

# Proyecto Pata robótica

Trabajo Dirigido Avanzado

**Profesores: Rubén Fernández, Carolina Silva**

Estudiantes: Juan Manuel Astudillo, Francisco Cáceres, Lucas Garrido, Fernando Navarrete, Nicole Ortiz, Randy Bartolo,

## 1. Cinemática Directa

La geometría del problema a resolver se muestra a continuación en la Figura 1. Las variables articuladas son rotacionales y corresponden a  $q_1, q_2$ . Las constantes del problema corresponden a los largos  $l_1, l_2, l_3$  y  $\alpha = 134.6^\circ - 180^\circ = -45.4^\circ$ .

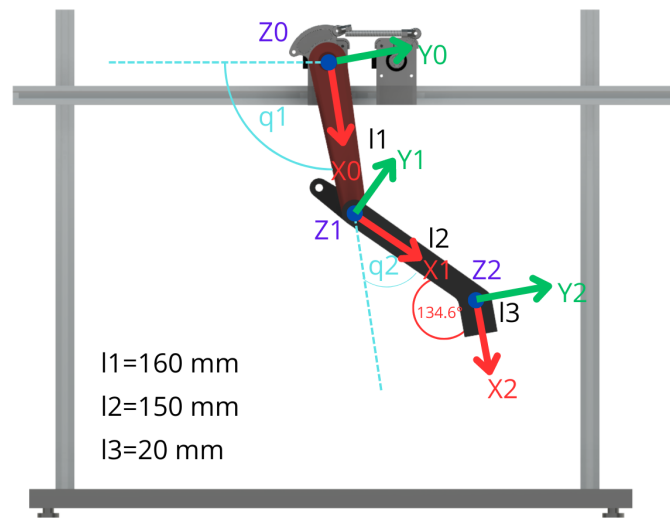


Figura 1: Esquema del problema a resolver.

La matriz de parámetros de Denavit-Hartenberg del problema, de acuerdo a la metodología definida en la Figura 1, se muestra en la Tabla 1. Por convención se le resta al primer ángulo  $q_1 - 90^\circ$  para visualizar la curva cinemática en el eje X.

Tabla 1: Tabla de parámetros de Denavit-Hartenberg para el problema 1.

Articulación	Z		X	
	$\theta_i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1	$q_1 - 90$	0	$l_1$	$0^\circ$
2	$q_2$	0	$l_2$	$0^\circ$
3	$\alpha$	0	$l_3$	$0^\circ$

*Observación:*  $\theta_i, d_i$  son las rotaciones y traslaciones con respecto al eje  $Z_i$  y  $a_i, \alpha_i$  son las traslaciones y rotaciones con respecto al eje  $X_i$ . respectivamente

La matriz homogénea de acuerdo al **Algoritmo de Denavit-Hartenberg** es:

$$A_{i-1}^i = Rotz(\theta_i) \cdot T(0, 0, d_i) \cdot T(a_i, 0, 0) \cdot Rotx(\alpha_i) \quad (1)$$

$$A_{i-1}^i = \begin{bmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i & a_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & a_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Donde  $C\theta_i = \cos(\theta_i)$  y  $S\theta_i = \sin(\theta_i)$ . Lo mismo para el ángulo  $\alpha_i$ . Las matrices homogéneas D-H de acuerdo a la Tabla 1 son:

$$A_0^1 = \begin{bmatrix} \sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 & l_1 \sin(q_1) \\ -\cos(q_1) & \sin(q_1) & 0 & -l_1 \cos(q_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$A_1^2 = \begin{bmatrix} \cos(q_2) & -\sin(q_2) & 0 & l_2 \cos(q_2) \\ \sin(q_2) & \cos(q_2) & 0 & l_2 \sin(q_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$A_2^3 = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 & l_3 \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & l_3 \sin(\alpha) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Para este problema, la matriz de **transformación homogénea** aplicado al caso de *cinemática directa*, resulta en la ponderación de las matrices  $A_{i-1}^i$  desde 0 hasta el último eslabón  $n = 3$ . Es decir:

$$T_0^3 = A_0^1 \cdot A_1^2 \cdot A_2^3 \quad (6)$$

$$T_0^3 = \begin{bmatrix} \text{sen}(q_1 + q_2 + \alpha) & \cos(q_1 + q_2 + \alpha) & 0 & 0 \\ \text{sen}(q_1 + q_2 + \alpha) & \cos(q_1 + q_2 + \alpha) & 0 & 0 \\ 0 & l_1 \cdot \text{sen}(q_1) + l_2 \cdot \text{sen}(q_1 + q_2) + l_3 \cdot \text{sen}(q_1 + q_2 + \alpha) & 1 & 0 \\ 0 & -l_1 \cdot \cos(q_1) - l_2 \cdot \cos(q_1 + q_2) - l_3 \cdot \cos(q_1 + q_2 + \alpha) & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De esta forma, las posiciones son:

$$P_x = l_1 \cdot \text{sen}(q_1) + l_2 \cdot \text{sen}(q_1 + q_2) + l_3 \cdot \text{sen}(q_1 + q_2 + \alpha) \quad (7)$$

$$P_y = -l_1 \cdot \cos(q_1) - l_2 \cdot \cos(q_1 + q_2) - l_3 \cdot \cos(q_1 + q_2 + \alpha) \quad (8)$$

$$\gamma = q_1 + q_2 + \alpha \quad (9)$$

A continuación se muestra el resultado de implementarlo en Python:

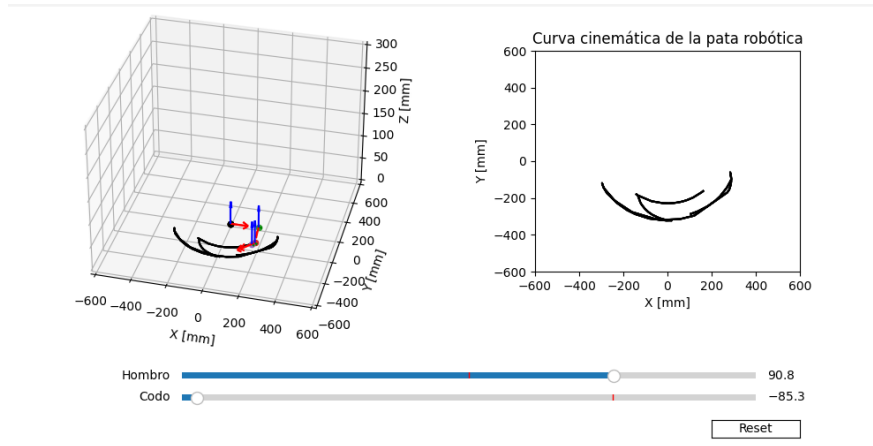


Figura 2: Resultado de implementación de la cinemática directa del robot. Es posible visualizar los ejes de las variables articuladas y la curva cinemática que describe el efector o pata del robot.

## 2. Cinemática inversa

Se utilizará el **método geométrico** para determinar la cinemática inversa a partir de las funciones de cinemática directa obtenidas anteriormente. Recordemos que las posiciones de la pata son descritas mediante las siguientes ecuaciones:

$$P_x = l_1 \cdot \text{sen}(q_1) + l_2 \cdot \text{sen}(q_1 + q_2) + l_3 \cdot \text{sen}(q_1 + q_2 + \alpha) \quad (10)$$

$$P_y = -l_1 \cdot \cos(q_1) - l_2 \cdot \cos(q_1 + q_2) - l_3 \cdot \cos(q_1 + q_2 + \alpha) \quad (11)$$

$$\gamma = q_1 + q_2 + \alpha \quad (12)$$

Vamos a considerar de momento que las posiciones son consideradas sin la rotación de  $-90^\circ$  y luego aplicarla al final de los ángulos obtenidos de la cinemática inversa. De esta forma, la posición existente antes del tobillo puede reescribirse como:

$$P_{x,0-2} = P_x - \cos(\gamma) \quad (13)$$

$$P_{y,0-2} = P_y - \cos(\gamma) \quad (14)$$

Los ángulos internos formados por los links de la pata robótica se calculan como:

$$\delta = \cos^{-1}\left(\frac{P_{x,0-2}^2 + P_{y,0-2}^2 - l_1^2 - l_2^2}{2 \cdot l_1 l_2}\right) \quad (15)$$

$$\beta = \text{sen}^{-1}\left(\frac{l_2 \text{sen}(\delta)}{\sqrt{P_{x,0-2}^2 + P_{y,0-2}^2}}\right) \quad (16)$$