Teoría de Autómatas y Lenguajes Formales

Ingeniería Técnica en Informática de Sistemas

Hoja de Problemas 3

Gramáticas Regulares

Nivel del ejercicio : ($\star$) básico, ($\clubsuit$) medio, ($\spadesuit$) avanzado.

1. ($\star$) Dada la gramática $G = (\{S, A\}, \{0, 1, 2\}, S, \{S ::= 0A \mid 2, A ::= 0S \mid 1\})$, obténgase una gramática lineal izquierda equivalente.

Solución:

$$G_1 = (\{S, A, B\}, \{0, 1, 2\}, S, P\})$$

$$\begin{aligned} P \;=\; & \{S ::= A1 \mid B2 \mid 2, \\ & A ::= B0 \mid 0, \\ & B ::= A0 \end{aligned}$$

2. ($\star$) Dada la gramática $G = (\{S, T_1, T_2\}, \{a, b, c\}, S, \mathcal{P})$ con las producciones

$$\mathcal{P} := \{S ::= aT_1 \mid bT_1 \mid cT_2, T_1 ::= aT_1 \mid bT_1 \mid cT_2, T_2 ::= aT_2 \mid bT_2 \mid \lambda\}),$$

obténgase una gramática lineal izquierda equivalente.

Solución:

$$G_2 = (\{S, T_1, T_2\}, \{a, b, c\}, S, P\})$$

$$\begin{aligned} P \;=\; & \{S ::= T_1c \mid T_2a \mid T_2b \mid c, \\ & T_1 ::= T_1a \mid T_1b \mid a \mid b, \\ & T_2 ::= T_2a \mid T_2b \mid T_1c \mid c \end{aligned}$$

3. ($\star$) Construye una gramática regular que genere el lenguaje $L = \{a(bc)^n \mid n \geq 1\}$.

Solución:

$$G_3 = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, S, P\})$$

$$\begin{aligned} P \;=\; & \{S ::= aB, \\ & B ::= bC, \\ & C ::= cB \mid c \end{aligned}$$

4. ($\star$) Dado el alfabeto $\Sigma = \{a, b, c, d\}$, construye una gramática regular que genere las cadenas en Σ^* que no contengan la secuencia "*abc*".

Solución:

$$G_4 = (\{S, A, B\}, \{a, b, c, d\}, S, P\})$$

$$\begin{aligned} P \quad = \quad & \{S ::= aA \mid bS \mid cS \mid dS \mid a \mid \lambda \\ & A ::= aA \mid bB \mid cS \mid dS \mid a \mid b \\ & B ::= aA \mid bS \mid dS \mid a \end{aligned}$$

5. ($\clubsuit$) Dado el alfabeto $\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, construye una gramática regular que genere los números múltiplos de 3.

Solución:

Idea básica: Un número es múltiplo de 3 si la suma de sus cifras es divisible por 3.

Primero, dividimos los números en tres conjuntos de números en función de su módulo:

P={0,3,6,9} mod 3 = 0, R={1,4,7} mod 3 = 1, Q={2,5,8} mod 3 = 2

- Los números creados por combinación de P, son múltiplos de 3 (ej. 663009, 360)
- Los números creados por combinación de digitos de Q y R en la misma proporción son múltiplos de 3 (ej. 1125, 4287).
- Los números anteriores más cualquier combinación de números del cojunto P, también son múltiplos de 3 (ej. 3021, 21567).

$$G_4 = (\{S, R, Q\}, \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, S, P\})$$

$$\begin{aligned} P \quad = \quad & \{S ::= 0 \mid 3 \mid 6 \mid 9 \mid 0S \mid 3S \mid 6S \mid 9S \mid 1R \mid 4R \mid 7R \mid 2Q \mid 5Q \mid 8Q \\ & R ::= 2 \mid 5 \mid 8 \mid 2S \mid 5S \mid 8S \mid 0R \mid 3R \mid 6R \mid 9R \mid 1Q \mid 4Q \mid 7Q \\ & Q ::= 1 \mid 4 \mid 7 \mid 1S \mid 4S \mid 7S \mid 2R \mid 5R \mid 8R \mid 0Q \mid 3Q \mid 6Q \mid 9Q \end{aligned}$$

6. ($\clubsuit$) Dado un alfabeto finito Σ, demuestra que cualquier lenguaje finito $L \subseteq \Sigma^*$ es regular.

Solución:

Idea: Podemos hacer una gramática regular para definir una palabra. Si el lenguaje es finito, podemos hacer una gramática para cada palabra y luego unir todas las gramáticas en una sola.