UNIVERSIDAD REY JUAN CARLOS — CURSO 2007–2008

TEORÍA DE AUTÓMATAS Y LENGUAJES FORMALES

INGENIERÍA TÉCNICA EN INFORMÁTICA DE SISTEMAS

Hoja de Problemas 6

Expresiones Regulares

NIVEL DEL EJERCICIO : ($\star$) básico, ($\clubsuit$) medio, ($\spadesuit$) avanzado.

1. Obtén expresiones regulares para los siguientes lenguajes:

   (a) ($\star$) $L_1 = \{a^{2n}b^{2m+1} \mid n \geq 0 \ , \ m \geq 0\}$

   Solución:

   $$(aa)^*(bb)^*b$$

   (b) ($\star$) $L_2 = \{\mathbf{w} \in \{0,1\}^* \mid \mathbf{w} \text{ tiene al menos dos ceros consecutivos}\}$

   Solución:

   $$(0+1)^*00(0+1)^*$$

   (c) ($\clubsuit$) $L_3 = \{\mathbf{w} \in \{0,1\}^* \mid n_0(\mathbf{w}) \bmod 2 \neq 0\}$

   Solución:

   $$1^*01^*(1^*01^*01^*)^*$$

   (d) ($\star$) $L_4 = \{\mathbf{w} \in \{a,b\}^* \mid n_a(\mathbf{w}) + n_b(\mathbf{w}) \text{ es par}\}$

   Solución:

   $$((a+b)(a+b))^*$$

   (e) ($\star$) $L_5 = \{a^n b^m \mid n \geq 4 \ , \ m \leq 3\}$

   Solución:

   $$aaaaa^*(\lambda + b + bb + bbb)$$

   (f) ($\clubsuit$) $L_6 = \{ab^n\mathbf{w} \mid n \geq 3 \ , \ \mathbf{w} \in \{a,b\}^+\}$

   Solución:

   $$abbbb^*(a+b)(a+b)^*$$

   (g) ($\spadesuit$) $L_7 = \{\mathbf{w} \in \{a,b\}^* \mid |\mathbf{w}| \bmod 3 = 0\}$

Solución:

$$((a+b)(a+b)(a+b))^*$$

(h) ($\spadesuit$) $L_8 = \{\mathbf{w} \in \{a,b\}^* \mid n_a(\mathbf{w}) \bmod 5 \neq 0\}$

Solución:

$$b^*a(\lambda + b^*a(\lambda + b^*a(\lambda + b^*a)))b^*(b^*ab^*ab^*ab^*ab^*ab^*)^*$$

2. Obtén una expresión regular para los siguientes lenguajes sobre $\Sigma = \{a,b,c\}$:

(a) ($\star$) Todas las cadenas que contengan una única a.

Solución:

$$(b+c)^*a(b+c)^*$$

(b) ($\clubsuit$) Todas las cadenas que no contengan más de tres a's.

Solución:

$$(b+c)^*(\lambda + a(b+c)^*(\lambda + a(b+c)^*(\lambda + a(b+c)^*)))$$

(c) ($\clubsuit$) Todas las cadenas que contengan al menos una ocurrencia de cada símbolo de Σ.

Solución:
Sea $\gamma = (a+b+c)^*$. Entonces la solución es:

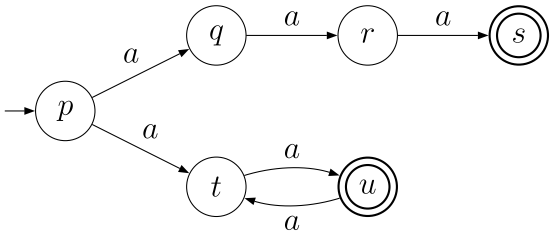
$$(\gamma a\gamma b\gamma c) + (\gamma a\gamma c\gamma b) + (\gamma b\gamma a\gamma c) + (\gamma b\gamma c\gamma a) + (\gamma c\gamma a\gamma b) + (\gamma c\gamma b\gamma a)$$

(d) ($\spadesuit$) Todas las cadenas que no terminan en $abab$.

Solución:

$$(b+c+a(a+baa)^*ba(b(b+c)+c))^*(\lambda + a(a+baa)^*ba(ba)^*)$$

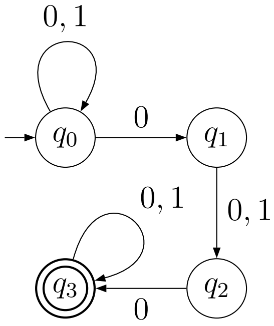
3. ($\star$) Obtén, usando el método de las ecuaciones características, la expresión regular del lenguaje reconocido por el autómata siguiente:



Solución:

$$aaa + aa(aa)^*$$

4. (♣) Obtén, utilizando el método de las ecuaciones características, la expresión regular del lenguaje reconocido por el autómata siguiente:

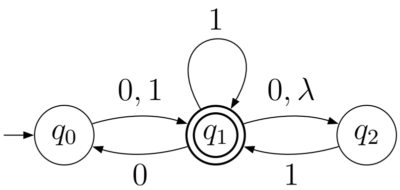


Solución:

$$(0 + 1)^*0(0 + 1)0(0 + 1)^*$$

5. Para cada uno de los autómatas finitos no deterministas siguientes, calcula su expresión regular equivalente:

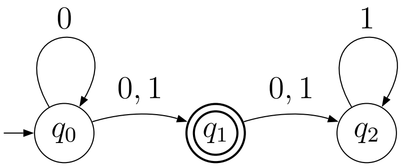
   (a) (♠)



Solución:

$$(\alpha 0)^* \alpha, \quad \alpha = (0 + 1)1^*$$

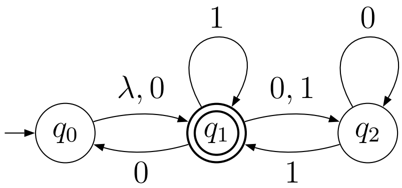
(b) (♣)



Solución:

$$0^*(0+1)$$

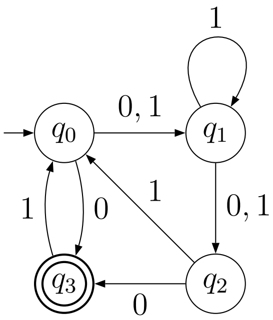
(c) (⋆)



Solución:

$$(0+1)^*$$

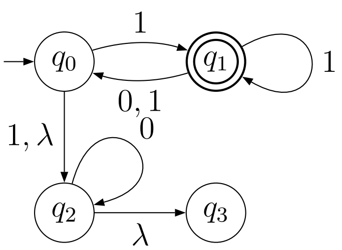
(d) (♣)



Solución:

$$(\alpha(1+01)+01)^*(\alpha+\lambda)0, \quad \alpha=(0+1)1^*(0+1)$$

(e) (♣)

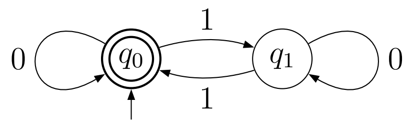


Solución:

$$(11^*(0+1))^*11^*$$

6. Indicar el lenguaje aceptado por los siguientes autómatas:

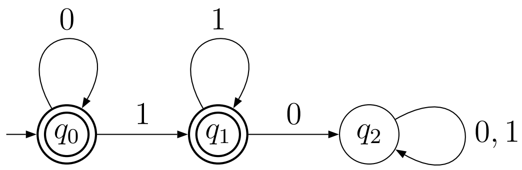
   (a) (⋆)



Solución:

$$(0 + 10^*1)^*$$

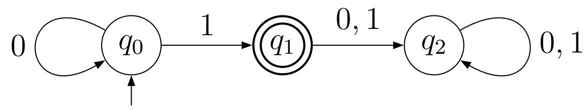
   (b) (♣)



Solución:

$$0^*(11^* + \lambda)$$

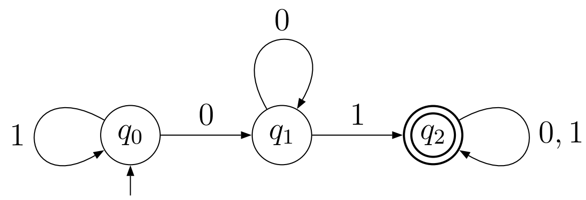
   (c) (⋆)



Solución:

$$0^*1$$

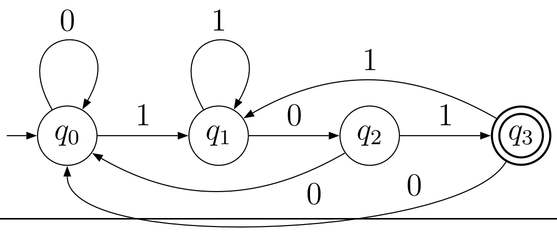
   (d) (♣)



Solución:

$$1^*00^*1(0 + 1)^*$$

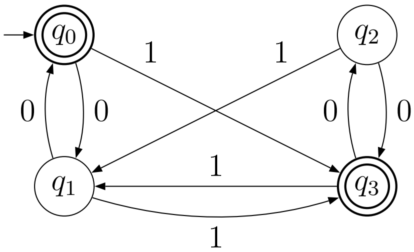
   (e) (♣)



Solución:

$$(0 + 1\alpha(1 + \lambda)0)^*1\alpha1, \quad \alpha = (011 + 1)^*0$$

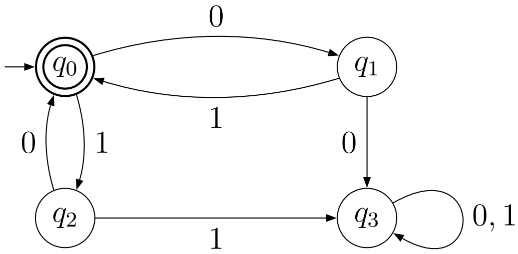
(f) (♠)



Solución:

$$((0+\alpha)\alpha^*0)^*((\lambda+0\alpha^*)1(00)^*+\lambda+\alpha\alpha^*1(00)^*), \quad \alpha = 1(00)^*(1+01)$$

(g) (⋆)



Solución:

$$(01+10)^*$$

7. Obtén una expresión regular para el siguiente lenguaje:

$$L \;=\; \{w \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}^+ \mid w mod 3 = 0\}$$

Solución:

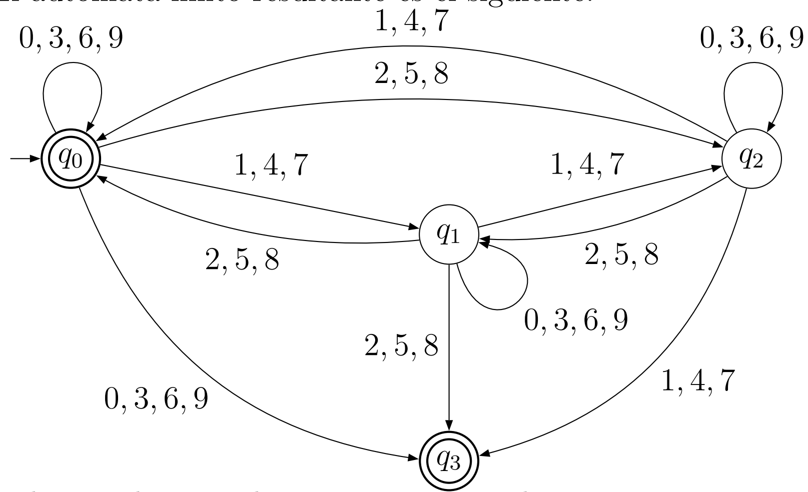
Para realizar este ejercicio primero hallaremos el autómata finito que reconozca el lenguaje y posteriormente, mediante el método de las ecuaciones características, hallaremos la expresión regular equivalente.

La gramática que genera este lenguaje es la siguiente (hallada en ejercicios anteriores):

$$G = (\{S,R,Q\},\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\},S,P\})$$

$$\begin{aligned} P \;=\; \{ & S ::= 0 \mid 3 \mid 6 \mid 9 \mid 0S \mid 3S \mid 6S \mid 9S \mid 1R \mid 4R \mid 7R \mid 2Q \mid 5Q \mid 8Q \\ & R ::= 2 \mid 5 \mid 8 \mid 2S \mid 5S \mid 8S \mid 0R \mid 3R \mid 6R \mid 9R \mid 1Q \mid 4Q \mid 7Q \\ & Q ::= 1 \mid 4 \mid 7 \mid 1S \mid 4S \mid 7S \mid 2R \mid 5R \mid 8R \mid 0Q \mid 3Q \mid 6Q \mid 9Q \end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos construir un AFND a partir de la gramática sin ningún problema. El autómata finito resultante es el siguiente:



Entonces, podemos plantear el siguiente sistema de ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
X_0 &= AX_0 + BX_1 + CX_2 + AX_3 + \emptyset \\
X_1 &= AX_1 + BX_2 + CX_3 + CX_0 + \emptyset \\
X_2 &= AX_2 + BX_0 + BX_3 + CX_1 + \emptyset \\
X_3 &= \lambda
\end{aligned}
$$

Para hallar la expresión regular equivalente al autómata finito (y por lo tanto, equivalente al lenguaje solicitado), debemos despejar la incógnita X_0.

$$
X_3 = \lambda
$$

$$
\begin{aligned}
X_2 &= AX_2 + BX_0 + B + CX_1 \\
&= A^*BX_0 + A^*B + A^*CX_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
X_1 &= AX_1 + BA^*BX_0 + BA^*B + BA^*CX_1 + C + CX_0 \\
&= (\underbrace{A + BA^*C}_{\alpha})^*(BA^*BX_0 + BA^*B + C + CX_0) \\
&= \alpha^*(BA^*BX_0 + BA^*B + C + CX_0)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
X_0 &= AX_0 + B\alpha^*(BA^*BX_0 + BA^*B + C + CX_0) + \\
&\quad C(A^*BX_0 + A^*B + A^*C(\alpha^*(BA^*BX_0 + BA^*B + C + CX_0))) + A \\
&= AX_0 + B\alpha^*BA^*BX_0 + B\alpha^*BA^*B + B\alpha^*C + B\alpha^*CX_0 + A + CA^*BX_0 + \\
&\quad CA^*B + CA^*C\alpha^*(BA^*BX_0 + BA^*B + C + CX_0) \\
&= AX_0 + B\alpha^*BA^*BX_0 + B\alpha^*BAB + B\alpha^*C + B\alpha^*CX_0 + A + CA^*BX_0 +
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& CA^*B + CA^*C\alpha^*BA^*BX_0 + CA^*C\alpha^*BA^*B + CA^*C\alpha^*C + CA^*C\alpha^*CX_0 \\
= \; & (A + B\alpha^*BA^*B + B\alpha^*C + CA^*B + CA^*C\alpha^*BA^*B + CA^*C\alpha^*C)^* \\
& (A + B\alpha^*BA^*B + B\alpha^*C + CA^*B + CA^*C\alpha^*BA^*B + CA^*C\alpha^*C) \\
= \; & (A + B\alpha^*(\underbrace{BA^*B + C}_{\beta}) + CA^*(B + C\alpha^*(BA^*B + C)))^* \\
& (A + B\alpha^*(BA^*B + C) + CA^*(B + C\alpha^*(BA^*B + C))) \\
= \; & (A + B\alpha^*\beta + CA^*(B + C\alpha^*\beta))^*(A + B\alpha^*\beta + CA^*(B + C\alpha^*\beta))
\end{aligned}
$$

8. Obtén un AFD mínimo que acepte las siguientes expresiones regulares:

(a) (⋆) ab^*c

Solución:

$$(\{a, b, c\}, \{q_0, q_1, q_2, q_d\}, f, q_0, \{q_2\})$$

f	a	b	c
$\rightarrow q_0$	q_1	q_d	q_d
q_1	q_d	q_1	q_2
$^*q_2$	q_d	q_d	q_d
q_d	q_d	q_d	q_d

(b) (♣) $a(bc)^*bc$

Solución:

$$(\{a, b, c\}, \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_d\}, f, q_0, \{q_3\})$$

f	a	b	c
$\rightarrow q_0$	q_1	q_d	q_d
q_1	q_d	q_2	q_d
q_2	q_d	q_d	q_3
$^*q_3$	q_d	q_2	q_d
q_d	q_d	q_d	q_d

(c) (♣) $a^*b(c^*a)^*$

Solución:

$$(\{a, b, c\}, \{q_0, q_1, q_2, q_d\}, f, q_0, \{q_1\})$$

f	a	b	c
$\rightarrow q_0$	q_0	q_1	q_d
$^*q_1$	q_1	q_d	q_2
q_2	q_1	q_d	q_2
q_d	q_d	q_d	q_d

(d) (♣) $cb^* + aa^*$

Solución:

$$(\{a,b,c\},\{q_0,q_1,q_2,q_d\},f,q_0,\{q_1,q_2\})$$

f	a	b	c
$\rightarrow q_0$	q_2	q_d	q_1
$*q_1$	q_d	q_1	q_d
$*q_2$	q_2	q_d	q_d
q_d	q_d	q_d	q_d

(e) (♣) $b(a+b)^* + cb^*$

Solución:

$$(\{a,b,c\},\{q_0,q_1,q_2,q_d\},f,q_0,\{q_1,q_2\})$$

f	a	b	c
$\rightarrow q_0$	q_d	q_2	q_1
$*q_1$	q_d	q_1	q_d
$*q_2$	q_2	q_2	q_d
q_d	q_d	q_d	q_d

(f) (♠) $a + ac(a+b)^* + c(a+b+c)^*$

Solución:

$$(\{a,b,c\},\{q_0,q_1,q_2,q_3,q_d\},f,q_0,\{q_1,q_2,q_3\})$$

f	a	b	c
$\rightarrow q_0$	q_1	q_d	q_3
$*q_1$	q_d	q_d	q_2
$*q_2$	q_2	q_2	q_d
$*q_2$	q_3	q_3	q_3
q_d	q_d	q_d	q_d