

TEORÍA DE AUTÓMATAS Y LENGUAJES FORMALES

FEBRERO 2009

1er. Parcial

NORMAS :

- La duración del examen es de 2 horas.
- **Todos los ejercicios se entregarán en hojas separadas.**
- El examen tipo test cuenta hasta 2 puntos sobre la nota total.

1. (a) (1.5 puntos) Obtén una gramática formal que genere el lenguaje L descrito por las siguientes propiedades:

- para todo $w \in L$: $w \in \{a, b\}^*$
- para todo $w \in L$: $n_a(w) = n_b(w)$
- para todo $w \in L$ y para cada posición i en w : $n_a^i(w) \geq n_b^i(w)$, donde $n_a^i(w)$ y $n_b^i(w)$ son el número de a's (b's) hasta la posición i en w .

Es decir, la palabra $aababb$ pertenece al lenguaje pero, por ejemplo, la palabra $abba$ no.

Solución:

Una posible solución podría ser la siguiente:

$G = (\{S\}, \{a, b\}, S, P)$ con $P = \{S ::= aBS | \lambda; \quad Ba ::= aB; \quad B ::= b\}$

- (b) (0.5 puntos) Dada la siguiente gramática:

$$G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, S, \mathcal{P}),$$

donde \mathcal{P} son las producciones siguientes :

$$\begin{aligned} S &::= aA & A &::= aAB \mid \lambda \\ aB &::= bba \end{aligned}$$

Define el lenguaje $L(G)$ en notación conjuntista.

Solución:

La solución es la siguiente: $L = \{a^n b^{2n} a \mid n \geq 0\}$.

2. (1.5 puntos) Sea $\Sigma = \{a, b\}$ un alfabeto finito, y sea $L \subseteq \Sigma^*$ el lenguaje dado por la siguiente igualdad :

$$L = \{\mathbf{w} \in \Sigma^* \mid \text{el número de } a' \text{s delante de cualquier } b \text{ en } w \text{ es múltiplo de } 3\}.$$

Es decir, la palabra $baaabb$ pertenece a L , pero la palabra $aabab$ no.

Demuestra que L es un lenguaje regular.

Solución:

Para demostrar que L es regular vale diseñar una gramática regular.

Una posible gramática podría ser la siguiente:

$G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, S, P)$ con $P = \{S ::= bS|aA|a|\lambda, A ::= aB|a, B ::= aS|a\}$

3. (2 puntos) Sea $\Sigma = \{a, b, c\}$ un alfabeto finito, y sea $L \subseteq \Sigma^*$ el lenguaje dado por la siguiente igualdad :

$$L = \{a^r b^s c^s \mid r, s > 0\}.$$

Demuestra que L no es un lenguaje regular.

Solución:

Para demostrar que L no es regular basta demostrar que no cumple el lema de bombeo. Para ello se va a demostrar que para cualquier constante n existe una palabra $x \in L$ con $|x| \geq n$ que no se puede dividir de forma $u.v.w$ con $|u.v| \leq n$, $|v| > 0$ y tal que $u.v^i.w \in L$ para $i = 0, 1, 2, \dots$

Sea n la constante del lema. Elegimos la palabra $x = ab^n c^n$. Es obvio que $x \in L$ y $|x| = 2n + 1 \geq n$.

Intentamos dividir x de forma $u.v.w$ tal que $|u.v| \leq n$ y $|v| > 0$. Hay varias formas posibles, pero ninguna de ellas cumple la tercera condición del lema. Analizamos cada caso:

- $x = ab^n c^n = \lambda.ab^k.b^i c^n = u.v.w$ con $k + i = n$ y $k \geq 0$. En este caso $v = ab^k$ (incluido el caso $v = a$). Consideramos la palabra $u.v^0.w = b^{n-k} c^n$. Esta palabra claramente no pertenece a L por no tener ninguna a . Por tanto, esta división de x no es la que cumple el Lema.
- $x = ab^n c^n = ab^k.b^i.b^j c^n = u.v.w$ con $k + i + j = n$ y $k, j \geq 0$ e $i > 0$. En este caso $v = b^i$. Consideramos la palabra $u.v^0.w = ab^{n-i} c^n$. Dado que $i > 0$, esta palabra no pertenece a L por tener menos b 's que c 's. Por tanto, esta división de x no es la que cumple el Lema.

Estas dos divisiones no cumplen la tercera condición del Lema y no hay ninguna otra división de x que cumple los dos primeros criterios. Por tanto, la palabra x no se puede descomponer como requerido y, por ello, el lenguaje no cumple el lema de bombeo y no es regular.

4. (2.5 puntos) Demuestra que el lenguaje reconocido por el autómata finito A_{det} es el mismo que el lenguaje reconocido por la expresión regular $RegExp$. Todos los pasos para la resolución del ejercicio tienen que estar justificados utilizando algoritmos vistos en clase. No es obligatorio, pero sí conveniente, dar una pequeña explicación de qué se hace y porqué se hace.

$$A_{det} = (\{a, b\}, \{A, B, C, D, E, F, G\}, f_{det}, A, \{B, D, E, F, G\})$$

f_{det}	a	b
$\rightarrow A$	B	C
*B	D	E
C	C	C
*D	D	C
*E	F	G
*F	C	E
*G	C	G

$$RegExp = aa^* + a(ba)^*b$$

Solución:

Como los dos elementos dados reconocen lenguajes regulares (uno es un AFD y el otro es una expresión regular), procederemos a comprobar los autómatas mínimos equivalentes de cada uno de ellos. Si los autómatas mínimos son isomorfos, entonces ambos elementos reconocen el mismo lenguaje.

El autómatas dado es finito determinista, por lo tanto, procederemos a minimizarlo para obtener el autómatas finito determinista mínimo (y único) que reconoce ese lenguaje.

$$Q/E_0 = \{\{A, C\}, \{B, D, E, F, G\}\}$$

$$Q/E_1 = \{\{A\}, \{C\}, \{B, E\}, \{D\}, \{F, G\}\}$$

$$Q/E_2 = \{\{A\}, \{C\}, \{B\}, \{E\}, \{D\}, \{F\}, \{G\}\} = Q/E$$

Como podemos comprobar, este autómatas ya es mínimo.

Ahora, obtendremos un AFND a partir de la expresión regular que nos dan. Para ello, aplicaremos el algoritmo especificado en los apuntes. El AFND resultante es:

$$A_{RegExp} = (\{a, b\}, \{q, r, s, t, u, v\}, f_{RegExp}, q, \{r, u, v\})$$

f_{RegExp}	a	b	λ
$\rightarrow q$	{r,s}		
*r	{r}		
s		{t}	{u}
t	{u}		
u		{v}	{s}
*v			

Ahora, obtendremos un autómatas finito determinista. Para ello, partimos de la $clausura_\lambda(q) = \{q\}$.

$f_{RegExpDet}$	a	b
$\rightarrow\{q\}$	$\{r,s,u\}$	$\{\emptyset\}$
$*\{r,s,u\}$	$\{r\}$	$\{t,v\}$
$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$
$*\{r\}$	$\{r\}$	$\{\emptyset\}$
$*\{t,v\}$	$\{s,u\}$	$\{\emptyset\}$
$\{s,u\}$	$\{\emptyset\}$	$\{t,v\}$

Si renombramos, nos queda:

$$A_{RegExpDet} = (\{a, b\}, \{A, B, C, D, E, F, G\}, f_{det}, A, \{B, D, E, F, G\})$$

f_{det}	a	b
$\rightarrow A$	B	C
$*B$	D	E
C	C	C
$*D$	D	C
$*E$	F	C
F	C	E

Hallaremos el autómata mínimo equivalente:

$$Q/E_0 = \{\{A, C, F\}, \{B, D, E\}\}$$

$$Q/E_1 = \{\{A\}, \{C\}, \{F\}, \{B\}, \{D\}, \{E\}\} = Q/E$$

El autómata ya es mínimo.

Como podemos comprobar, los autómatas mínimos A_{det} y $A_{RegExpDet}$ no son isomorfos (de hecho tienen distinto número de estados). Por lo tanto, hemos demostrado que la expresión regular y el autómata finito dados en el enunciado no definen el mismo lenguaje.