

Hoja de Problemas 12

Propiedades de L.I.C.

NIVEL DEL EJERCICIO : (★) básico, (♣) medio, (♠) avanzado.

1. Para cada uno de los lenguajes siguientes, **decide si es o no** un lenguaje independiente del contexto. Si es un lenguaje independiente del contexto, escribe una gramática I.C. que lo genere. Si no es un lenguaje independiente del contexto, demuéstalo utilizando el Lema de Bombeo o propiedades.

(a) (★) $L = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$.

Solución:

(b) (♣) $L = \{a^n b^{n^2} \mid n \geq 0\}$.

Solución:

(c) (★) $L = \{a^n b^m \mid n \neq m\}$.

Solución:

(d) (♠) $L = \{a^n b^m \mid 0 \leq n \leq m^2\}$.

Solución:

(e) (★) $L = \{x \in \{a, b, c\}^* \mid n_a(x) = n_b(x) = n_c(x)\}$.

Solución:

(f) (♠) $L = \{x \in \{a, b, c\}^* \mid n_a(x)^2 + n_b(x)^2 = n_c(x)^2\}$.

Solución:

(g) (♠) $L = \{ww^R w \mid w \in \{a, b\}^*\}$.

Solución:

(h) (♠) $L = \{a^n b^m c^{nm} \mid n, m \geq 0\}$.

Solución:

(i) (♠) $L = \{a^n b^m c^k \mid n, m \geq 0, k > \max\{n, m\}\}$.

Solución:

- (j) (\clubsuit) $L = \{a^n b^m c^k \mid n, m \geq 0, k = \max\{n, m\}\}.$

Solución:

- (k) (\star) $L = \{a^i b^j c^k \mid 0 \leq i < j < k\}.$

Solución:

- (l) (\star) $L = \{\mathbf{x} \in \{a, b, c\}^* \mid 0 \leq n_a(\mathbf{x}) < n_b(\mathbf{x}) < n_c(\mathbf{x})\}.$

Solución:

Demostremos que el lenguaje L no es independiente (o libre) de contexto. Para ello, usaremos el Lema de Bombeo; para mayor claridad, escribimos su enunciado :

LEMA DE BOMBEO

Sea Σ un alfabeto finito, y sea $L \subseteq \Sigma^*$ un lenguaje. Si L es un lenguaje independiente del contexto, entonces existe una constante $n \in \mathbb{N}$ tal que para toda palabra $\mathbf{x} \in L$ en el lenguaje con longitud $|\mathbf{x}| \geq n$, existen palabras $\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \Sigma^*$ con las siguientes propiedades :

- i) $\mathbf{x} = \mathbf{yzuvw}.$
- ii) $|\mathbf{zv}| \geq 1.$
- iii) $|\mathbf{zuv}| \geq n.$
- iv) $\mathbf{yz}^i \mathbf{uv}^i \mathbf{w} \in L \quad \forall i \in \mathbb{N}.$

Si L es independiente del contexto, entonces debe verificar el Lema de Bombeo. Veremos que dada cualquier constante $n \in \mathbb{N}$, existe una palabra en el lenguaje que no verifica que posea una descomposición con las cuatro propiedades anteriores.

Sea $n \in \mathbb{N}$ la constante que aparece en el Lema de Bombeo. Definimos la palabra $\mathbf{x} \in \Sigma^*$ como $\mathbf{x} := a^n b^{n+1} c^{n+2}$. Obviamente, $\mathbf{x} \in L$. Además, $|\mathbf{x}| = 3n + 3 \geq n$. Así, deben existir palabras $\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \Sigma^*$ verificando las cuatro propiedades. Veamos que esto es imposible. Para ello, estudiemos todas la posibilidades de descomposición posibles (cuando digo que una palabra contiene exclusivamente una letra, dicha palabra puede ser vacía, y cuando digo que una palabra contiene una letra, entonces necesariamente dicha palabra no puede ser vacía) :

- Si tanto \mathbf{z} como \mathbf{v} contienen exclusivamente letras a 's, entonces llegamos trivialmente a una contradicción, pues aplicando la propiedad iv), tendríamos que $\mathbf{yz}^2 \mathbf{uv}^2 \mathbf{w} \in L$, pero resulta que $\mathbf{yz}^2 \mathbf{uv}^2 \mathbf{w}$ tiene al menos $n + 1$ letras a 's y exactamente $n + 1$ letras b 's.

- Si tanto \mathbf{z} como \mathbf{v} contienen exclusivamente letras b 's, entonces llegamos trivialmente a una contradicción, pues aplicando la propiedad *iv*), tendríamos que $\mathbf{yz}^0\mathbf{uv}^0\mathbf{w} \in L$, pero resulta que $\mathbf{yz}^0\mathbf{uv}^0\mathbf{w}$ tiene a lo sumo n letras b 's y exactamente n letras a 's.
- Si tanto \mathbf{z} como \mathbf{v} contienen exclusivamente letras c 's, entonces llegamos trivialmente a una contradicción, pues aplicando la propiedad *iv*), tendríamos que $\mathbf{yz}^0\mathbf{uv}^0\mathbf{w} \in L$, pero resulta que $\mathbf{yz}^0\mathbf{uv}^0\mathbf{w}$ tiene a lo sumo $n + 1$ letras c 's y exactamente $n + 1$ letras b 's.
- Si alguna de las palabras \mathbf{z} o \mathbf{v} es vacía, y la otra palabra contiene al menos una letra a y una letra b , entonces, necesariamente, por la propiedad *iii*), no puede contener ninguna c . Entonces, aplicando la propiedad *iv*), $\mathbf{yz}^2\mathbf{uv}^2\mathbf{w} \in L$, pero $\mathbf{yz}^2\mathbf{uv}^2\mathbf{w}$ contiene exactamente $n + 2$ letras c 's y al menos $n + 2$ letras b 's.
- Si alguna de las palabras \mathbf{z} o \mathbf{v} es vacía, y la otra palabra contiene al menos una letra b y una letra c , entonces, necesariamente, por la propiedad *iii*), no puede contener ninguna a . Entonces, aplicando la propiedad *iv*), $\mathbf{yz}^0\mathbf{uv}^0\mathbf{w} \in L$, pero $\mathbf{yz}^0\mathbf{uv}^0\mathbf{w}$ contiene exactamente n letras a 's y a lo sumo n letras b 's.
- Si alguna de las palabras \mathbf{z} o \mathbf{v} es vacía, y la otra palabra contiene al menos una letra a y una letra c , entonces, necesariamente \mathbf{zuv} tiene que contener $n + 1$ letras b , pero esto es imposible por la propiedad *ii*).
- Si \mathbf{z} contiene alguna letra a y \mathbf{v} contiene alguna letra b , entonces, por la propiedad *iii*) y por el hecho de que \mathbf{z} contenga alguna letra a , entonces \mathbf{v} no puede contener ninguna letra c . Así, $\mathbf{yz}^2\mathbf{uv}^2\mathbf{w}$ tiene exactamente $n + 2$ letras c 's, pero también tiene al menos $n + 2$ letras b 's.
- Si \mathbf{z} contiene alguna letra a y \mathbf{v} contiene alguna letra c , entonces no se puede verificar la propiedad *iii*) pues \mathbf{zuv} contiene necesariamente $n + 1$ letras b 's.
- Si \mathbf{z} contiene alguna letra b y \mathbf{v} contiene alguna letra c , entonces por la propiedad *iii*) y por el hecho de que \mathbf{v} contenga alguna letra c , entonces \mathbf{z} no puede contener ninguna letra a . Así, $\mathbf{yz}^0\mathbf{uv}^0\mathbf{w}$ tiene exactamente n letras a 's, pero a lo sumo n letras b 's.

Así, en todos los casos llegamos una contradicción, y esta contradicción parte de suponer que L es un lenguaje independiente de contexto. Concluimos pues que L no es libre de contexto.

(m) (\clubsuit) $L = \{\mathbf{x} \in \{a, b, c\}^* \mid n_a(\mathbf{x}) + n_b(\mathbf{x}) = 2n_c(\mathbf{x})\}.$

Solución:

(n) (\star) $L = \{a^n \mathbf{w} \mathbf{w}^R a^n \mid \mathbf{w} \in \{a, b\}^*, n \geq 0\}.$

Solución:

(ñ) (★) $L = \{a^n b^m a^n b^m \mid n, m \geq 0\}$.

Solución:

(o) (★) $L = \{a^n b^m a^m b^n \mid n, m \geq 0\}$.

Solución:

(p) (★) $L = \{a^n b^m a^k b^l \mid n + m \leq k + l\}$.

Solución:

(q) (★) $L = \{a^n b^m a^k b^l \mid n \leq k, m \leq l\}$.

Solución:

(r) (★) $L = \{a^n b^n \mid n \not\equiv 0 \pmod{5}\}$.

Solución:

(s) (★) $L = \{\mathbf{x} \in \{a, b\}^* \mid n_a(\mathbf{x}) = n_b(\mathbf{x}), \mathbf{x} \text{ no contiene la subcadena } aab\}$.

Solución:

2. (♣) Sea $\Sigma = \{0, 1, 2\}$ un alfabeto finito, y consideremos el lenguaje $L \subseteq \Sigma^*$, definido por la igualdad siguiente :

$$L := \{0^p 1^q 2^r \mid 0 \leq 2p + 3 \leq 3q + 2 \leq r + 1\} \subseteq \Sigma^*.$$

Demuestra que el lenguaje L no es un lenguaje independiente del contexto.

Solución:

Supongamos que el lenguaje L es independiente del contexto. Entonces debe verificar el Lema de Bombeo. Sea $N \in \mathbb{N}$ la constante del enunciado del Lema de Bombeo. Definamos $x := 0^{3N+1} 1^{2N+1} 2^{6N+4}$. Se tiene que $x \in L$. Además, $|x| \geq N$. Sea $x = yzuvw$ una descomposición cualquiera cumpliendo las propiedades del Lema de Bombeo. Esto es,

i) $|zuv| \leq N$.

ii) $|zv| > 0$.

iii) $\forall i \geq 0, yz^i uv^i w \in L$.

Estudiemos todas las posibilidades para dicha descomposición.

- Supongamos que la cadena zv contiene algún 2. Entonces, por la propiedad $i)$ se tiene que no puede contener ningún 0. Ahora, por la propiedad $iii)$ para $i = 0$, se tiene que $\alpha := yz^0uv^0w \in L$. Pero eso es imposible, pues

$$n_2(\alpha) + 1 \leq 6N + 4 < 6N + 5 = 2n_0(\alpha) + 3.$$

- Supongamos que la cadena zv no contiene ningún 2. Entonces, como dicha cadena no puede ser vacía (por la propiedad $ii)$), se tiene que debe contener algún 0 o algún 1. Estudiemos ambas opciones.

- Supongamos que la cadena zv contiene algún 0. Entonces, por la propiedad $iii)$ para $i = 2$, se tiene que $\alpha := yz^2uv^2w \in L$. Pero eso es imposible, pues

$$2n_0(\alpha) + 3 \geq 6N + 6 > 6N + 5 = n_2(\alpha) + 1.$$

- Supongamos que la cadena zv contiene algún 1. Entonces, por la propiedad $iii)$ para $i = 2$, se tiene que $\alpha := yz^2uv^2w \in L$. Pero eso es imposible, pues

$$3n_1(\alpha) + 2 \geq 6N + 6 > 6N + 5 = n_2(\alpha) + 1.$$

En todos los casos llegamos a una contradicción, que parte de suponer que L es un lenguaje independiente del contexto. Concluimos que el lenguaje L no es un lenguaje independiente del contexto.