

**Hoja de Problemas 11**

## Autómatas a pila

NIVEL DEL EJERCICIO : (★) básico, (♣) medio, (♠) avanzado.

1. Para cada uno de los lenguajes siguientes, describe un autómata a pila que acepte el lenguaje.

(a) (★)  $L = \{a^n b^{2n} \mid n \geq 0\}$ .

**Solución:**

$$AP = (\{a, b\}, \{A, Z\}, \{q_0, q_1, q_f\}, Z, q_0, f, \{q_f\})$$

Donde  $f$ , la función de transición, viene definida como:

$$\begin{aligned} f(q_0, \lambda, Z) &= \{(q_f, \lambda)\} \\ f(q_0, a, Z) &= \{(q_0, AAZ)\} \\ f(q_0, a, A) &= \{(q_0, AAA)\} \\ f(q_0, b, A) &= \{(q_1, \lambda)\} \\ f(q_1, b, A) &= \{(q_1, \lambda)\} \\ f(q_1, \lambda, Z) &= \{(q_f, \lambda)\} \end{aligned}$$

(b) (★)  $L = \{xcx^{-1} \mid x \in \{a, b\}^+\}$ .

**Solución:**

(c) (★)  $L = \{a^n b^m \mid n \leq m \leq 3n\}$ .

**Solución:**

Este es un caso parecido al lenguaje  $\{a^n b^n\}$ , con la diferencia de que cada vez que leamos una letra “a”, debemos insertar en la pila de uno a tres contadores “A”. Así, por cada letra “a”, habrá de una a tres “b”. El autómata a pila es el siguiente :

$$AP := (\{a, b\}, \{S, A\}, \{p, q\}, S, p, f, \emptyset)$$

$$\begin{aligned} f(p, \lambda, S) &= \{(p, \lambda)\} \\ f(p, a, S) &= \{(p, A), (p, AA), (p, AAA)\} \\ f(p, a, A) &= \{(p, AA), (p, AAA), (p, AAAA)\} \\ f(p, b, A) &= \{(q, \lambda)\} \\ f(q, b, A) &= \{(q, \lambda)\} \\ f(q, b, A) &= \{(q, \lambda)\} \end{aligned}$$

- (d) ( $\clubsuit$ )  $L = \{xcy \mid x, y \in \{a, b\}^*, \text{ n}^\circ \text{ subcadenas "ab" en } x = \text{n}^\circ \text{ subcadenas "ba" en } y\}$ .

**Solución:**

Este autómata tendrá cuatro estados  $\{p, q, r, s\}$ . Los dos primeros,  $\{p, q\}$  se utilizarán para el reconocimiento de la parte de la palabra que está a la izquierda de la “c”, mientras que los otros son para la parte derecha. En concreto,  $\{p, q\}$  se utilizarán para reconocer las cadenas “ab”. El estado “p” indicará que no se ha comenzado a leer dicha cadena, mientras que el estado “q” sirve para anotar que hemos leído la primera letra de la cadena (en este caso, una “a”). Si, estando en el estado “q”, leemos en la cinta una “b”, entonces volvemos al estado inicial “p” y añadimos a la pila un contador “X”. Así, el símbolo de la pila “X” indicará la cantidad de subcadenas “ab” que hemos leído por el momento.

El comportamiento de los estados  $\{r, s\}$  es análogo, pero ahora con el objetivo de que cada vez que se lea la subcadena “ba” se quite de la pila un contador “X”.

Así, el autómata resultante es el siguiente :

$$AP := (\{a, b, c\}, \{S, X\}, \{p, q, r, s\}, S, p, f, \emptyset)$$

$f(p, a, S) = \{(q, S)\}$	$f(p, c, X) = \{(r, X)\}$
$f(p, a, X) = \{(q, X)\}$	$f(q, c, S) = \{(r, S)\}$
$f(p, b, S) = \{(p, S)\}$	$f(q, c, X) = \{(r, S)\}$
$f(p, b, X) = \{(p, X)\}$	$f(r, a, S) = \{(r, S)\}$
$f(q, a, S) = \{(q, S)\}$	$f(r, a, X) = \{(r, X)\}$
$f(q, a, X) = \{(q, X)\}$	$f(r, b, S) = \{(s, S)\}$
$f(q, b, S) = \{(p, XS)\}$	$f(r, b, X) = \{(s, X)\}$
$f(q, b, X) = \{(p, XX)\}$	$f(s, a, X) = \{(r, \lambda)\}$
$f(q, b, X) = \{(p, XX)\}$	$f(r, \lambda, S) = \{(r, \lambda)\}$
$f(p, c, S) = \{(r, S)\}$	$f(s, \lambda, S) = \{(s, \lambda)\}$

- (e) ( $\clubsuit$ )  $L = \{xcy \mid x, y \in \{a, b\}^+, \text{ n}^\circ \text{ subcadenas "ab" en } x = \text{n}^\circ \text{ subcadenas "ba" en } y\}$ .

**Solución:**

Vamos a aprovechar que tenemos resuelto el caso en el que las palabras  $x$  e  $y$  pueden ser vacías. Para ello, añadiremos un par de estados extra “u” y “v”, que indicarán que la palabra  $x$  (respectivamente  $y$ ) es vacía. En el momento en que se lea una letra en la cinta, transitaremos al estado correspondiente. Por lo tanto, los cambios a realizar son mínimos.

La descripción del autómata se cambiaría por esta nueva :

$$AP' := (\{a, b, c\}, \{S, X\}, \{p, q, r, s, u, v\}, S, u, f, \emptyset)$$

Hay que añadir las siguientes transiciones :

$$\begin{array}{lcl} f(u, a, S) & = & \{(q, S)\} \\ f(u, a, X) & = & \{(q, X)\} \\ f(u, b, S) & = & \{(p, S)\} \\ f(u, b, X) & = & \{(p, X)\} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{lcl} f(v, a, S) & = & \{(r, S)\} \\ f(v, a, X) & = & \{(r, X)\} \\ f(v, b, S) & = & \{(s, S)\} \\ f(v, b, X) & = & \{(s, X)\} \end{array} \right.$$

También hay que cambiar las siguientes transiciones :

$$\begin{array}{lcl} f(p, c, S) & = & \{(v, S)\} \\ f(p, c, X) & = & \{(v, X)\} \\ f(q, c, S) & = & \{(v, S)\} \end{array}$$

- (f) (★)  $L = \{a^n b^m c^{n+m} \mid n, m \geq 0\}$ .

**Solución:**

- (g) (★)  $L = \{a^n b^m c^t a^{m+t} b^n \mid m, n > 0, t \geq 0\}$ .

**Solución:**

- (h) (♣)  $L = \{\mathbf{x} \in \{a, b\}^* \mid n_a(\mathbf{x}) = n_b(\mathbf{x})\}$ .

**Solución:**

$$AP = (\{a, b\}, \{0, 1, Z\}, \{q_0, q_f\}, Z, q_0, f, \{q_f\})$$

Donde  $f$ , la función de transición, viene definida como:

$$\begin{array}{lcl} f(q_0, \lambda, Z) & = & \{(q_f, Z)\} \\ f(q_0, a, Z) & = & \{(q_0, 0Z)\} \\ f(q_0, b, Z) & = & \{(q_0, 1Z)\} \\ f(q_0, a, 0) & = & \{(q_0, 00)\} \\ f(q_0, b, 1) & = & \{(q_0, 11)\} \\ f(q_0, a, 1) & = & \{(q_0, \lambda)\} \\ f(q_0, b, 0) & = & \{(q_0, \lambda)\} \end{array}$$

- (i) (♣)  $L = \{\mathbf{x} \in \{a, b\}^* \mid n_a(\mathbf{x}) = n_b(\mathbf{x}) + 1\}$ .

**Solución:**

Este es un caso parecido al lenguaje  $\{n_a(\mathbf{x}) = n_b(\mathbf{x})\}$ , con la salvedad de que en algún momento, el autómata indeterminísticamente insertará en la

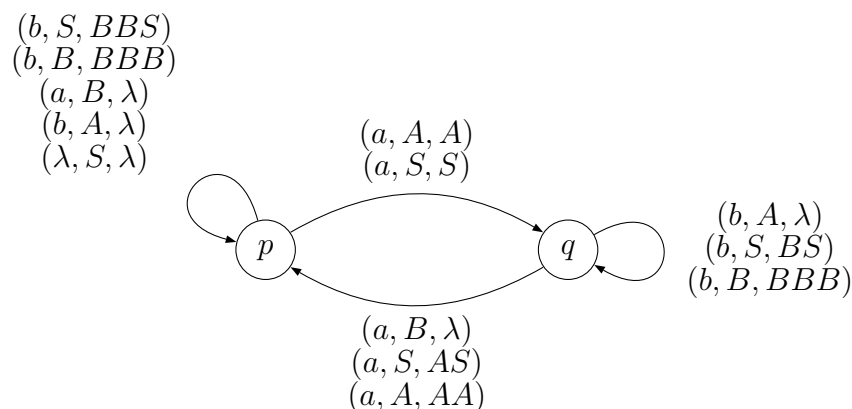
pila un contador “ $B$ ” y pasará a otro estado. Así, habrá dos estados : un estado “ $p$ ” en el que no se habrá insertado dicho contador y un estado “ $q$ ” en el que se habrá realizado dicha insercción. El resto del comportamiento del autómata es evidente :

$$AP := (\{a, b\}, \{S, A, B\}, \{p, q\}, S, p, f, \emptyset)$$

$f(p, a, S) = \{(p, AS)\}$	$f(q, \lambda, S) = \{(q, \lambda)\}$
$f(p, a, A) = \{(p, AA)\}$	$f(q, a, S) = \{(q, AS)\}$
$f(p, a, B) = \{(p, \lambda)\}$	$f(q, a, A) = \{(q, AA)\}$
$f(p, b, S) = \{(p, BS)\}$	$f(q, a, B) = \{(q, \lambda)\}$
$f(p, b, B) = \{(p, BB)\}$	$f(q, b, S) = \{(q, BS)\}$
$f(p, b, A) = \{(p, \lambda)\}$	$f(q, b, B) = \{(q, BB)\}$
$f(p, \lambda, S) = \{(q, BS)\}$	$f(q, b, A) = \{(q, \lambda)\}$
$f(p, \lambda, A) = \{(q, BA)\}$	
$f(p, \lambda, B) = \{(q, BB)\}$	

(j) ( $\spadesuit$ )  $L = \{\mathbf{x} \in \{a, b\}^* \mid n_a(\mathbf{x}) = 2n_b(\mathbf{x})\}.$

**Solución:**



(k) ( $\clubsuit$ )  $L = \{a^{\max\{0, n-m\}}b^n a^m \mid n, m \geq 0\}$

**Solución:**

$$A = (\{a, b\}, \{S, A, M\}, S, \{q_0, q_1, q_2, q_3\}, q_0, f, \{\})$$

$$\begin{aligned}
 f(q_0, \lambda, S) &= \{(q_0, \lambda), (q_1, MS)\} \\
 f(q_0, a, S) &= \{(q_1, AS)\} \\
 f(q_0, b, S) &= \{(q_2, MS)\} \\
 f(q_1, a, A) &= \{(q_1, AA)\} \\
 f(q_1, b, A) &= \{(q_2, \lambda)\} \\
 f(q_1, \lambda, M) &= \{(q_1, MM)\} \\
 f(q_1, b, M) &= \{(q_2, MM)\} \\
 f(q_1, a, M) &= \{(q_3, \lambda)\} \\
 f(q_2, b, A) &= \{(q_2, \lambda)\} \\
 f(q_2, b, M) &= \{(q_2, MM)\} \\
 f(q_2, a, M) &= \{(q_3, \lambda)\} \\
 f(q_2, b, S) &= \{(q_2, MS)\} \\
 f(q_2, \lambda, S) &= \{(q_2, \lambda)\} \\
 f(q_3, a, M) &= \{(q_3, \lambda)\} \\
 f(q_3, \lambda, S) &= \{(q_3, \lambda)\}
 \end{aligned}$$

(l) ( $\clubsuit$ )  $L = \{a^{n+m}b^{m+t}a^tb^n \mid n, t > 0, m \geq 0\}$

**Solución:**

$$A = (\{a, b\}, \{S, A, B, C\}, S, \{q_0, q_1, q_2, q_3\}, q_0, f, \{\})$$

$$\begin{aligned}
 f(q_0, a, S) &= \{(q_0, A)\} \\
 f(q_0, a, A) &= \{(q_0, AA), (q_0, BA)\} \\
 f(q_0, a, B) &= \{(q_0, BB)\} \\
 f(q_0, b, B) &= \{(q_1, \lambda)\} \\
 f(q_0, b, A) &= \{(q_1, CA)\} \\
 f(q_1, b, B) &= \{(q_1, \lambda)\} \\
 f(q_1, b, A) &= \{(q_1, CA)\} \\
 f(q_1, b, C) &= \{(q_1, CC)\} \\
 f(q_1, a, C) &= \{(q_2, \lambda)\} \\
 f(q_2, a, C) &= \{(q_2, \lambda)\} \\
 f(q_2, b, A) &= \{(q_3, \lambda)\} \\
 f(q_3, b, A) &= \{(q_3, \lambda)\}
 \end{aligned}$$

2. Obtén autómatas a pila que acepten los lenguajes generados por las gramáticas siguientes :

(a) ( $\star$ )

$$\begin{aligned}
 S &::= aA \\
 A &::= aABC \mid bB \mid a \\
 B &::= b \\
 C &::= c
 \end{aligned}$$

Nota: Comprueba que la palabra  $aaabc$  está en el lenguaje generado por el autómata.

**Solución:**

(b) (♣)

$$A ::= 2BC \mid 1B \mid \lambda$$

$$B ::= 1D \mid 1C \mid 1$$

$$C ::= 2$$

$$D ::= 2D \mid 2C$$

**Solución:**

Vamos a resolver este ejercicio mediante un autómata a pila reconocedor por estado final. Para ello, lo primero que debemos hacer es encontrar el autómata a pila reconocedor por vaciado de pila equivalente a la gramática. Vamos a aplicar el *Algoritmo número 2* de los apuntes:

$$AP = (\{1, 2\}, \{A, B, C, D, 1, 2\}, \{q\}, A, q, f, \emptyset)$$

Donde  $f$ , la función de transición, viene definida como:

$$f(q, \lambda, A) = \{(q, 2BC), (q, 1B), (q, \lambda)\}$$

$$f(q, \lambda, B) = \{(q, 1D), (q, 1C), (q, 1)\}$$

$$f(q, \lambda, C) = \{(q, 2)\}$$

$$f(q, \lambda, D) = \{(q, 2D), (q, 2C)\}$$

$$f(q, 1, 1) = \{(q, \lambda)\}$$

$$f(q, 2, 2) = \{(q, \lambda)\}$$

Ahora, transformaremos este autómata pila a uno con reconocimiento por estado final.

$$AP' = (\{1, 2\}, \{A, B, C, D, 1, 2, A_0\}, \{q, r, s\}, A_0, s, f', \{r\})$$

Donde  $f'$ , la función de transición, viene definida como:

$$f'(s, \lambda, A_0) = \{(q, SA_0)\}$$

$$f'(q, \lambda, A) = \{(q, 2BC), (q, 1B), (q, \lambda)\}$$

$$f'(q, \lambda, B) = \{(q, 1D), (q, 1C), (q, 1)\}$$

$$f'(q, \lambda, C) = \{(q, 2)\}$$

$$f'(q, \lambda, D) = \{(q, 2D), (q, 2C)\}$$

$$f'(q, 1, 1) = \{(q, \lambda)\}$$

$$f'(q, 2, 2) = \{(q, \lambda)\}$$

$$f'(q, \lambda, A_0) = \{(r, A_0)\}$$

(c) (♣)

$$\begin{aligned} S &::= aAb \mid aBbb \mid ab \mid abb \mid \lambda \\ A &::= aAb \mid ab \\ B &::= aBbb \mid abb \end{aligned}$$

**Solución:**

(d) (♣)

$$\begin{aligned} S &::= AB \mid BA \mid 0A1 \mid 1A0 \mid 0 \\ A &::= 0A1 \mid 1A0 \mid 0 \\ B &::= 0B1 \mid 1B0 \mid 01 \mid 10 \end{aligned}$$

**Solución:**

(e) (♣)

$$\begin{aligned} S &::= aABB \mid aAA \\ A &::= aBB \mid a \\ B &::= bBB \mid A \end{aligned}$$

**Solución:**

3. Obtén gramáticas que generen el lenguaje aceptado por los autómatas a pila siguientes :

(a) (★)  $AP_1 = (\{a, b\}, \{A, B\}, \{p, q\}, A, p, f, \emptyset)$

$$\begin{aligned} f(p, a, A) &= \{(p, BA)\} \\ f(p, a, B) &= \{(p, BB)\} \\ f(p, b, B) &= \{(q, \lambda)\} \\ f(q, b, B) &= \{(q, \lambda)\} \\ f(q, \lambda, B) &= \{(q, \lambda)\} \\ f(q, \lambda, A) &= \{(q, \lambda)\} \end{aligned}$$

La gramática de este apartado definela en Forma Normal de Greibach.

**Solución:**

Partiendo del autómata:

$$AP_1 = (\{a, b\}, \{A, B\}, \{p, q\}, A, p, f, \emptyset)$$

sabemos cómo construir una gramática equivalente, esa gramática estará formada por:

$$\sum_N = \{S\} \cup \{\sum_T = \sum\} \\ \{[q_i A q_j] \mid q_i, q_j \in Q, A \in \Gamma\}$$

Según lo anterior, nuestra gramática se define como:

$$G_{AP1} = (\{a, b\}, \{S, [pAq], [pBq], [pAp], [pBp], [qAp], [qBp], [qAq], [qBq]\}, S, P)$$

Donde el conjunto de producciones  $P$ , es el siguiente:

$$\begin{aligned} S &::= [pAq] \mid [pAp] \\ [pAp] &::= a[pBp][pAp] \mid a[pBq][qAp] \\ [pAq] &::= a[pBp][pAq] \mid a[pBq][qAq] \\ [pBp] &::= a[pBp][pBp] \mid a[pBq][qBp] \\ [pBq] &::= a[pBp][pBq] \mid a[pBq][qBq] \mid b \\ [qBq] &::= b \mid \lambda \\ [qAq] &::= \lambda \end{aligned}$$

De forma que si renombramos (para que quede más clara):

$$\begin{aligned} [pAp] &= A \\ [pAq] &= B \\ [pBp] &= C \\ [pBq] &= D \\ [qAq] &= E \\ [qBq] &= F \\ [qAp] &= G \\ [qBp] &= H \end{aligned}$$

La gramática resultante nos queda:

$$\begin{aligned} S &::= B \mid A \\ A &::= aCA \mid aDG \\ B &::= aCB \mid aDE \\ C &::= aCC \mid aDH \\ D &::= aCD \mid aDF \mid b \\ F &::= b \mid \lambda \\ E &::= \lambda \end{aligned}$$

Para pasarla a F.N.G., primero debemos asegurarnos que esté bien formada, para ello, recordamos que debemos:

- Eliminar reglas innecesarias ( $A ::= A$ ).
- Eliminar reglas no generativas ( $A ::= \lambda$ ).
- Eliminar reglas unitarias ( $A ::= B$ ).
- Eliminar símbolos inútiles.

Lo que nos produce la siguiente gramática bien formada equivalente:

$$G_{AP1_{FNG}} = (\{a, b\}, \{S, D, F\}, S, P')$$

Donde  $P'$  está definido como:



$$\begin{aligned} S &::= aD \\ D &::= aD \mid aDF \mid b \\ F &::= b \end{aligned}$$

Que además, ya se encuentra en Forma Normal de Greibach.

(b) ( $\clubsuit$ )  $AP_2 = (\{a, b\}, \{A, z\}, \{q_0, q_1\}, z, q_0, f, \{q_1\})$

$$\begin{aligned} f(q_0, a, z) &= \{(q_0, Az)\} \\ f(q_0, b, A) &= \{(q_0, AA)\} \\ f(q_0, a, A) &= \{(q_1, \lambda)\} \end{aligned}$$

**Solución:**

En primer lugar, hay que transformar el autómata a pila en un autómata a pila por vaciado de pila equivalente :

$$AP'_2 := (\{a, b\}, \{A, z, B\}, \{q_0, q_1, s, r\}, B, s, f', \emptyset)$$

$$\begin{array}{lcl} f'(s, \lambda, B) & = & \{(q_0, zB)\} \\ f'(q_0, a, z) & = & \{(q_0, Az)\} \\ f'(q_0, b, A) & = & \{(q_0, AA)\} \\ f'(q_0, a, A) & = & \{(q_1, \lambda)\} \\ f'(q_1, \lambda, A) & = & \{(r, \lambda)\} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{lcl} f'(q_1, \lambda, z) & = & \{(r, \lambda)\} \\ f'(q_1, \lambda, B) & = & \{(r, \lambda)\} \\ f'(r, \lambda, A) & = & \{(r, \lambda)\} \\ f'(r, \lambda, z) & = & \{(r, \lambda)\} \\ f'(r, \lambda, B) & = & \{(r, \lambda)\} \end{array} \right.$$

Ahora, simplemente aplicamos el algoritmo para calcular la gramática equivalente a  $AP'_2$  :

$$\begin{aligned} G_2 := (\{a, b\}, \{S, & [q_0Aq_0], [q_0Aq_1], [q_0As], [q_0Ar], [q_0zq_0], [q_0zq_1], [q_0zs], [q_0zr], \\ & [q_0Bq_0], [q_0Bq_1], [q_0Bs], [q_0Br], [q_1Aq_0], [q_1Aq_1], [q_1As], [q_1Ar], \\ & [q_1zq_0], [q_1zq_1], [q_1zs], [q_1zr], [q_1Bq_0], [q_1Bq_1], [q_1Bs], [q_1Br], \\ & [rAq_0], [rAq_1], [rAs], [rAr], [rzq_0], [rzq_1], [rzs], [rzs], \\ & [rBq_0], [rBq_1], [rBs], [rBr], [sAq_0], [sAq_1], [sAs], [sAr], \\ & [szq_0], [szq_1], [szs], [szr], [sBq_0], [sBq_1], [sBs], [sBr]\}, \\ & S, \mathcal{P}), \end{aligned}$$

donde  $\mathcal{P}$  son las producciones

$$\begin{aligned} S &::= [sBs] \mid [sBq_0] \mid [sBq_1] \mid [sBr] \\ [sBq_0] &::= [q_0zq_0][q_0Bq_0] \mid [q_0zq_1][q_1Bq_0] \mid [q_0zr][rBq_0] \mid [q_0zs][sBq_0] \\ [sBq_1] &::= [q_0zq_0][q_0Bq_1] \mid [q_0zq_1][q_1Bq_1] \mid [q_0zr][rBq_1] \mid [q_0zs][sBq_1] \\ [sBr] &::= [q_0zq_0][q_0Br] \mid [q_0zq_1][q_1Br] \mid [q_0zr][rBr] \mid [q_0zs][sBr] \\ [sBs] &::= [q_0zq_0][q_0Bs] \mid [q_0zq_1][q_1Bs] \mid [q_0zr][rBs] \mid [q_0zs][sBs] \\ [q_0zq_0] &::= a[q_0Aq_0][q_0zq_0] \mid a[q_0Aq_1][q_1zq_0] \mid a[q_0Ar][rzq_0] \mid a[q_0As][szq_0] \\ [q_0zq_1] &::= a[q_0Aq_0][q_0zq_1] \mid a[q_0Aq_1][q_1zq_1] \mid a[q_0Ar][rzq_1] \mid a[q_0As][szq_1] \\ [q_0zr] &::= a[q_0Aq_0][q_0zr] \mid a[q_0Aq_1][q_1zr] \mid a[q_0Ar][rzs] \mid a[q_0As][szr] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [q_0zs] &::= a[q_0Aq_0][q_0zs] \mid a[q_0Aq_1][q_1zs] \mid a[q_0Ar][rzs] \mid a[q_0As][szs] \\
 [q_0Aq_0] &::= b[q_0Aq_0][q_0zq_0] \mid b[q_0Aq_1][q_1zq_0] \mid b[q_0Ar][rzq_0] \mid b[q_0As][szq_0] \\
 [q_0Aq_1] &::= b[q_0Aq_0][q_0zq_1] \mid b[q_0Aq_1][q_1zq_1] \mid b[q_0Ar][rzq_1] \mid b[q_0As][szq_1] \\
 [q_0Ar] &::= b[q_0Aq_0][q_0zr] \mid b[q_0Aq_1][q_1zr] \mid b[q_0Ar][r zr] \mid b[q_0As][s zr] \\
 [q_0As] &::= b[q_0Aq_0][q_0zs] \mid b[q_0Aq_1][q_1zs] \mid b[q_0Ar][rzs] \mid b[q_0As][szs] \\
 [q_0Aq_1] &::= a \\
 [q_1Ar] &::= \lambda \\
 [q_1zr] &::= \lambda \\
 [q_1Br] &::= \lambda \\
 [rAr] &::= \lambda \\
 [r zr] &::= \lambda \\
 [rBr] &::= \lambda
 \end{aligned}$$

Una gramática bien formada equivalente a la dada es  $G'_2 := (\{a, b\}, \{S, [q_0Ar]\}, S, \mathcal{P}')$ , donde  $\mathcal{P}'$  son las producciones

$$\begin{aligned}
 S &::= a[q_0Ar] \mid aa \\
 [q_0Ar] &::= b[q_0Ar] \mid ba
 \end{aligned}$$

(c) ( $\clubsuit$ )  $AP_3 = (\{0, 1\}, \{A, B\}, \{p, q\}, A, p, f, \emptyset)$

$$\begin{aligned}
 f(p, 1, A) &= \{(p, BA)\} \\
 f(p, 1, B) &= \{(p, BB)\} \\
 f(p, 0, B) &= \{(q, \lambda)\} \\
 f(q, 0, B) &= \{(p, \lambda)\} \\
 f(q, \lambda, A) &= \{(q, \lambda)\}
 \end{aligned}$$

**Solución:**

$G_3 := (\{0, 1\}, \{S, [pAp], [pAq], [pBp], [pBq], [qAp], [qAq], [qBp], [qBq]\}, S, \mathcal{P})$ , donde  $\mathcal{P}$  son las producciones

$$\begin{aligned}
 S &::= [pAp] \mid [pAq] \\
 [pAp] &::= 1[pBp][pAp] \mid 1[pBq][qAp] \\
 [pAq] &::= 1[pBp][pAq] \mid 1[pBq][qAq] \\
 [pBp] &::= 1[pBp][pBp] \mid 1[pBq][qBp] \\
 [pBq] &::= 1[pBp][pBq] \mid 1[pBq][qBq] \\
 [pBq] &::= 0 \\
 [qBp] &::= 0 \\
 [qAq] &::= \lambda
 \end{aligned}$$

(d) ( $\clubsuit$ )  $AP_4 = (\{0, 1\}, \{A, S\}, \{p, q\}, S, p, f, \emptyset)$

$$f(p, 0, S) = \{(p, AS)\}$$

$$f(p, 0, A) = \{(p, AA)\}$$

$$f(p, 1, A) = \{(q, \lambda)\}$$

$$f(q, 1, A) = \{(q, \lambda)\}$$

$$f(q, \lambda, A) = \{(q, \lambda)\}$$

$$f(q, \lambda, S) = \{(q, \lambda)\}$$

**Solución:**

$G_4 := (\{0, 1\}, \{T, [pAp], [pAq], [pSp], [pSq], [qAp], [qAq], [qSp], [qSq]\}, T, \mathcal{P})$ ,  
donde  $\mathcal{P}$  son las producciones

$$T ::= [pSp] \mid [pSq]$$

$$[pSp] ::= 0[pAp][pSp] \mid 0[pAq][qSp]$$

$$[pSq] ::= 0[pAp][pSq] \mid 0[pAq][qSq]$$

$$[pAp] ::= 0[pAp][pAp] \mid 0[pAq][qAp]$$

$$[pAq] ::= 0[pAp][pAq] \mid 0[pAq][qAq]$$

$$[pAq] ::= 1$$

$$[qAq] ::= 1 \mid \lambda$$

$$[qSq] ::= \lambda$$