Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Mecánica
ME5102-2 – Trabajo dirigido avanzado

Proyecto Pata robótica

Trabajo Dirigido Avanzado

Profesores: Rubén Fernández, Carolina Silva
Estudiantes: Juan Manuel Astudillo, Francisco Cáceres, Lucas Garrido, Fernando Navarrete, Nicole Ortiz, Randy Bartolo,

1. Cinemática Directa

La geometría del problema a resolver se muestra a continuación en la Figura 1. Las variables articuladas son rotacionales y corresponden a q_1, q_2. Las constantes del problema corresponden a los largos l_1, l_2, l_3 y $\alpha = 134.6^o - 180^o = -45.4^o$.

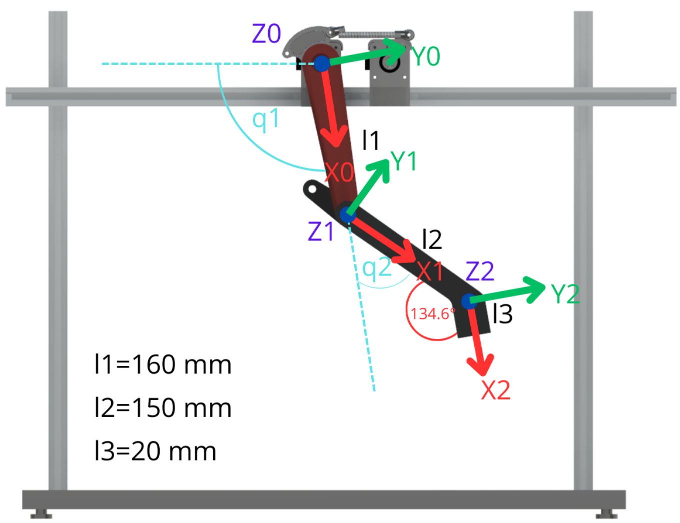

Figura 1: Esquema del problema a resolver.

La matriz de parámetros de Denavit-Hartenberg del problema, de acuerdo a la metodología definida en la Figura 1, se muestra en la Tabla 1. Por convención se le resta al primer ángulo q_1 -90^o para visualizar la curva cinemática en el eje X.

Tabla 1: Tabla de parámetros de Denavit-Hartenberg para el problema 1.

Articulación	Z		X	
	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	$q_1 - 90$	0	l_1	0º
2	q_2	0	l_2	0º
3	α	0	l_3	0º

Observación: θ_i, d_i son las rotaciones y traslaciones con respecto al eje Z_i y a_i, α_i son las traslaciones y rotaciones con respecto al eje X_i. respectivamente

La matriz homogénea de acuerdo al **Algoritmo de Denavit-Hartenberg** es:

$$A_{i-1}^{i} = Rotz(\theta_i) \cdot T(0,0,d_i) \cdot T(a_i,0,0) \cdot Rotx(\alpha_i) \tag{1}$$

$$A_{i-1}^{i} = \begin{bmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i & a_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & a_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Donde $C\theta_i = cos(\theta_i)$ y $S\theta_i = sen(\theta_i)$. Lo mismo para el ángulo α_i. Las matrices homogéneas D-H de acuerdo a la Tabla 1 son:

$$A_0^1 = \begin{bmatrix} sen(q_1) & cos(q_1) & 0 & l_1 sen(q_1) \\ -cos(q_1) & sen(q_1) & 0 & -l_1 cos(q_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$A_1^2 = \begin{bmatrix} cos(q_2) & -sen(q_2) & 0 & l_2 cos(q_2) \\ sen(q_2) & cos(q_2) & 0 & l_2 sen(q_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$A_2^3 = \begin{bmatrix} cos(\alpha) & -sen(\alpha) & 0 & l_3 cos(\alpha) \\ sen(\alpha) & cos(\alpha) & 0 & l_3 sen(\alpha) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Para este problema, la matriz de **transformación homogénea** aplicado al caso de *cinemática directa*, resulta en la ponderación de las matrices A_{i-1}^{i} desde 0 hasta el último eslabón $n = 3$. Es decir:

$$T_0^3 = A_0^1 \cdot A_1^2 \cdot A_2^3 \tag{6}$$

$$T_0^3 = \begin{bmatrix} sen(q_1+q_2+\alpha) & cos(q_1+q_2+\alpha) \\ sen(q_1+q_2+\alpha) & cos(q_1+q_2+\alpha) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\cdots \begin{matrix} 0 & l_1 \cdot sen(q_1) + l_2 \cdot sen(q_1+q_2) + l_3 \cdot sen(q_1+q_2+\alpha) \\ 0 & -l_1 \cdot cos(q_1) - l_2 \cdot cos(q_1+q_2) - l_3 \cdot cos(q_1+q_2+\alpha) \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \Bigg]$$

De esta forma, las posiciones son:

$$P_x = l_1 \cdot sen(q_1) + l_2 \cdot sen(q_1+q_2) + l_3 \cdot sen(q_1+q_2+\alpha) \tag{7}$$
$$P_y = -l_1 \cdot cos(q_1) - l_2 \cdot cos(q_1+q_2) - l_3 \cdot cos(q_1+q_2+\alpha) \tag{8}$$
$$\gamma = q_1 + q_2 + \alpha \tag{9}$$

A continuación se muestra el resultado de implementarlo en Python:

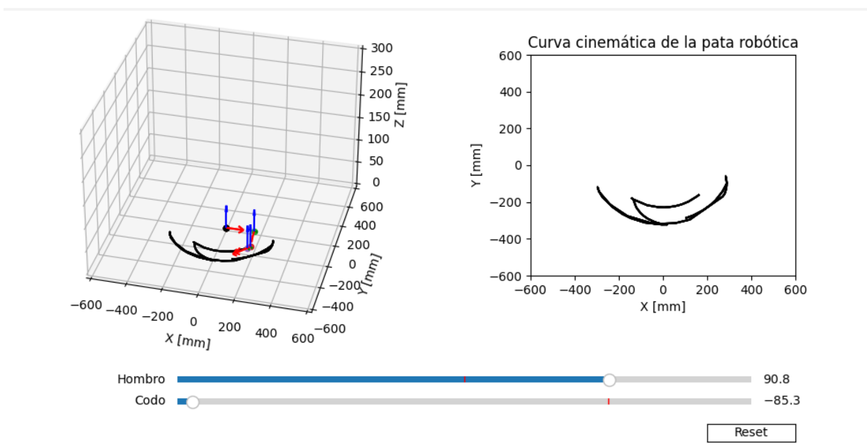

Figura 2: Resultado de implementación de la cinemática directa del robot. Es posible visualizar los ejes de las variables articuladas y la curva cinemática que describe el efector o pata del robot.

2. Cinemática inversa

Se utilizará el **método geométrico** para determinar la cinemática inversa a partir de las funciones de cinemática directa obtenidas anteriormente. Se utilizará de referencia el artículo de Juecoree [**?**]. Recordemos que las posiciones de la pata son descritas mediante las siguientes ecuaciones:

$$P_x = l_1 \cdot sen(q_1) + l_2 \cdot sen(q_1 + q_2) + l_3 \cdot sen(q_1 + q_2 + \alpha) \tag{10}$$

$$P_y = -l_1 \cdot cos(q_1) - l_2 \cdot cos(q_1 + q_2) - l_3 \cdot cos(q_1 + q_2 + \alpha) \tag{11}$$

$$\gamma = q_1 + q_2 + \alpha \tag{12}$$

Vamos a considerar de momento que las posiciones son consideradas sin la rotación de -90^o y luego aplicarla al final de los ángulos obtenidos de la cinemática inversa. De esta forma, la posición existente antes del tobillo puede reescribirse como:

$$P_{x,0-2} = P_x - l_3 cos(\gamma) \tag{13}$$

$$P_{y,0-2} = P_y - l_3 cos(\gamma) \tag{14}$$

Los ángulos internos formados por los links de la pata robótica se calculan como:

$$\delta = cos^{-1}(\frac{P^2_{x,0-2} + P^2_{y,0-2} - l_1^2 - l_2^2}{2 \cdot l_1 l_2}) \tag{15}$$

$$\beta = sen^{-1}(\frac{l_2 sen(\delta)}{\sqrt{P^2_{x,0-2} + P^2_{y,0-2}}}) \tag{16}$$

Las posibles configuraciones de la posición inversa se muestran en la Figura 3.

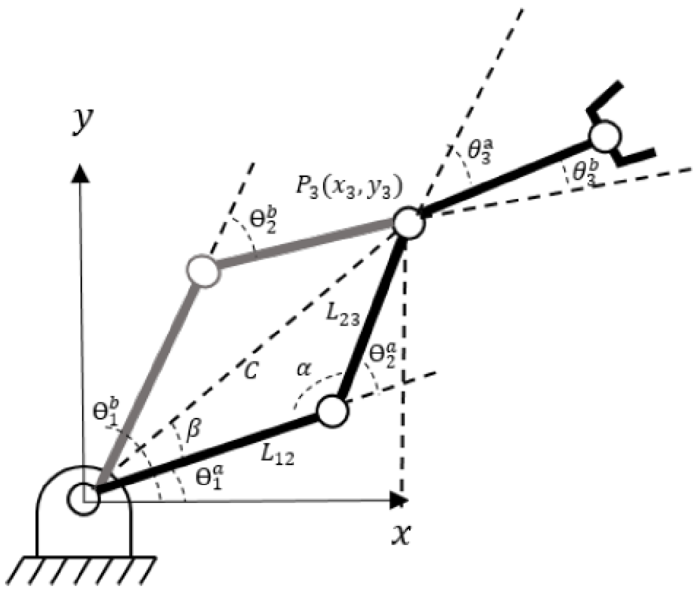

Fig. 3: 3R Planar Manipulator

Figura 3: Configuraciones cinemática inversa planar de 3 links

De esta forma, se definen los ángulos posibles de cada articulación para los casos *a*) y *b*):

$$\theta_1^a = \left(tan^{-1} \frac{P_{y,0-2}}{P_{x,0-2}} - \beta \right) \theta_1^b = \theta_1^a = \left(tan^{-1} \frac{P_{y,0-2}}{P_{x,0-2}} + \beta \right) \tag{17}$$

$$\theta_2^a = (180 - \alpha) \theta_2^b = -(180 - \alpha) \tag{18}$$

Por último, se tiene que los ángulos asociados al tercer link son:

$$\theta_3^a = \gamma - \theta_1^a - \theta_2^a \tag{19}$$

$$\theta_3^b = \gamma - \theta_1^b - \theta_2^b \tag{20}$$

Con esto es posible obtener la cinemática inversa del robot considerando una solución única de θ_3.