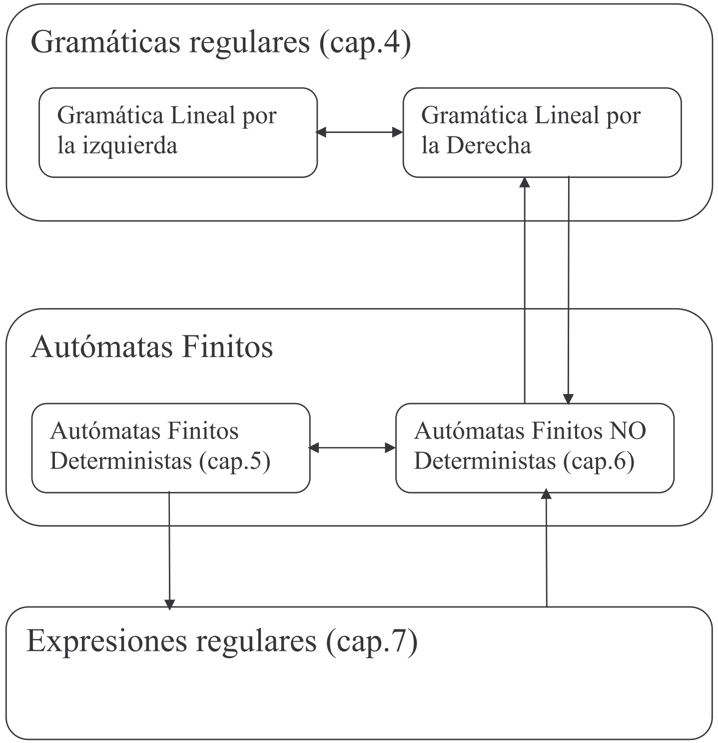
UNIDAD II: LENGUAJES REGULARES

Capítulo 4. Gramáticas regulares.

4.1. Equivalencia de gramáticas regulares

Lema. Teorema de equivalencia.

Distintas técnicas de representación de Lenguajes Regulares y sus interrelaciones:



4.1 Equivalencia de gramáticas regulares

4.1.1 Lema

Para toda gramática lineal derecha $G=(\sum_N,\sum_T,S,P)$ existe otra gramática lineal derecha equivalente G', que no contiene reglas de la forma A::=aS.

Idea de la demostración:

Se pueden considerar dos casos:

1. G no contiene reglas de la forma A::=aS. En este caso, G'=G.
2. G sí las contiene. En este caso, $G'=(\sum_N \cup \{B\},\sum_T,S,P')$, siendo B un nuevo símbolo no terminal, y P' el siguiente conjunto de reglas de producción:

$$
\begin{aligned}
P' = P &- \{A::=aS \in P\} \\
&\cup \{A::=aB \mid A::=aS \in P\} \\
&\cup \{A::=a \mid A::=aS \in P \text{ y } S::=\lambda \in P\} \\
&\cup \{B::=x \mid S::=x \in P \text{ y } x \neq aS \text{ y } x \in \textstyle\sum^+\} \\
&\cup \{B::=aB \mid S::=aS \in P\} \\
&\cup \{B::=a \mid S::=aS \in P \text{ y } S::=\lambda \in P\}
\end{aligned}
$$

Evidentemente, G' no contiene reglas de la forma A::=aS. Por otra parte, L(G')=L(G), ya que las derivaciones en las que aparece algún símbolo A dan lugar a las mismas formas sentenciales en ambos casos:

En P:	En P':
• Usando A::=aS y luego S::=x ($x\neq\lambda$):	
$...\rightarrow uA \rightarrow uaS \rightarrow uax$	$...\rightarrow uA \rightarrow uaB \rightarrow uax$
• Usando A::=aS y luego $S::=\lambda$:	
$...\rightarrow uA \rightarrow uaS \rightarrow ua$	$...\rightarrow uA \rightarrow ua$
• Usando S::=aS (varias veces) y luego $S::=\lambda$:	
$...\rightarrow uS \rightarrow uaS \rightarrow uaaS \rightarrow uaa$	$...\rightarrow uS \rightarrow uaB \rightarrow uaa$

Ejemplos:

1. Sea la gramática $G=(\{S,A\},\{a,b\},S,\{S::=bA,\ A::=aS|a\})$

$\Rightarrow$La gramática G' equivalente, sin la producción A::=aS es la siguiente:

$G'=(\{S,A,B\},\{a,b\},S,\{S::=bA,\ A::=aB|a,\ B::=bA\})$

Se cumple que $L(G)=L(G')= \{(ba)^i \mid i\geq 1\}$.

2. Sea la gramática $G=(\{S,A\},\{a,b\},S,\{S::=bA|\lambda,\ A::=aS\})$

$\Rightarrow$La gramática G' equivalente, sin la producción A::=aS es la siguiente:

$G'=(\{S,A,B\},\{a,b\},S,\{S::=bA|\lambda,\ A::=aB|a,\ B::=bA\})$

Se cumple que $L(G)=L(G')= \{(ba)^i \mid i\geq 1\}$.

¿Qué pasaría si no se añade la regla A::=a?

3. Situación con $S::=aS \in P$:

añadir B::=aS no valdría $\Rightarrow$ hay que añadir B::=aB

Sea la gramática

$G=(\{S,A\},\{0,1\},S,\{S::=0S|1A|\lambda,\ A::=0S|0\})$

¿Cómo será la gramática equivalente sin reglas A::=aS?

4.1.2 Teorema de equivalencia

Teorema:
Para toda gramática lineal por la derecha $G_D=(\sum_N,\sum_T,S,P_D)$ existe una gramática lineal por la izquierda G_I, tal que $L(G_D)=L(G_I)$.

Idea de la demostración:
Considérese la gramática construida mediante los siguientes pasos:

1. Obtener la gramática $G'_D=(\sum'_N,\sum_T,S,P'_D)$ equivalente a G_D sin reglas de la forma A::=aS (mediante el resultado del lema anterior).

2. Construir un grafo dirigido, que denominaremos *directo*, asociado a G'_D, de la siguiente forma:

   a) El conjunto de nodos coincide con $\sum'_N \cup\{\lambda\}$

   b) Si A::=aB $\in$ P'_D, incluir un arco de A a B etiquetado con a

   c) Si A::=a $\in$ P'_D, incluir un arco de A a λ etiquetado con a

   d) Si S::= $\lambda \in$ P'_D, incluir un arco de S a λ sin etiquetar

3. A partir del grafo directo, construir su grafo *inverso* asociado, de la siguiente forma:

   a) Intercambiar los nodos S y λ

   b) Invertir el sentido de las flechas de todos los arcos

4. La gramática $G_I=(\sum'_N,\sum_T,S,P_I)$ se obtiene a partir del grafo inverso de la siguiente forma:

   a) Si existe arco desde A hasta B etiquetado con a, incluir A::=Ba en P_I

   b) Si existe arco desde A hasta λ etiquetado con a, incluir A::=a en P_I

   c) Si existe arco desde S hasta λ, incluir S::=λ en P_I

Existe una correspondencia directa entre las sentencias generadas por la gramática G'_D/G_I y todos los caminos posibles desde el nodo S al nodo λ en el grafo directo/inverso:

$a_1a_2\ldots a_n\in L(G'_D)$:

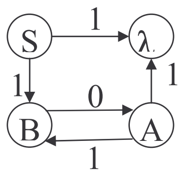
- sii $S\to a_1A_1\to a_1a_2A_2\to\ldots\to a_1a_2\ldots A_{n-1}\to a_1a_2\ldots a_n$ (en G'_D)
- sii $a_1a_2\ldots a_n$ es un camino del grafo diretco desde S hasta λ
- sii $a_n\ldots a_2a_1$ es un camino del grafo inverso desde S hasta λ
- sii $S\to A_{n-1}a_n\to\ldots\to A_1\ldots a_n\to a_1a_2\ldots a_n$ (en G_I)
- sii $a_1a_2\ldots a_n\in L(G_I)$

Teorema:
Para toda gramática lineal por la izquierda $G_I=(\sum_N,\sum_T,S,P_D)$ existe una gramática lineal por la derecha G_D, tal que $L(G_D)=L(G_I)$.

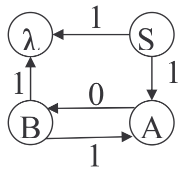
Demostración:
Similar al teorema anterior.

Ejemplos:

1. Sea la gramática G_D=({S,B},{0,1},S,{S::=1B|1, B::=0S}). Obtenemos una gramática lineal por la izquierda equivalente siguiendo los pasos anteriores:
   1. G'_D=({S,B,A},{0,1},S,{S::=1B|1, B::=0A, A::=1B|1})
      $S \to 1B \to 10A \to 101B \to 1010A \to \ldots \to 101\ldots010A \to 1(01)^n$
   2. Grafo directo:



   3. Grafo inverso:



   4. G_I=({S,B,A},{0,1},S,{S::=A1|1, B::=A1|1, A::=B0})
      $S \to A1 \to B01 \to A101 \to B0101 \to \ldots \to B(01)^n \to 1(01)^n$

   ¿Que pasaría si no se tuviera en cuenta el paso 1?

2. Sea la gramática lineal por la derecha G=({S,A},{0,1},S,{S::=0S|1A|λ, A::=0S|0}). **Obtener una gramática lineal por la izquierda equivalente.**

Gramáticas que generan lenguajes regulares

Sea G una gramática que no es regular. ¿Es posible que el lenguaje L(G) sea regular?

⇒ SI. Un lenguaje es regular si **existe** una gramática lineal por la izquierda (o lineal por la derecha) que lo genere.

Para saber si el lenguaje L descrito por una gramática no regular G es regular podemos intentar convertir G en una gramática equivalente que sea regular.

Ejemplos:

1. G=({A,S,C},{a,b,c},S,{S::=aS|bA, A::=bA|b|Cc, C::=b})
   analizamos:
   - de C sólo se puede derivar b
   - Por tanto, podemos sustituir cualquier C en una b y eliminar la regla C::=b. Se obtiene:
     G'=({A,S},{a,b,c},S,{S::=aS|bA, A::=bA|b|bc})
     con G: $\ldots \to uAv \to uCcv \to ubcv \to \ldots$
     con G': $\ldots \to uAv \to ubcv \to \ldots$
   - Ahora podemos sustituir la regla A::=bc por las reglas A::=bD y D::=c (D tiene que ser una nueva variable). Se obtiene la gramática lineal por la derecha:
     G''=({A,S,D},{a,b,c},S,{S::=aS|bA,A::=bA|b|bD,D::=c})
     con G': $\ldots \to uAv \to ubcv \to \ldots$
     con G'': $\ldots \to uAv \to ubDv \to ubcv \to \ldots$

2. G=({A,S,C},{a,b},S,{S::=aS|bAaC, bA::=bA|b, C::=Cb|b})
   Obtener una gramática lineal por la derecha equivalente.

3. G=({A,S},{a,b,c},S,{S::=bA, A::=bAa|a})
   ¿Puede construirse una gramática lineal por la derecha equivalente?

4. G=({A,S},{a,b},S,{S::=bA|aS|bS|λ, A::=bAa|a})
   ¿Puede construirse una gramática lineal por la derecha equivalente?