UTEC Posgrado

UTEC Posgrado

UTEC Posgrado

Una escuela para
Early Adopters

MACHINE LEARNING

PRÁCTICA BASE: PCA

Análisis de Componentes Principales

Datos del Alumno

Nombres: ______________________________

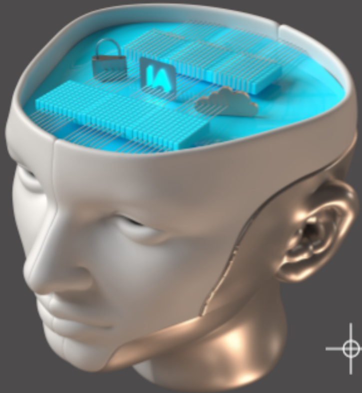
Apellidos: ______________________________

Código: ______________________________

Fecha: ______________________________

Algoritmo PCA

Procedimiento general **para reducir dimensionalidad**



Algoritmo de PCA - Resumen

Objetivo: Reducir la dimensionalidad de un conjunto de datos de D dimensiones a M dimensiones ($M < D$), preservando la máxima varianza.

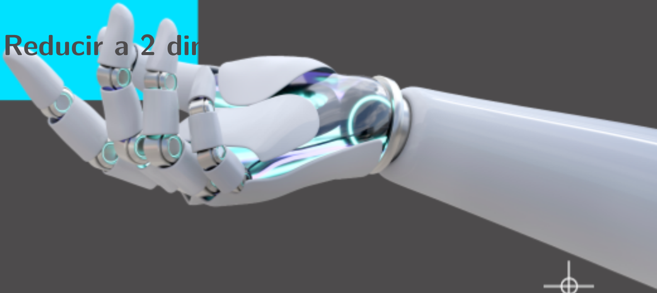
Pasos del algoritmo:

1. **Calcular la media** de cada variable del dataset
2. **Centrar los datos** restando la media
3. **Calcular la matriz de covarianza**
4. **Calcular eigenvalores y eigenvectores** de la matriz de covarianza
5. **Ordenar eigenvalores** de mayor a menor
6. **Seleccionar los M eigenvectores** con mayores eigenvalores
7. **Proyectar los datos** en el nuevo espacio M-dimensional

Referencia: Bishop, C.M. (2006). *Pattern Recognition and Machine Learning*, Cap. 12. Springer.

Ejercicio 1

Dataset: 10 registros, 3 dimensiones **Reducir a 2 di**

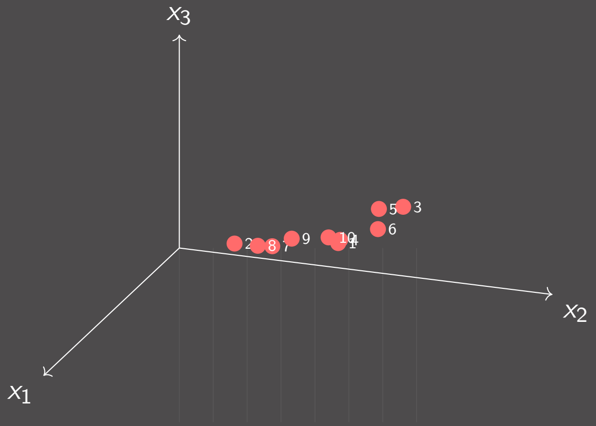


Ejercicio 1: Dataset original

Tenemos 10 observaciones en 3 dimensiones ($D = 3$). Objetivo: reducir a $M = 2$.

ID	x_1	x_2	x_3
1	2.5	2.4	1.2
2	0.5	0.7	0.3
3	2.2	2.9	1.5
4	1.9	2.2	1.0
5	3.1	3.0	1.8
6	2.3	2.7	1.3
7	2.0	1.6	0.9
8	1.0	1.1	0.5
9	1.5	1.6	0.8
10	1.1	1.8	0.7

Visualización 3D: Datos originales



Los 10 puntos en el espacio 3D original.

Paso 1: Calcular la media

Notación matricial:

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{x}_i$$

Notación escalar (por variable):

$$\bar{x}_j = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_{ij}, \quad j = 1, 2, 3$$

Cálculos:

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{10}(2{,}5 + 0{,}5 + 2{,}2 + 1{,}9 + 3{,}1 + 2{,}3 + 2{,}0 + 1{,}0 + 1{,}5 + 1{,}1) = \frac{18{,}1}{10} = 1{,}81$$

$$\bar{x}_2 = \frac{1}{10}(2{,}4 + 0{,}7 + 2{,}9 + 2{,}2 + 3{,}0 + 2{,}7 + 1{,}6 + 1{,}1 + 1{,}6 + 1{,}8) = \frac{20{,}0}{10} = 2{,}00$$

$$\bar{x}_3 = \frac{1}{10}(1{,}2 + 0{,}3 + 1{,}5 + 1{,}0 + 1{,}8 + 1{,}3 + 0{,}9 + 0{,}5 + 0{,}8 + 0{,}7) = \frac{10{,}0}{10} = 1{,}00$$

Paso 2a: Centrar los datos - Fórmulas

Notación matricial:

$$\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{X} - \bar{\mathbf{x}}\mathbf{1}^T$$

Notación escalar (elemento a elemento):

$$\tilde{x}_{ij} = x_{ij} - \bar{x}_j$$

Procedimiento:

- A cada valor original x_{ij} le restamos la media $\bar{x}_j$ de su variable
- Los datos centrados tienen media cero
- Esto facilita el cálculo de la covarianza

Paso 2b: Centrar los datos - Resultados

ID	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3$
1	0.69	0.40	0.20
2	-1.31	-1.30	-0.70
3	0.39	0.90	0.50
4	0.09	0.20	0.00
5	1.29	1.00	0.80
6	0.49	0.70	0.30
7	0.19	-0.40	-0.10
8	-0.81	-0.90	-0.50
9	-0.31	-0.40	-0.20
10	-0.71	-0.20	-0.30

Estos son los datos centrados que utilizaremos para calcular la matriz de covarianza.

Paso 3a: Cómo se calcula la covarianza

La **covarianza** entre dos variables x_j y x_k mide cómo varían juntas.

Fórmula:

$$\mathrm{Cov}(x_j, x_k) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_{ij} - \bar{x}_j)(x_{ik} - \bar{x}_k) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\tilde{x}_{ij}\tilde{x}_{ik}$$

Ejemplo: Cov(x_1, x_2):

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(x_1, x_2) &= \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}\tilde{x}_{i1}\tilde{x}_{i2} \\
&= \frac{1}{10}[(0{,}69)(0{,}40) + (-1{,}31)(-1{,}30) + (0{,}39)(0{,}90) + \cdots] \\
&= \frac{1}{10}[0{,}276 + 1{,}703 + 0{,}351 + 0{,}018 + 1{,}290 + 0{,}343 - 0{,}076 + 0{,}729 + 0{,}124 + \\
&= \frac{6{,}15}{10} = 0{,}615
\end{aligned}$$

Paso 3b: Cómo se calcula la matriz de covarianza

La **matriz de covarianza S** es una matriz $D \times D$ que contiene todas las covarianzas.

Notación matricial:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{N}\tilde{\mathbf{X}}^T\tilde{\mathbf{X}}$$

Notación escalar (elemento a elemento):

$$s_{jk} = \mathrm{Cov}(x_j, x_k) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\tilde{x}_{ij}\tilde{x}_{ik}$$

Resultado para nuestro ejemplo:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0{,}616 & 0{,}615 & 0{,}410 \\ 0{,}615 & 0{,}717 & 0{,}516 \\ 0{,}410 & 0{,}516 & 0{,}290 \end{pmatrix}$$

donde $s_{11} = \mathrm{Var}(x_1)$, $s_{12} = \mathrm{Cov}(x_1, x_2)$, etc.

Conceptos clave: Eigenvalores y Eigenvectores

£Qué son?
Un **eigenvector** (vector propio) de una matriz **S** es un vector **v** que al ser multiplicado por **S** solo cambia en magnitud, no en dirección:

$$\mathbf{S}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

El **eigenvalor** (valor propio) λ es el factor de escalamiento.
Interpretación geométrica:

- El eigenvector **v** indica una **dirección**
- El eigenvalor λ indica cuánta **varianza** hay en esa dirección
- En PCA, eigenvectores con mayor λ capturan más información

£Para qué sirven en PCA?

Utilidad de eigenvalores y eigenvectores:

- Los **eigenvectores** de la matriz de covarianza definen las **nuevas direcciones** (componentes principales)
- Estas direcciones son **ortogonales** entre sí (perpendiculares)
- Los **eigenvalores** indican cuánta varianza captura cada componente
- Ordenamos por eigenvalor decreciente para priorizar componentes importantes
- Podemos descartar componentes con eigenvalores pequeños sin perder mucha información

Ejemplo: Si $\lambda_1 = 1{,}530$ y $\lambda_2 = 0{,}085$, la primera componente es $\approx$18 veces más importante que la segunda.

Herramienta web para cálculos

Para verificar cálculos de eigenvalores y eigenvectores:

Calculadora online recomendada:

`https://www.symbolab.com/solver/matrix-eigenvalues-calculator`

Alternativas:

- WolframAlpha: `www.wolframalpha.com`
- Matrix Calculator: `matrixcalc.org/en/`

Nota: Ingrese la matriz de covarianza y la herramienta calculará automáticamente eigenvalores y eigenvectores normalizados.

Concepto: £Qué es el determinante?

El **determinante** de una matriz $\mathbf{A}$ es un número que resume propiedades importantes de la matriz.

Interpretación geométrica:

- Representa el **factor de escala** del volumen cuando se aplica la transformación lineal
- Si $\det(\mathbf{A}) = 0$, la matriz es **singular** (no invertible)
- Si $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, la matriz es **invertible**

£Para qué sirve en PCA?

- Necesitamos resolver $\det(\mathbf{S} - \lambda\mathbf{I}) = 0$
- Esta ecuación encuentra los valores λ que hacen singular a $(\mathbf{S} - \lambda\mathbf{I})$
- Esos valores son precisamente los eigenvalores

Ejemplo: Cálculo de determinante 2x2

£Cómo se calcula?

Para una matriz 2×2:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

Ejemplo numérico:

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = (3)(4) - (2)(1) = 12 - 2 = 10$$

Como $\det = 10 \neq 0$, la matriz es invertible.

Ejemplo: Cálculo de determinante 3x3

Para una matriz 3×3, usamos **expansión por cofactores** (primera fila):

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = a\det\begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix} - b\det\begin{pmatrix} d & f \\ g & i \end{pmatrix} + c\det\begin{pmatrix} d & e \\ g & h \end{pmatrix}$$

Ejemplo numérico:

$$\begin{aligned} \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} &= 2\det\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} - 1\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} + 3\det\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= 2[(4)(5) - (1)(2)] - 1[(0)(5) - (1)(1)] + 3[(0)(2) - (4)(1)] \\ &= 2[20 - 2] - 1[0 - 1] + 3[0 - 4] \\ &= 2(18) - 1(-1) + 3(-4) \\ &= 36 + 1 - 12 = 25 \end{aligned}$$

£Por qué un polinomio cúbico?

La **dimensión de la matriz** determina el grado del polinomio característico.

Regla general:

- Matriz $n \times n \Rightarrow$ polinomio de grado n
- Matriz $2 \times 2 \Rightarrow$ polinomio **cuadrático** (grado 2)
- Matriz $3 \times 3 \Rightarrow$ polinomio **cúbico** (grado 3)
- Matriz $4 \times 4 \Rightarrow$ polinomio **cuártico** (grado 4)

En nuestro caso:

- Tenemos matriz de covarianza $\mathbf{S}$ de 3×3 (3 variables)
- Por lo tanto, obtendremos un polinomio cúbico
- Este polinomio tendrá exactamente 3 raíces (los 3 eigenvalores)

Criterio del polinomio característico

£Por qué usamos este método?
El polinomio característico $\det(\mathbf{S} - \lambda\mathbf{I}) = 0$ es el método estándar porque:

Fundamento matemático:

- Si $\mathbf{Sv} = \lambda\mathbf{v}$, entonces $(\mathbf{S} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$
- Para que exista $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, la matriz $(\mathbf{S} - \lambda\mathbf{I})$ debe ser singular
- Una matriz es singular si y solo si su determinante es cero

Garantías:

- El polinomio de grado n tiene exactamente n raíces (contando multiplicidad)
- Por tanto, una matriz $n \times n$ tiene exactamente n eigenvalores

Paso 4a: Ecuación característica

Los **eigenvalores** λ de $\mathbf{S}$ se obtienen resolviendo la ecuación característica:

$$\det(\mathbf{S} - \lambda \mathbf{I}) = 0$$

donde $\mathbf{I}$ es la matriz identidad.

Paso a paso:

1. Restar λ de los elementos de la diagonal de $\mathbf{S}$
2. Calcular el determinante de la matriz resultante
3. Igualar a cero y resolver para λ

Paso 4b: Formando la matriz $\mathbf{S} - \lambda\mathbf{I}$

Para nuestra matriz de covarianza:

$$\mathbf{S} - \lambda\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0{,}616 & 0{,}615 & 0{,}410 \\ 0{,}615 & 0{,}717 & 0{,}516 \\ 0{,}410 & 0{,}516 & 0{,}290 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}616 - \lambda & 0{,}615 & 0{,}410 \\ 0{,}615 & 0{,}717 - \lambda & 0{,}516 \\ 0{,}410 & 0{,}516 & 0{,}290 - \lambda \end{pmatrix}$$

Paso 4c: Calcular el determinante

Para una matriz 3×3, el determinante se calcula como:

$$
\begin{aligned}
&\det(\mathbf{S} - \lambda \mathbf{I}) = \\
&(0{,}616 - \lambda)[(0{,}717 - \lambda)(0{,}290 - \lambda) - (0{,}516)(0{,}516)] \\
&- (0{,}615)[(0{,}615)(0{,}290 - \lambda) - (0{,}516)(0{,}410)] \\
&+ (0{,}410)[(0{,}615)(0{,}516) - (0{,}717 - \lambda)(0{,}410)]
\end{aligned}
$$

Expandiendo y simplificando, obtenemos un polinomio cúbico:

$$-\lambda^3 + 1{,}623\lambda^2 - 0{,}268\lambda + 0{,}010 = 0$$

Paso 4d: Resolver el polinomio

Resolver el polinomio cúbico:

$$-\lambda^3 + 1{,}623\lambda^2 - 0{,}268\lambda + 0{,}010 = 0$$

Usando métodos numéricos (Newton-Raphson, calculadora online, etc.):
Eigenvalores obtenidos:

$$\lambda_1 = 1{,}530 \quad \text{(mayor - 94.4 \% varianza)}$$
$$\lambda_2 = 0{,}085 \quad \text{(medio - 5.2 \% varianza)}$$
$$\lambda_3 = 0{,}008 \quad \text{(menor - 0.4 \% varianza)}$$

Verificación: $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1{,}623 = \text{traza}(\mathbf{S})$

Paso 5a: Sistema de ecuaciones para eigenvector

Para cada eigenvalor λ_i, el eigenvector $\mathbf{v}_i$ satisface:

$$(\mathbf{S} - \lambda_i \mathbf{I})\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

Para $\lambda_1 = 1{,}530$, formamos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 0{,}616 - 1{,}530 & 0{,}615 & 0{,}410 \\ 0{,}615 & 0{,}717 - 1{,}530 & 0{,}516 \\ 0{,}410 & 0{,}516 & 0{,}290 - 1{,}530 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -0{,}914 & 0{,}615 & 0{,}410 \\ 0{,}615 & -0{,}813 & 0{,}516 \\ 0{,}410 & 0{,}516 & -1{,}240 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Paso 5b: Expandir el sistema

El sistema de ecuaciones es:

$$
\begin{aligned}
-0{,}914 v_{11} + 0{,}615 v_{12} + 0{,}410 v_{13} &= 0 \quad \text{(ec. 1)} \\
0{,}615 v_{11} - 0{,}813 v_{12} + 0{,}516 v_{13} &= 0 \quad \text{(ec. 2)} \\
0{,}410 v_{11} + 0{,}516 v_{12} - 1{,}240 v_{13} &= 0 \quad \text{(ec. 3)}
\end{aligned}
$$

Este sistema tiene infinitas soluciones (cualquier múltiplo de $\mathbf{v}_1$).
Estrategia: Asignar $v_{13} = 1$ y resolver para v_{11} y v_{12}.

Paso 5c: Resolver el sistema

Asignando $v_{13} = 1$ y usando las dos primeras ecuaciones:

$$\begin{aligned} -0{,}914 v_{11} + 0{,}615 v_{12} &= -0{,}410 \\ 0{,}615 v_{11} - 0{,}813 v_{12} &= -0{,}516 \end{aligned}$$

Multiplicando ec. 1 por 0,615 y ec. 2 por 0,914:

$$\begin{aligned} -0{,}562 v_{11} + 0{,}378 v_{12} &= -0{,}252 \\ 0{,}562 v_{11} - 0{,}743 v_{12} &= -0{,}472 \end{aligned}$$

Sumando ambas: $-0{,}365 v_{12} = -0{,}724 \Rightarrow v_{12} = 1{,}253$
Sustituyendo: $v_{11} = 1{,}077$
Vector sin normalizar: $(1{,}077, 1{,}253, 1{,}000)^T$

Paso 5d: Normalizar el eigenvector

Para normalizar, dividimos por la norma:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_{11}^2 + v_{12}^2 + v_{13}^2}$$

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(1{,}077)^2 + (1{,}253)^2 + (1{,}000)^2} = \sqrt{1{,}160 + 1{,}570 + 1{,}000} = \sqrt{3{,}730} = 1{,}931$$

Eigenvector normalizado:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{1{,}931}\begin{pmatrix}1{,}077\\1{,}253\\1{,}000\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}558\\0{,}649\\0{,}518\end{pmatrix}$$

Verificación: $\|\mathbf{v}_1\| = \sqrt{0{,}558^2 + 0{,}649^2 + 0{,}518^2} = 1{,}000$

Paso 5e: Eigenvectores completos

Repitiendo el proceso para λ_2 y λ_3:

Eigenvectores normalizados:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}558 \\ 0{,}649 \\ 0{,}518 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -0{,}735 \\ 0{,}052 \\ 0{,}676 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0{,}384 \\ -0{,}759 \\ 0{,}525 \end{pmatrix}$$

Propiedades importantes:

- Todos tienen norma $= 1$
- Son ortogonales entre sí: $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$, $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 = 0$, $\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3 = 0$
- Forman una base ortonormal del espacio 3D

Paso 6: Varianza explicada

PC	Eigenvalor	Var. Explicada	Acumulada
PC1	1.530	94.4 %	94.4 %
PC2	0.085	5.2 %	99.6 %
PC3	0.008	0.4 %	100.0 %

Con 2 componentes retenemos **99.6 %** de la varianza!

Interpretación:

- PC1 captura la mayor parte de la variabilidad (94.4 %)
- PC2 captura solo 5.2 % adicional
- PC3 es casi despreciable (0.4 %)

Paso 7a: Proyección a 2D - Fórmulas

Notación matricial:

$$\mathbf{Z} = \tilde{\mathbf{X}}\mathbf{V}_{[1:2]}$$

donde $\mathbf{V}_{[1:2]} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$ es la matriz 3×2 de los primeros 2 eigenvectores.

Notación escalar (para cada punto):

$$z_{i1} = \tilde{x}_{i1}v_{11} + \tilde{x}_{i2}v_{12} + \tilde{x}_{i3}v_{13}$$
$$z_{i2} = \tilde{x}_{i1}v_{21} + \tilde{x}_{i2}v_{22} + \tilde{x}_{i3}v_{23}$$

Interpretación:

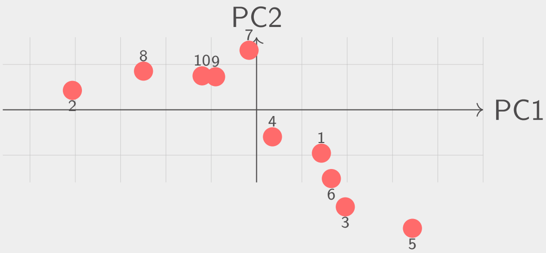
- Cada punto 3D se proyecta a 2D usando los eigenvectores como base
- z_{i1} es la coordenada en PC1, z_{i2} en PC2

Paso 7b: Proyección a 2D - Resultados

ID	PC1	PC2
1	0.795	-0.239
2	-2.258	0.107
3	1.088	-0.535
4	0.195	-0.149
5	1.911	-0.653
6	0.917	-0.379
7	-0.092	0.328
8	-1.386	0.213
9	-0.502	0.182
10	-0.668	0.187

Los 10 puntos originales de 3D ahora representados en 2D, reteniendo 99.6 % de la varianza

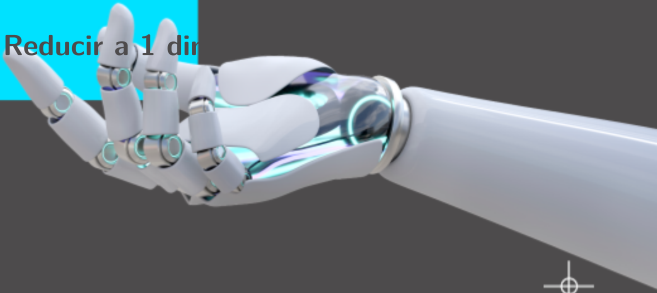
Visualización 2D: Datos proyectados



Datos originales de 3D ahora representados en 2D, reteniendo 99.6 % de la varianza.

Ejercicio 2

Dataset: 10 registros, 3 dimensiones **Reducir a 1 di**



Ejercicio 2: Dataset original

Tenemos 10 observaciones en 3 dimensiones ($D = 3$). Objetivo: reducir a $M = 1$.

ID	x_1	x_2	x_3
1	3.0	2.5	1.5
2	1.2	1.0	0.6
3	2.8	2.3	1.4
4	2.5	2.1	1.2
5	3.3	2.8	1.7
6	2.7	2.2	1.3
7	2.3	1.9	1.1
8	1.5	1.3	0.7
9	1.8	1.5	0.9
10	1.4	1.2	0.8

Paso 1: Calcular la media

Complete los cálculos:

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{10}(3{,}0 + 1{,}2 + \cdots) = \frac{\rule{3cm}{0.4pt}}{10} = \rule{3cm}{0.4pt}$$

$$\bar{x}_2 = \frac{1}{10}(\rule{6cm}{0.4pt}) = \frac{\rule{3cm}{0.4pt}}{10} = \rule{3cm}{0.4pt}$$

$$\bar{x}_3 = \frac{1}{10}(\rule{6cm}{0.4pt}) = \frac{\rule{3cm}{0.4pt}}{10} = \rule{3cm}{0.4pt}$$

Vector de medias: $\bar{\mathbf{x}} = (\rule{2cm}{0.4pt}, \rule{2cm}{0.4pt}, \rule{2cm}{0.4pt})^T$

Paso 2: Centrar los datos

Complete la tabla de datos centrados:

ID	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3$
1	______	______	______
2	______	______	______
3	______	______	______
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
10	______	______	______

Paso 3: Matriz de covarianza

Complete la matriz de covarianza:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \rule{2cm}{0.4pt} & \rule{2cm}{0.4pt} & \rule{2cm}{0.4pt} \\ \rule{2cm}{0.4pt} & \rule{2cm}{0.4pt} & \rule{2cm}{0.4pt} \\ \rule{2cm}{0.4pt} & \rule{2cm}{0.4pt} & \rule{2cm}{0.4pt} \end{pmatrix}$$

Paso 4: Eigenvalores y eigenvectores

Complete los eigenvalores:

$$\lambda_1 = \underline{\hspace{3cm}} \quad (\underline{\hspace{3cm}}\%)$$
$$\lambda_2 = \underline{\hspace{3cm}} \quad (\underline{\hspace{3cm}}\%)$$
$$\lambda_3 = \underline{\hspace{3cm}} \quad (\underline{\hspace{3cm}}\%)$$

Complete el primer eigenvector (dirección de máxima varianza):

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} \underline{\hspace{2.5cm}} \\ \underline{\hspace{2.5cm}} \\ \underline{\hspace{2.5cm}} \end{pmatrix}$$

Con 1 componente retenemos ____________ de la varianza total.

Paso 5: Proyección a 1D

Complete la tabla de proyecciones:

ID	PC1
1	________
2	________
3	________
4	________
5	________
6	________
7	________
8	________
9	________
10	________

Visualización 1D: Datos proyectados

Grafique aquí los 10 puntos proyectados
según sus cálculos del paso anterior

Conclusiones del Ejercicio 2

Complete sus conclusiones:

UTEC Posgrado

UTEC Posgrado