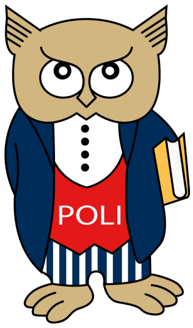


Probabilidad y Estadística - 2024-A

Preparado por:

Cátedra de Probabilidad y Estadística - EPN

CC BY NC SA

0. Índice general

1. Distribuciones Discretas

Leyes de probabilidad para variables discretas

1.1. Ley de Bernoulli

Bernoulli, es el esquema más simple de las leyes de probabilidad discreta y consiste en lo siguiente:

Se realiza un experimento, sobre el cual se plantea si ocurre o no un cierto evento.

Así, este es un experimento donde se tienen dos posibles resultados:

(I) ocurre el evento, y;

(II) no ocurre el evento.

Cuando ocurre el evento, se dice que se tiene un éxito (E), mientras que, cuando no ocurre el evento, se dice que se tiene un fracaso (F).

Sea X, la variable aleatoria discreta de Bernoulli que cuenta el número de éxitos que se obtienen del experimento. Como tal puede tomar dos valores 0 y 1, equivalente a fracaso y éxito respectivamente.

Por ejemplo, se lanza un dado, y se plantea el evento que salga la cara marcada con el número cuatro. Si sale el número cuatro, se dice que se tiene un éxito, en caso contrario (si sale el uno o el dos o el tres o el cinco o el seis), se tiene un fracaso.

Bajo este esquema se notan las probabilidades de éxito y fracaso, por:

- $P(\text{éxito}) = P(E) = P(X = 1) = p,$
- $P(\text{fracaso}) = P(F) = P(X = 0) = q,$

donde $p + q = 1$.

Estas probabilidades p y q representan la ley de probabilidad, en este caso **Ley Bernoulli de probabilidades** de la variable aleatoria discreta X dado por:

$$P(X = x) = p^x q^{1-x}, x \in \{0, 1\}$$

Para el ejemplo planteado, se tiene un éxito si sale la cara marcada con el número cuatro, entonces:

- $P(E) = p = \frac{1}{6}$ (por la definición básica de probabilidad), y
- $P(F) = q = \frac{5}{6}$ (ya que $p + q = 1$).

Veamos la tendencia central y la dispersión de esta ley de probabilidad. Para esto se utiliza la definición de esperanza matemática (o promedio) y varianza para una variable aleatoria discreta (v.a.d.). Siendo X la v.a.d. de Bernoullí, la tabla de distribución de probabilidades es:

X	0	1
$P(X = x)$	q	p

La esperanza es

$$\begin{aligned} E(X) &= 1 \cdot p + 0 \cdot q \\ &= p. \end{aligned}$$

La varianza es

$$\begin{aligned} V(X) &= (1-p)^2 \cdot p + (0-p)^2 \cdot q \\ &= q^2 p + p^2 q \\ &= pq(p+q) \\ &= pq. \end{aligned}$$

La desviación estándar es $D(X) = \sqrt{pq}$.

1.2. Ley Binomial

Supongamos ahora, que se realizan n experimentos de Bernoulli, cada uno de ellos de forma independiente. Consideremos en este caso la variable aleatoria discreta X, que representa la **suma de éxitos obtenidos en los n experimentos de Bernoulli**. Los posibles resultados de suma de éxitos que pueden tenerse son: 0 éxitos, 1 éxito, 2 éxitos, 3 éxitos, ..., hasta n éxitos.

Así, bajo este esquema se plantea lo siguiente, **¿cuál será la probabilidad de obtener x éxitos, como resultado de n experimentos de Bernoulli?**

A esta situación planteada, se lo denomina, el **esquema Binomial**[1] **de probabilidades**.

Luego, nos interesa calcular la probabilidad de tener x éxitos: $P(X = x)$

Se realizan n experimentos de Bernoulli, de los cuales x son éxitos (y por lo tanto se tienen $n - x$ fracasos). Supongamos que ocurrió la siguiente serie de x éxitos y $n - x$ fracasos.

$$E \ \ E \ \ F \ \ F \ \ E \ \ F \cdots\cdots E \ \ F \ \ E \ \ E$$

[1] Toma este nombre en honor al famoso Binomio de Newton

Luego, la probabilidad de tener x éxitos para esta serie de eventos de Bernoulli es:

$$\begin{aligned} P(B_1) &= P(E \cap E \cap F \cap F \cap E \cap F \cap \ldots \cap E \cap F \cap E \cap E) \\ &= P(E)P(E)P(F)P(F)P(E)P(F)\ldots P(E)P(F)P(E)P(E) \\ &= p \cdot p \cdot q \cdot q \cdot p \cdot q \cdot \ldots \cdot p \cdot q \cdot p \cdot p. \end{aligned}$$

Supongamos ahora que, de los n eventos de Bernoulli, los primeros x eventos fueron éxitos, y los restantes $n - x$ fracasos. Veamos si cambia la probabilidad, para este esquema, como puede apreciarse en la siguiente figura:

$$E \;\; E \;\; E \;\; E \;\; E \;\; E \cdots\cdots F \;\; F \;\; F \;\; F$$

Nuevamente, la probabilidad de tener x éxitos para esta serie, está dada por:

$$\begin{aligned} P(B_1) &= P(E \cap E \cap E \cap E \cap E \cap E \cap \ldots \cap E \cap F \cap E \cap E) \\ &= P(E)P(E)P(E)P(E)P(E)P(E)\ldots P(F)P(F)P(F)P(F) \\ &= p \cdot p \cdot p \cdot p \cdot p \cdot p \cdot \ldots \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q. \end{aligned}$$

Se aprecia que la probabilidad no cambia. Sin embargo, no interesan solamente las series B_1 y B_2 de eventos, sino todas las combinaciones posibles, puesto que se desea calcular la probabilidad de tener x éxitos en n eventos de Bernoulli en cualquier orden que aparezcan.

Luego, la suma de todas las combinaciones posibles de estas probabilidades da la **ley binomial** de probabilidades de parámetros n y p:

$$\begin{aligned} P(X = x) &= p^x q^{n-x} + p^x q^{n-x} + \ldots p^x q^{n-x} \\ &= \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \end{aligned}$$

La tabla de distribución de probabilidades de la variable aleatoria discreta X Binomial es:

X	0	1	...	x	...	n
$P(X = x)$	$\binom{n}{0} p^0 q^{n-0}$	$\binom{n}{1} p^1 q^{n-1}$	...	$\binom{n}{x} p^x q^{n-x}$	...	$\binom{n}{n} p^n q^{n-n}$

Así, utilizando nuevamente las definiciones de los momentos estadísticos, el valor esperado y la varianza de una variable aleatoria binomial X están dados por:

$$\begin{aligned} \mu = E(X) &= \sum_{k=1}^{n} x_k p_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \\ &= np \\ \sigma^2 = V(X) &= npq \end{aligned}$$

En resumen,

Teorema 1 – Media y Varianza Distribución Binomial

La media y la varianza de la distribución binomial de parámetros n y p son

$$\mu = np \quad \text{y} \quad \sigma^2 = npq.$$

Puede apreciarse que si se aplica esta ley para $n = 1$, se tiene la ley de Bernoulli.

Ejemplo 1. Se lanza un dado 20 veces, ¿cual será la probabilidad de que salga la cara marcada con el cuatro en 15 ocasiones?

Solución. Este problema se ajusta al esquema binomial de probabilidades. Así, un lanzamiento del dado puede ser visto como un evento de Bernoulli, en donde el éxito es cuando sale la cara marcada con el cuatro y fracaso en caso contrario. Luego, tenemos 20 eventos de Bernoulli, y queremos la probabilidad de que ocurran 15 éxitos.

La probabilidad de un éxito está dada por la probabilidad de que salga la cara marcada con el cuatro al lanzar el dado, $P(E) = p = \frac{1}{6}$, y $q = \frac{5}{6}$. Utilizando la ley binomial de probabilidades tenemos que la probabilidad de que salga la cara marcada con el cuatro en 15 ocasiones es:

$$P(X = 15) = \binom{20}{15} \left(\frac{1}{6}\right)^{15} \left(\frac{5}{6}\right)^{20-15} = 0.000\,000\,013$$

Podemos apreciar que la probabilidad de que ocurra tal situación es bastante baja, casi nula. □

Notas Complementarias

I) Recordando del tema de conteo de elementos, se tiene que a partir de un conjunto de la forma $\Omega = \{a, a, a, b, c, c, d, e, e\}$, con n elementos, de los cuales al menos uno se repite un cierto número de veces, el número de grupos posibles de tamaño n que se pueden formar ($k = n$), y que se llaman **permutaciones** está dado por:

$$P_n^{n_1 n_2 \ldots, n_q} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_q!}$$

Siendo n_1 el número de veces que se repite el primer elemento, n_2 las veces que se repite el segundo elemento del conjunto base, y así sucesivamente. Además, $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_q = n$.

Se mencionó anteriormente que el número de combinaciones posibles de x éxitos ($n - x$ fracasos) en n experimentos de Bernoulli son las combinaciones sin repetición de n elementos agrupados en tamaño de x elementos, pero en realidad son permutaciones de n elementos de tamaño n, formadas a partir de dos elementos {Exito, Fracaso} en donde los éxitos se repiten x veces y los fracasos se repiten $n - x$ veces.

Así, siendo $n_1 = x$ éxitos, y $n2 = n - x$ fracasos, el número de grupos posibles son (de acuerdo a la expresión de conteo del párrafo anterior):

$$\text{grupos posibles} = \frac{n!}{n_1!n_2!} = \frac{n!}{x!(n-x)!} = \text{combinaciones } \textbf{sin} \text{ repetición } (n,x)$$

Es decir, en el caso de tener 2 elementos que se repiten un cierto número de veces, el número de permutaciones coinciden con el conteo de combinaciones sin repetición.

II) El modelo Binomial de probabilidades (caracterizado por dos grupos que los podemos llamar G_1 = ÉXITOS y, G_2=FRACASOS), se puede generalizar para más de dos grupos.

Sean:

- ✔ k resultados (grupos) posibles $G_1, G_2, \ldots, G_k$;
- ✔ p_i la probabilidad de que ocurra G_i, tal que $p_1 + p_2 + \ldots + p_k = 1$;
- ✔ se realizan n experimentos y, se plantea la probabilidad de que x_1 elementos pertenezcan al grupo G_1, x_2 elementos al grupo $G_2, \ldots, x_k$ elementos pertenezcan al grupo G_k, tal que $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$.

Este esquema (para dos o más grupos) se conoce como la **ley multinomial** y la probabilidad está dada por:

$$P(n, x_1, x_2, \ldots x_k) = \frac{n!}{x_1!x_2!\ldots x_k!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \ldots p_k^{x_k}.$$

III) La suma de todas las probabilidades sabemos que es igual a uno. En el caso de las probabilidades de la Ley Binomial se tiene:

$$\sum_{x=0}^{n} P(X = x) = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = (p+q)^n.$$

Es decir, este modelo viene del desarrollo del Binomio de Newton de $(p+q)^n$

1.3. Ley Binomial Negativa

Recordemos nuevamente el modelo Binomial (de la sección anterior). Este modelo se basa en realizar n experimentos de Bernoulli (fijos), y se plantea la probabilidad de obtener x éxitos (donde x puede tomar los valores $0, 1, 2, \ldots, n$, es decir, los éxitos x es el componente variable).

Consideremos ahora la situación contraria, es decir, mantenemos fijos los éxitos, digamos k, y se plantea la probabilidad de realizar n experimentos (variable) de Bernoulli para lograr obtener los k éxitos (fijos). Este esquema es lo que se conoce como el modelo **Binomial Negativo o Ley de Pascal**.

Debe notarse que si se realizan n experimentos de Bernoulli para obtener k éxitos (fijos de antemano), entonces n toma los valores $k, k+1, k+2, \ldots$, puesto que necesitamos realizar al menos k experimentos de Bernoulli para obtener k éxitos (fijos). El modelo de probabilidad que da esta probabilidad, y que es conocido también como modelo o ley de Pascal, es:

$$P(X = n) = \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k}$$

Para evitar alguna confusión con esto de que n toma los valores desde k hasta el infinito, se hace la transformación siguiente: $n = x + k$, donde k son los éxitos fijos, y x vienen a representar los fracasos de los eventos de Bernoulli y, por lo tanto, esta variable X toma los valores $0, 1, 2, \ldots$. Por ejemplo, si $x = 0$, entonces $n = k$, o si $x = 1$, $n = k + 1$, etc, que es equivalente a lo descrito en el párrafo anterior. Reemplazando $n = x + k$ en la expresión anterior, se obtiene la **ley Binomial Negativa**:

$$P(X = x) = \binom{x + k - 1}{k - 1} p^k q^x,$$

válido para $x \in \{0, 1, 2 \ldots\}$ fracasos (componente variable) y $k \in \{1, 2, \ldots\}$ éxitos (fijos).

Y se vuelve a reiterar que $x + k$ es el número de experimentos de Bernoullí que se realizan para obtener los k éxitos (fijos).

Con base en las definiciones de momentos estadísticos, el valor esperado y la varianza de la variable aleatoria discreta Binomial Negativa, están dados por:

Teorema 2 – Media y Varianza Distribución Binomial Negativa

La media y la varianza de la distribución binomial negativa de parámetros k y p son

$$\mu = \frac{kq}{p} \quad \text{y} \quad \sigma^2 = \frac{kq}{p^2}.$$

Ejemplo 2. Una persona realiza el lanzamiento de una moneda y registra el lanzamiento. Encuentre la probabilidad de obtener la tercera cara en el séptimo lanzamiento;

Solución. La variable X representa el número de fracasos antes de obtener k éxitos. Luego, $k = 3$, $x = 4$, $n = 7$ y $p = 0.5$, después,

$$\begin{aligned} P(X = 4) &= \binom{4 + 3 - 1}{3 - 1} \cdot (0.5)^3 \cdot (0.5)^4 \\ &= \binom{6}{2} \cdot (0.5)^7 \\ &= 0.1172 \end{aligned}$$

□

Una situación interesante que surge de este modelo en la gestión y análisis de algunos proyectos es cuando se tiene un solo éxito, es decir, $k = 1$, obteniendo lo que se llama el **modelo geométrico** de probabilidades, que se describe a continuación.

1.4. Ley Geométrica

Este modelo se basa en repetir un experimento de Bernoulli mientras el resultado sea fracaso, hasta que ocurre un éxito. Gráficamente se tiene:

$$F \;\; F \;\; F \;\; F \;\; F \;\; F \cdots\cdots F \;\; F \;\; F \;\; E$$

Luego, si se realizan m experimentos de Bernoulli, significa que se dieron $m-1$ fracasos y 1 éxito (al final y es cuando termina el proceso). Esto es equivalente a tomar el modelo Binomial Negativo con $k=1$ (un éxito fijo), y $x=m-1$ fracasos.

Siendo X la variable aleatoria discreta que sigue una distribución Geométrica que representa el número de fracasos de eventos de Bernoulli realizados hasta obtener un éxito ($k=1$), se plantea calcular la probabilidad $P(X=x)$ para $x=0,1,2,3,\ldots$.

Se realizan $x+1$ experimentos de Bernoulli, de los cuales los primeros x tiene como resultado FRACASO, y el último es ÉXITO, entonces:

$$\begin{aligned}
P(X=x) &= P(F\cap F\cap F\cap F\cap F\cap F\cap\ldots\cap F\cap F\cap F\cap E)\\
&= P(F)P(F)P(F)P(F)P(F)P(F)\ldots P(F)P(F)P(F)P(E)\\
&= q\cdot q\cdot q\cdot q\cdot q\cdot q\cdot\ldots\cdot q\cdot q\cdot q\cdot p\\
&= q^x p.
\end{aligned}$$

Así, la **Ley Geométrica** de parámetro p está dada por $P(X=x)=q^x p$ para $x\in\{0,1,2,\ldots\}$

Se obtiene la misma expresión algebraica, al reemplazar $k=1$ en el modelo de la ley Binomial Negativa.

Veamos los parámetros de media y varianza de la v.a.d. X, a partir de la tabla de distribución de probabilidades geométrica:

X	0	1	2	3	4	5	$\ldots$
P	q^0p	q^1p	q^2p	q^3p	q^4p	q^5p	$\ldots$

La esperanza es:

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=1}^{\infty} kq^k p\\
&= p(q+2q^2+3q^3+\ldots)\\
&= pq(1+2q+3q^2+\ldots),
\end{aligned}$$

pero, $1+2q+3q^2+\ldots$ es la derivada de $q+q^2+q^3+\ldots=\frac{q}{1-q}$.

Derivando y reemplazando se tiene: $E(X)=pq\frac{1}{(1-q)^2}=\frac{pq}{p^2}=\frac{q}{p}$.

La varianza es:

$$\begin{aligned}
V(X) &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(k-\frac{q}{p}\right)^2 q^k p\\
&= E(X^2)-E^2(X)\\
&= E(X^2)-\left(\frac{q}{p}\right)^2\\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k^2q^kp-\frac{q^2}{p^2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= p(q + 4q^2 + 9q^3 + \dots) - \frac{q^2}{p^2} \\
&= pq\frac{1+q}{(1-q)^3} - \frac{q^2}{p^2} \\
&= q\frac{1+q}{p^2} - \frac{q^2}{p^2} \\
&= \frac{q}{p^2}.
\end{aligned}
$$

En resumen,

Teorema 3 – Media y Varianza Distribución Geométrica

La media y la varianza de la distribución geométrica de parámetro p son

$$\mu = \frac{q}{p} \quad \text{y} \quad \sigma^2 = \frac{q}{p^2}.$$

Ejemplo 3. Continuando con el ejemplo anterior del lanzamiento de un moneda, encuentre la probabilidad de obtener la primera cara en el cuarto lanzamiento;

Solución. Si x representa el número de fracasos de eventos de Bernoulli realizados hasta obtener un éxito ($k = 1$). Luego, se tiene que $k = 1$, $m = 4$, $x = m - 1 = 3$, $p = 0.5$ y $q = 1 - p$, por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
P(X = 3) &= (0.5) \cdot (0.5)^3 \\
&= \frac{1}{16}.
\end{aligned}
$$

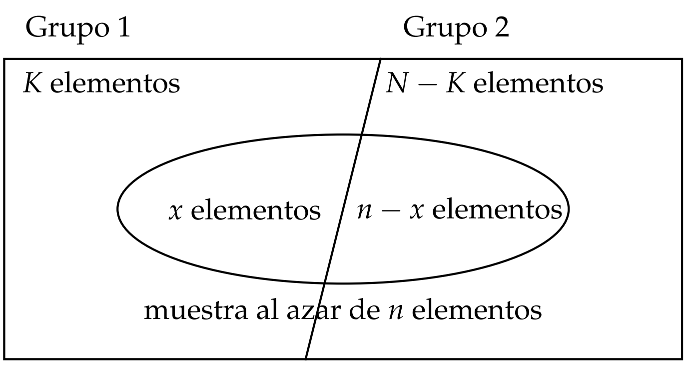
□

1.5. Ley Hipergeométrica

Esta ley se basa en el esquema siguiente: se tiene una población N de elementos, la cual está caracterizada o definida por dos grupos o clases (G_1 y G_2), y digamos que K elementos pertenecen al grupo G_1 y $N - K$ elementos pertenecen al grupo G_2.

De esta población, se toma al azar una muestra sin reposición de n elementos ($n \leqslant N$), y se plantea calcular la probabilidad de que esta muestra esté formada por x elementos que pertenecen al grupo G_1, y $n - x$ elementos al grupo G_2.

Gráficamente, el esquema es:



A este esquema, se le llama el **modelo Hipergeométrico** de probabilidades.

Siendo X, la variable aleatoria discreta que representa el número de elementos x que pertenecen al grupo 1, la **probabilidad de que hayan x elementos de la muestra n, y que pertenecen al grupo 1** está dada por:

$$P(X = x) = \frac{\binom{K}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

Siendo $p = \frac{K}{N}$ la proporción de elementos del Grupo 1, el valor esperado y la varianza de la variable aleatoria discreta Hipergeométrica X, están dados por:

Teorema 4 – Media y Varianza Distribución Hipergeométrica

La media y la varianza de la distribución hipergeométrica de parámetros N, K y n son

$$\mu = n\frac{K}{N} = np \quad \text{y} \quad \sigma^2 = np(1-p)\frac{N-n}{N-1}$$

Ejemplo 4. Se tiene un grupo 20 personas, compuesto por 10 hombres y 10 mujeres. Se toma al azar un grupo de 2 personas. ¿Cuál será la probabilidad de que el grupo tomado al azar esté compuesto por 1 hombre y 1 mujer?

Solución. Este problema se ajusta al esquema Hipergeométrico de probabilidades, teniendo el grupo de 10 hombres (digamos G_1), y el grupo de 10 mujeres (G_2). De estas 20 personas, se toma al azar un grupo de $n = 2$ personas.

De acuerdo a la notación utilizada, tenemos:

- ✔ $N = 20$ (población total)
- ✔ $K = 10$, $(N - K = 10)$
- ✔ $n = 2$ (muestra al azar)
- ✔ $x = 1$ $(n - x = 1)$

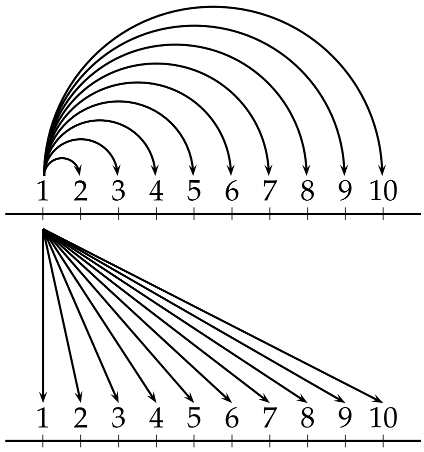
Utilizando la ley Hipergeométrica de probabilidades, y siendo A el evento al que hacemos referencia, tenemos:

$$P(A) = \frac{\dfrac{10!}{1!(10-1)!}\,\dfrac{(20-10)!}{(2-1)!(20-10-2+1)!}}{\dfrac{20!}{2!(20-2)!}} = \frac{10\cdot 10}{190} \approx 0.526\,315\,8$$

Así, existe casi un 53 % de opciones que ocurra el evento planteado.

Vamos a resolver este mismo ejercicio, con base en la definición básica de probabilidades

Para esto debemos definir el espacio muestral (conjunto de posibles resultados), y de este conjunto, contamos cuantos elementos cumplen la condición (grupos de 2 personas, compuestos por un hombre y una mujer). Veamos el siguiente gráfico para ayudarnos a establecer el espacio muestral:



El espacio muestral esta formado por todas las combinaciones posibles de dos personas que pueden darse de entre las 20 totales.

Así, del gráfico podemos ver, por ejemplo, que el primer hombre puede combinarse o hacer grupos de dos, con cada una de las 10 mujeres, y con cada uno de los nueve hombres restantes.

Luego, posibles grupos de 2 personas formados por un hombre y una mujer, son 100, ya que son las combinaciones de cada uno de los 10 hombres con cada una de las 10 mujeres ($10 \cdot 10$).

Pero también, por ser tomados al azar, pueden formarse grupos de dos hombres o dos mujeres. Y, podemos ver que el primer hombre se puede agrupar con los otros nueve hombres, teniendo así 9 grupos; luego el segundo hombre se puede combinar con los 8 hombres restantes, teniendo 8 grupos posibles más, y así sucesivamente, hasta llegar al penúltimo que forma un grupo más con el último.

Tenemos que los grupos posibles de 2 hombres son: $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45$. Y como se tiene igual número de mujeres, se tiene también 45 posibles grupos de 2 mujeres.

Luego, el espacio muestral está formado por un conjunto de 190 elementos (grupos posibles de 2 personas), de los cuales, 100 están compuestos por 1 hombre y una mujer, 45 están formados por 2 hombres, y 45 están formados por 2 mujeres.

Por definición de probabilidad, tenemos que 100 elementos (de los 190 posibles), cumplen la condición (grupos de 2 personas formado por un hombre y una mujer).

Por lo tanto $P(A) = \frac{100}{190} = 0.526\,315\,8$, que es el mismo resultado que se obtuvo con la ley Hipergeométrica.

Sin embargo, este ejercicio resulta fácil de resolver por la definición básica de probabilidad debido solamente a que se toma un grupo de dos personas. Para el caso en que se tomara, por ejemplo, 7 personas al azar, de las cuales 3 sean hombres, y 4 mujeres, resulta difícil resolver con la definición básica de probabilidad, pero en cambio es muy fácil hacerlo con la ley Hipergeométrica que modela tal situación.

Utilizando la ley Hipergeométrica de probabilidades en el caso de tomar al azar una muestra de

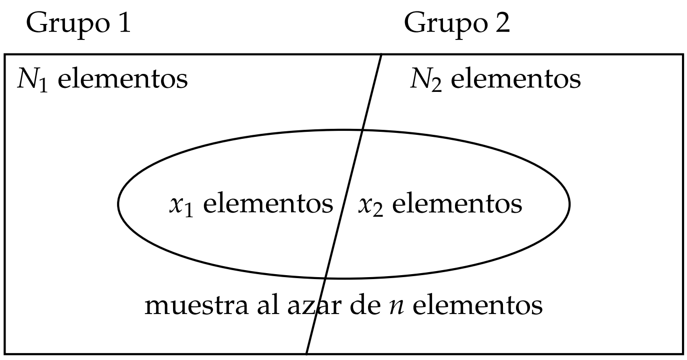
7 personas, la probabilidad de que el grupo esté formado por 3 hombres y 4 mujeres, está dada por:

$$P(A) = \frac{\dfrac{10!}{3!(10-3)!}\,\dfrac{(20-10)!}{(7-3)!(20-10-7+3)!}}{\dfrac{20!}{7!(20-7)!}} = \frac{120 \cdot 210}{77520} \approx 0.325. \qquad \square$$

Nota complementaria

De una forma similar a como se generalizó la Ley Binomial para obtener la Ley Multinomial, también se puede generalizar la Ley Hipergeométrica para más de dos grupos. Recordemos:

La Ley Hipergeométrica se basa en el esquema siguiente:

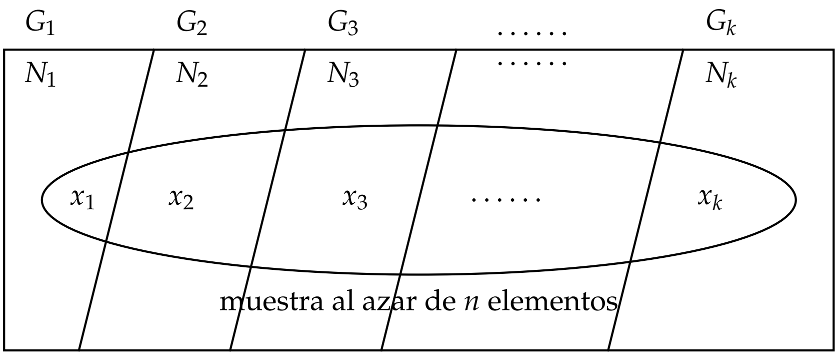


Cambiando la notación, digamos que el Grupo 1 tiene N_1 elementos, y el Grupo 2 tiene N_2 elementos (con $N_1 + N_2 = N$). Se selecciona al azar una muestra (sin reposición) de n elementos, entonces la probabilidad de que esta muestra esté compuesta por x_1 elementos que pertenecen al Grupo 1 y, x_2 elementos al Grupo 2, (con $x_1 + x_2 = n$), está dada por:

$$P(X = x_1) = \frac{\binom{N_1}{x_1}\binom{N_2}{x_2}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{N_1}{x_1}\binom{N-N_1}{n-x_1}}{\binom{N}{n}}$$

Ahora planteamos lo siguiente: se tiene una población N de elementos, la cual está caracterizada o definida por k grupos o clases $(G_1, G_2, \ldots, G_k)$, y digamos que N_1 elementos pertenecen al grupo G_1, N_2 elementos al grupo $G_2, \ldots$, y N_k elementos pertenecen al grupo G_k (con $N_1 + N_2 + \ldots + N_k = N$)

De esta población, se toma al azar una muestra sin reposición de n elementos ($n \leqslant N$), y se plantea calcular la probabilidad de que esta muestra esté formada por x_1 elementos que pertenezcan al grupo G_1, x_2 elementos al grupo $G_2, \ldots$, y x_k elementos al grupo G_k (con $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$; y $x_i \leqslant N_i$ para todo $i = 1, 2, \ldots, k$). Gráficamente se tiene:



Así, esta probabilidad está dada por la Ley Hipergeométrica generalizada siguiente:

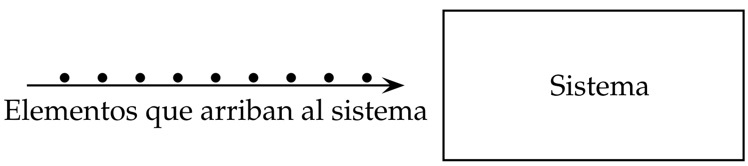
$$P(n, x_1, x_2, \ldots x_k) = \frac{\binom{N_1}{x_1}\binom{N_2}{x_2}\cdots\binom{N_k}{x_k}}{\binom{N}{n}}.$$

1.6. Ley de Poisson

Existen eventos o esquemas en los cuales se tiene arribos o llegadas de elementos a un sistema, por ejemplo:

- personas que llegan a un banco para ser atendidos,
- personas que llegan o arriban a un centro comercial,
- carros que llegan a una cierta esquina,
- aviones que arriban a un aeropuerto,
- llamadas telefónicas que arriban a una central, etc.

Esquemáticamente tenemos lo siguiente:



Se pueden modelar algunas de estas situaciones, digamos raras, en el sentido que muchas de ellas no tienen control sobre la forma como arriban los elementos, como es el caso de los carros que llegan a una determinada esquina.

Así, surge lo que se llama el proceso de Poisson, el cual consiste en lo siguiente:

- Los elementos que arriban al sistema son independientes entre sí.
- Los elementos arriban o llegan al sistema en forma aleatoria, y
- Los tiempos entre arribos de los elementos son también aleatorios.

Luego, un esquema o sistema que cumpla con estas tres condiciones a la vez, se llama proceso físico de Poisson[2].

Por ejemplo, la llegada de aviones a un aeropuerto: el aeropuerto viene a ser el sistema; los aviones son los elementos que arriban al sistema. Muchos elementos pueden ser independientes entre sí (si son de compañías aéreas diferentes), sin embargo, los aviones no llegan en forma aleatoria, debido a que tienen horarios establecidos, y por lo tanto, este esquema o sistema, no es un proceso de Poisson.

Analicemos ahora el caso de los carros que llegan a una determinada esquina de la cuidad. La esquina con los semáforos es el sistema, y los carros son los elementos que arriban al sistema (la esquina o la intersección de calles), donde son "atendidos" y continúan. Los carros, en general, llegan o pasan por el lugar en forma aleatoria, son independientes entre sí, y también, en general, los tiempos entre arribos podemos decir que son aleatorios, y por lo tanto, puede establecerse que este es un proceso de Poisson. Pero como se modela una situación como ésta, ya que los elementos pueden estar arribando al sistema todo el tiempo, es decir, de manera permanente.

Para modelar este proceso, se establece un cierto intervalo de tiempo para el análisis, por ejemplo, un minuto, o una hora, etc., y se plantea ¿cuál será la probabilidad de que al sistema arriben x elementos (en el intervalo de tiempo acordado para el análisis)?

Siendo X, la variable aleatoria discreta que representa el número de elementos x que arriban al sistema durante el intervalo de tiempo establecido, se define la **Ley de probabilidades de Poisson** de parámetro λ por:

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!};$$

donde

- ✔ λ se denomina el parámetro de Poisson, y representa al número promedio de elementos que arriban al sistema durante el intervalo de tiempo establecido.
- ✔ e es aproximadamente el número 2.7182 (base de los logaritmos naturales)

Los valores que puede tomar esta variable aleatoria teóricamente van desde cero hasta el infinito, es decir, $x \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Una de las cosas interesantes que podemos notar en estos procesos de Poisson es que los elementos pueden forman colas si el tiempo de atención en el sistema tarda, como es el caso típico al ir a un Banco, a un centro comercial, una llamada en espera, el tráfico vehicular, etc. Así, con este modelo, puede estudiarse lo que suele denominarse "teoría de cola".

Teorema 5 – Media y Varianza Distribución de Poisson

El valor esperado y la varianza de la variable aleatoria discreta de Poisson de parámetro λ son:

$$\mu = \lambda \quad \text{y} \quad \sigma^2 = \lambda.$$

[2] Suele decirse que esta ley sirve para modelar eventos raros.

Ejemplo 5. Supongamos que por una determinada esquina de la ciudad, pasan en promedio 7 carros cada dos minutos. ¿Cuál será la probabilidad de que no pase ningún carro?, ¿cuál será la probabilidad de que pasen 5 carros?, y ¿cuál será la probabilidad de que pasen 20 carros?

Solución. Asumiendo que se cumplen las condiciones de un proceso de Poisson, tenemos que el intervalo de análisis es dos minutos, y el parámetro de Poisson es $\lambda = 7$ (siete carros pasan en promedio cada 2 minutos).

Luego, tenemos:

- ✔ Probabilidad que no pase ningún carro: $P(X = 0) = \frac{7^0 e^{-7}}{0!} \approx 0.000\,912$.
- ✔ Probabilidad que pasen 5 carros: $P(X = 5) = \frac{7^5 e^{-5}}{5!} \approx 0.127\,717$.
- ✔ Probabilidad que pasen 20 carros: $P(X = 20) = \frac{7^{20} e^{-20}}{20!} \approx 0.000\,030$. $\square$

2. Distribuciones Continuas

Leyes de probabilidad para variables continuas

2.1. Ley Uniforme

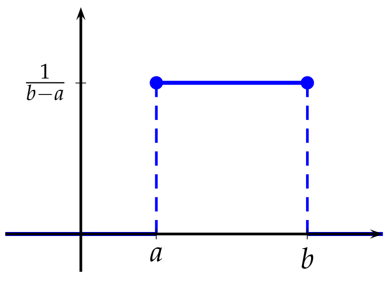
Se dijo que la distribución de Bernoulli, era el esquema más simple de las leyes discretas. De manera similar puede decirse que la ley uniforme de probabilidad es la más sencilla de las distribuciones de variables aleatorias continuas.

Esta ley se caracteriza por ser constante en el intervalo $[a, b]$ donde está definida, y suele llamarse también ley o distribución rectangular.

Se denomina **Ley Uniforme de Probabilidades** a la función de densidad cuya imagen esta dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } a \leqslant x \leqslant b, \\ 0 & \text{si } x \notin [a, b] \end{cases}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.



Teorema 1 – Valor esperado y Varianza

El valor esperado y la varianza de una variable aleatoria uniforme X de parámetros a y b están dados por:

$$E(X) = \frac{(a+b)}{2} \quad \text{y} \quad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Esta ley sirve para modelar, entre otros, el comportamiento de errores de redondeo. Sin embargo, lo más notable es que de esta ley surgen los “números aleatorios” que se los suelen notar con la letra **r**.

Así, un número aleatorio **r**, es una variable aleatoria continua, cuya ley de probabilidad, es la ley uniforme de probabilidades definida en el intervalo $[0, 1]$.

Los números aleatorios tienen una gran cantidad de aplicaciones, sirviendo como base para la generación de otras variables aleatorias, o para la selección de muestras, entre otras cosas.[1]

Ejemplo 6. Un autobús llega cada 10 minutos a una parada. Se supone que el tiempo de espera para un individuo en particular es una variable aleatoria con distribución continua uniforme.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que el individuo espere más de 7 minutos?
2. ¿Cuál es la probabilidad de que el individuo espere entre 2 y 7 minutos?

Solución. La variable X representa el tiempo de espera y sigue una ley de distribución uniforme cuya imagen de la función de densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{10} & \text{si } 0 \leq x \leq 10, \\ 0 & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Literal 1.

$$P(X > 7) = \int_7^{10} \frac{1}{10}\, dx = \frac{10-7}{10} = \frac{3}{10} = 0.3$$

Literal 2.

$$P(2 < X < 7) = \int_2^{7} \frac{1}{10}\, dx = \frac{7-2}{10} = \frac{5}{10} = 0.5$$

□

2.2. Ley Gamma

Las distribuciones exponencial y gamma tienen aplicaciones en la teoría de colas y en problemas de confiabilidad. Además, la distribución exponencial es un caso particular de la distribución gamma y esta se define en base a la función gamma que es usada en muchos campos de la matemática. A continuación, definimos la función y una propiedad importante de dicha función.

Función Gamma

Definición 1 – Función Gamma

La función gamma es $\Gamma\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx$$

para todo $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

[1] Los números aleatorios tienen muchas aplicaciones, tales como para generar otras variables aleatorias, o para aplicaciones en teoría de muestreo.

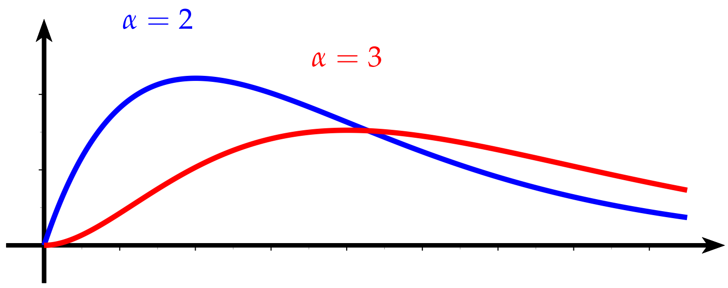
Teorema 2 – Función Gamma

1. Para todo $\alpha > 0$,
$$\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1).$$
2. Si $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geqslant 1$, entonces
$$\Gamma(n) = (n-1)!.$$

Ahora, se denomina **Ley Gamma** de probabilidades de parámetros α y β a la función de densidad cuya imagen está dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right) & \text{si } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. La gráfica para 2 valores de α diferentes se muestra a continuación:



Teorema 3 – Valor esperado y Varianza

El valor esperado y la varianza de la variable aleatoria X que sigue una distribución gamma con parámetros α y β están dados por:

$$E(X) = \alpha\beta \quad \text{y} \quad V(X) = \alpha\beta^2.$$

El parámetro β representa el tiempo promedio entre eventos y α es el número de eventos que ocurren.

Ejemplo 7. Sea X una variable aleatoria que sigue una distribución gamma de parámetros $\alpha = 4$ y $\beta = 10$. Determine la probabilidad de que la variable aleatoria sea mayor 5.

Solución. Dado que $\alpha = 4$, tenemos que

$$\Gamma(4) = (4-1)! = 3! = 6.$$

Luego,

$$\begin{aligned} P(X > 5) &= 1 - P(X \leqslant 5) \\ &= 1 - \int_0^5 \frac{1}{10^4 \cdot 6} x^{4-1} \exp\left(-\frac{x}{10}\right)\, dx \\ &\approx 0.9982. \end{aligned}$$

□

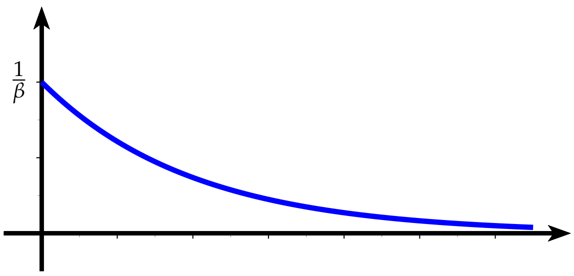
La ley exponencial es un caso particular de la función gamma cuando $\alpha = 1$. En la siguiente sección mostramos esta distribución.

2.3. Ley Exponencial

Se conoce como ley exponencial de probabilidades de parámetro β, a la función de densidad cuya imagen esta dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right) & \text{si } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. La gráfica se muestra a continuación:



Este modelo es útil en aplicaciones de control de calidad relacionadas a analizar tiempos de falla de algunos dispositivos electrónicos.

Permite también modelar satisfactoriamente el tiempo entre arribos de dos elementos en los procesos de Poisson. Estos elementos pueden ser vistos como fallas que arriban al sistema y, esta ley exponencial de probabilidades modela el tiempo que transcurre entre estas fallas. Para estos casos el parámetro θ es exactamente el parámetro λ de la distribución de Poisson.

Teorema 4 – Valor esperado y varianza

Si X es una variable aleatoria exponencial de parámetro β, el valor esperado y la varianza están dados por:

$$E(X) = \beta \quad \text{y} \quad V(X) = \beta^2.$$

El parámetro β de la ley exponencial representa el tiempo promedio entre dos eventos consecutivos, mientras que el parámetro $\dfrac{1}{\beta}$, representa la frecuencia de eventos.

Algunos autores acostumbran definir este modelo de la siguiente forma:

$$f(x) = \begin{cases} \theta \exp(-\theta x) & \text{si } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

En ese caso, tenemos que:

$$E(X) = \frac{1}{\theta} \quad \text{y} \quad V(X) = \frac{1}{\theta^2}$$

donde $\frac{1}{\theta}$ representaría ahora el tiempo promedio entre fallas.

Ejemplo 8. El tiempo de vida de un transistor sigue una distribución exponencial con tiempo medio de vida de 12 años. Determine

a) la probabilidad de que el tiempo de vida de un transistor sea mayor a 20 años.

b) la probabilidad de un transistor dure 3 años más dado que ya ha durado 12 años.

c) la probabilidad de que al menos 7 de 10 transistores de similares características duren menos de 7 años.

Solución. El tiempo de vida de un transistor es una variable aleatoria T que sigue una distribución exponencial con $\beta = 12$, luego,

a)

$$\begin{aligned} P(T > 20) &= 1 - P(T \leqslant 20) \\ &= 1 - \int_0^{20} \frac{1}{12} e^{-\frac{x}{12}}\, dx \\ &= e^{-\frac{20}{12}} \\ &= e^{-\frac{5}{3}} \\ &\approx 0.1889. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} P(T > 12 + 3 | T > 12) &= \frac{P(T > 15 \text{ y } T > 12)}{P(T > 12)} \\ &= \frac{P(T > 15)}{P(T > 12)} \\ &= \frac{1 - P(T \leqslant 15)}{1 - P(T \leqslant 12)} \\ &= \frac{1 - \int_0^{15} \frac{1}{12} e^{-\frac{x}{12}}\, dx}{1 - \int_0^{12} \frac{1}{12} e^{-\frac{x}{12}}\, dx} \\ &= \frac{e^{-\frac{5}{4}}}{e^{-1}} \\ &= e^{-\frac{1}{4}}. \end{aligned}$$

Una de las propiedades de la distribución exponencial es la falta de memoria, es decir, la probabilidad de que un elemento dure un tiempo t más dado que ha durado ya un tiempo t_0 es igual a la probabilidad de que dure únicamente el tiempo t, en este caso, la probabilidad se puede calcular así

$$\begin{aligned} P(T > 3) &= 1 - P(T \leqslant 3) \\ &= 1 - \int_0^{3} \frac{1}{12} e^{-\frac{1}{12}} \\ &= e^{-\frac{1}{4}}, \end{aligned}$$

que es lo que obtuvimos anteriormente.

c) Primero determinemos la probabilidad de que el tiempo de vida de un transistor es menor que 7, es decir,

$$\begin{aligned} P(T < 7) &= \int_0^7 \frac{1}{12} e^{-\frac{x}{12}}\, dx \\ &= 1 - e^{-\frac{7}{12}} \\ &\approx 0.4420. \end{aligned}$$

Si Y representa el número de transistores de entre 10 que duran menos de 7 años. Luego, Y sigue una distribución binomial con $n = 10$ y $p =$, en consecuencia,

$$\begin{aligned} P(Y \geqslant 7) &= \sum_{k=7}^{10} \binom{10}{k} (0.442)^k (1 - 0.442)^{10-k} \\ &\approx 0.0930. \end{aligned}$$ □

2.4. Ley Normal de probabilidades

De todas las leyes de probabilidad, la ley normal de probabilidades (conocida también como ley de Gauss o campana de Gauss), es una de las más importantes. Se afirma esto debido a la enorme cantidad de aplicaciones que surgen de esta ley y las relaciones que se pueden establecer con muchos otros modelos de probabilidad.

Se define como Ley Normal de Probabilidades a la función de densidad cuya imagen esta dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{(x-u)^2}{2\sigma^2}\right)$$

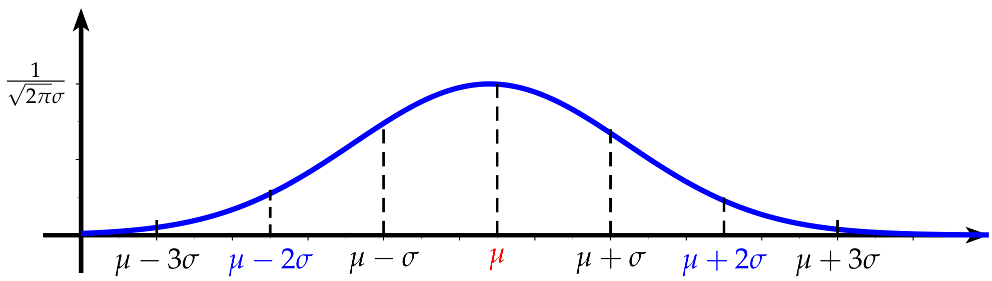
para todo $x \in \mathbb{R}$.

Teorema 5 – Valor esperado y varianza

La media y varianza de una variable aleatoria X que sigue una distribución normal de parámetros μ y σ^2 están dadas por

$$E(X) = \mu \quad \text{y} \quad V(X) = \sigma^2.$$

Gráficamente, esta ley tiene la forma de una campana:



En una distribución normal, al recorrer una desviación estándar hacia la izquierda y derecha del promedio (esperanza matemática), se tiene aproximadamente el 68 % de la población ($\mu \pm \sigma$). Entre dos desviaciones estándar queda el 95 % de toda la información ($\mu \pm 2\sigma$), mientras que entre tres desviaciones estándar aproximadamente se tiene el 99 % de toda la población ($\mu \pm 3\sigma$). Con las tablas de cuantiles, se determinarán los valores exactos.

Recordando la definición de variable estandarizada (Z), y teniendo X, una variable aleatoria normal, donde μ es la media, y σ^2 es la varianza. La variable estandarizada Z se determina mediante la siguiente ecuación:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

y tiene como ley de probabilidad la llamada ley normal estandarizada o tipificada, con media 0 y varianza 1, cuya imagen de la función de densidad está dada por:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right).$$

para todo $z \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 9. El número de mensajes que una persona envía una persona por Whatsapp sigue una distribución normal con media 1 200 y desviación estándar 450. Determine la probabilidad de que una persona envié menos de 800 mensajes en un día.

Solución. Si X representa el número de mensajes que envía una persona en un día determinado entonces X sigue una distribución normal con parámetros $\mu = 1\,200$ y $\sigma^2 = 202\,500$. Luego,

$$\begin{aligned} P(X < 800) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 450} \int_{-\infty}^{800} \exp\left(-\frac{(x-1200)^2}{2 \cdot 202\,500}\right) \\ &\approx 0.1870. \end{aligned}$$

Para la obtención de este resultado se ha utilizado una calculadora en línea; lo que normalmente no es posible en otras circunstancias. Por esta razón es preferible obtener el resultado de la siguiente manera:

Si $Z = \frac{X-1200}{450}$, entonces Z sigue una distribución normal con parámetros $\mu = 0$ y $\sigma^2 = 1$, luego

$$\begin{aligned} P(X < 800) &= P\left(Z < \frac{800 - 1200}{450}\right) \\ &\approx P(Z < 0.8889) \\ &\approx 0.1870. \end{aligned}$$

Este resultado es exactamente similar pero se obtiene directo de las tablas de la distribución normal estándar. □

Nota 1

Todos los paquetes estadísticos, tienen implementados algoritmos para realizar cálculo de probabilidades para muchas leyes de probabilidad, inclusive la hoja electrónica "Excel", tiene comandos para calcular probabilidades de varias leyes de probabilidad. Puede encontrar aquí una plantilla para realizar estos cálculos.