TEORÍA DE AUTÓMATAS Y LENGUAJES FORMALES

INGENIERÍA TÉCNICA EN INFORMÁTICA DE SISTEMAS

Hoja de Problemas 7

Propiedades Lenguajes Regulares

NIVEL DEL EJERCICIO : ($\star$) básico, ($\clubsuit$) medio, ($\spadesuit$) avanzado.

1. ($\clubsuit$) Prueba que el lenguaje de los palíndromos sobre un alfabeto finito con al menos dos elementos no es regular.

Solución:

2. ($\star$) Demuestra o refuta la siguiente afirmación:
"Todo lenguaje que sea un subconjunto de un lenguaje regular es regular".

Solución:

3. Sea $\Sigma = \{a, b, c\}$ un lenguaje finito. Para cada una de las siguientes definiciones del lenguaje $L \subseteq \Sigma$, demuestra que L no es regular:
   (a) ($\star$) $L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$.

   Solución:

   (b) ($\star$) $L = \{a^n b^{2n} \mid n \geq 1\}$.

   Solución:

   (c) ($\star$) $L = \{a^n b^m \mid 0 < n \leq m\}$.

   Solución:

   (d) ($\clubsuit$) $L = \{a^n b^m \mid |n - m| = 2\}$.

   Solución:

   (e) ($\clubsuit$) $L = \{a^n b^m c^m \mid m, n \geq 1\}$.

   Solución:

   (f) ($\clubsuit$) $L = \{a^n b^m a^{m+n} \mid m, n \geq 1\}$.

Solución:

(g) (♣) $L = \{a^n b^m \mid n, m \geq 0 \text{ y } n \neq m\}$.

Solución:

(h) (♣) $L = \{a^n b^m a^l \mid m, n, l \geq 1 \text{ y } l \neq m + n\}$.

Solución:

(i) (♣) $L = \{\mathbf{w} \in \Sigma^* \mid n_a(\mathbf{w}) = n_b(\mathbf{w})\}$.

Solución:
Supongamos por reducción al absurdo que L es regular.
Sea $N \in \mathbb{N}$ la constante del Lema de Bombeo. Sea $\mathbf{x} = a^N b^N \in L$ una palabra del lenguaje. Además, su longitud verifica $|\mathbf{x}| = 2N > N$. Por tanto, podemos aplicar el Lema de Bombeo a esta palabra. Aplicándolo, existen tres palabras $u, v, w \in \{a, b, c\}^*$ verificando:

- $|uv| \leq N$
- $|v| > 0$
- $x = uvw$
- $uv^i w \in L$ para todo $i \geq 0$.

Por la forma que tiene $\mathbf{x}$, y usando la propiedad primera y segunda, tenemos que necesariamente $u = a^j$, $v = a^k$, para $j \geq 0$, $k \geq 1$, $j + k \leq N$. Por tanto, $w = a^{N-j-k} b^N$. Finalmente, aplicando la última propiedad para $i = 0$ se tendría que $uv^0 w \in L$, pero

$$uv^0 w = uw = a^j a^{N-j-k} b^N = a^{N-k} b^N \notin L$$

Esta palabra $a^{N-k} b^N$ no está en L pues $N - k \neq N$ ya que $k \geq 1$.
Por lo tanto, hemos llegado a una contradicción, por lo que se sigue que L no es regular.

(j) (♣) $L = \{\mathbf{w} \in \Sigma^* \mid n_a(\mathbf{w}) < n_b(\mathbf{w})\}$.

Solución:

(k) (♣) $L = \{\mathbf{w} \in \Sigma^* \mid n_a(\mathbf{w}) \neq n_b(\mathbf{w})\}$.

Solución:
Supongamos por reducción al absurdo que L es regular. Entonces su complementario:

$$L^c = \left\{ \mathbf{w} \in \{a, b, c\}^* \mid n_a(\mathbf{w}) = n_b(\mathbf{w}) \right\}$$

también debe ser regular. CONTRADICCIÓN.
Como hemos demostrado anteriormente (apartado:i), L^c no es regular, y por tanto L tampoco lo es.

(l) (♠) $L = \{a^{n^2} \mid n \geq 1\}$.

Solución:

(m) (♠) $L = \{a^{n!} \mid n \geq 3\}$.

Solución:

(n) (♣) $L = \{\mathbf{w_1} c \mathbf{w_2} \mid \mathbf{w_1}, \mathbf{w_2} \in \Sigma^* \ y \ \mathbf{w_1} = \mathbf{w_2}\}$.

Solución:

(ñ) (♣) $L = \{\mathbf{w_1} c \mathbf{w_2} \mid \mathbf{w_1}, \mathbf{w_2} \in \Sigma^* \ y \ \mathbf{w_1} \neq \mathbf{w_2}\}$.

Solución:

(o) (♣) $L = \{\mathbf{ww} \mid \mathbf{w} \in \Sigma^*\}$.

Solución:

4. (♣) Sea $\Sigma = \{., 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ y sea $L_\pi \subseteq \Sigma^*$ el lenguaje de las cadenas que son las truncaciones de la expansión decimal de π. Esto es,

$$L_\pi = \{\lambda, 3, 3., 3{,}1, 3{,}14, 3{,}141, 3{,}1415, 3{,}14159, \ldots\}.$$

Demuestra que L_π no es regular.

Solución:

5. (♣) Sea $\Sigma = \{a, b\}$ un alfabeto finito, y sea $L \subseteq \Sigma^*$ el lenguaje definido por la siguiente igualdad:

$$L = \{\mathbf{xwx} \in \Sigma^* \mid \mathbf{x}, \mathbf{w} \in \Sigma^* \ , \ |\mathbf{x}| = 2\}.$$

¿Es L regular?

Solución:

6. (♣) Sea $\Sigma = \{0,1\}$ un alfabeto finito, y sea $L \subseteq \Sigma^*$ el lenguaje definido por la siguiente igualdad:

$$L = \{\mathbf{x}\mathbf{w}\mathbf{x}^R \mid \mathbf{x}, \mathbf{w} \in \{0,1\}^+\}.$$

¿Es L un lenguaje regular?

Solución: