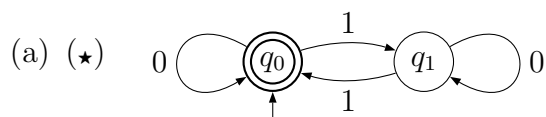


**Hoja de Problemas 4**  
Autómatas Finitos Deterministas

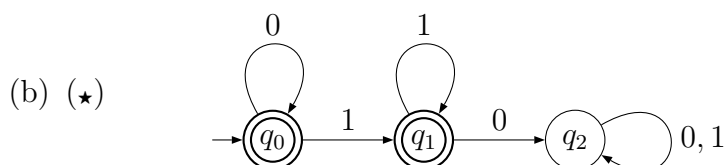
NIVEL DEL EJERCICIO : (★) básico, (♣) medio, (♠) avanzado.

1. Indicar el lenguaje aceptado por los siguientes autómatas :

**Solución:**

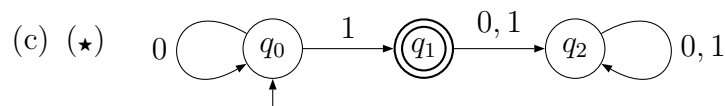
El lenguaje que reconoce este autómata es un lenguaje binario donde las palabras aceptadas contienen un número par de unos:

$$L = \{w \mid w \in \{0,1\}^*, n_1(w) \bmod 2 = 0\}$$

**Solución:**

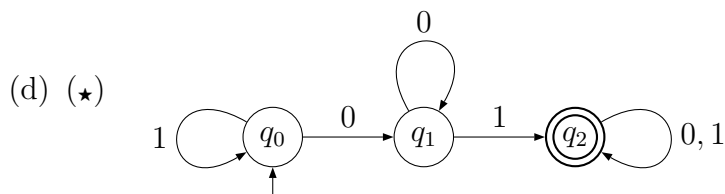
El lenguaje aceptado por este autómata es un lenguaje binario donde todas las palabras aceptadas tienen todos los ceros situados delante de todos los unos:

$$L = \{0^n 1^m \mid n \geq 0, m \geq 0\}$$

**Solución:**

El lenguaje reconocido por este autómata, es un lenguaje binario que está formado por palabras compuestas por un cierto número de ceros y finalizadas con un uno:

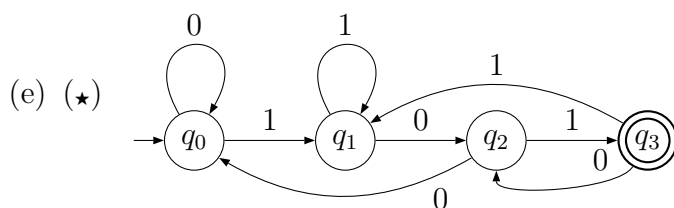
$$L = \{0^n 1 \mid n \geq 0\}$$



**Solución:**

El autómata anterior acepta palabras binarias que contienen la secuencia “01”:

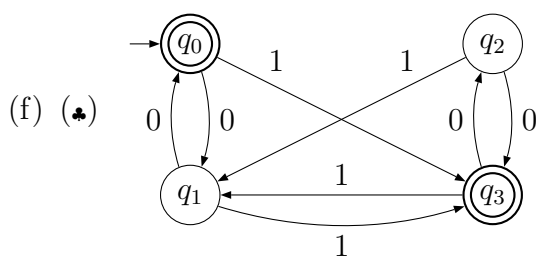
$$L = \{w \mid w \in \{0,1\}^*, w \text{ contiene } 01\}$$



**Solución:**

Dado una palabra  $x$  cualquiera. Obviamente, el autómata, al procesar  $x$  se quedaría en alguno de sus estados. Se puede observar que desde cualquier estado se llega a  $q_3$  con la cadena 101. Por tanto, el lenguaje reconocido por el autómata es el conjunto de palabras binarias que finalizan con la secuencia “101”:

$$L = \{xy \mid x \in \{0,1\}^*, y = 101\}$$



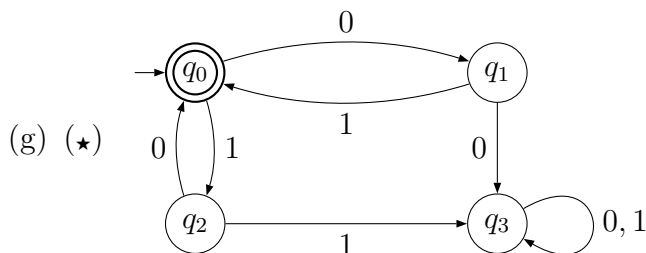
**Solución:**

El lenguaje reconocido por el autómata corresponde a las siguientes cadenas binarias:

1. Si la cadena no tiene ningún uno, se reconocen cadenas con un número de ceros par.
2. Si el número de unos es par (y mayor que cero), la cadena debe terminar con un número de ceros impar.
3. Si el número de unos es impar, la cadena debe terminar con un número de ceros par.

Es decir:

$$L = \{0^{2m} \mid m \geq 0\} \cup \{x10^{2m} \mid x \in \{0,1\}^*, n_1(x) \bmod 2 = 0, m \geq 0\} \cup \{x10^{2m+1} \mid x \in \{0,1\}^*, n_1(x) \bmod 2 = 1, m \geq 0\}$$



**Solución:**

El lenguaje reconocido por este autómata es el cierre de la unión de otros dos lenguajes. Un primer lenguaje que reconoce cadenas formadas por la concatenación de la secuencia “01”. Un segundo lenguaje que hace lo mismo pero con la secuencia “10”.

Si definimos estos lenguajes:

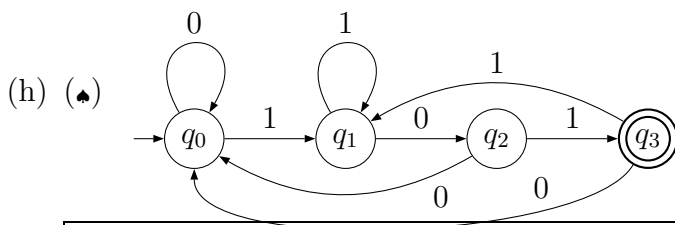
$$L_1 = \{(01)^n \mid n \geq 0\}$$

$$L_2 = \{(10)^m \mid m \geq 0\}$$

$$L_3 = L_1 \cup L_2$$

Por lo tanto, el lenguaje aceptado por este autómata es:

$$L = L_3^*$$



**Solución:**

El lenguaje reconocido por el autómata es la unión de los lenguajes siguientes:

$$L_1 = \{x11(01)^{2n+1} \mid x \in \{0,1\}^*, n \geq 0\}$$

$$L_2 = \{x001(01)^{2n+1} \mid x \in \{0,1\}^*, n \geq 0\}$$

$$L_3 = \{1(01)^{2n+1} | n \geq 0\}$$

$$L_4 = \{01(01)^{2n+1} | n \geq 0\}$$

$$L(AUT) = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4$$

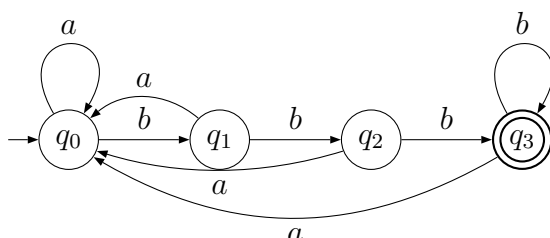
2. Dado el alfabeto  $\Sigma = \{a, b\}$ , construye un autómata para cada uno de los siguientes lenguajes :

- (a) (★) Las cadenas que terminan en “bbb”.

**Solución:**

$$A_a = (\{a, b\}, \{q_0, q_1, q_2, q_3\}, f_a, q_0, \{q_3\})$$

Donde  $f_a$  está definida por el siguiente grafo de transición:

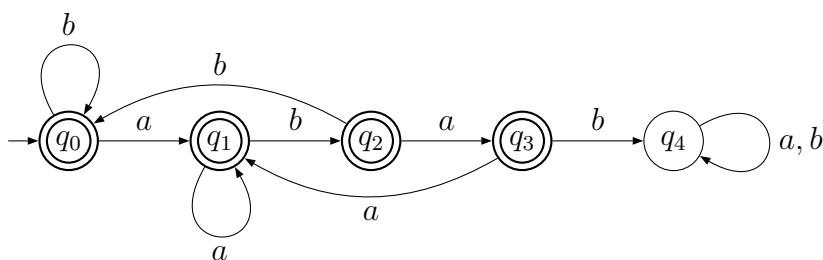


- (b) (★) Las cadenas que no contengan la secuencia “abab”.

**Solución:**

$$A_b = (\{a, b\}, \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, f_b, q_0, \{q_0, q_1, q_2, q_3\})$$

Donde  $f_b$  está definida por el siguiente grafo de transición:

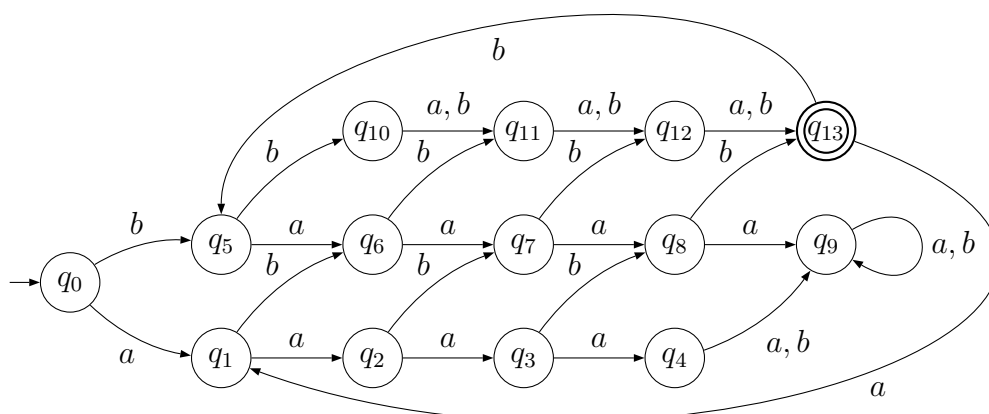


- (c) (♣) Las cadenas tal que cada bloque de cinco símbolos consecutivos contienen al menos dos b's.

**Solución:**

$$A_c = (\{a, b\}, \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_6, q_7, q_8, q_9, q_{10}, q_{11}, q_{12}, q_{13}\}, f_c, q_0, \{q_{13}\})$$

Donde  $f_c$  está definida por el siguiente grafo de transición:



Como comentamos en clase de ejercicios, lo más sencillo es dotar de semántica a cada uno de los estados del autómata, de esta forma será más fácil el diseño del mismo.

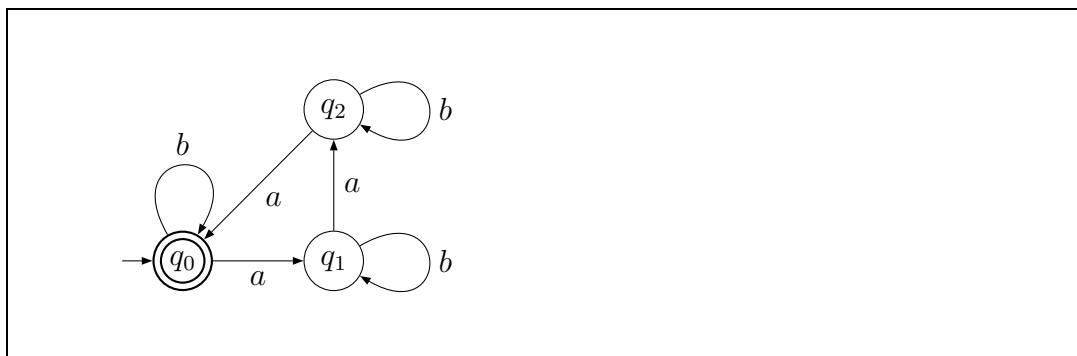
En este ejercicio, por un lado debemos llevar la cuenta del número de caracteres que hemos leído y por otro lado, el número de b's necesarias para reconocer la cadena (dos en este caso). Por ello, el autómata se ha dispuesto en tres zonas horizontales. La primera división horizontal ( $q_1..q_4$ ), se refiere a los posibles estados donde todavía no hemos leído ningún carácter "b". La segunda línea ( $q_5..q_9$ ), almacena información acerca de que hemos leído una b. Y la tercera zona ( $q_{10}..q_{13}$ ), nos indica que hemos leído dos o más b's. Por otro lado, también debemos llevar información acerca del número de caracteres leídos. Por ejemplo,  $q_1$  y  $q_5$  indican que se ha leído un carácter;  $q_2$ ,  $q_6$  y  $q_{10}$  nos informan que se han leído dos caracteres y así sucesivamente. Observemos que no son necesarios cinco estados por línea para guardar información acerca de los caracteres leídos. Así, la primera línea sólo contiene cuatro estados, ya que si no hemos leído previamente ninguna letra "b", el último carácter que reconozcamos nos es indiferente, ya que esa cadena no va a ser reconocida y, en vez de crear un estado sumidero adicional, reutilizamos el estado  $q_9$ . Lo último que deberemos tener en cuenta son las transiciones que salen desde el estado final y que nos indican que se empieza a reconocer otra ristra de cinco caracteres (y por lo tanto, se debe transitar a los estados correspondientes).

- (d) (★) Las cadenas con un número de a's múltiplo de tres.

**Solución:**

$$A_d = (\{a, b\}, \{q_0, q_1, q_2\}, f_d, q_0, \{q_0\})$$

Donde  $f_d$  está definida por el siguiente grafo de transición:

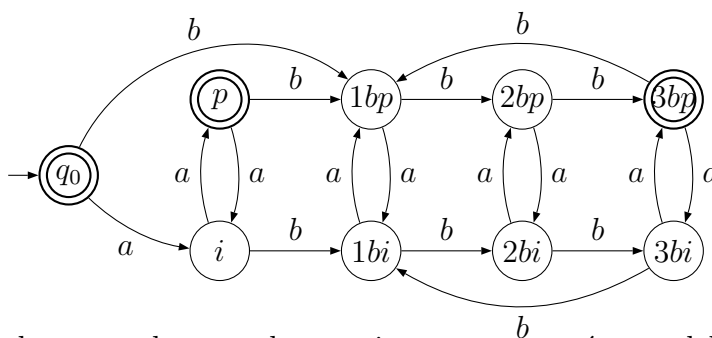


- (e) (♣) Las cadenas con un número par de  $a$ 's y un número de  $b$ 's múltiplo de tres.

**Solución:**

$$A_e = (\{a, b\}, \{q_0, p, i, 1bp, 1bi, 2bp, 2bi, 3bp, 3bi\}, f_e, q_0, \{q_0, p, 3bp\})$$

Donde  $f_e$  está definida por el siguiente grafo de transición:



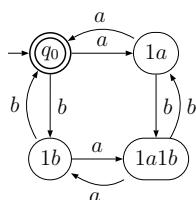
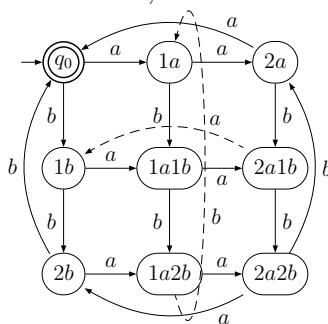
Al igual que en el apartado anterior, en este autómata debemos “recordar” varias cosas. Por un lado, debemos saber si el número de  $a$ 's leídas son pares y por otro lado, debemos saber si el número de  $b$ 's es múltiplo de tres. Para diseñar el autómata procederemos de forma análoga al caso anterior. En este apartado, se ha decidido nombrar a los estados del autómata de forma que conozcamos la semántica de cada uno de los mismos. De esta forma, si la letra “p” forma parte del nombre del autómata significará que el número de letras “a” es par (y al contrario si tenemos la letra “i”). Y por otra parte, en el nombre del autómata también definimos el número de letras “b” que hemos ido reconociendo.

Si queremos ser más correctos, siempre podemos renombrar los estados al finalizar el diseño, de forma que los nombres sean los habituales  $(q_0, q_1, \dots)$ .

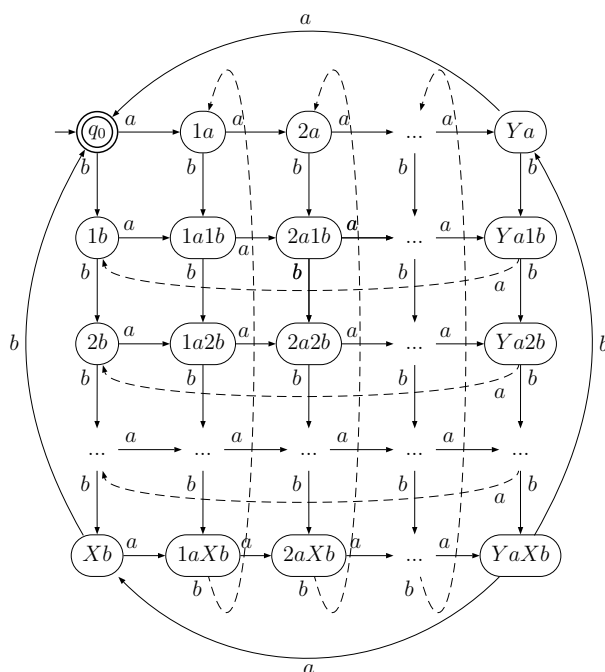
- (f) (♣)  $L(m, n) := \{\mathbf{w} \in \Sigma^* \mid n_a(\mathbf{w}) \bmod m = 0 \text{ y } n_b(\mathbf{w}) \bmod n = 0\}$ .

**Solución:**

Para poder dar una solución genérica como se pide en el ejercicio, es más fácil generar unos cuantos autómatas para intentar identificar el patrón que siguen:

$m=2, n=2$ 

 $m=3, n=3$ 


Podemos observar que de forma genérica, donde  $X = (n - 1)$  e  $Y = (m - 1)$ , se puede realizar la siguiente representación:



Por lo tanto, el autómata puede ser definido como:

$$A_f = (\{a, b\}, \{q_0, 1a, 2a, \dots, 1b, 2b, \dots, (m - 1)a(n - 1)b\}, f_f, q_0, \{q_0\})$$

Donde  $f_f$  está definida por el grafo de transición anterior.

3. (★) Comprobar si los siguientes AFD son equivalentes :

|  |   |   |   |  |   |   |   |   |  |
|--|---|---|---|--|---|---|---|---|--|
| AFD1 =<br>( $\{a, b, c\}, \{p, q, r, s, t, u, v\}, f_1, p, \{s, t, u, v\}$ ) |   |   |   |  | AFD2 =<br>( $\{a, b, c\}, \{p, q, r, s, t\}, f_2, p, \{r, s, t\}$ ) |   |   |   |  |
| $f_1$  | a | b | c |  | $f_1$   | a | b | c |  |
| $\rightarrow p$  | r | t | q |  | $\rightarrow p$   | s | q | p |  |
| q  | q | v | p |  | q   | t | p | q |  |
| r  | p | u | r |  | *r  | q | t | s |  |
| *s   | q | t | u |  | *s  | s | t | s |  |
| *t   | t | v | u |  | *t  | t | s | s |  |
| *u   | t | t | v |  |   |   |   |   |  |
| *v   | u | u | t |  |   |   |   |   |  |

### Solución:

Para comprobar que los dos autómatas son equivalentes, lo primero que deberemos hacer es hallar sus respectivos autómatas mínimos equivalentes.

Minimización de  $f_1$ :

Primero eliminamos los estados inaccesibles. Por lo tanto,  $s$  se elimina de la tabla de transiciones. Después, calcularemos el conjunto cociente  $Q/E$ :

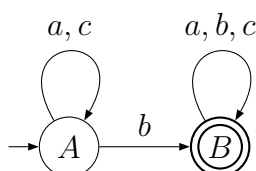
$$Q/E_0 = \{\{p, q, r\}, \{t, u, v\}\}$$

$$Q/E_1 = \{\{p, q, r\}, \{t, u, v\}\}$$

$$Q/E_0 = Q/E_1 \quad \text{por lo tanto} \quad Q/E_0 = Q/E$$

Si renombramos los conjuntos de estados equivalentes y creamos una nueva tabla de transiciones, nos queda el siguiente autómata:

|                 |   |   |   |
|-----------------|---|---|---|
| $f'_1$          | a | b | c |
| $\rightarrow A$ | A | B | A |
| *B              | B | B | B |



Minimización de  $f_2$ :

Primero eliminamos los estados inaccesibles. Por lo tanto,  $r$  se elimina de la tabla de transiciones. Después, calcularemos el conjunto cociente  $Q/E$ :

$$Q/E_0 = \{\{p, q\}, \{s, t\}\}$$

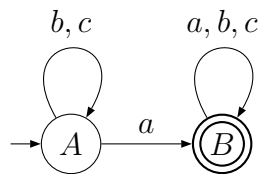


$$Q/E_1 = \{\{p, q\}, \{s, t\}\}$$

$$Q/E_0 = Q/E_1 \quad \text{por lo tanto} \quad Q/E_0 = Q/E$$

Si renombramos los conjuntos de estados equivalentes y creamos una nueva tabla de transiciones, nos queda el siguiente autómata:

| $f'_2$          | a | b | c |
|-----------------|---|---|---|
| $\rightarrow A$ | B | A | A |
| $*B$            | B | B | B |



Como se desprende de sus tablas de transición, estos dos autómatas no son isomorfos y por lo tanto, no son equivalentes.

4. (★) Comprobar cuáles de los siguientes AFD son equivalentes entre sí.

|   |       |   |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |       |   |  |                 |   |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |   |   |      |   |   |
|---|-------|---|---|-----------------|---|---|------|---|---|------|---|---|------|---|---|------|---|---|---|-------|---|--|-----------------|---|---|-----------------|---|---|------|---|---|------|---|---|------|---|---|---|---|---|------|---|---|
| <div>AFD1 =<br/><math>(\{a, b\}, \{p, q, r, s, t, u\}, f_1, p, \{q, r\})</math></div> <table><tr><td><math>f_1</math></td><td>a</td><td>b</td></tr><tr><td><math>\rightarrow p</math></td><td>q</td><td>p</td></tr><tr><td><math>*q</math></td><td>r</td><td>s</td></tr><tr><td><math>*r</math></td><td>q</td><td>t</td></tr><tr><td>s</td><td>t</td><td>u</td></tr><tr><td>t</td><td>s</td><td>u</td></tr><tr><td>u</td><td>q</td><td>u</td></tr></table>                  | $f_1$ | a | b | $\rightarrow p$ | q | p | $*q$ | r | s | $*r$ | q | t | s    | t | u | t    | s | u | u   | q     | u | <div>AFD2 =<br/><math>(\{a, b\}, \{p, q, r, s, t, u\}, f_2, p, \{u\})</math></div> <table><tr><td><math>f_2</math></td><td>a</td><td>b</td></tr><tr><td><math>\rightarrow p</math></td><td>q</td><td>u</td></tr><tr><td>q</td><td>r</td><td>t</td></tr><tr><td>r</td><td>s</td><td>t</td></tr><tr><td>s</td><td>r</td><td>t</td></tr><tr><td>t</td><td>u</td><td>s</td></tr><tr><td><math>*u</math></td><td>u</td><td>q</td></tr></table>                  | $f_2$           | a | b | $\rightarrow p$ | q | u | q    | r | t | r    | s | t | s    | r | t | t | u | s | $*u$ | u | q |
| $f_1$   | a     | b |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |       |   |  |                 |   |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |   |   |      |   |   |
| $\rightarrow p$   | q     | p |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |       |   |  |                 |   |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |   |   |      |   |   |
| $*q$  | r     | s |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |       |   |  |                 |   |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |   |   |      |   |   |
| $*r$  | q     | t |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |       |   |  |                 |   |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |   |   |      |   |   |
| s   | t     | u |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |       |   |  |                 |   |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |   |   |      |   |   |
| t   | s     | u |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |       |   |  |                 |   |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |   |   |      |   |   |
| u   | q     | u |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |       |   |  |                 |   |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |   |   |      |   |   |
| $f_2$   | a     | b |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |       |   |  |                 |   |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |   |   |      |   |   |
| $\rightarrow p$   | q     | u |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |       |   |  |                 |   |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |   |   |      |   |   |
| q   | r     | t |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |       |   |  |                 |   |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |   |   |      |   |   |
| r   | s     | t |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |       |   |  |                 |   |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |   |   |      |   |   |
| s   | r     | t |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |       |   |  |                 |   |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |   |   |      |   |   |
| t   | u     | s |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |       |   |  |                 |   |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |   |   |      |   |   |
| $*u$  | u     | q |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |       |   |  |                 |   |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |   |   |      |   |   |
| <div>AFD3 =<br/><math>(\{a, b\}, \{p, q, r, s, t, u\}, f_3, p, \{s, t, u\})</math></div> <table><tr><td><math>f_3</math></td><td>a</td><td>b</td></tr><tr><td><math>\rightarrow p</math></td><td>u</td><td>q</td></tr><tr><td>q</td><td>t</td><td>r</td></tr><tr><td>r</td><td>s</td><td>r</td></tr><tr><td><math>*s</math></td><td>t</td><td>r</td></tr><tr><td><math>*t</math></td><td>u</td><td>q</td></tr><tr><td><math>*u</math></td><td>s</td><td>p</td></tr></table> | $f_3$ | a | b | $\rightarrow p$ | u | q | q    | t | r | r    | s | r | $*s$ | t | r | $*t$ | u | q | $*u$  | s     | p | <div>AFD4 =<br/><math>(\{a, b\}, \{p, q, r, s, t, u\}, f_4, p, \{r, s\})</math></div> <table><tr><td><math>f_4</math></td><td>a</td><td>b</td></tr><tr><td><math>\rightarrow p</math></td><td>r</td><td>q</td></tr><tr><td>q</td><td>r</td><td>q</td></tr><tr><td><math>*r</math></td><td>s</td><td>t</td></tr><tr><td><math>*s</math></td><td>r</td><td>t</td></tr><tr><td>t</td><td>t</td><td>q</td></tr><tr><td>u</td><td>u</td><td>p</td></tr></table> | $f_4$           | a | b | $\rightarrow p$ | r | q | q    | r | q | $*r$ | s | t | $*s$ | r | t | t | t | q | u    | u | p |
| $f_3$   | a     | b |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |       |   |  |                 |   |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |   |   |      |   |   |
| $\rightarrow p$   | u     | q |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |       |   |  |                 |   |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |   |   |      |   |   |
| q   | t     | r |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |       |   |  |                 |   |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |   |   |      |   |   |
| r   | s     | r |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |       |   |  |                 |   |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |   |   |      |   |   |
| $*s$  | t     | r |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |       |   |  |                 |   |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |   |   |      |   |   |
| $*t$  | u     | q |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |       |   |  |                 |   |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |   |   |      |   |   |
| $*u$  | s     | p |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |       |   |  |                 |   |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |   |   |      |   |   |
| $f_4$   | a     | b |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |       |   |  |                 |   |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |   |   |      |   |   |
| $\rightarrow p$   | r     | q |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |       |   |  |                 |   |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |   |   |      |   |   |
| q   | r     | q |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |       |   |  |                 |   |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |   |   |      |   |   |
| $*r$  | s     | t |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |       |   |  |                 |   |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |   |   |      |   |   |
| $*s$  | r     | t |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |       |   |  |                 |   |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |   |   |      |   |   |
| t   | t     | q |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |       |   |  |                 |   |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |   |   |      |   |   |
| u   | u     | p |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |       |   |  |                 |   |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |   |   |      |   |   |
| <div>AFD5 =<br/><math>(\{a, b\}, \{p, q, r, s, t\}, f_5, p, \{r, s\})</math></div> <table><tr><td><math>f_5</math></td><td>a</td><td>b</td></tr><tr><td><math>\rightarrow p</math></td><td>q</td><td>r</td></tr><tr><td>q</td><td>q</td><td>t</td></tr><tr><td><math>*r</math></td><td>s</td><td>q</td></tr><tr><td><math>*s</math></td><td>r</td><td>q</td></tr><tr><td>t</td><td>r</td><td>q</td></tr></table>  | $f_5$ | a | b | $\rightarrow p$ | q | r | q    | q | t | $*r$ | s | q | $*s$ | r | q | t    | r | q | <div>AFD6 =<br/><math>(\{a, b\}, \{p, q, r, s, t, u\}, f_6, p, \{r, s, t\})</math></div> <table><tr><td><math>f_4</math></td><td>a</td><td>b</td></tr><tr><td><math>\rightarrow p</math></td><td>q</td><td>r</td></tr><tr><td>q</td><td>p</td><td>s</td></tr><tr><td><math>*r</math></td><td>t</td><td>u</td></tr><tr><td><math>*s</math></td><td>t</td><td>u</td></tr><tr><td><math>*t</math></td><td>t</td><td>u</td></tr><tr><td>u</td><td>u</td><td>u</td></tr></table> | $f_4$ | a | b  | $\rightarrow p$ | q | r | q               | p | s | $*r$ | t | u | $*s$ | t | u | $*t$ | t | u | u | u | u |      |   |   |
| $f_5$   | a     | b |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |       |   |  |                 |   |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |   |   |      |   |   |
| $\rightarrow p$   | q     | r |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |       |   |  |                 |   |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |   |   |      |   |   |
| q   | q     | t |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |       |   |  |                 |   |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |   |   |      |   |   |
| $*r$  | s     | q |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |       |   |  |                 |   |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |   |   |      |   |   |
| $*s$  | r     | q |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |       |   |  |                 |   |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |   |   |      |   |   |
| t   | r     | q |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |       |   |  |                 |   |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |   |   |      |   |   |
| $f_4$   | a     | b |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |       |   |  |                 |   |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |   |   |      |   |   |
| $\rightarrow p$   | q     | r |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |       |   |  |                 |   |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |   |   |      |   |   |
| q   | p     | s |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |       |   |  |                 |   |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |   |   |      |   |   |
| $*r$  | t     | u |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |       |   |  |                 |   |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |   |   |      |   |   |
| $*s$  | t     | u |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |       |   |  |                 |   |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |   |   |      |   |   |
| $*t$  | t     | u |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |       |   |  |                 |   |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |   |   |      |   |   |
| u   | u     | u |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |       |   |  |                 |   |   |                 |   |   |      |   |   |      |   |   |      |   |   |   |   |   |      |   |   |

**Solución:**

Al igual que en el ejercicio anterior, hallaremos el autómata mínimo equivalente de cada uno de ellos.

Minimización de  $f_1$ :

No tiene estados inaccesibles, por lo tanto, pasamos a calcular el conjunto cociente  $Q/E$ :

$$Q/E_0 = \{\{p, s, t, u\}, \{q, r\}\}$$

$$Q/E_1 = \{\{p, u\}, \{s, t\}, \{q, r\}\}$$

$$Q/E_2 = \{\{p, u\}, \{s, t\}, \{q, r\}\}$$

$$Q/E_2 = Q/E_1 \quad \text{por lo tanto} \quad Q/E_1 = Q/E$$

$$\underbrace{\{p, u\}}_A, \underbrace{\{s, t\}}_B, \underbrace{\{q, r\}}_C$$

| $f'_1$          | a | b |
|-----------------|---|---|
| $\rightarrow A$ | C | A |
| B               | B | A |
| *C              | C | B |

Minimización de  $f_2$ :

No tiene estados inaccesibles, por lo tanto, pasamos a calcular el conjunto cociente  $Q/E$ :

$$Q/E_0 = \{\{p, q, r, s, t\}, \{u\}\}$$

$$Q/E_1 = \{\{p\}, \{q, r, s\}, \{t\}, \{u\}\}$$

$$Q/E_2 = \{\{p\}, \{q, r, s\}, \{t\}, \{u\}\}$$

$$Q/E_2 = Q/E_1 \quad \text{por lo tanto} \quad Q/E_1 = Q/E$$

$$\underbrace{\{p\}}_A, \underbrace{\{q, r, s\}}_B, \underbrace{\{t\}}_C, \underbrace{\{u\}}_D$$

| $f'_2$          | a | b |
|-----------------|---|---|
| $\rightarrow A$ | B | D |
| B               | B | C |
| C               | D | B |
| *D              | D | B |

Minimización de  $f_3$ :

No tiene estados inaccesibles, por lo tanto, pasamos a calcular el conjunto cociente  $Q/E$ :

$$Q/E_0 = \{\{p, q, r\}, \{s, t, u\}\}$$

$$Q/E_1 = \{\{p, q, r\}, \{s, t, u\}\}$$

$$Q/E_0 = Q/E_1 \quad \text{por lo tanto} \quad Q/E_0 = Q/E$$

$$\underbrace{\{p, q, r\}}_A, \underbrace{\{s, t, u\}}_B$$

| $f'_3$          | a | b |
|-----------------|---|---|
| $\rightarrow A$ | B | A |
| *B              | B | A |

Minimización de  $f_4$ :

No tiene estados inaccesibles, por lo tanto, pasamos a calcular el conjunto cociente  $Q/E$ :

$$Q/E_0 = \{\{p, q, t, u\}, \{r, s\}\}$$

$$Q/E_1 = \{\{p, q\}, \{t, u\}, \{r, s\}\}$$

$$Q/E_2 = \{\{p, q\}, \{t, u\}, \{r, s\}\}$$

$$Q/E_2 = Q/E_1 \quad \text{por lo tanto} \quad Q/E_1 = Q/E$$

$$\underbrace{\{p, q\}}_A, \underbrace{\{t, u\}}_B, \underbrace{\{r, s\}}_C$$

| $f'_4$          | a | b |
|-----------------|---|---|
| $\rightarrow A$ | C | A |
| B               | B | A |
| *C              | C | B |

Minimización de  $f_5$ :

No tiene estados inaccesibles, por lo tanto, pasamos a calcular el conjunto cociente  $Q/E$ :

$$Q/E_0 = \{\{p, q, t\}, \{r, s\}\}$$

$$Q/E_1 = \{\{p\}, \{q\}, \{t\}, \{r, s\}\}$$

$$Q/E_2 = \{\{p\}, \{q\}, \{t\}, \{r, s\}\}$$

$$Q/E_2 = Q/E_1 \quad \text{por lo tanto} \quad Q/E_1 = Q/E$$

$$\underbrace{\{p\}}_A, \underbrace{\{q\}}_B, \underbrace{\{t\}}_C, \underbrace{\{r, s\}}_D$$

| $f'_5$          | a | b |
|-----------------|---|---|
| $\rightarrow A$ | B | D |
| B               | B | C |
| C               | D | B |
| *D              | D | B |

Minimización de  $f_6$ :

No tiene estados inaccesibles, por lo tanto, pasamos a calcular el conjunto cociente  $Q/E$ :

$$Q/E_0 = \{\{p, q, u\}, \{r, s, t\}\}$$

$$Q/E_1 = \{\{p, q\}, \{u\}, \{r, s, t\}\}$$

$$Q/E_2 = \{\{p, q\}, \{u\}, \{r, s, t\}\}$$

$$Q/E_2 = Q/E_1 \quad \text{por lo tanto} \quad Q/E_1 = Q/E$$

$$\underbrace{\{p, q\}}_A, \underbrace{\{u\}}_B, \underbrace{\{r, s, t\}}_C$$

| $f'_6$          | a | b |
|-----------------|---|---|
| $\rightarrow A$ | A | C |
| B               | B | B |
| $*C$            | C | B |

Si comprobamos las tablas de transición correspondientes, el resultado del problema es el siguiente:

AF1 es equivalente a AF4

AF2 es equivalente a AF5

5. (♠) Sea  $\Sigma = \{0, 1\}$  un alfabeto y sea  $L$  el lenguaje de las cadenas que consideradas como números binarios tienen un valor entero múltiplo de 5. Demuestra que  $L$  es regular.

### Solución:

Debemos encontrar un autómata que reconozca el lenguaje, apoyándonos en la definición:

*$L$  es regular si existe un autómata finito que lo reconoce*

La construcción del autómata se basa en las siguientes ideas:

- El autómata tendrá 5 estados – uno para cada posible valor del módulo de una cadena binaria cualquiera. Sean los nombres de estos estados  $\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$  tal que con una palabra  $x$  con  $x \bmod 5 = i$  el autómata una para o transita al estado  $q_i$ . Obviamente, el estado  $q_0$  será final.
- Definimos las transiciones de forma recursiva. Para ello se supone que el autómata haya leído una cadena binaria  $x$  ( $x \bmod 5 = i$ ) y se encontrará en el estado  $q_i$  (para  $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ). La cuestión será a que estado tendrá que transitar el autómata al añadir un nuevo bit (0 o 1) al final de la cadena, es decir, como cambiaría el módulo ya conocido de  $x$  al añadir un nuevo bit. Realizamos el análisis correspondiente:  
Sea  $x$  la cadena de bits ya leída por el autómata y sea  $q_i$  el estado al que haya transitado. Suponemos que  $x = x_n x_{n-1} x_{n-2} \dots x_0$  ( $x_i \in \{0, 1\}$ ). Obviamente, el valor decimal de  $x$  es  $v_x = x_n * 2^n + x_{n-1} * 2^{n-1} + \dots + x_0 * 2^0$  y, dado que el autómata hay transitado a  $q_i$ , se cumple  $v_x \bmod 5 = i$ . ¿Cómo tendría que cambiar el módulo si añadimos un nuevo bit (0 o 1) al final de  $x$ . Analizamos los dos casos posibles:

- *Se añade un 0:* La cuestión es a que estado hay que transitar desde el estado  $q_i$  si leemos un 0. La nueva palabra sería  $x0 = x_n x_{n-1} x_{n-2} \dots x_0 0$ . El valor decimal sería  $v_{x0} = 2(x_n * 2^n + x_{n-1} * 2^{n-1} + \dots + x_0 * 2^0)$ . Respecto al módulo de  $x0$  podemos observar que  $v_{x0} \bmod 5 = (2v_x) \bmod 5 =$

$2(v_x \bmod 5) \bmod 5$  y si  $v_x \bmod 5 = i$ , se cumple:  $v_{x0} \bmod 5 = (2i) \bmod 5$ . Esta formula nos da el estado al que hay que transitar desde el estado  $q_i$  con el 0. Así desde  $q_3$ , por ejemplo, hay que transitar a  $q_1$  ( $(2 * 3) \bmod 5 = 1$ ), etc.

- *Se añade un 1:* La cuestión es a que estado hay que transitar desde el estado  $q_i$  si leemos un 1. La nueva palabra sería  $x1 = x_n x_{n-1} x \dots x_0 1$ . El valor decimal sería  $v_{x1} = 2(x_n * 2^n + x_{n-1} * 2^{n-1} + \dots + x_0 * 2^0) + 1$ . Respecto al módulo de  $x1$  podemos observar que  $v_{x1} \bmod 5 = (2v_x + 1) \bmod 5 = 2(v_x \bmod 5) + 1 \bmod 5$  y si  $v_x \bmod 5 = i$ , se cumple:  $v_{x1} \bmod 5 = (2i + 1) \bmod 5$ . Esta formula nos da el estado al que hay que transitar desde el estado  $q_i$  con el 1. Así desde  $q_3$ , por ejemplo, hay que transitar a  $q_2$  ( $(2 * 3 + 1) \bmod 5 = 2$ ), etc.

Con esta idea construimos el siguiente autómata:

$$A = (\{0, 1\}, \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, f, q_0, \{q_0\})$$

Donde  $f$  está definida por el siguiente grafo de transición:

