Hoja de Problemas 2

Gramáticas Formales

Nivel del ejercicio : ($\star$) básico, ($\clubsuit$) medio, ($\spadesuit$) avanzado.

1. ($\star$) Obtener las derivaciones de las palabras 002 y 0001 a partir de la siguiente gramática :

$$G = (\{A, B\}, \{0, 1, 2\}, A, \{A ::= 0B, A ::= 2, B ::= 0A, B ::= 1\})\,.$$

Obtener el lenguaje que genera.

Solución:

$$A \xrightarrow{A::=0B} 0B \xrightarrow{B::=0A} 00A \xrightarrow{A::=2} 002$$

$$A \xrightarrow{A::=0B} 0B \xrightarrow{B::=0A} 00A \xrightarrow{A::=0B} 000B \xrightarrow{B::=1} 0001$$

El lenguaje que genera esta gramática son palabras que tienen un número determinado de ceros seguido de la paridad de los mismos (un 1 si el número de ceros es impar y un 2 en caso contrario):

$$L = \{0^n 2 \mid n \ mod\ 2 = 0\} \ \cup \ \{0^n 1 \mid n \ mod\ 2 = 1\}$$

2. ($\star$) Obtener el lenguaje generado por la gramática :

$$G = (\{S\}, \{a, b\}, S, \{S ::= aSbb \mid \lambda\})\,.$$

Solución:

La gramática genera un lenguaje cuyas palabras están compuestas por una ristra de a's seguida por otra ristra de b's y además, el número de a's es la mitad del número de b's.

$$L = \{a^n b^{2n} \mid n \geq 0\}$$

3. ($\star$) Construir una gramática que genere el lenguaje $L = \{a^n b^{n+1} \mid n \geq 0\}$.

Solución:

$$G = (\{S, A\}, \{a, b\}, S, \{S ::= Ab, A ::= aAb \mid \lambda\})$$

4. ($\clubsuit$) Construir una gramática que genere el lenguaje $L = \{\mathbf{w} \mid n_a(\mathbf{w})$ y $n_b(\mathbf{w})$ son pares $\}$.

Solución:

$$G = (\{S, A, B, C, D\}, \{a, b\}, S, P\})$$

$$\begin{aligned} P \quad = \quad & \{S ::= SS \mid A \mid B \mid \lambda, \\ & A ::= aSa, \\ & B ::= bSb, \\ & C ::= DSD, \\ & D ::= ab \mid ba\} \end{aligned}$$

5. ($\star$) Indicar si las gramáticas con los siguientes conjuntos de producciones son equivalentes :

$$P_1 = \{S ::= aSb \mid \lambda\},$$

$$P_2 = \{S ::= aAb \mid \lambda, A ::= aAb \mid \lambda\}.$$

Solución:

Dos gramáticas son equivalentes cuando generan el mismo lenguaje. Podemos observar que los lenguajes que generan G_1 y G_2 son los siguientes:

$$L(G_1) = \{a^n b^n \mid n \geq 0\} \textbf{ y } L(G_2) = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

Por lo tanto, como $L(G_1) = L(G_2)$, son gramáticas equivalentes.

6. ($\star$) Construir gramáticas para $\Sigma = \{a, b\}$ que generen los lenguajes cuyo conjunto de palabras sean :

   (a) Todas las cadenas con una única a.

Solución:

$$G = (\Sigma_N, \{a, b\}, S, P)$$

$\Sigma_N = \{S, B\}$, $P = \{S ::= BaB, B ::= bB \mid \lambda\}$

(b) Todas las cadenas con al menos la subcadena *ababbb*.

Solución:

$$G = (\Sigma_N, \{a, b\}, S, P)$$

$\Sigma_N = \{S, A\}$, $P = \{S ::= AababbbA, A ::= aA \mid bA \mid \lambda\}$

(c) Todas las cadenas con no más de tres $a's$.

Solución:

$$G = (\Sigma_N, \{a, b\}, S, P)$$

$\Sigma_N = \{S, P, G, T, B\}$, $P = \{S ::= B \mid P, P ::= GaB \mid BaG \mid BaB,$
$G ::= TaB \mid BaT \mid BaB, T ::= BaB, B ::= bB \mid \lambda\}$

7. ($\star$) Describir el lenguaje generado por la gramática cuyo conjunto de producciones es

$$\{S ::= aA \mid \lambda, A ::= bS\}.$$

Solución:

$$L = \{(ab)^n \mid n \geq 0\}$$

8. ($\star$) Describir el lenguaje generado por la gramática cuyo conjunto de producciones es

$$\{S ::= Aa, A ::= B, B ::= Aa\}.$$

Solución:

Recordemos que por definición, dada una gramática $G = (\Sigma_N, \Sigma_T, S, P)$ el lenguaje reconocido o generado por G está formado por todas las sentencias (palabras) de G:

$$L(G) = \{x \mid S \rightarrow^* x \textbf{ y } x \in \Sigma_T^*\}$$

Dado que ninguna forma sentencial generada por la gramática del ejemplo es una sentencia ($x \in \Sigma_T^*$), entonces el lenguaje generado por esta gramática es el lenguaje vacío ($L = \emptyset$).

9. ($\clubsuit$) Construir una gramática para cada uno de los siguientes lenguajes :

(a) $L_1 = \{a^n b^m \mid n \geq 0, m > n\}$.

Solución:
$G_1 = (\{S_1, A, B\}, \{a, b\}, S_1, \{S_1 ::= B \mid aAbB,\ A ::= aAb \mid \lambda,\ B ::= b \mid bB\})$

(b) $L_2 = \{a^{n+2}b^n \mid n \geq 1\}$.

Solución:
$G_2 = (\{S_2, C\}, \{a, b\}, S_2, \{S_2 ::= aaaCb,\ C ::= aCb \mid \lambda\})$

(c) $L_3 = \{a^n b^{n-3} \mid n \geq 3\}$.

Solución:
Para resolver este apartado, podemos tener en cuenta que $L_3 = \{a^n b^{n-3} \mid n \geq 3\}$ es equivalente a $L_{3equiv} = \{a^{m+3}b^m \mid m \geq 0\}$ y por lo tanto, se puede resolver de forma parecida al apartado anterior.
$G_3 = (\{S_3, D\}, \{a, b\}, S_3, \{S_3 ::= aaaD \mid \lambda,\ D ::= aDb \mid \lambda\})$

(d) $L_1 L_2$.

Solución:
Para realizar este ejercicio, podemos utilizar las reglas de producción creadas en el apartado (a) y (b), teniendo cuidado al mezclar las producciones renombrándolas si fuese necesario, y generar otro axioma que haga uso de ellas: $S ::= S_1 S_2$.
$G_4 = (\{S, S_1, S_2, A, B, C\}, \{a, b\}, S, \{S ::= S_1 S_2,\ S_1 ::= B \mid aAbB,\ A ::= aAb \mid \lambda,$
$B ::= b \mid bB,\ S_2 ::= aaaCb,\ C ::= aCb \mid \lambda\})$

Si nos damos cuenta, las producciones relativas a los elementos no terminales A y C son iguales, por lo que podemos eliminar una y retocar las reglas de producción que hagan uso de ellos. Al finalizar, la solución queda:
$G_4 = (\{S, S_1, S_2, A, B, C\}, \{a, b\}, S, \{S ::= S_1 S_2,\ S_1 ::= B \mid aAbB,\ A ::= aAb \mid \lambda,$
$B ::= b \mid bB,\ S_2 ::= aaaAb\})$

(e) $L_1 \cup L_2$.

Solución:
Procederemos de forma análoga al apartado anterior, símplemente varía el nuevo axioma: $S ::= S_1 \mid S_2$

(f) L_2^3.

Solución:

De forma parecida, reutilizaremos la gramática que genera L_2, añadiendo un nuevo axioma: $S ::= S_2S_2S_2$

(g) L_1^*.

Solución:
Idem del anterior. Nuevo axioma: $S ::= SS_1$

(h) $L_4 = \{ab^na \mid n \geq 1\}$.

Solución:
$G_5 = (\{S_5, B\}, \{a, b\}, S_5, \{S_5 ::= aBa,\ B ::= bB \mid b\})$

10. (♣) Construir una gramática para cada uno de los siguientes lenguajes para $\Sigma = \{a\}$:

(a) $L_1 = \{\mathbf{w} \mid |\mathbf{w}| \bmod 3 = 0\}$.

Solución:

$$G_1 = (\{S\}, \{a\}, S, \{S ::= aaaS \mid \lambda\}) .$$

(b) $L_2 = \{\mathbf{w} \mid |\mathbf{w}| \bmod 3 > 0\}$.

Solución:

$$G_2 = (\{S\}, \{a\}, S, \{S ::= a \mid aa \mid aaaS\}) .$$

11. (♣) Dado un alfabeto Σ y una palabra $\mathbf{w} \in \Sigma^*$, se dice que $\mathbf{w}$ es un *palíndromo* si se verifica que $\mathbf{w}^{-1} = \mathbf{w}$. Dado $\Sigma_2 := \{0, 1\}$, construir una gramática que genere el lenguaje de los palíndromos sobre Σ_2, $L_{pal}(\Sigma_2) := \{\mathbf{w} \in \Sigma_2^* \mid \mathbf{w}^{-1} = \mathbf{w}\}$.

Solución:

$$G = (\{S, A\}, \{0, 1\}, S, \{S ::= 0S0 \mid 1S1 \mid A,\ A ::= 0 \mid 1 \mid \lambda\})$$

12. (♣) Construir una grámatica que genere el lenguaje $L = \{\mathbf{ww} \mid \mathbf{w} \in \{a, b\}^*\}$.

Solución:
El lenguaje generado está formado por palabras que resultan de la concatenación de una misma palabra w dos veces, tal que $\mathbf{w} \in \{a, b\}^*$.

$$G = (\{S, X, Y, F, A, B\}, \{a, b\}, S, P)$$

$$
\begin{aligned}
P &= \{S ::= XY, \\
&= X ::= XaA \mid XbB \mid F, \\
&= Aa ::= aA, \\
&= Ab ::= bA, \\
&= AY ::= Ya, \\
&= Ba ::= aB, \\
&= Bb ::= bB, \\
&= BY ::= Yb, \\
&= Fa ::= aF, \\
&= Fb ::= bF, \\
&= FY ::= \lambda\}
\end{aligned}
$$

13. (♣) Construir una grámatica que genere el lenguaje $L = \{\mathbf{www} \mid \mathbf{w} \in \{a,b\}^+\}$.

Solución:

El lenguaje generado está formado por palabras que resultan de la concatenación de una misma palabra w tres veces, tal que $\mathbf{w} \in \{a,b\}^*$.

$$G = (\{S, X, Y, Z, F, A, B\}, \{a, b\}, S, P)$$

$$
\begin{aligned}
P = \{&S ::= XYZ, \\
&X ::= XaA \mid XbB \mid F, \\
&Aa ::= aA, \\
&Ab ::= bA, \\
&Ba ::= aB, \\
&Bb ::= bB, \\
&AY ::= YaA, \\
&BY ::= YbB, \\
&AZ ::= Za, \\
&BZ ::= Zb, \\
&Fa ::= aF, \\
&Fb ::= bF, \\
&FY ::= YF, \\
&FZa ::= \lambda, \\
&FZb ::= \lambda\}
\end{aligned}
$$

14. ($\clubsuit$) Sea $\Sigma := \{(,), 0, 1\}$. Las expresiones con paréntesis bien balanceadas se definen del siguiente modo :

- La palabra vacía está bien balanceada.
- 0 y 1 son palabras bien balanceadas.
- Si $\mathbf{w} \in \Sigma^*$ es una palabra bien balanceada, entonces $(\mathbf{w})$ es una palabra bien balanceada.
- Si $\mathbf{w}, \mathbf{w}' \in \Sigma^*$ son palabras bien balanceadas, entonces $\mathbf{w}\mathbf{w}'$ es una palabra bien balanceada.

Construye una gramática que genere el lenguaje de las palabras bien balanceadas.

Solución:
$G = (\{S, W, P\}, \{0, 1\}, S, \{S ::= SWS \mid P,\ W ::= (W) \mid (P),\ P ::= OP \mid 1P \mid 0 \mid 1 \mid \lambda\})$

15. ($\star$) ¿ Son equivalentes las gramáticas cuyas producciones son las siguientes?.

$$P_1 = \{S ::= aSb \mid ab \mid \lambda\},$$

$$P_2 = \{S ::= aAb \mid ab, A ::= aAb \mid \lambda\}.$$

Solución:
Observemos los lenguajes que genera cada una de las gramáticas:

$$L(G_1) = \{a^n b^n \mid n \geq 0\} \ \ y \ \ L(G_2) = \{a^n b^n \mid n > 0\}$$

Como podemos ver, $L(G_1)$ incluye la palabra vacía(λ), mientras que el segundo lenguaje no la incluye, por lo tanto, al no generar el mismo lenguaje, no son equivalentes.

16. ($\star$) Demostrar si las gramáticas con las siguientes producciones son ambiguas :

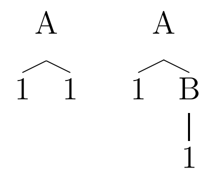
$$\{A ::= 1B \mid 11, B ::= 1\},$$

$$\{S ::= AB \mid aaB, A ::= a \mid Aa, B ::= b\}.$$

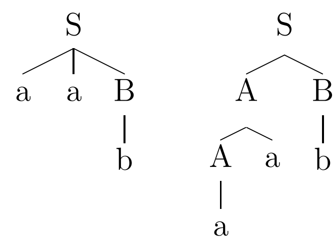
Solución:
Recordemos las definiciones.
Una gramática es ambigua si genera alguna sentencia ambigua.
Una sentencia es ambigua si puede obtenerse por medio de varias derivaciones distintas correspondientes a árboles de derivación diferentes.

Por lo tanto, debemos encontrar una sentencia que pueda corresponderse con dos (o más) árboles de derivación.

Para la primera gramática, podemos encontrar dos árboles de derivación correspondientes a la palabra 11:



Y para la segunda gramática, podemos encontrar dos árboles de derivación para la palabra *aab*:



Por lo tanto, ambas gramáticas son ambiguas.