O introducere în structuri combinatorice

Combinatorică

Autor:Felix Florea

Scopul lucrării:
Lucrarea își propune să ofere o introducere în teoria drumurilor Dyck, să evidențieze legătura acestora cu numerele Catalan și să exploreze câteva probleme similare precum drumuri Schröder sau Motzkin, folosind o metodă de rezolvare unică.

1 Drumuri Dyck

Drumurile Dyck reprezintă o serie de rețele din planul punctelor laticeale. Acestea încep în punctul de coordonate (0,0) și se termină în ($2n$,0). Într-un drum Dyck putem avea pași de forma (x+1,y+1) sau (x+1,y-1), (x,y) reprezentând coordonatele punctului de plecare cel mai apropiat. Condiția fundamentală pe care o îndeplinesc aceste rețele este aceea de a nu avea pași sub axa Ox. Vom denumi pe parcursul acestei lucrări condiția anterioară condiție deficitară. În Fig.1 observăm un exemplu de rețea ce poate fi numită drum Dyck, spre deosebire de Fig.2 ce nu respectă condiția deficitară. Pentru cele două exemple am considerat n=6. În figuri se poate observa că numărul de pași (1,1) este egal cu numărul de pași (1,-1). Aceasta este o proprietate generală a drumurilor Dyck întrucât putem afirma că pentru un drum de lungime 2n vom avea n pași în sus și n pași în jos. Numărul drumurilor Dyck pentru un n fix este dat de numerele Catalan, având formula:

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}; \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!\,n!};$$

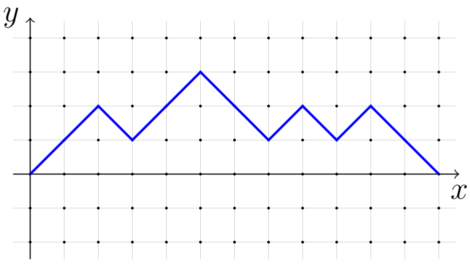


Fig. 1

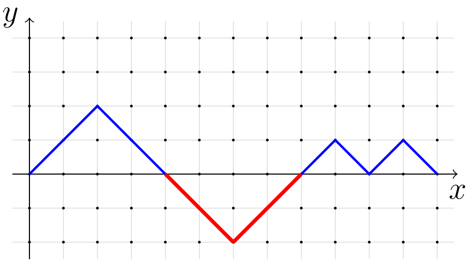


Fig. 2

În următoarele rânduri vom defini un concept fundamental pentru rezolvarea viitoarelor probleme. Introducem, așadar, conceptul de deficit al unui drum, acesta reprezentând numărul total de pași sub axa Ox. De exemplu, drumul din Fig.1 are deficitul 0. Orice drum Dyck are deficit 0 datorită faptului că acestea nu trec sub axa Ox. Drumul din Fig.2 are deficit 4 (liniile marcate roșu). Deficitul nu poate fi decât par. Scopul rezolvării noastre va fi acela de a determina numărul drumurilor Dyck, adică cele de deficit 0. În următoarele rânduri vom prezenta o soluție de rezolvare a problemei prezentate.

1.1 Rezolvare

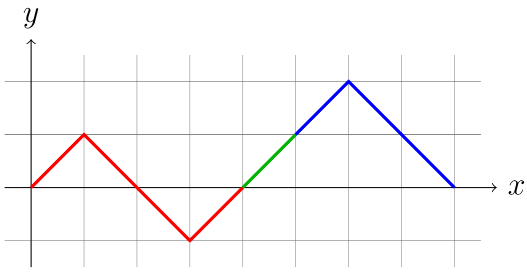
Vom începe prin a număra totalitatea drumurilor ce pornesc în punctul (0,0) și se termină în ($2n$,0), fără a respecta în mod obligatoriu condiția deficitară. În termeni intuitivi, pentru a construi un drum de lungime $2n$, cu n pași în sus și n pași în jos, trebuie doar să alegem care dintre cele $2n$ poziții vor fi ocupate de pași în sus. Alegerea acestor poziții corespunde selectării unei submulțimi de n elemente dintr-o mulțime cu $2n$ elemente, chestiune ce conduce la $\binom{2n}{n}$ posibilități. Fie D_k mulțimea tuturor drumurilor de deficit k, cu k par. Pentru oricare n natural, vom avea relația:

$$\sum_{i=0}^{n} |D_{2i}| = \binom{2n}{n};$$

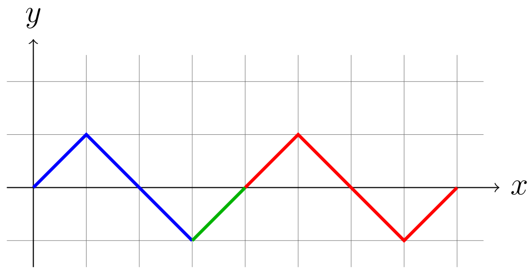
În rândurile care urmează, vom demonstra următoarea relație:

$$|D_0| = |D_2| = \cdots = |D_{2n}|;$$

Pentru a înțelege egalitatea dintre cardinalitățile mulțimilor D_k, vom considera drept exemplu o secvență de deficit 2 a unui drum oarecare.



$Fig.\,3$



$Fig.\,4$

Este suficient să înțelegem comportamentul din $Fig.3$ și $Fig.4$ pentru a generaliza rezultatul obținut. În $Fig.3$ observăm că secvența are deficitul 2 și poate fi împărțită în trei subsecvențe prin care putem construi o nouă secvență prin intermediul unor operații de translație. Selectăm ultimul pas care pleacă din axa Ox și se deplasează (1,1). În figură, pasul este marcat cu verde. După marcarea acestui pas, vom separa restul drumului în două subsecvențe, marcându-le cu roșu și albastru. În următoarea etapă, vom reasambla secvența mutând subsecvența albastră în origine. După, atașăm linia verde la care adăugăm restul de subsecvență roșie. Pe parcursul acestui procedeu de translație, numărul de pași în sus și pași în jos rămâne egal, neeliminând nimic pentru a obține noua construcție. Dintr-o secvență de deficit 2, am obținut una de deficit 4. În termeni mai familiari, am luat doi pași de peste axa Ox și, în urma translațiilor, am reușit să-i ducem jos, sub axa Ox. Printr-un asemenea algoritm, atribuim unei secvențe oarecare de deficit 2, o secvență unică de deficit 4. În mod analogic, putem concepe un algoritm invers, prin intermediul căruia putem aduce o secvență de deficit 4 într-una de deficit 2. Algoritmul deci este inversabil.

Se poate observa faptul că algoritmul nu depinde în mod esențial de deficitul 2 sau 4. Dacă în loc de o secvență de deficit 2, am considera una de deficit 6, am putea să o transformăm prin aceeași procedură de translatare, într-o secvență unică de deficit 8. Și, invers, orice secvență de deficit 8 poate fi adusă la una unică de deficit 6. În general, pentru orice k există o corespondență bijectivă între drumurile de deficit $2k$ și $2k+2$. Ceea ce arată desenul și algoritmul de sus este tocmai această simetrie. Secvențele nu se pierd sau se creează din nimic, ele pot fi repoziționate, iar în urma acestei repoziționări obținem o clasă echivalentă de drumuri. Datorită unicității și inversabilității algoritmului, putem considera o funcție f bijectivă:

$$f : D_{2k} \longrightarrow D_{2k+2}$$

Datorită faptului că cele două mulțimi sunt finite, iar corespondența lor este bijectivă, tragem concluzia că

$$|D_{2k}| = |D_{2k+2}|;$$

Cum $k-ul$ a fost ales arbitrar rezultă că pentru toate mulțimile D_k vom avea egalitate de cardinal:

$$|D_0| = |D_2| = \cdots = |D_{2n}|;$$

Am arătat că toate aceste mulțimi au același cardinal, deci

$$\sum_{i=0}^{n} |D_{2i}| = (n+1)\,|D_0|;$$

Prin urmare,

$$|D_0| = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n},$$

care este exact formula numerelor Catalan.

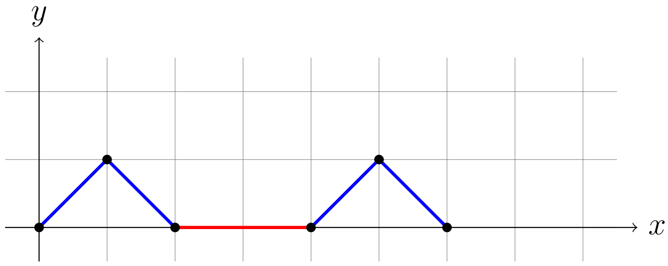
1.2 Probleme similare ale drumurilor Dyck

O interpretare clasică a drumurilor Dyck este în termeni de paranteze corect închise. Asociem fiecărui pas în sus (1,1) o paranteză deschisă "(" și fiecărui pas în jos (1,-1) o paranteză închisă ")". Condiția ca drumul să nu coboare sub axa Ox este echivalentă cu cerința ca în orice prefix al șirului numărul de paranteze deschise să fie cel puțin egal cu numărul de paranteze închise. La final, cele două numere trebuie să coincidă. Astfel, drumurile Dyck de ordin n corespund exact șirurilor de $2n$ paranteze corect echilibrate. De exemplu, drumul Dyck pentru $n=3$ corespunde unuia dintre șirurile:

$$((())), \quad (()()), \quad (())(), \quad ()(()), \quad ()()().$$

2 Drumuri Schröder

Un drum Schröder de ordin n este o cale pe grila pătratică ce pornește din punctul (0,0) și se termină în punctul $(2n, 0)$. Drumul este alcătuit din trei tipuri de pași elementari: (1,1) (pas în sus), (1,-1) (pas în jos), (2,0) (pas orizontal). Condiția fundamentală este ca drumul să nu coboare niciodată sub axa Ox, analog cu situația drumurilor Dyck. Numărul drumurilor Schröder de ordin n se notează S_n și se numește număr Schröder mare. Aceste drumuri generalizează drumurile Dyck, întrucât permit, pe lângă urcări și coborâri, și pași orizontali. În următoarele rânduri vom prezenta soluția problemei.



$Fig.\, 5$

2.1 Rezolvare

Problema se rezolvă printr-o manieră similară cu cea a drumurilor Dyck. În viitoarele demonstrații va trebui să fixăm numărul de pași orizontali. Fie k numărul acestora. Având k pași orizontali, drumurile vor avea un deficit maxim de $2(n-k)$. Un pas orizontal nu afectează deficitul drumului,întrucât acesta nu este în jos sau în sus. Prin urmare, raționamentul rezolvării va fi unul similar. Vom avea mai puține deficituri pentru fiecare caz de $k \neq 0$. Mai exact $n - k + 1$ pentru fiecare caz. Aplicând același raționament, lucrăm astfel:

- ignorăm temporar pașii orizontali $(2, 0)$ (îi ștergem din desen), păstrându-le însă pozițiile relative;
- pe șirul rămas, alcătuit din $2(n - k)$ pași verticali $(1, 1)$, $(1, -1)$, aplicăm același algoritm de mutări/rotații ca în cazul Dyck: el transformă o secvență cu deficit $2i$ într-una cu deficit $2(i + 1)$ și invers;
- reintroducem la final pașii orizontali exact în pozițiile lor inițiale.

Observăm că pașii orizontali rămân complet neatinși de transformare, iar deficitul depinde doar de pașii verticali. Rezultă o bijecție între clasele de deficit pentru k fix, deci toate au aceeași mărime:

$$|D_0^{(k)}| = |D_2^{(k)}| = \cdots = |D_{2(n-k)}^{(k)}|;$$

Pe de altă parte, numărul total de drumuri cu exact k pași orizontali (fără nici o restricție de deficit) se obține printr-o numărătoare multinomială: avem $2n$ poziții de umplut, din care k sunt pași orizontali, iar ceilalți $2(n-k)$ sunt pași verticali împărțiți în $n-k$ sus și $n-k$ jos. Prin urmare,

$$\sum_{i=0}^{n-k} \left| D_{2i}^{(k)} \right| \;=\; \frac{(2n-k)!}{k!\,(n-k)!\,(n-k)!};$$

Cum termenii din sumă sunt egali între ei şi sunt în număr de $n-k+1$, obţinem

$$\left| D_{0}^{(k)} \right| \;=\; \frac{1}{n-k+1} \cdot \frac{(2n-k)!}{k!\,(n-k)!\,(n-k)!};$$

În concluzie, numărul drumurilor Schröder de ordin n (adică a celor care nu coboară sub axa Ox) se obține adunând peste toate valorile posibile ale lui k:

$$S_n \;=\; \sum_{k=0}^{n} \left| D_{0}^{(k)} \right| \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n-k+1} \cdot \frac{(2n-k)!}{k!\,(n-k)!\,(n-k)!};$$

2.2 Probleme similare

O problemă echivalentă binecunoscută este următoarea: câte drumuri pot fi construite pe grila pătratică din punctul $(0,0)$ până în (n,n), folosind paşi $(1,0)$, $(0,1)$ şi $(1,1)$, fără ca drumul să treacă deasupra diagonalei principale $y=x$?

Condiţia de a nu depăşi diagonala $y=x$ joacă acelaşi rol ca şi restricţia de a nu coborî sub axa Ox în definiţia drumurilor Schröder. În plus, paşii diagonali $(1,1)$ corespund paşilor orizontali $(2,0)$ din definiţia standard. Astfel, numărul acestor drumuri este exact numărul Schröder mare S_n.

Această echivalenţă oferă o reprezentare vizuală diferită, dar complet echivalentă a drumurilor Schröder, şi explică apariţia frecventă a numerelor Schröder în contexte geometrice şi combinatorice.

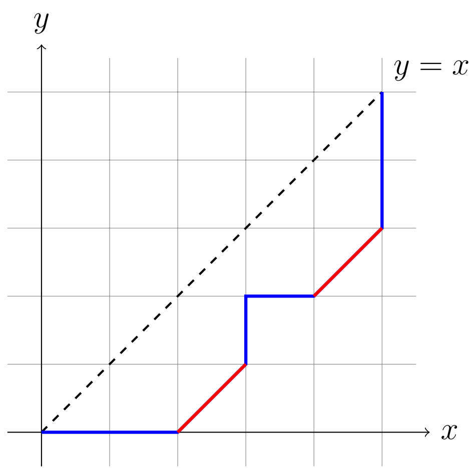


Fig. 6

3 Drumuri Motzkin

Numim drum Motzkin, un drum de ordin n care pornește din punctul de coordonate (0,0) și se termină în $(n, 0)$ construit cu pașii elementari:(1,1)(pas în sus),(1,-1)(pas în jos), (1,0)(pas orizontal). Condiția este de a nu coborî sub axa Ox.

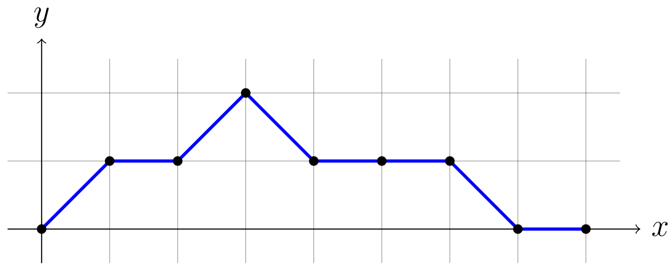


Fig. 7

Fixăm k paşi orizontali. Atunci numărul paşilor verticali este $n-k$, iar pentru ca drumul să se termine la nivelul 0 trebuie ca numărul de pași în sus sau jos să fie egal cu $\dfrac{n-k}{2} =: j$ (deci $n-k$ este par). Definim deficitul ca numărul paşilor verticali parcurşi strict sub axa Ox; paşii orizontali nu contribuie la deficit.

Ignorând temporar paşii orizontali şi privindu-i doar pe cei verticali (în număr $2j$), avem exact cazul Dyck: deficitul poate lua valorile $0, 2, \ldots, 2j$, deci există $(j+1)$ clase de deficit. Algoritmul de mutări pe verticali (rotaţii/compactări) induce o bijecţie între clasele $D_{2i}^{(k)}$, iar apoi reintroducerea paşilor orizontali în poziţiile lor iniţiale nu modifică deficitul. Concluzionăm că, pentru k fix,

$$|D_0^{(k)}| = |D_2^{(k)}| = \cdots = |D_{2j}^{(k)}|;$$

Numărul total de şiruri cu k paşi orizontali şi j urcări, respectiv j coborâri este

$$\frac{n!}{k!\,j!\,j!},$$

iar acestea se împart în $(j+1)$ clase egale. Prin urmare,

$$|D_0^{(k)}| = \frac{1}{j+1} \cdot \frac{n!}{k!\,j!\,j!} \quad \text{cu } j = \frac{n-k}{2};$$

Sumând peste toate valorile posibile ale lui k (de aceeaşi paritate cu n) obţinem

$$M_n = \sum_{\substack{0 \le k \le n \\ n-k \text{ par}}} \frac{1}{\frac{n-k}{2}+1} \cdot \frac{n!}{k!\left(\frac{n-k}{2}\right)!\left(\frac{n-k}{2}\right)!};$$

Echivalent, cu schimbarea de variabilă $j = \frac{n-k}{2}$,

$$M_n = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2j} C_j, \quad \text{unde} \quad C_j = \frac{1}{j+1}\binom{2j}{j};$$

3.1 Probleme similare

Drumurile Motzkin pot fi interpretate şi prin potriviri neîncrucişate. Considerăm n puncte pe o linie: unele se pot uni în perechi prin segmente, iar altele pot rămâne singure. Restricţia este ca segmentele să nu se intersecteze.

Corespondenţa este naturală: un pas în sus $(1,1)$ înseamnă deschiderea unei perechi, un pas în jos $(1,-1)$ închiderea ei, iar un pas orizontal $(1,0)$ reprezintă un punct liber. Condiţia de a nu coborî sub axa Ox reflectă faptul că nu putem închide o pereche fără să fi deschis una înainte.

Astfel, numărul potrivirilor neîncrucişate cu puncte libere este acelaşi cu numărul drumurilor Motzkin de ordin n.

Concluzii

În paginile de faţă am analizat drumurile Dyck, Schröder şi Motzkin, considerate printre cele mai semnificative obiecte ale combinatoricii. Am introdus metoda deficitelor ca tehnică de numărare şi am ilustrat modul în care aceasta depăşeşte cadrul clasic al numerelor Catalan.

Aceste drumuri nu constituie doar exerciţii teoretice, ci se întâlnesc în contexte variate: structurarea expresiilor cu paranteze, reprezentarea arborilor binari, partiţionarea poligoanelor sau studiul potrivirilor neîncrucişate. Faptul că o singură metodă poate clarifica situaţii atât de diverse scoate în evidenţă coerenţa internă şi eleganţa combinatoricii.

În perspectivă, cercetarea acestor idei poate continua prin extinderea spre variante mai generale (de pildă drumuri ponderate sau cu constrângeri suplimentare) şi prin investigarea conexiunilor cu teoria probabilităţilor ori analiza algoritmilor.

Bibliografie

[1] Wikipedia, *Dyck path*, `https://en.wikipedia.org/wiki/Dyck_path`.

[2] Wikipedia, *Schröder number*, https://en.wikipedia.org/wiki/Schr%C3%B6der_number.

[3] Wikipedia, *Motzkin number*, https://en.wikipedia.org/wiki/Motzkin_number.