 135

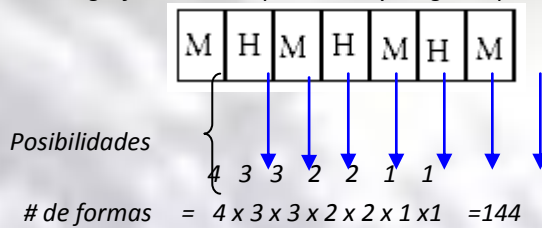
C) 144

D) 14

e) 170

**Solución :**

- Representemos gráficamente el problema, y luego emplearemos el principio de multiplicación


**Respuesta : se pueden ubicar de 144 formas diferentes**

- 10) ¿Cuántos números de 4 cifras diferentes y mayores que 5 000, se pueden formar con los siguientes dígitos : 1, 3, 4, 6, 9?

A) 52

B) 48

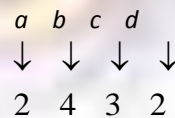
C) 27

D) 96

e) 49

**Solución :**

- Sea :  $\overline{abcd}$  el número, entonces se tiene:



$$\# \text{ de números} = 2 \times 4 \times 3 \times 2 = 48$$

### EXPLICACIÓN:

- 1) “a” puede ser “6” o “9”, es decir tiene 2 posibilidades ; “b”, tiene (5 - 1) posibilidades; “c” tiene (5 - 2) posibilidades y “d” tiene (5 - 3) posibilidades ya que las cifras deben

**Respuesta : se pueden formar 48 números de cuatro cifras diferentes**

- 11) Un grupo de 16 personas desean escoger entre sus miembros un comité de 3 personas que los represente. ¿De cuántas formas distintas se puede seleccionar dicho comité?

A) 1120

B) 48

C) 300

D) 560

e) 440

**Solución :**

- Para formar un comité, no interesa el orden en que se dispongan las tres personas por lo que los posibles comités serán combinaciones de 16 personas tomadas en grupos de 3, así

$$C_3^{16} = \frac{16 \times 15 \times 14}{3 \times 2 \times 1} = 560$$

**Respuesta : se puede seleccionar el comité de 560 formas diferentes**

- 12) A la final de un torneo de ajedrez se clasifican 10 jugadores, ¿cuántas partidas se jugará si se juega todos contra todos?

A) 1120

B) 48

C) 300

D) 560

e) 440

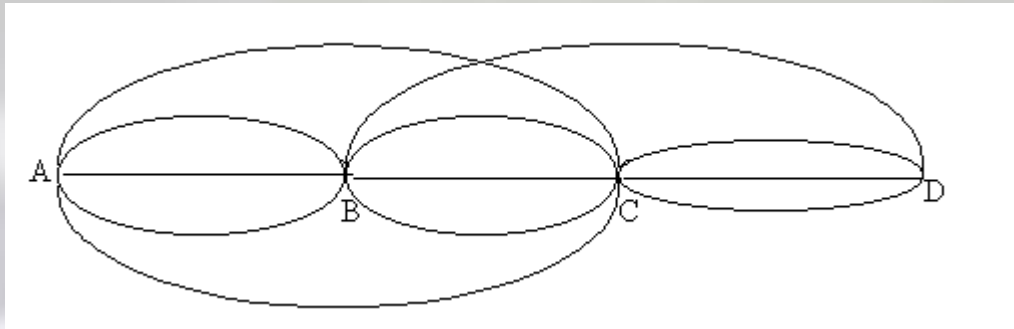
**Solución :**

- Si “A” juega con “B” es lo mismo decir que “B” juega con “A”, la partida es la misma, **no interesa el orden de sus elementos**, pero es una agrupación de 2 en 2, de un total de 10 elementos. Por lo tanto **se trata de una combinación**

$$C_2^{10} = \frac{10!}{2! \times 8!} = \frac{10 \times 9}{2 \times 1} = 45$$

**Respuesta : se jugarán 45 partidas**

- 13) ¿De cuántas maneras diferentes podrá viajar una persona de A a D sin retroceder?



A) 24

B) 48

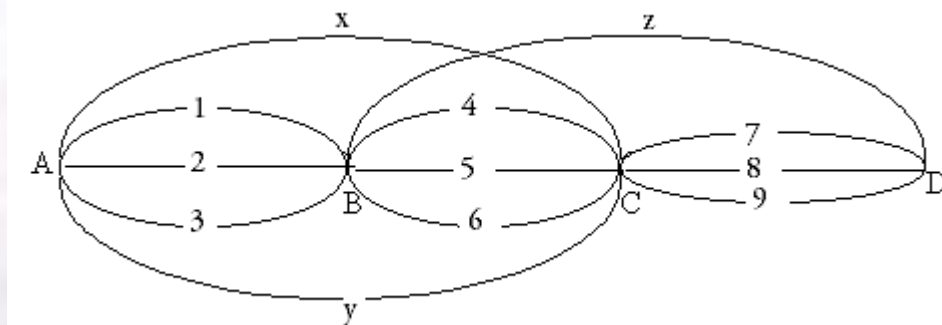
C) 36

D) 18

e) 30

**Solución :**

- Identificamos con un nombre a cada camino diferente:



- Analizamos por tramos:

- ABD :** para llegar a B, se puede utilizar cualquiera de los 3 caminos(1, 2, 3) señalados. De B a D se puede ir por el camino z, luego habría 3 formas diferentes de llegar: 1z,2z,3z; por lo tanto en el tramo **ABD hay 3 formas**
- ACD:** para llegar a C se puede utilizar un camino para llegar a B (1,2,3) y luego otro camino para llegar a C(4,5,6). Que aplicando el principio de multiplicación se tendría:



# maneras de llegar de A a C = 3 x 3 = 9  
pasando por B

Pero también hay dos caminos directos para llegar a C (x,y); por lo tanto el número total de caminos para llegar de A a C es : 9 + 2 = 11 formas; y de C a D hay 3 formas (7,8,9)

Finalmente se tiene:

$$\underbrace{\text{De A a C}}_{11 \text{ formas}} \text{ y de } \underbrace{\text{C a D}}_{3 \text{ formas}} \Rightarrow \text{De A a D} = 11 \times 3 \text{ formas}$$

$$\# \text{ total de formas diferentes} = 33 \text{ formas}$$

- En conclusión los caminos de (I) y (II) , pueden ser ABD ó ACD = 3 + 33 = 36 formas

**Respuesta : 36 maneras diferentes**

- En un examen de matemáticas, un estudiante debe responder siete preguntas de las diez dadas.¿De cuántas formas diferentes debe seleccionar, si el debe responder por lo menos, tres de las cinco primeras preguntas?

A) 64

B) 55

C) 50

D) 110

e) 120

**Solución :**

- El estudiante puede responder tres de las cinco primeras preguntas y 4 de las últimas 5 preguntas; ó cuatro de las primeras cinco preguntas y 3 de las últimas ; ó cinco de las primeras cinco y dos de las últimas. Como no interesa el orden se trata de una combinación, por lo tanto tenemos:

$$C_3^5 \times C_4^5 + C_4^5 \times C_3^5 + C_5^5 \times C_2^5 = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} \times 5 + 5 \times \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} + 1 \times \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 50 + 50 + 10 = 110$$



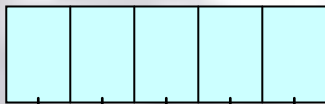
**Respuesta : 110 maneras diferentes**

15) El servicio de inteligencia de cierto país, desea enviar mensajes a sus agentes secretos. Solo quiere utilizar las siguientes letras: V, A, M, P, I, R, O. ¿Cuántas palabras claves de cinco letras pueden formarse, si ninguna letra puede repetirse?

- A) 2520      B) 1550      C) 1850      D) 1100      e) 1200

**Solución :**

**Método 1:(usando el principio de multiplicación)**



$$\#maneras = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 2520$$

**Método 2:(usando permutación)**

$$P_5^7 = \frac{7!}{(7-5)!} = \frac{7!}{2!} = \frac{2! \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7}{2!} = 2520$$

16) Un hombre tiene 9 bonos financieros de 9 compañías distintas, y piensa regalarlos a sus 3 hijos de la siguiente manera: a su hijo mayor, 4; a su segundo hijo, 3; y al menor 2. ¿De cuántas formas puede repartir los bonos?

- A) 1640      B) 1360      C) 680      D) 1100      e) 1120

**Solución :**

- Se trata de una permutación con repetición donde intervienen todos los elementos. Hay 4! Maneras de arreglar los bonos para su hijo mayor; 3! Formas para arreglar los bonos para el segundo hijo y 2! Formas para el hijo menor. Luego se tiene:

$$P_{4,3,2}^9 = \frac{9!}{4! \times 3! \times 2!} = \frac{4! \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9}{4! \times 3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1} = 1360$$

**Respuesta : Los bonos se pueden repartir de 1360 formas**

17) La selección peruana de voleibol está conformado por 12 chicas. ¿De cuántas formas se puede conformar un equipo de 6 si se sabe que 2 chicas se niegan a jugar en el mismo equipo?

- A)  $\frac{2}{3} C_6^{12}$       B)  $\frac{5}{3} C_5^{11}$       C)  $\frac{17}{6} C_5^{10}$       D)  $\frac{11}{3} C_5^{10}$       e)  $\frac{4}{9} C_4^{10}$

**Solución :**

- La delegación de 6 chicas se puede presentar en los siguientes casos:  
**1er caso :** Si no figura ninguna de las dos chicas que se niegan a jugar juntas, las seis chicas deben escogerse de entre 10

$$\# \text{ de equipos} = C_6^{12-2} = C_6^{10} = \frac{10-6+1}{6} C_5^{10} = \frac{5}{6} C_5^{10}$$

**2do caso :** Si figura una de las dos chicas que se niegan a jugar juntas, las otras cinco chicas deben escogerse de entre las 10 restantes

$$\# \text{ de equipos} = C_1^2 \times C_5^{10} = 2 C_5^{10}$$

$$\therefore \# \text{ total de equipos} = \frac{5}{6} C_5^{10} + 2 C_5^{10} = \frac{17}{6} C_5^{10}$$

**Respuesta : El número total de equipos que se pueden formar es  $\frac{17}{6} C_5^{10}$**

18) ¿De cuántas maneras diferentes se pueden sentar 8 personas en una mesa redonda de 5 asientos, si 3 están en espera?

- A) 1640      B) 1344      C) 680      D) 1124      e) 1120

**OBSERVACIÓN:**

**Hemos aplicado la propiedad:**

$$C_k^n = \frac{n-k+1}{k} C_{k-1}^n$$

**Solución :**

- El número de grupos de 5 personas que se ubican en la mesa circular es:

$$C_5^8 = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 56$$

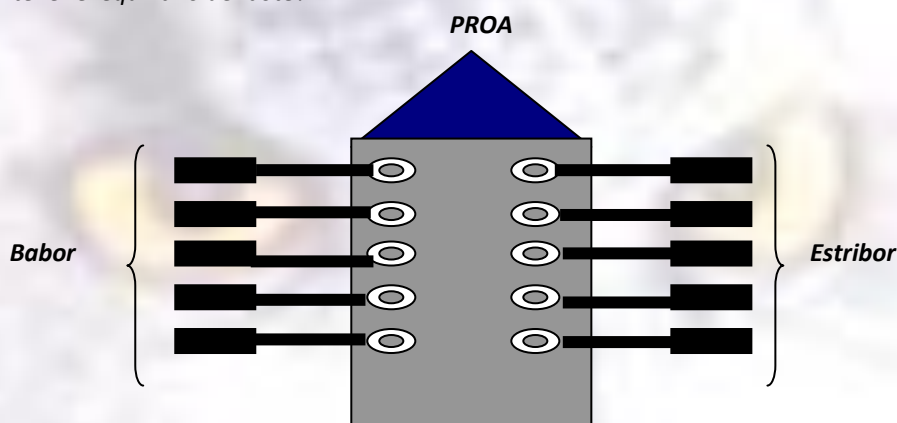
- El número de formas en que cada grupo de 5 personas se pueden sentar en la mesa es:

$$(5 - 1)! = 4! = 24$$

$$\# \text{ total de formas} = 56 \times 24 = 1344$$

**Respuesta : 1344 maneras diferentes**

- 19) La tripulación de un bote es de 10 hombres, cuatro solamente pueden remar a babor y tres a estribor. ¿De cuántas formas se pueden distribuirse para remar?, sabiendo que cinco hombres deben ubicarse a cada lado para mantener el equilibrio del bote?



A)  $3 \times (5!)^2$

B)  $6 \times (4!)^2$

C)  $3! \times (5!)^2$

D)  $12 \times (3!)^2$

e)  $6 \times (5!) \times (4!)$

**Solución :**

- Sean  $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$  los tripulantes del bote de los cuales:  $a, b, c$  y  $d$  pueden remar sólo a babor y  $h, i, y j$  pueden remar sólo a estribor. Además cinco hombres están ubicados a cada lado del bote.
- $a, b, c$  y  $d$  pueden ubicarse a babor de  $P_4^5$  formas distintas ocupando 4 lugares (observar que en este problema el orden es importante). Los lugares que sobran a babor pueden ser ocupados por  $d, e$  ó  $f$ , es decir 3 formas distintas. Luego los cinco lugares a babor pueden ser ocupados de:

$$P_4^5 \cdot 3 \text{ formas o maneras distintas.}$$

- A estribor  $h, i, y j$  pueden acomodarse de  $P_3^5$  formas diferentes ocupando 3 lugares; y sobrando 2 lugares. Uno de los lugares que sobra puede ser ocupado de 2 formas diferentes, pues uno de los tripulantes  $e, f$  ó  $g$  ya está ubicado a babor, quedando  $(3 - 1)$  de ellos para ocupar aquel cuarto lugar. El quinto lugar a estribor puede ser ocupado de  $(3 - 2)$  sola forma, por el que queda de los dos anteriores. Por tanto los cinco lugares a estribor pueden ser ocupados de:  $P_3^5 \cdot 2 \cdot 1$  maneras diferentes.
- Como se trata de un suceso simultaneo, aplicamos el principio de multiplicación para los dos resultados anteriores:

$$\# \text{ de formas diferentes} = P_4^5 \cdot 3 \times P_3^5 \cdot 2 \cdot 1 = \frac{5!}{1!} \cdot 6 \cdot \frac{5!}{2!} = (5!)^2 \cdot 3$$

**Respuesta :  $3 \times (5!)^2$  formas diferentes**

- 20) Señale cuántos productos diferentes, cada uno de tres factores primos, podrá obtenerse con los cinco factores primos:  $a, b, c, d, e$  ( $a < b < c < d < e$ )

A) 40

B) 35

C) 30

D) 24

e) 56

**Solución:**
**Método 1 : (Por conteo directo)**

Se deben formar números de la forma  $P = x \cdot y \cdot z$ ; donde  $x, y, z$  son números primos

**CASO 1: Los tres factores son iguales; es decir:  $x = y = z$ , los productos serán:**

$$P_1 = a a a; \quad P_2 = b b b; \quad P_3 = c c c; \quad P_4 = d d d; \quad P_5 = e e e$$

Son 5 casos posibles ( $C_1^5 = 5$ )

**CASO 2: Dos factores son iguales y uno es diferente ; es decir :  $x = y$  ; con  $z$  diferente , los productos serán:**

$$\begin{aligned} P_6 &= a a b ; & P_7 &= a a c ; & P_8 &= a a d ; & P_9 &= a a e ; & P_{10} &= b b a \\ P_{11} &= b b c ; & P_{12} &= b b d ; & P_{13} &= b b e ; & P_{14} &= c c a ; & P_{15} &= c c b \\ P_{16} &= c c d ; & P_{17} &= c c e ; & P_{18} &= d d a ; & P_{19} &= d d b ; & P_{20} &= d d c \\ P_{21} &= d d e ; & P_{22} &= e e a ; & P_{23} &= e e b ; & P_{24} &= e e c ; & P_{25} &= e e d \end{aligned}$$

Son 20 casos posibles (  $2 \cdot C_3^5 = 2 \times 10 = 20$  )

**CASO : Los 3 factores son diferentes ; es decir :  $x \neq y \neq z$  ;, los productos serán:**

$$\begin{aligned} P_{26} &= a b c ; & P_{27} &= a b d ; & P_{28} &= a b e ; & P_{29} &= a c d ; & P_{30} &= a c e \\ P_{31} &= a d e ; & P_{32} &= b c d ; & P_{33} &= b c e ; & P_{34} &= b d e ; & P_{35} &= c d e \end{aligned}$$

Son 10 casos posibles (  $C_3^5 = 10$  )



**Finalmente se tendrá :  $5 + 20 + 10 = 35$  formas posibles**

**Método 2 : (Aplicando combinación con repetición)**

- En este caso aplicamos la fórmula:  $CR_k^n = C_k^{n+k-1} = \frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+k-1)}{k!}$

$$\text{Con } n = 5 \text{ y } k = 3, \text{ es decir: } CR_3^5 = C_3^{5+3-1} = \frac{5(5+1)(5+2)}{3!} = 35$$

**Respuesta : 35 formas diferentes**

#### COMPRUEBA TUS SABERES

- ¿Cuántos cables de conexión son necesarios para que puedan comunicarse directamente 2 oficinas de las 8 que hay en un edificio?  
A) 20                      B) 56                      C) 28  
D) 14                      E) 16
- Las ciudades A y B están unidas por 6 caminos diferentes, B y C por 10 caminos diferentes y las ciudades C y D por 8 caminos diferentes. ¿De cuántas maneras diferentes una persona puede viajar de A a D pasando por B y C?  
A) 200                      B) 256                      C) 240  
D) 140                      E) 480
- La municipalidad de Lima a ordenado que los moto taxis sean amarillos y tengan las placas 6 caracteres (3 letras seguidas de 3 números). ¿Cuántas placas diferentes se podrán formar?(considerar 26 letras del alfabeto)  
A)  $20^3 \times 10^3$                       B)  $26^2 \times 10^2$                       C)  $26^3 \times 10^3$   
D)  $26 \times 10^3$                       E)  $26 \times 25 \times 24$
- ¿Cuántos números de 3 cifras que sean impares, se pueden escribir con los dígitos: 4, 5, 7, 9 y 8, si no se pueden repetir los dígitos?  
A) 20                      B) 56                      C) 28  
D) 14                      E) 36
- De seis números positivos y 5 números negativos, se escogen 4 números al azar y se multiplican. Calcular el número de formas que se pueden multiplicar, de tal manera que el producto sea positivo.  
A) 60                      B) 96                      C) 128  
D) 140                      E) 170
- El equipo de fútbol de un salón de clase debe escoger 2 madrinas, una para el equipo y otra para las camisetas; si en total hay 8 candidatas. ¿De cuántas maneras se pueden escoger las 2 madrinas?  
A) 16                      B) 56                      C) 28  
D) 64                      E) 36
- Se tiene una urna con 9 bolas numeradas. Se quiere saber, ¿de cuántas maneras podemos sacar primero 2 bolas, luego 3 y finalmente 4?



- A) 630      B) 210      C) 1080  
D) 108      E) 1260

8. ¿Cuántos numerales, en el sistema quinario, de la forma  $(a+3)b(\frac{c}{2})$ ?

- A) 20      B) 50      C) 100  
D) 40      E) 80

9. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden repartir los 10 miembros de un club en tres comités de 5, 3 y 2 miembros respectivamente?

- A) 2520      B) 5040      C) 1440  
D) 1125      E) 800

10. En una despedida de soltera, a la que asistieron sólo chicas todas bailaron entre sí, al menos una vez. Si en total se lograron conformar 28 parejas diferentes, el número de chicas que participaron fue....?

- A) 16      B) 12      C) 8  
D) 4      E) 36

### DESAFIOS

#### PROBLEMAS DE NIVEL I

1. Una clase consta de 7 niños y 3 niñas. ¿De cuántas maneras diferentes el profesor puede escoger un comité de 4 alumnos?

- A) 160      B) 210      C) 128  
D) 144      E) 105

2. ¿Cuántas palabras diferentes de tres letras, aunque carezcan de significado, se puede formar usando las letras de la palabra PELON (sin repetir las letras)

- A) 60      B) 96      C) 128  
D) 140      E) 170

3. Cuatro chicas y dos varones van al cine y encuentran 6 asientos juntos en una misma fila, donde desean acomodarse. ¿De cuántas maneras diferentes pueden sentarse si las cuatro chicas quieren estar juntas?

- A) 160      B) 72      C) 128  
D) 144      E) 64

4. Tienes 5 libros, ¿de cuántas maneras diferentes puedes escoger uno o más de dichos libros?

- A) 30      B) 36      C) 28  
D) 40      E) 31

5. ¿Cuántos números de dos cifras pueden formarse con los dígitos: 1, 2, 3, 4 y 5, si:

a) Los dígitos no pueden repetirse

b) Si se permite la repetición

- A) 20 y 25      B) 18 y 36      C) 22 y 28  
D) 20 y 40      E) 16 y 32

6. Luis tiene 10 amigos de los cuales invitará a su matrimonio solamente a 7. ¿De cuántas maneras puede hacer la invitación si dos de sus amigos están enemistados y no pueden asistir juntos?

- A) 56      B) 64      C) 36  
D) 44      E) 128

7. En una reunión se encuentran 5 mujeres y 8 hombres. Si se desea formar grupos mixtos de 5 personas. De cuántas maneras pueden formarse tales grupos de modo que en cada uno de ellos estén siempre dos mujeres?

- A) 560      B) 390      C) 120  
D) 140      E) 280

8. Una persona tiene 6 billetes de valores diferentes. ¿Cuántas sumas distintas de dinero se puede formar tomados de 3 en 3?

- A) 60      B) 56      C) 128  
D) 40      E) 70



9. ¿Cuántos numerales del sistema octavario (base 8) existen de la forma:

$$(a+2)b(b-4)a\left(\frac{c}{2}\right) ?$$

- A) 108                  B) 144                  C) 128  
D) 192                  E) 72

10. ¿Cuántos números múltiplos de 5, menores que 4000 y de cifras diferentes se pueden formar con los dígitos del 0 al 9?

- A) 108                  B) 491                  C) 528  
D) 392                  E) 372

### PROBLEMAS DE NIVEL II

11. Hay 5 candidatos para presidente de un club, 6 para vicepresidente y 3 para secretario. ¿De cuántas maneras se pueden ocupar estos tres cargos?

- A) 108                  B) 64                  C) 128  
D) 72                  E) 90

13. ¿Cuántas combinaciones pueden hacerse con las letras : a, b, c, d y e tomadas de cuatro en cuatro, entrando "a" en todas ellas?

- A) 10                  B) 4                  C) 8  
D) 12                  E) 2

14. Una combi posee 21 asientos, 4 filas de 4 asientos cada uno con un pasillo al medio y al final 5 asientos juntos. Se desea ubicar 13 pasajeros de los cuales 2 siempre van al lado de la ventana y 4 juntos al pasillo central. ¿De cuántas formas se le puede ubicar, si hay 10 asientos con ventana disponibles?

- A)  $\left(\frac{15}{4}\right)8!$                   B)  $\left(\frac{15}{4}\right)15!$                   C)  $\left(\frac{15}{4}\right)10!$   
D)  $\frac{15!}{4}$                   E)  $\frac{15!}{4!}$

15. A una reunión asistieron 30 personas. Si se saludan estrechándose las manos, suponiendo que cada uno es cortes con cada uno de los demás. ¿Cuántos apretones de manos hubieron?

- A) 60                  B) 435                  C) 870  
D) 120                  E) 205

17. En el sistema de base "5". ¿Cuántos números de cinco cifras presentan algún 4?

- A) 1732                  B) 1525                  C) 1840  
D) 960                  E) 1205

18. En el curso de matemáticas hay 4 profesores y 5 profesoras. Se quiere formar comisiones de 4 personas, sabiendo que los profesores Martínez y Caballero no pueden estar en la misma comisión a menos que la comisión esté formada por lo menos por una mujer. ¿Cuál es el máximo número de comisiones que se puede formar?

- A) 160                  B) 145                  C) 128  
D) 125                  E) 105

19. En una empresa trabajan 5 mecánicos, 4 Físicos y 2 ingenieros Geólogos. Se desea formar una comisión de 5 personas en la cual haya siempre un Físico. ¿De cuántas formas se puede seleccionar dicha comisión?

- A) 108                  B) 140                  C) 80  
D) 124                  E) 120

20. ¿Cuántos números de 4 cifras se pueden formar con las cifras: 1, 2, 4, 6, 7 y 8; de tal manera que sean menores que 5 000 y no permitiéndose repeticiones de las cifras?

- A) 138                  B) 340                  C) 280  
D) 454                  E) 180

21. Se tienen 6 bolitas marcadas con los dígitos :1, 2, 3, 4, 5 y 6 .¿Cuántos números se pueden obtener?

- A) 1956      B) 2496      C) 1080  
D) 1244      E) 1200

22. Tengo 15 sillas de las cuales 8 son defectuosas. ¿De cuántas maneras podemos escoger 5 sillas de las cuales por lo menos 4 sean defectuosas?

- A) 490      B) 560      C) 546  
D) 480      E) 520

Trabajo enviado por:

**Walter Cosme, Florián Contreras**

Catedrático

Director del turno Noche del Colegio de Aplicación San Marcos y escritor de libros de la Editorial BRUÑO

Catedrático de la Facultad de Educación de la U.N.M.S.M

[wflorianc@hotmail.com](mailto:wflorianc@hotmail.com)

[www.monografias.com](http://www.monografias.com)