

TEORÍA DE AUTÓMATAS Y LENGUAJES FORMALES

MAYO 2010

2do. Parcial

NORMAS :

- La duración del examen es de 2 horas y 15 minutos.
- **Todos los ejercicios se entregarán en hojas separadas.**
- El examen tipo test cuenta hasta 2 puntos sobre la nota total.

1. (2.1 puntos) Gramáticas independientes de contexto:

(a) (0.7 puntos) Dada la siguiente gramática

$G_1 = (\{S, A, B, C, D, E, F, G, H\}, \{a, b, c, f, g\}, S, P)$:

$$\begin{aligned} S &::= AHa \mid BGH \mid agD \\ A &::= C \mid faBG \\ B &::= D \mid ac \mid FG \\ C &::= S \mid \lambda \mid BabD \\ D &::= F \mid bcSa \\ E &::= aB \mid SFca \mid Sfca \\ F &::= B \mid gacAH \\ G &::= agbcDG \mid AH \\ H &::= \lambda \mid ADba \mid AHd \end{aligned}$$

Convierte la gramática G_1 en una gramática bien formada.

Solución:

1. Base: Símbolos anulables: C, H ; Paso inductivo: A ; Paso inductivo: G

$$\begin{aligned} S &::= AHa \mid Aa \mid Ha \mid a \mid BGH \mid B \mid BG \mid BH \mid agD \\ A &::= C \mid faBG \mid faB \\ B &::= D \mid ac \mid FG \mid F \\ C &::= S \mid BabD \\ D &::= F \mid bcSa \\ E &::= aB \mid SFca \mid Sfca \\ F &::= B \mid gacAH \mid gacA \mid gacH \mid gac \\ G &::= agbcDG \mid agbcD \mid AH \mid A \mid H \\ H &::= ADba \mid Db a \mid AHd \mid Ad \mid Hd \mid d \end{aligned}$$

2. Base: $(S, S), (A, A), (B, B), (C, C), (D, D), (E, E), (F, F), (G, G), (H, H)$
Pasos inductivos:

$$\begin{aligned} (S, S) \text{ y } S &::= B \Rightarrow (S, B) \\ (S, B) \text{ y } B &::= D \Rightarrow (S, D) \end{aligned}$$

$(S, D) \text{ y } D ::= F \Rightarrow (S, F)$
 $(A, A) \text{ y } A ::= C \Rightarrow (A, C)$
 $(A, C) \text{ y } C ::= S \Rightarrow (A, S)$
 $(A, S) \text{ y } S ::= B \Rightarrow (A, B)$
 $(A, B) \text{ y } B ::= D \Rightarrow (A, D)$
 $(A, D) \text{ y } D ::= F \Rightarrow (A, F)$
 $(B, B) \text{ y } B ::= D \Rightarrow (B, D)$
 $(B, D) \text{ y } D ::= F \Rightarrow (B, F)$
 $(C, C) \text{ y } C ::= S \Rightarrow (C, S)$
 $(C, S) \text{ y } S ::= B \Rightarrow (C, B)$
 $(C, B) \text{ y } B ::= D \Rightarrow (C, D)$
 $(C, D) \text{ y } D ::= F \Rightarrow (C, F)$
 $(D, D) \text{ y } D ::= F \Rightarrow (D, F)$
 $(D, F) \text{ y } F ::= B \Rightarrow (D, B)$
 $(F, F) \text{ y } F ::= B \Rightarrow (F, B)$
 $(F, B) \text{ y } B ::= D \Rightarrow (F, D)$
 $(G, G) \text{ y } G ::= A \Rightarrow (G, A)$
 $(G, A) \text{ y } A ::= C \Rightarrow (G, C)$
 $(G, C) \text{ y } C ::= S \Rightarrow (G, S)$
 $(G, S) \text{ y } S ::= B \Rightarrow (G, B)$
 $(G, B) \text{ y } B ::= D \Rightarrow (G, D)$
 $(G, D) \text{ y } D ::= F \Rightarrow (G, F)$
 $(G, G) \text{ y } G ::= H \Rightarrow (G, H)$
 \Rightarrow

$(S, S) : S ::= AHa \mid Aa \mid Ha \mid a \mid BGH \mid BG \mid BH \mid agD$
 $(S, B) : S ::= ac \mid FG$
 $(S, D) : S ::= bcSa$
 $(S, F) : S ::= gacAH \mid gacA \mid gacH \mid gac$
 $(A, A) : A ::= faBG \mid faB$
 $(A, C) : A ::= BabD$
 $(A, S) : A ::= AHa \mid Aa \mid Ha \mid a \mid BGH \mid BG \mid BH \mid agD$
 $(A, B) : A ::= ac \mid FG$
 $(A, D) : A ::= bcSa$
 $(A, F) : A ::= gacAH \mid gacA \mid gacH \mid gac$
 $(B, B) : B ::= ac \mid FG$
 $(B, D) : B ::= bcSa$
 $(B, F) : B ::= gacAH \mid gacA \mid gacH \mid gac$
 $(C, C) : C ::= BabD$
 $(C, S) : S ::= AHa \mid Aa \mid Ha \mid a \mid BGH \mid BG \mid BH \mid agD$
 $(C, B) : C ::= ac \mid FG$
 $(C, D) : C ::= bcSa$
 $(C, F) : C ::= gacAH \mid gacA \mid gacH \mid gac$
 $(D, D) : D ::= bcSa$
 $(D, F) : D ::= gacAH \mid gacA \mid gacH \mid gac$
 $(D, B) : D ::= ac \mid FG$

$$\begin{aligned}
 (E, E) : E &::= ab \mid SFca \mid Sfca \\
 (F, F) : F &::= gacAH \mid gacA \mid gacH \mid gac \\
 (F, B) : F &::= ac \mid FG \\
 (F, D) : F &::= bcSa \\
 (G, G) : G &::= agbcDG \mid agbcD \mid AH \\
 (G, A) : G &::= faBG \mid faB \\
 (G, C) : G &::= BabD \\
 (G, S) : G &::= AHa \mid Aa \mid Ha \mid a \mid BGH \mid BG \mid BH \mid agD \\
 (G, B) : G &::= ac \mid FG \\
 (G, D) : G &::= bcSa \\
 (G, F) : G &::= gacAH \mid gacA \mid gacH \mid gac \\
 (G, H) : G &::= ADba \mid Dba \mid AHd \mid Ad \mid Hd \mid d \\
 (H, H) : H &::= ADba \mid Dba \mid AHd \mid Ad \mid Hd \mid d
 \end{aligned}$$

\Rightarrow

$$\begin{aligned}
 S &::= AHa \mid Aa \mid Ha \mid a \mid BGH \mid BG \mid BH \mid agD \mid \\
 &\mid ac \mid FG \mid bcSa \mid gacAH \mid gacA \mid gacH \mid gac \\
 A &::= faBG \mid faB \mid BabD \mid \\
 &\mid AHa \mid Aa \mid Ha \mid a \mid BGH \mid BG \mid BH \mid agD \mid \\
 &\mid ac \mid FG \mid bcSa \mid gacAH \mid gacA \mid gacH \mid gac \\
 B &::= ac \mid FG \mid bcSa \mid gacAH \mid gacA \mid gacH \mid gac \\
 C &::= BabD \mid AHa \mid Aa \mid Ha \mid a \mid BGH \mid BG \mid BH \mid agD \mid \\
 &\mid ac \mid FG \mid bcSa \mid gacAH \mid gacA \mid gacH \mid gac \\
 D &::= bcSa \mid gacAH \mid gacA \mid gacH \mid gac \mid ac \mid FG \\
 E &::= ab \mid SFca \mid Sfca \mid gacAH \mid gacA \mid gacH \mid gac \\
 F &::= ac \mid FG \mid bcSa \\
 G &::= agbcDG \mid agbcD \mid AH \mid faBG \mid faB \mid BabD \mid \\
 &\mid AHa \mid Aa \mid Ha \mid a \mid BGH \mid BG \mid BH \mid agD \mid \\
 &\mid ac \mid FG \mid bcSa \mid gacAH \mid gacA \mid gacH \mid gac \mid \\
 &\mid ADba \mid Dba \mid AHd \mid Ad \mid Hd \mid d \\
 H &::= ADba \mid Dba \mid AHd \mid Ad \mid Hd \mid d
 \end{aligned}$$

3. a) Base: a, b, c, d, f, g ; Paso inductivo: $S, A, B, C, D, E, F, G, H$
 \Rightarrow Símbolos no generadores: \emptyset
 La gramática no varía.
- b) Base: Símbolos alcanzables: S ;
 Paso inductivo: $A, B, D, F, G, H, a, b, c, g$; Paso inductivo: d, f
 \Rightarrow Símbolos no alcanzables: C, E
 Se quitan de la gramática las dos producciones con las cabezas C y E .

(b) (0.7 puntos) Dada la siguiente gramática

$G_2 = (\{S, A, B, C\}, \{a, b\}, S, P)$:

$$\begin{aligned}
 S &::= ABa \mid ab \\
 A &::= BCS \mid b \\
 B &::= BCS \mid b \mid a \mid BS \mid AB \\
 C &::= CB \mid aa
 \end{aligned}$$

Indica si la palabra $baabb$ pertenece al lenguaje generado por G_2 o no. Utiliza el algoritmo CYK.

Solución:

Antes de aplicar el algoritmo CYK, hay que convertir la gramática G_2 en FNC: G_2 ya es una gramática bien formada.

1. Conversión de producciones: $X ::= a, Y ::= b$

$$\begin{aligned}
 S &::= ABX \mid XY \\
 A &::= BCS \mid b \\
 B &::= BCS \mid b \mid a \mid BS \mid AB \\
 C &::= CB \mid XX
 \end{aligned}$$

2. Conversión de cadenas $\alpha, \alpha \in \Sigma_N^*, |\alpha| \geq 3$

$$\begin{aligned}
 ABX : T_1 &::= BX \\
 BCS : T_2 &::= CS \\
 \Rightarrow X &::= a \\
 Y &::= b \\
 S &::= AT_1 \mid XY \\
 A &::= BT_2 \mid b \\
 B &::= BT_2 \mid b \mid a \mid BS \mid AB \\
 C &::= CB \mid XX \\
 T_1 &::= BX \\
 T_2 &::= CS
 \end{aligned}$$

Aplicación del algoritmo CYK:

Fila 5:

$$\begin{aligned}
 X_{11}(b) &= \{A, B, Y\} = X_{44} = X_{55} \\
 X_{22}(a) &= \{B, X\} = X_{33}
 \end{aligned}$$

Fila 4:

$$\begin{aligned}
 X_{12}(ba) &= X_{11}X_{22} : \{A, B, Y\}\{B, X\} = \{AB, AX, BB, BX, YB, YX\} \\
 \Rightarrow X_{12}(ba) &= \{B, T_1\} \\
 X_{23}(aa) &= X_{22}X_{33} : \{B, X\}\{B, X\} = \{BB, BX, XB, XX\} \\
 \Rightarrow X_{23}(aa) &= \{C, T_1\} \\
 X_{34}(ab) &= X_{33}X_{44} : \{B, X\}\{A, B, Y\} = \{BA, BB, BY, XA, XB, XY\} \\
 \Rightarrow X_{34}(ab) &= \{S\} \\
 X_{45}(bb) &= X_{44}X_{55} : \{A, B, Y\}\{A, B, Y\} = \{AA, AB, AY, BA, BB, BY, YA, YB, YY\} \\
 \Rightarrow X_{45}(bb) &= \{B\}
 \end{aligned}$$

Fila 3:

$$\begin{aligned}
 X_{13}(baa) &= X_{11}X_{23} \cup X_{12}X_{33} : \{A, B, Y\}\{C, T_1\} \cup \{B, T_1\}\{B, X\} \\
 &= \{AC, AT_1, BC, BT_1, YC, YT_1, BB, BX, T_1B, T_1X\} \\
 \Rightarrow X_{13}(baa) &= \{S, T_1\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_{24}(aab) &= X_{22}X_{34} \cup X_{23}X_{44} : \{B, X\}\{S\} \cup \{C, T_1\}\{A, B, Y\} \\ &= \{BS, XS, CA, CB, CY, T_1A, T_1B, T_1Y\} \\ &\Rightarrow X_{24}(aab) = \{B, C\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_{35}(abb) &= X_{33}X_{45} \cup X_{34}X_{55} : \{B, X\}\{B\} \cup \{S\}\{A, B, Y\} \\ &= \{BB, XB, SA, SB, SY\} \\ &\Rightarrow X_{35}(abb) = \{\} \end{aligned}$$

Fila 2:

$$\begin{aligned} X_{14}(baab) &= X_{11}X_{24} \cup X_{12}X_{34} \cup X_{13}X_{44} : \\ &\{A, B, Y\}\{B, C\} \cup \{B, T_1\}\{S\} \cup \{S, T_1\}\{A, B, Y\} \\ &= \{AB, AC, BB, BC, YB, YC, BS, T_1S, SA, SB, SY, T_1A, T_1B, T_1Y\} \\ &\Rightarrow X_{14}(baab) = \{B\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_{25}(aabb) &= X_{22}X_{35} \cup X_{23}X_{45} \cup X_{24}X_{55} : \{B, X\}\{\} \cup \{C, T_1\}\{B\} \cup \{B, C\}\{A, B, Y\} = \\ &\{CB, T_1B, BA, BB, BY, CA, CB, CY\} \\ &\Rightarrow X_{25}(aabb) = \{C\} \end{aligned}$$

Fila 1:

$$\begin{aligned} X_{15}(baabb) &= X_{11}X_{25} \cup X_{12}X_{35} \cup X_{13}X_{45} \cup X_{14}X_{55} : \{A, B, Y\}\{C\} \cup \{B, T_1\}\{\} \cup \\ &\{S, T_1\}\{B\} \cup \{B\}\{A, B, Y\} = \{AC, BC, YC, SB, T_1B, BA, BB, BY\} \\ &\Rightarrow X_{15}(baabb) = \{\} \end{aligned}$$

El axioma S no se encuentra dentro del conjunto X_{15} , por tanto, la palabra $baabb$ no pertenece al lenguaje generado por la gramática G_2 .

(c) (0.7 puntos) Dada la siguiente gramática

$G_3 = (\{S, A, B, C\}, \{a, b\}, S, P)$:

$$\begin{aligned} S &::= ABa \mid ab \\ A &::= BCS \mid b \\ B &::= BaS \mid b \mid a \mid Bb \\ C &::= CB \mid aa \end{aligned}$$

Convierte la gramática G_3 en una gramática en Forma Normal de Greibach.

Solución:

La gramática G_3 ya es una gramática bien formada.

Sustituir el símbolo A por los cuerpos de A en la primera producción de S .

$$\begin{aligned} S &::= BCSBa \mid bBa \mid ab \\ A &::= BCS \mid b \\ B &::= BaS \mid b \mid a \mid Bb \\ C &::= CB \mid aa \end{aligned}$$

Eliminar la recursión en las producciones de B .

$$\begin{aligned} S &::= BCSBa \mid bBa \mid ab \\ A &::= BCS \mid b \\ B &::= b \mid a \mid bD \mid aD \\ C &::= CB \mid aa \\ D &::= aS \mid b \mid aSD \mid bD \end{aligned}$$

Sustituir los símbolos B en los cuerpos de las producciones de S y A .

$S ::= bCSBa \mid aCSBa \mid bDCSBa \mid aDCSBa \mid bBa \mid ab$
 $A ::= bCS \mid aCS \mid bDCS \mid aDCS \mid b$
 $B ::= b \mid a \mid bD \mid aD$
 $C ::= CB \mid aa$
 $D ::= aS \mid b \mid aSD \mid bD$

Eliminar la recursión en las producciones de C .

$S ::= bCSBa \mid aCSBa \mid bDCSBa \mid aDCSBa \mid bBa \mid ab$
 $A ::= bCS \mid aCS \mid bDCS \mid aDCS \mid b$
 $B ::= b \mid a \mid bD \mid aD$
 $C ::= aa \mid aaE$
 $D ::= aS \mid b \mid aSD \mid bD$
 $E ::= B \mid BE$

Sustituir el símbolo B por los cuerpos de B en las producciones de E .

$S ::= bCSBa \mid aCSBa \mid bDCSBa \mid aDCSBa \mid bBa \mid ab$
 $A ::= bCS \mid aCS \mid bDCS \mid aDCS \mid b$
 $B ::= b \mid a \mid bD \mid aD$
 $C ::= aa \mid aaE$
 $D ::= aS \mid b \mid aSD \mid bD$
 $E ::= b \mid a \mid bD \mid aD \mid bE \mid aE \mid bDE \mid aDE$

2. (2.2 puntos) Gramáticas independientes de contexto:

- (a) (1.5 puntos) Diseña una gramática independiente de contexto que genere el siguiente lenguaje

$$L = \{a^x b^y c^z \mid x \geq y - z; y \geq z; x, y, z \geq 0\}$$

Ten en cuenta las siguientes pistas:

- Por la definición del lenguaje, las b 's que hay en la palabra están “compensadas” por c 's y por a 's. Es decir, se puede considerar que las b 's se parten en dos grupos: 1) un grupo de b 's coincide en número con las c 's al final de la palabra y 2) para el otro grupo de b 's hay por lo menos el mismo número de a 's al principio de la palabra.
- Aparte de las a 's que “compensan” b 's, puede haber más a 's al principio.

Solución:

- La pista 1 lleva directamente a las producciones:
 $Q ::= bc \mid bQc$
- La pista 2 y la pista 3 llevan directamente a las producciones:
 $P ::= Ab \mid APb$ y $A ::= a \mid aA$
- Se unen estas producciones mediante el axioma S :
 $S ::= A \mid P \mid Q \mid AQ \mid PQ \mid \lambda$

$G = (\{abc\}, \{S, P, Q, A\}, S, P)$, P contiene las producciones de arriba.

- (b) (0.1 puntos) Comprueba mediante derivaciones que las siguientes palabras pertenecen a L :

$aaa, aabb, abbc, aaabb, aaabbbccc, bbbccc$

Solución:

$aaa : S \Rightarrow A \Rightarrow aA \Rightarrow aaA \Rightarrow aaa$
 $aabb : S \Rightarrow P \Rightarrow APb \Rightarrow aPb \Rightarrow aAbb \Rightarrow aabb$
 $abbc : S \Rightarrow PQ \Rightarrow AbQ \Rightarrow abQ \Rightarrow abbc$
 $aaabb : S \Rightarrow P \Rightarrow APb \Rightarrow aAPb \Rightarrow aaPb \Rightarrow aaabb$
 $aaabbbccc : S \Rightarrow AQ \Rightarrow aAQ \Rightarrow aaAQ \Rightarrow aaaQ \Rightarrow aaabQc \Rightarrow aaabbQcc \Rightarrow aaabbbccc$
 $bbbccc : S \Rightarrow Q \Rightarrow bQc \Rightarrow bbQcc \Rightarrow bbbccc$

- (c) (0.3 puntos) Escribe tu gramática en forma normal de Greibach (FNG).

Solución:

La gramática G no está bien formada (contiene producciones unitarias). La siguiente gramática G' está bien formada.

$G' = (\{abc\}, \{S, P, Q, A\}, S, P)$, P contiene las siguientes producciones:

$Q ::= bc \mid bQc$
 $P ::= Ab \mid APb$

$A ::= a \mid aA$

$S ::= a \mid aA \mid Ab \mid APb \mid bc \mid bQc \mid AQ \mid PQ \mid \lambda$

G' no contiene recursiones, por tanto, es suficiente reemplazar las variables en los cuerpos de las producciones, primero en P y, posteriormente, en S .

$G_G = (\{abc\}, \{S, P, Q, A\}, S, P)$, P contiene las siguientes producciones:

$Q ::= bc \mid bQc$

$P ::= ab \mid aAb \mid aPb \mid AAPb$

$A ::= a \mid aA$

$S ::= a \mid aA \mid ab \mid aAb \mid aPb \mid AAPb \mid bc \mid bQc \mid aQ \mid aAQ \mid abQ \mid aAbQ \mid aPbQ \mid AAPbQ \mid \lambda$

- (d) (0.3 puntos) Escribe tu gramática en forma normal de Chomsky (FNC).

Solución:

La gramática G' del ejercicio anterior está bien formada.

$G_G = (\{abc\}, \{S, P, Q, A, A_1, B, C\}, S, P)$, P contiene las siguientes producciones:

$Q ::= BC \mid BT_2$

$P ::= AB \mid AT_1$

$A ::= a \mid A_1A$

$S ::= a \mid A_1A \mid AB \mid AT_1 \mid BC \mid BT_2 \mid AQ \mid PQ \mid \lambda$

$A_1 ::= a$

$B ::= b$

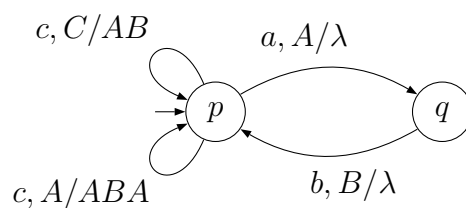
$C ::= c$

$T_1 ::= PB$

$T_2 ::= QC$

3. (2.3 puntos) Dado el siguiente autómata a pila:

$AP = (\{a, b, c\}, \{A, B, C\}, \{p, q\}, p, C, f)$, donde f según el grafo



- (a) (1.7 puntos) Convierte el autómata a pila en una gramática independiente de contexto.

Solución:

Construimos la siguiente gramática independiente de contexto

$G = (\Sigma_N, \{a, b, c\}, C, P)$, donde el conjunto de variable Σ_N consta de

$\Sigma_N = \{C \cup \{[pCq]\} \mid p, q \in Q; X \in \Gamma\}$.

Las producciones P de G son como sigue:

- $C ::= [pCp] \mid [pCq]$.
- $f(p, c, C) = \{p, AB\} \Rightarrow [pCr_2] ::= c[pAr_1][r_1Br_2]$
 $[pCp] ::= c[pAp][pBp]$
 $[pCp] ::= c[pAq][qBp]$
 $[pCq] ::= c[pAp][pBq]$
 $[pCq] ::= c[pAq][qBq]$
- $f(p, c, A) = \{p, ABA\} \Rightarrow [pCr_3] ::= c[pAr_1][r_1Br_2][r_2Ar_3]$
 $[pAp] ::= c[pAp][pBp][pAp]$
 $[pAp] ::= c[pAq][qBp][pAp]$
 $[pAp] ::= c[pAp][pBq][qAp]$
 $[pAp] ::= c[pAq][qBq][qAp]$
 $[pAq] ::= c[pAp][pBp][pAq]$
 $[pAq] ::= c[pAq][qBp][pAq]$
 $[pAq] ::= c[pAp][pBq][qAq]$
 $[pAq] ::= c[pAq][qBq][qAq]$
- $f(p, a, A) = \{q, \lambda\} \Rightarrow [pAr_1] ::= a[q\lambda r_1]$
 $[pAp] ::= a[q\lambda p] \Leftarrow \text{No existe}$
 $[pAq] ::= a[q\lambda q] = a$
- $f(q, b, B) = \{p, \lambda\} \Rightarrow [qBr_1] ::= b[p\lambda r_1]$
 $[qBp] ::= b[p\lambda p] = b$
 $[qBq] ::= b[p\lambda q] \Leftarrow \text{No existe}$

- (b) (0.1 puntos) Demuestra el reconocimiento de la palabra *ccabcabab* por el autómat a pila mediante una secuencia de descripciones instantáneas.

Solución:

$(p, ccabcabab, C) \vdash (p, cabcabab, AB) \vdash (p, abcabab, ABAB) \vdash (q, bcabab, BAB) \vdash (p, cabab, AB) \vdash (p, abab, ABAB) \vdash (q, bab, BAB) \vdash (p, ab, AB) \vdash (q, b, B) \vdash (p, \lambda, \lambda)$

- (c) (0.4 puntos) Demuestra la generación de la misma palabra *ccabcabab* por la gramática generada en la primera parte de este ejercicio.

Solución:

$C \Rightarrow [pCp] \Rightarrow c[pAq][qBp] \Rightarrow cc[pAq][qBp][pAq][qBp] \Rightarrow cca[qBp][pAq][qBp] \Rightarrow ccab[pAq][qBp] \Rightarrow ccabc[pAq][qBp][pAq][qBp] \Rightarrow ccabca[qBp][pAq][qBp] \Rightarrow ccabcab[pAq][qBp] \Rightarrow ccabcaba[qBp] \Rightarrow ccabcabab$

- (d) (0.1 puntos) Convierte el autómat a pila *AP* en un autómat a pila reconocedor por estado final.

Solución:

$AP_F = (\{a, b, c\}, \{A, B, C, S\}, \{p, q, p_0, p_f\}, p_0, S, f, \{p_f\})$, donde f consta de las siguientes transiciones:

- $f(p_0, \lambda, S) = \{(p, CS)\}$
- Incluir todas las transiciones de AP
- $f(p, \lambda, S) = \{p_f, \lambda\}$

4. (1.4 puntos) Una anécdota que se le asocia a Carl Friedrich Gauss es la siguiente: Una mañana en un salón de clases. El profesor, ante un grupo de niños de alrededor de 10 años de edad, estaba molesto por algún mal comportamiento del grupo y les puso un problema en el pizarrón que según él les tomaría un buen rato terminar; así, de paso, podría descansar. En esos tiempos los niños llevaban una pequeña pizarra en la cual hacían sus ejercicios.

Y el profesor dijo que mientras fueran acabando pusieran las pizarras en su escritorio para que luego las revisara. El problema consistía en sumar los primeros cien números enteros, es decir, encontrar la suma de todos los números del 1 al 100. A los pocos segundos de haber planteado el problema se levantó un niño y depositó su pizarra boca abajo sobre el escritorio del maestro. Éste, convencido de que aquel niño no quería trabajar, ni se molestó en ver el resultado; prefirió esperar a que todos terminaran.

Al final de la clase, el profesor dio por acabado el examen y volvió las pizarras hacia arriba. La primera, la del joven Gauss, sólo contenía un número. Cuando el profesor lo leyó, para su sorpresa y la de todos los presentes, resultó que la respuesta del joven Gauss era correcta. Muchos de sus compañeros, sin embargo, habían obtenido una respuesta errónea.

Dada la siguiente progresión aritmética:

- 1 (=1)
- 3 (=1+2)
- 6 (=1+2+3)
- 10 (=1+2+3+4)
- 15 (=1+2+3+4+5)
- 21 (=1+2+3+4+5+6)
- 28 (=1+2+3+4+5+6+7)
- etc.
- 5050 (=1+2+3+4+5+6+...+100) (El problema de Gauss)
- etc.

Dado un lenguaje L sobre el alfabeto a .

Todas las palabras de L tienen una longitud que corresponde con los resultados de la progresión aritmética.

Es decir, L consta de las palabras $a, aaa, aaaaaa, a^{10}, a^{15}, a^{21}, a^{28}$, etc.

Demuestra que L no es un lenguaje independiente de contexto usando el lema de bombeo.

Solución:

Supongamos que L fuera un lenguaje independiente de contexto. Sea n la constante del lema de bombeo. Entonces existe una palabra $z = a^{\sum_{i=1}^n i}$, tal que $|z| \geq n, z \in L$. Existe una descomposición de $z = uvwxy$ con las condiciones:

1. $|vwx| \leq n$
2. $|vx| \geq 1$
3. $\forall i : uv^iwx^iy \in L$

Si $z = a^{\sum_{i=1}^n i} \in L$, la siguiente palabra de L es: $z' = a^{\sum_{i=1}^{n+1} i}$.

$$|z'| - |z| = |uv^2wx^2y| - |uvwxy| = \sum_{i=1}^{n+1} i - \sum_{i=1}^n i = \sum_{i=1}^n i + (n+1) - \sum_{i=1}^n i = n+1 \leq |vx|$$

Es decir, la distance entre $|z'|$ y $|z|$ es $n+1$, que es una contradicción a la regla $|vwx| \leq n$.

Podemos concluir que la suposición *L independiente de contexto* es erróneo y, ‘por tanto, L no es independiente de contexto.