

UNIVERSIDAD NACIONAL DE ROSARIO

**FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERIA
Y AGRIMENSURA**

(F.C.E.I.A.)

TEORIA DE CONTROL

**Diseño de Controladores en el
Dominio Frecuencial**

ALUMNOS:

CARRAZZONI, Renzo C-6092/5

RAMIREZ, Fernando R-3888/1

AÑO: 2021



1. Índice

1. Índice	2
2. Introducción	3
2.1 Control por adelanto de fase - Corrector PD	4
2.2 Control por atraso de fase - Corrector PI	5
3. Desarrollo	8
3.1 Modelo lineal aproximado de la planta	8
3.2 Diseño del controlador	8
3.2.1 Análisis de las características con realimentación unitaria($G_c(s)=1$)	8
3.2.2 Cálculo de los parámetros del controlador	10
3.2.2.1 Controlador PD	10
3.2.2.2 Controlador PI	12
3.2.3 Ajuste final del controlador	14
4. Sistema obtenido	15
5. Verificación del sistema final	17
6. Conclusiones	18

2. Introducción

El objetivo del Trabajo Práctico 2 es el de calcular controladores clásicos para satisfacer determinados requerimientos dinámicos y estáticos en sistemas SISO continuos, lineales y estacionarios. Dichos controladores serán del tipo PI, PD o PID según corresponda, y para el diseño de los mismos se utilizarán los procedimientos de lugar de las raíces y respuesta en frecuencia estudiados, destacando las ventajas y limitaciones de dichas técnicas de cálculo.

Dándole continuidad al Trabajo Practico N°1, trabajaremos sobre el sistema de “Producción de Biodiesel en un reactor agitado”. El modelo a utilizar es el de la imagen siguiente:

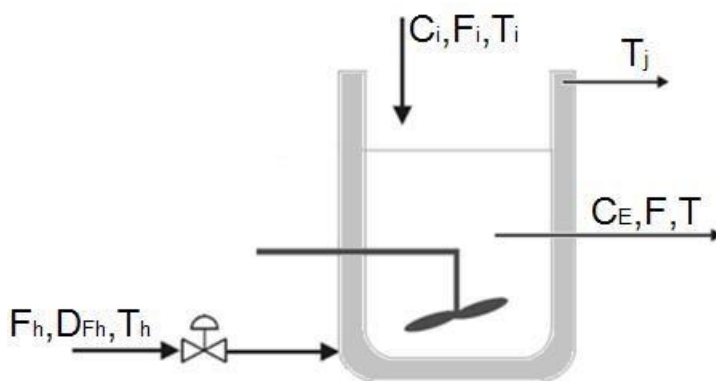


Figura 1 – REACTOR DE BIODIESEL

Entradas:

- F_h : Flujo de líquido de calentamiento (**variable manipulada, MV**)
- DF_h : Perturbación del flujo de líquido de calentamiento (**perturbación no medible, DV**)
- T_h : Temperatura del líquido de calentamiento
- T_i : Temperatura del reactivo entrante
- C_i : Concentración del reactivo entrante
- F_i : Flujo de reactivo entrante (**perturbación medible, DV**)

Salidas:

- C_E : Concentración de biodiesel (**variable a controlar, CV**)
- T_j : Temperatura del líquido de calentamiento en la camisa
- F : Flujo de biodiesel
- T : Temperatura del biodiesel

2.1 Control por adelanto de fase - Corrector PD

En el sistema mostrado en la Figura 2 el controlador $J(s)$ utilizado para corregir la respuesta dinámica es del tipo PD aproximado.

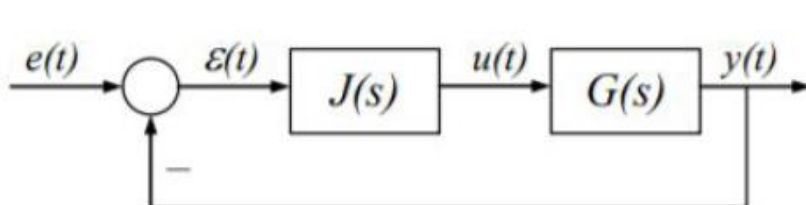


Figura 2. Diagrama bloque controlador PD

$e(t)$: consigna
 $\varepsilon(t)$: error
 $u(t)$: control
 $y(t)$: salida

$J(s)$: Controlador
 $G(s)$: Planta

Dicho controlador posee las siguientes características:

$$J(s) = K \frac{(1 + a\tau s)}{(1 + \tau s)} \quad ; \quad a > 1 \quad (1.1)$$

$J(s)$ posee un cero en la frecuencia $1/a\tau$ y un polo en la frecuencia $1/\tau$, de este modo el polo siempre se ubica en frecuencias mayores a la del cero puesto que es condición de diseño del controlador que el factor a sea mayor que 1. Así construido, el controlador incorpora un avance de fase máximo ϕ_m la frecuencia ω_m , estos últimos determinados por las ecuaciones (1.2):

$$\phi_m = \arcsen \frac{a-1}{a+1} \quad ; \quad \omega_m = \frac{1}{\tau\sqrt{a}} \quad (1.2)$$

Normalmente se considera a la constante K igual a $1/a$, este valor conduce a que el módulo de J sea 0dB en altas frecuencias. Para este caso particular el controlador es:

$$J(s) = \frac{1}{a} \frac{(1 + a\tau s)}{(1 + \tau s)} \quad ; \quad a > 1 \quad (1.3)$$

En la figura 3 se muestra el diagrama de Bode de un control PD aproximado, el caso particular mostrado es:

$$J(s) = \frac{1}{10} \frac{(1 + s)}{(1 + 0.1s)} \quad ; \quad a = 10 \quad ; \quad \tau = 0.1 \Rightarrow J(s) = \frac{(1 + s)}{(10 + s)}$$

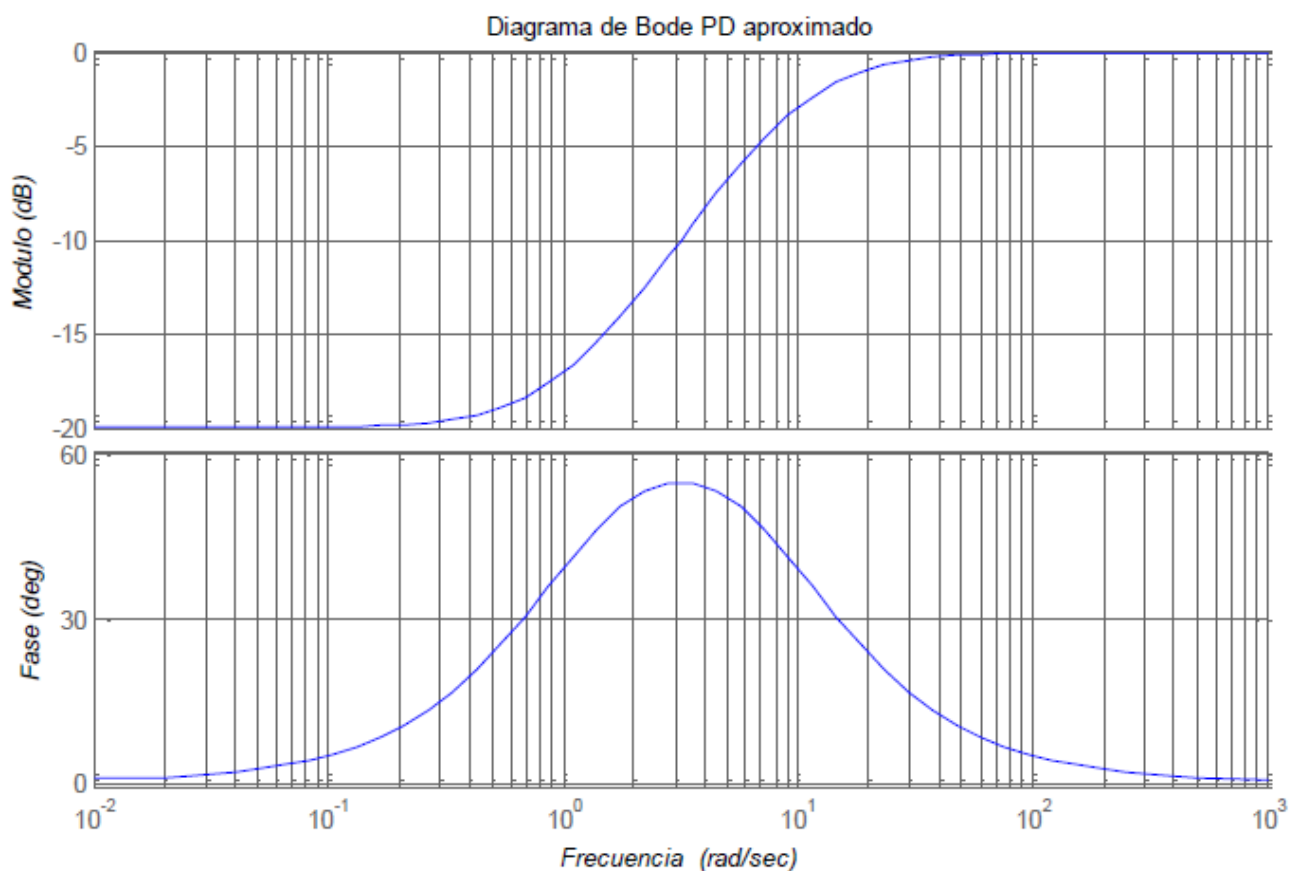


Figura 3

2.2 Control por atraso de fase - Corrector PI

En el sistema mostrado en la figura 4 el controlador $J(s)$ utilizado para corregir la respuesta dinámica es del tipo PI.

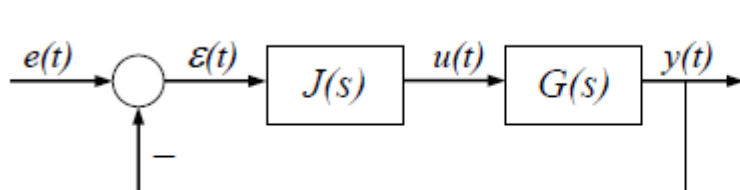


Figura 4

$e(t)$: consigna

$\varepsilon(t)$: error

$u(t)$: control

$y(t)$: salida

$J(s)$: Controlador

$G(s)$: Planta

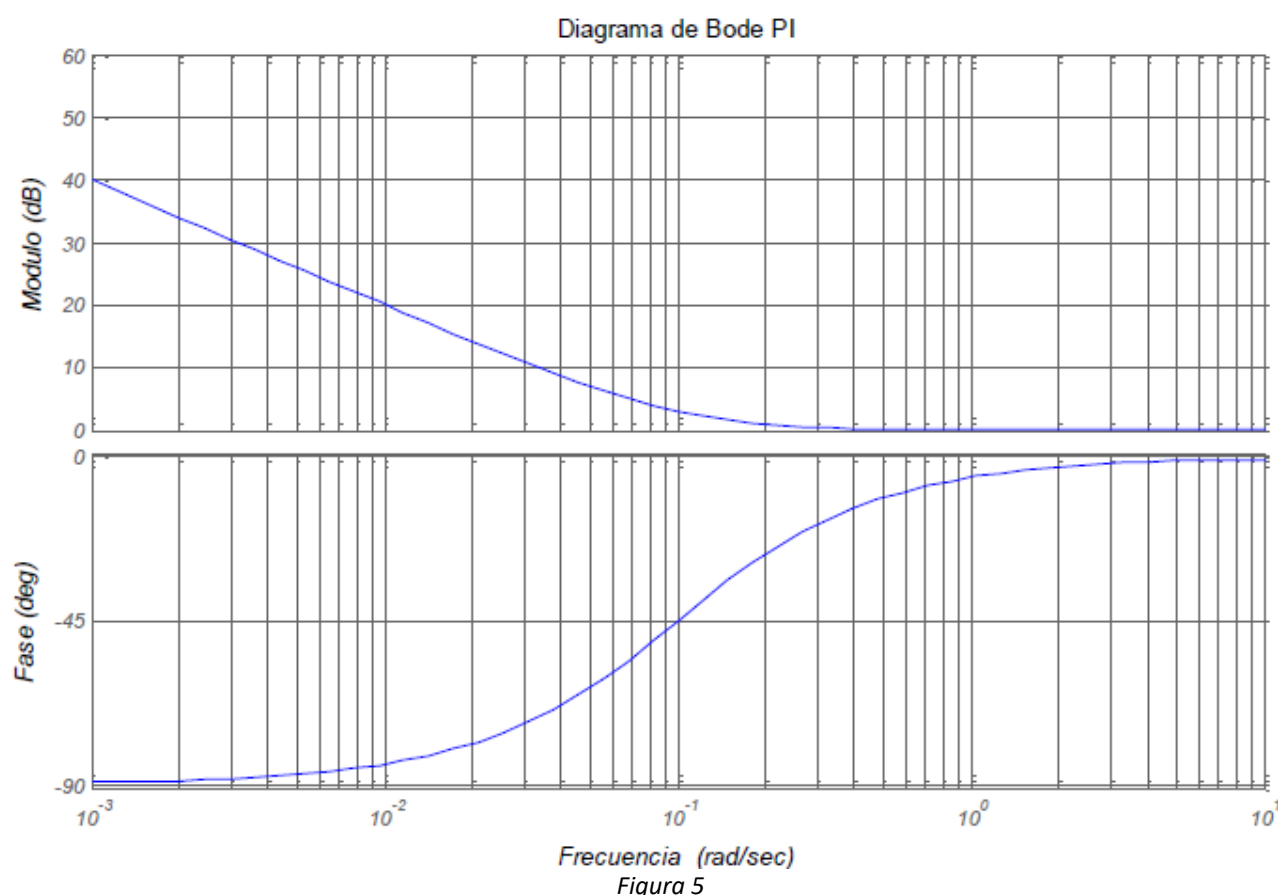
Dicho controlador posee las siguientes características:

$$J(s) = 1 + \frac{1}{\tau s} = \frac{1 + \tau s}{\tau s} \quad (1.4)$$

$J(s)$ posee un cero en la frecuencia $1/\tau$ y un polo en el origen, de este modo el cero compensa la fase de -90° aportada por el polo en el origen evitando efectos no deseados en alta frecuencia.

En la figura 5 se muestra el diagrama de Bode de un control PI, el caso particular mostrado es:

$$J(s) = \frac{1 + 10s}{10s} ; \tau = 10 \Rightarrow J(s) = \frac{0.1 + s}{s}$$



Para evitar la ubicación del polo en el origen es posible construir una aproximación del control PI a través del siguiente controlador:

$$J(s) = \frac{(1 + \tau s)}{(1 + b\tau s)} ; b > 1 \quad (1.5)$$

$J(s)$ posee un cero en la frecuencia $1/\tau$ y un polo en la frecuencia $1/b\tau$, de este modo el cero siempre se ubica en frecuencias mayores a la del polo puesto que es condición de diseño del controlador que el factor b sea mayor que 1. Así construido, el controlador incorpora un retraso de fase máximo ϕ_m la frecuencia ω_m , estos últimos determinados por las ecuaciones (1.6):

$$\phi_m = \arcsen \frac{b-1}{b+1} \quad ; \quad \omega_m = \frac{1}{\tau\sqrt{b}} \quad (1.6)$$

En la figura 1.5 se muestra el diagrama de Bode de un control PI aproximado, el caso particular mostrado es

$$J(s) = \frac{(1+0.1s)}{(1+s)} \quad ; \quad b=10 \quad ; \quad \tau=0.1 \Rightarrow J(s) = \frac{1}{10} \frac{(10+s)}{(1+s)}$$

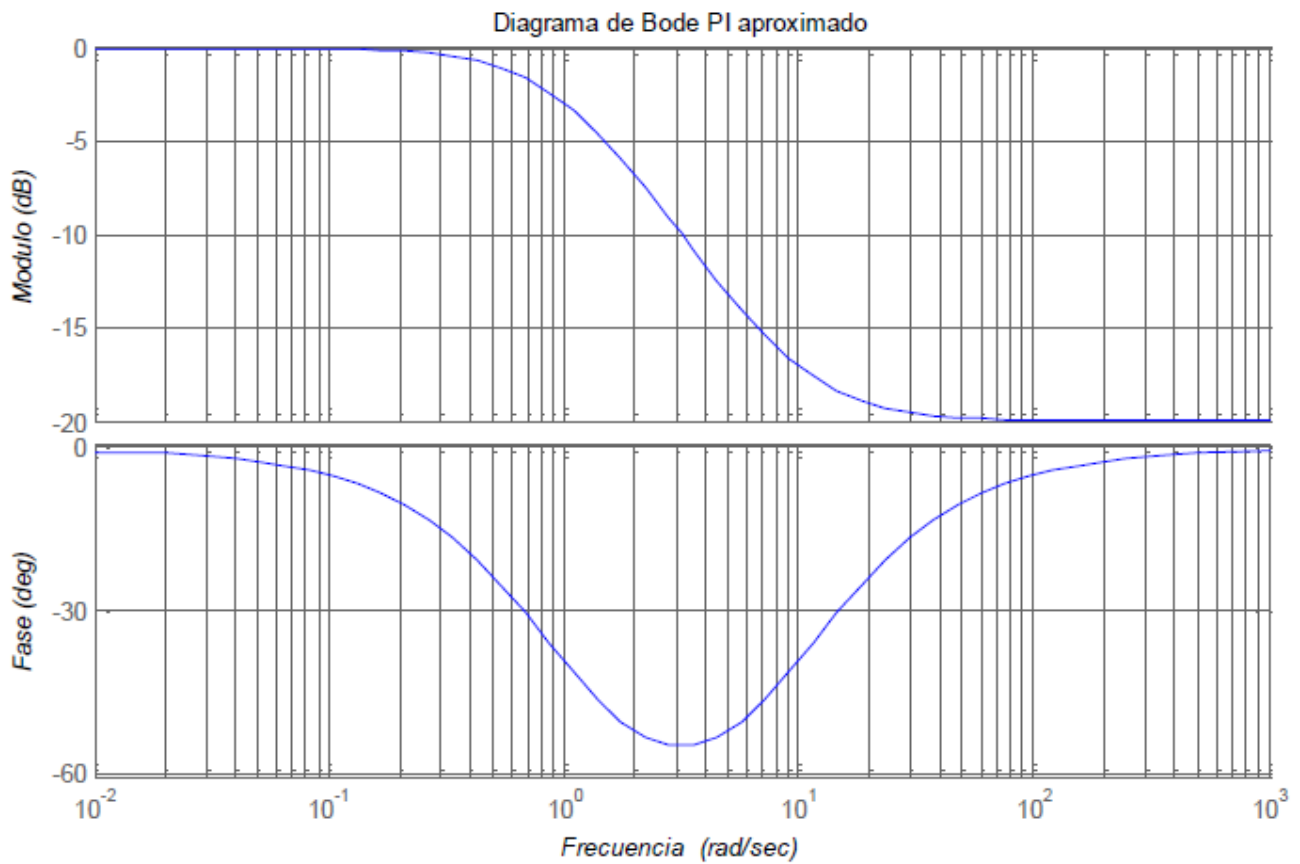


Figura 6

3. Desarrollo

3.1 Modelo lineal aproximado de la planta

El paso previo al cálculo del controlador consiste en encontrar un modelo lineal que aproxime lo mejor posible la respuesta al escalón del sistema real. Este proceso fue resuelto por la cátedra utilizando la librería “System Identification Toolbox” de MATLAB y se obtuvo la siguiente función transferencia a partir de la respuesta al escalón (FT):

$$G_{pa}(s) = \frac{0.20824(1 + 10.668s)}{(1 + 97.426s)(1 + 22.81s)} e^{-15.425s}$$

Donde $G_{pa}(s)$ presenta un FIT > 99%.

Los polos y ceros de nuestro sistema serán:

$$Z_{pd} = -0.0937$$

$$p_{pd-1} = -0.0103; p_{pd-2} = -0.0438$$

3.2 Diseño de controlador

3.2.1 Análisis de las características con realimentación unitaria ($G_c(s)=1$)

En esta sección buscaremos caracterizar el sistema con un controlador de ganancia unitaria conectado en cascada. Para esto utilizamos $G_{pa}(s)$ y el lazo cerrado utilizando el comando “sisotool(G_{pa})”.

Ensayamos el sistema mencionado con un escalón unitario y obtuvimos el resultado que se muestra en la figura 7. Además, se pueden observar sobre la misma los siguientes valores:

- $t_s = 174$ seg
- $tr[2\%] = 323$ seg
- $SV[\%] = 0\%$

$$Vf = 0.172 \Rightarrow e_{EE} = 1 - Vf = 1 - 0.172 = 0.828$$

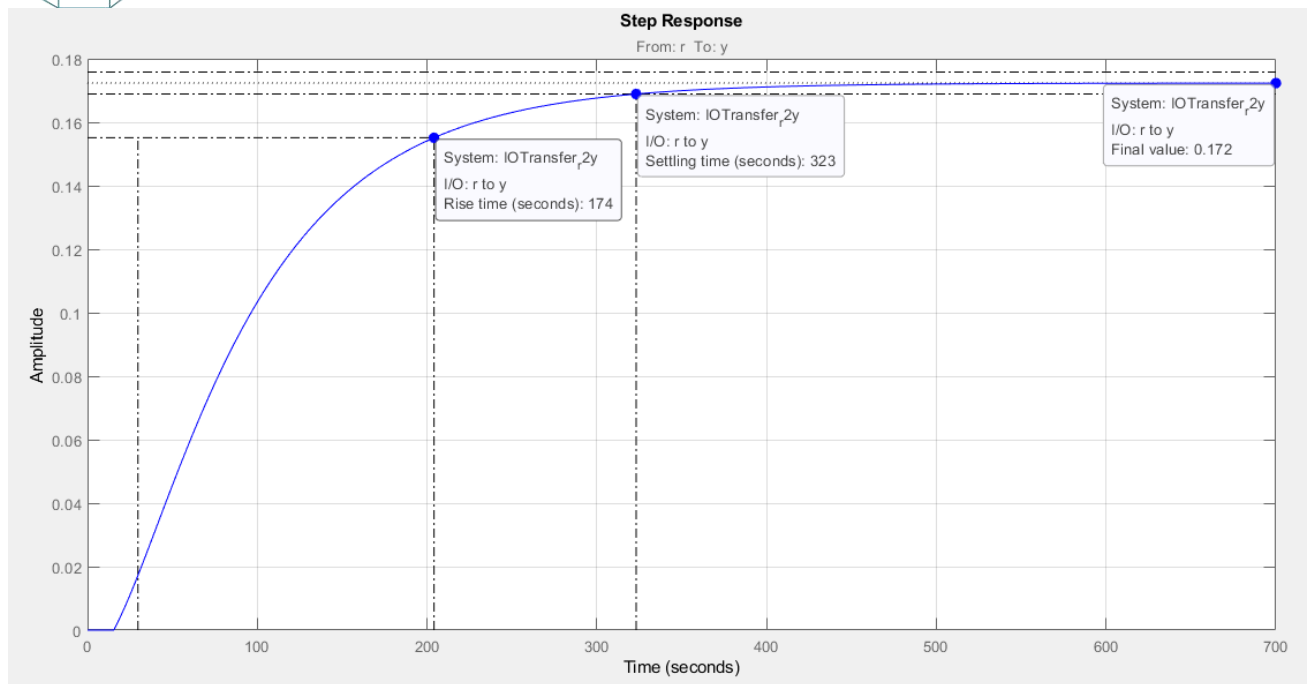


Figura 7 - Respuesta del modelo a un escalón unitario con realimentación unitaria

Para cerrar el análisis del sistema calcularemos el margen de ganancia y de fase con herramientas de Matlab.

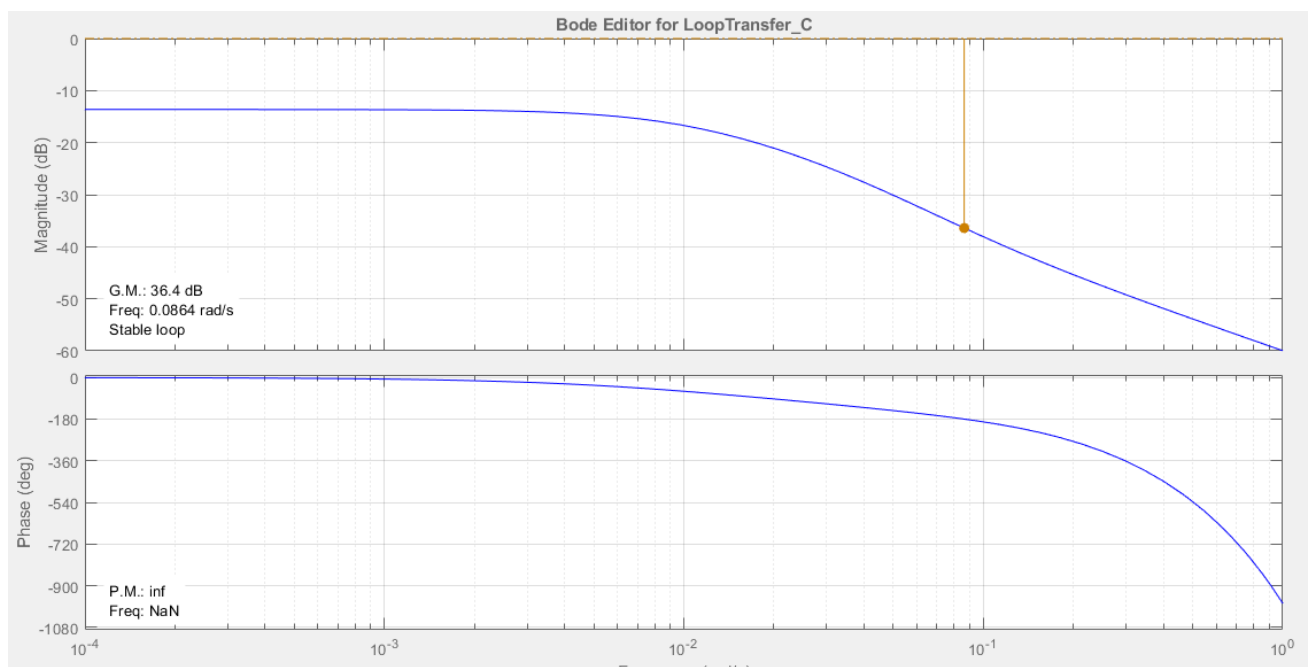


Figura 8 - Diagrama de Bode del sistema a lazo abierto con controlador con ganancia unitaria

Vemos que la amplitud es siempre negativa, por lo cual el margen de fase es infinito, y que el margen de amplitud es 36,4 dB positivos.

3.2.2 Cálculo de parámetros del controlador

Se pide confeccionar el controlador para el sistema dado utilizando los métodos de cálculo y criterios vistos, y complementarlos con la herramienta SISOTOOL para verificar los resultados y/o realizar un “ajuste fino” del controlador diseñado.

Debemos lograr un funcionamiento con las siguientes características:

- $tr\ 2\% < 120\ seg$
- $SV < 20\%$
- $\epsilon_{01}=0$ (error estático)

Vamos a empezar por asumir que tenemos un sistema de segundo orden. De esta manera, a partir de los requerimientos, calculamos los parámetros que se ven afectados:

$$SV[\%] = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} 100 < 20\% \Rightarrow \xi > 0.455595 \rightarrow \text{adoptamos: } \xi = 0.456$$

$$tr[2\%] = \frac{4}{\xi\omega_n} < 120\text{seg} \Rightarrow \omega_n > \frac{1}{30\xi} = 0.073107 \rightarrow \text{adoptamo: } \omega_n = 0.07312 \frac{rad}{seg}$$

$$MF \approx 100\xi \Rightarrow MF = 45,6^\circ$$

Para llegar al margen de fase deseado primero debemos saber el margen de fase de nuestro sistema. Utilizando Matlab obtenemos a la frecuencia: $\omega_n = 0.07312 \frac{rad}{seg}$

$$Av = 0.0189 \rightarrow Av_{dB} = 20 \log 10(Av) = -34.4805dB$$

$$Phase = -167.7305^\circ$$

Debemos modificar la fase para tener el margen de fase requerido según el siguiente cálculo:

$$\varphi_M = 45.6^\circ - (180^\circ - 167.7305^\circ) = 33.3305^\circ$$

Esto quiere decir que necesitamos avanzar la fase, para lo cual debemos construir con un controlador del tipo PD, como ya mencionamos.

Además, es importante empezar por el diseño del controlador PD porque este trabaja sobre la parte dinámica de la respuesta del sistema, es decir, buscamos cumplir los requisitos de sobre valor y tiempo de respuesta.

3.2.2.1 Controlador PD

Recordando la FT de este controlador:

$$J(s) = K \frac{(1 + a\tau s)}{(1 + \tau s)} ; a > 1$$

Llamaremos K_{pd} a la ganancia K de la ecuación en referencia al controlador PD. Para calcular estos valores utilizamos las ecuaciones ya mencionadas, pero despejando los parámetros que ahora queremos calcular: τ y a .

$$a = \frac{1 + \sin \varphi_M}{1 - \sin \varphi_M} \quad ; \quad \tau = \frac{1}{\omega_n * \sqrt{a}}$$

$$a = 3.4392 \quad ; \quad \tau = 7.3745$$

De esta manera el cero y el polo del controlador son:

$$z_{pd} = -0.0394 \quad ; \quad p_{pd} = -0.1356$$

Resta calcular la ganancia K_{pd} , para lo cual planteamos que la multiplicación de las ganancias del controlador y de la planta en ω_n , por K_{pd} , debe ser igual 1 lo que es 0 dB.

$$|G_{pa}|_{\omega_n} * K_{pd} * |G_{pd}|_{\omega_n} = 1 \rightarrow K_{pd} = \frac{1}{|G_{pa}|_{\omega_n} * |G_{pd}|_{\omega_n}} = 28.5306$$

Finalmente, la FT del controlador PD es:

$$G_{pd} = 28.5306 \frac{(1 + 25.3624s)}{(1 + 7.3745s)}$$

En la próxima figura mostramos el Diagrama Bode del lazo abierto $G_{pd} * G_{pa}$ y observamos un margen de fase de 45.7° .

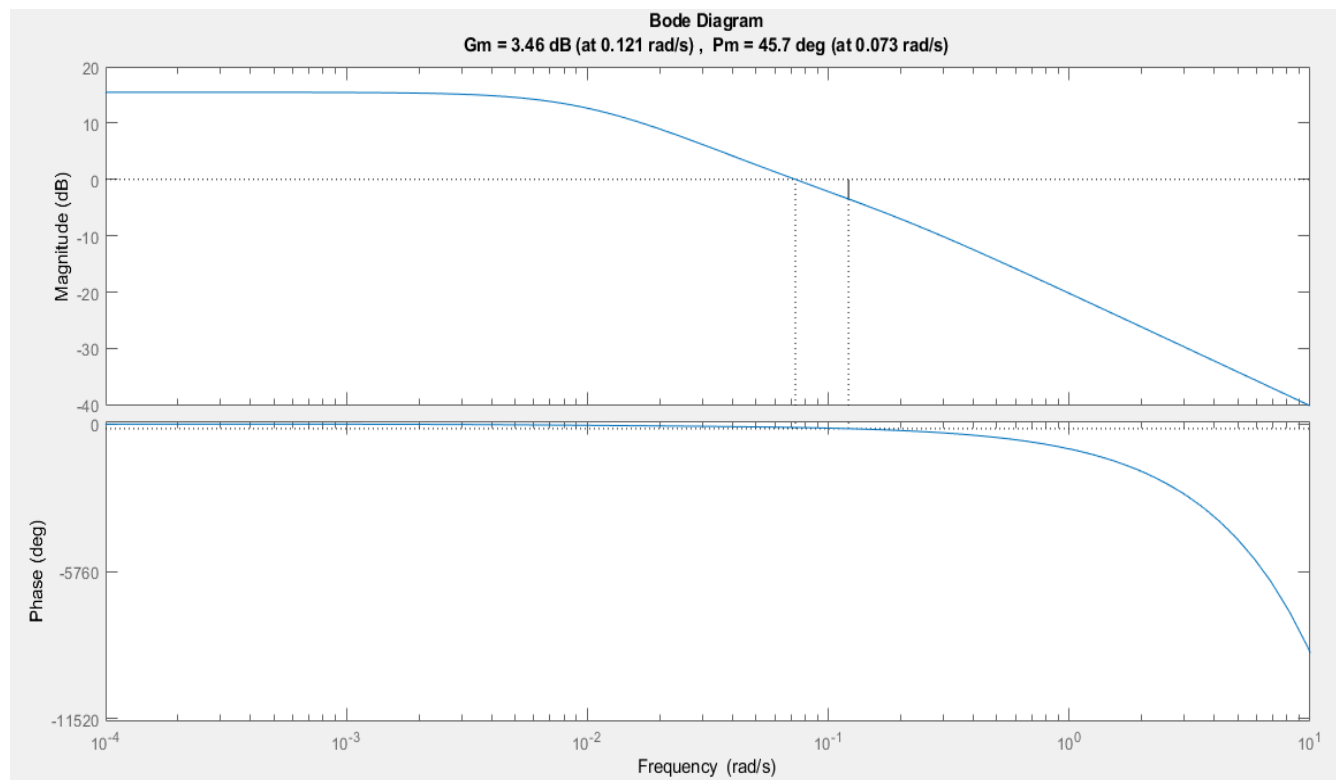


Figura 9 - Diagrama de Bode para la verificación del controlador PD

3.2.2.2 Controlador PI

En la sección 3.2.1 vimos que el sistema tiene un error estático $e_{EE} = 0.828$ y sabemos que el controlador PD sólo actúa en el régimen transitorio, de manera que este error persiste. Otro requisito del controlador es que este error sea nulo, para lo cual debemos implementar un controlador tipo PI.

Recordando su FT:

$$J(s) = 1 + \frac{1}{\tau s} = \frac{1 + \tau s}{\tau s}$$

Para las necesidades que tenemos en este problema surgen algunas cuestiones a modificar en esta función. En primer lugar, como queremos eliminar el error estático, debemos poner un polo en cero. La idea de esto es que el controlador PI sume un valor estático, es decir en $\omega = 0$, tal que eliminemos el error. Pero para esto surge una segunda cuestión, el controlador no debe afectar el funcionamiento en frecuencias mayores y así no influir en la corrección que realiza el PD. Esto lo logramos colocando un cero lo suficientemente antes del efecto del controlador PD. Consideramos suficiente a una década en el Diagrama Bode, lo que es igual a $z_{pi} = \omega_n/10 = -0.0073 \text{ rad/seg}$.

Entonces la FT del controlador PI tendrá la siguiente forma:

$$J(s) = K_{pi} \frac{1 + s}{s}$$

Siendo el cero $z_{pi} = -1/\tau$, el polo $p_{pi} = 0$ y, por lo que se comentó en el párrafo anterior, tenemos que $\tau = 1/(0.0073 \text{ rad/seg}) = 136.7614 \text{ seg}$.

Teniendo estos parámetros resta calcular la ganancia K_{pi} , para lo cual debemos pensar lo mismo que para K_{pd} , dado que lo que nos interesa de las ganancias de los controladores es lograr el margen de fase.

$$K_{pi} * |G_{pi}|_{\omega_n} * |G_{pa}|_{\omega_n} * K_{pd} * |G_{pd}|_{\omega_n} = 1 \rightarrow K_{pi} = \frac{1}{|G_{pi}|_{\omega_n} * |G_{pa}|_{\omega_n} * K_{pd} * |G_{pd}|_{\omega_n}} = 0.995$$

Adoptaremos $K_{pi} = 1$, por lo que finalmente la FT del controlador PI es:

$$G_{pi} = 1 \frac{(1 + 136.7614s)}{136.7614s}$$

El controlador final es:

$$J(s) = 28.53 \frac{3468.63s^2 + 162.11s + 1}{1009s^2 + 136.8s}$$

A continuación, en la figura 10 vemos el Diagrama Bode del sistema del lazo abierto $G_{pi} \cdot G_{pd} \cdot G_{pa}$ y observamos un margen unos grados por debajo de lo requerido.

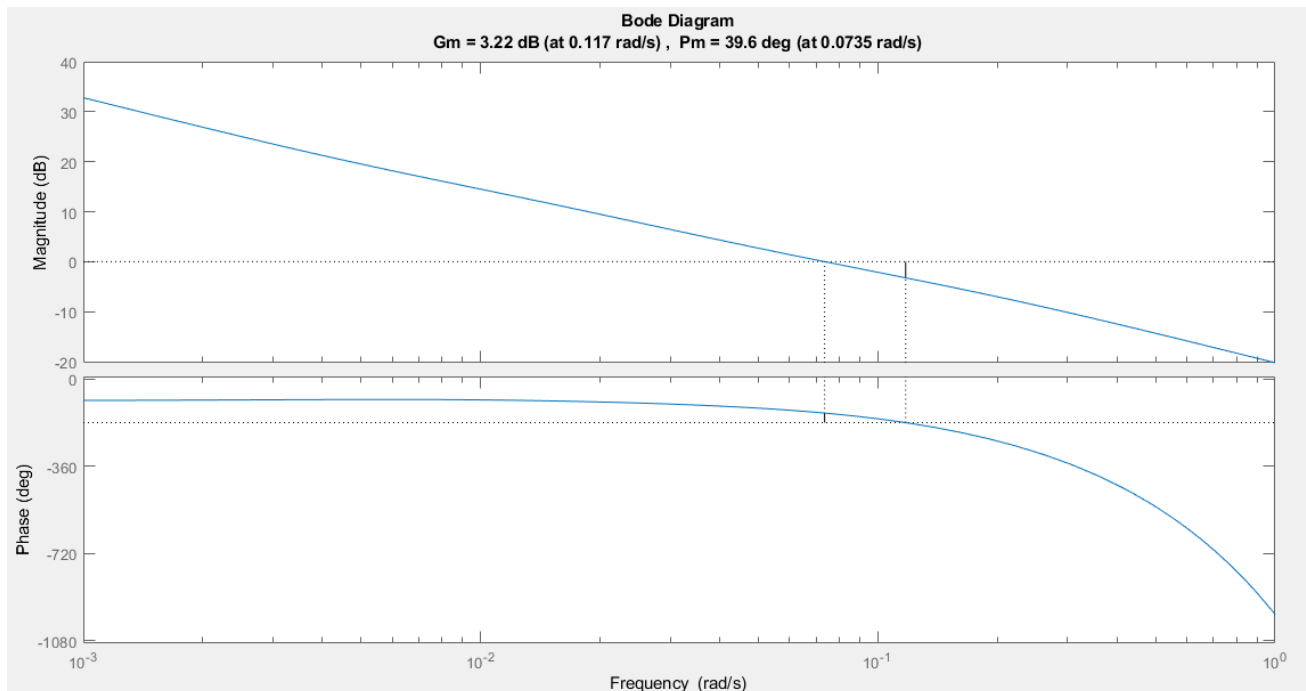


Figura 10 - Diagrama de Bode para la verificación del controlador PD+PI

Y en la figura 11 vemos la respuesta al escalón del sistema a lazo cerrado. En esta podemos apreciar una diferencia en el sobrevalor a lo requerido, aproximadamente un 42.6%.

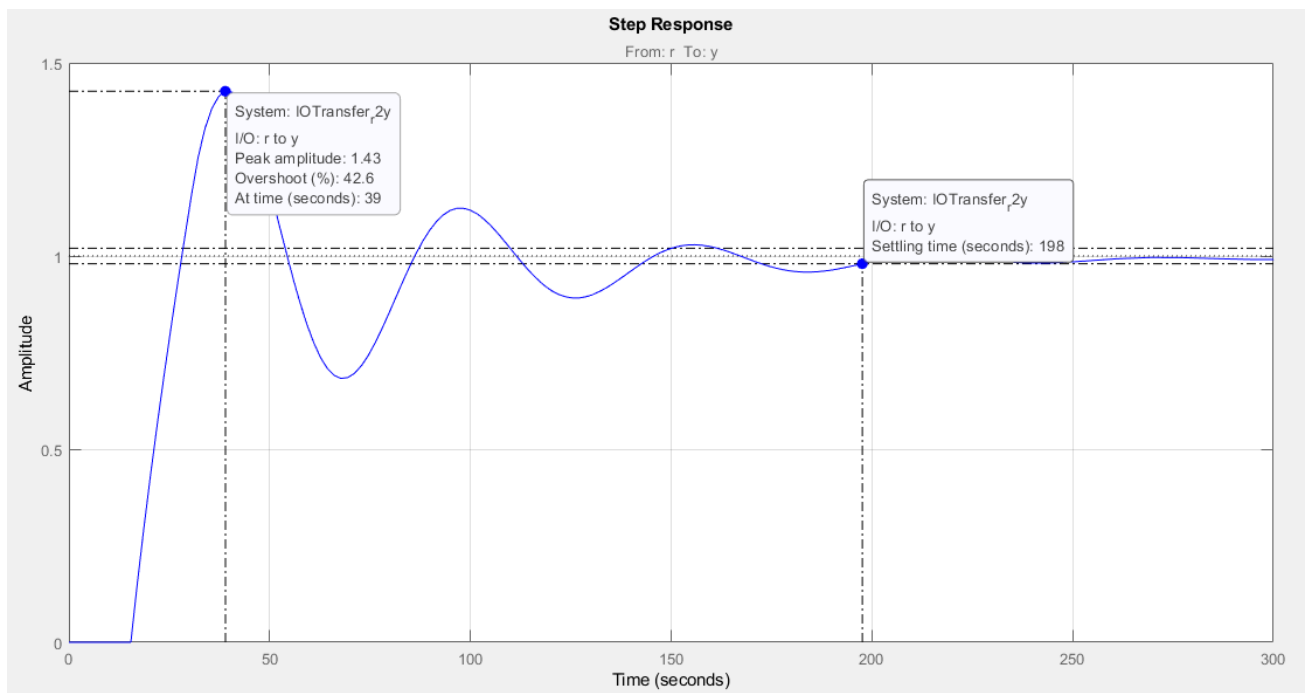


Figura 11 – Respuesta al escalón del sistema controlado a lazo cerrado

Podemos atribuir estos errores a que el desarrollo que hicimos hasta ahora fue aproximado, dado que varios parámetros los calculamos con aproximaciones. De todas maneras, entendemos que lo logrado fue exitoso y nos dedicaremos ahora a la puesta a punto del controlador.

3.2.3 Ajuste Final del Controlador

En esta sección realizaremos el ajuste para cumplir con las especificaciones que se piden para la respuesta del sistema. Para esto MatLab nos provee la herramienta Sisotool que permite modificar manualmente la ubicación de los polos y ceros de forma gráfica, y visualizar cómo afectan estas modificaciones a la respuesta al escalón del sistema con el controlador.

Para realizar este ajuste buscamos cumplir las especificaciones dadas:

- $t_r 2\% < 120 \text{ seg}$
- $SV < 20\%$
- $\epsilon_{01}=0$ (error estático)

Dado que el error ya fue llevado a cero, prestamos atención a las otras variables, sumando el margen de fase deseado (mayor a $45,6^\circ$). Para no generar grandes cambios y como ya sabemos que el controlador PD dio buenos resultados, vamos a modificar la ganancia del controlador y el cero del PI.

Al achicar la ganancia logramos satisfacer el sobre valor y el margen de ganancia, pero como sabemos, esto hace más lento el proceso con lo cual se agranda el tiempo de respuesta. Modificando también la posición del cero mencionado, logramos una solución de compromiso muy satisfactoria. El valor de estos parámetros se modificó de la siguiente manera y la FT del controlador es:

$$K_f = 21$$
$$z_{pi} = -0.00952$$

$$J_c(s) = 21 \frac{(1 + 105s)(1 + 25.3624s)}{s(1 + 7.3745s)}$$

4. Sistema obtenido

Nos proponemos en esta sección hacer algunas comparaciones gráficas para apreciar el resultado obtenido.

En primer lugar vemos en la figura 12, los Diagramas Bode del sistema a lazo abierto sin y con controlador.

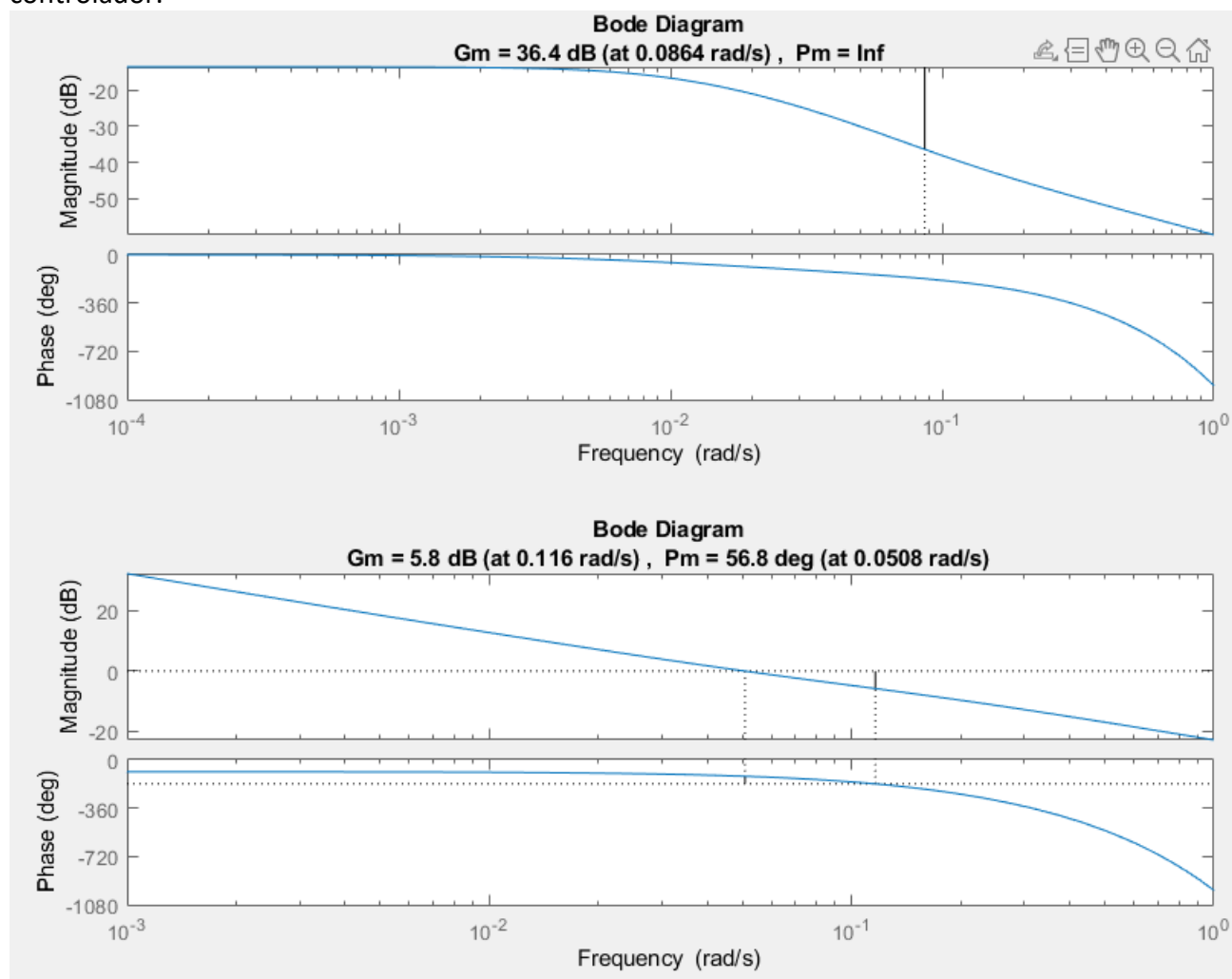


Figura 12 - Comparación Bode a lazo abierto sin controlador(sup) y con controlador(inf)

Se puede observar que logramos el objetivo del margen de fase, siendo de 56.8° cuando se requiere más de 45.6° . Además, vemos claramente que comienza con el polo en cero lo que nos da un error estático igual a cero que se aprecia en las próximas gráficas.

En la figura 13 mostramos la respuesta al escalón del sistema en LC con controlador de ganancia unitaria y con el controlador construido. Se puede apreciar que el tiempo de respuesta disminuyó muchísimo, de hecho, el programa evalúa el sistema con controlador con ganancia unitaria en casi el doble de tiempo. Pasa de 323 seg a 93,8 seg. Mientras que el valor final de la concentración de biodiesel pasa de 0,172 a 1.

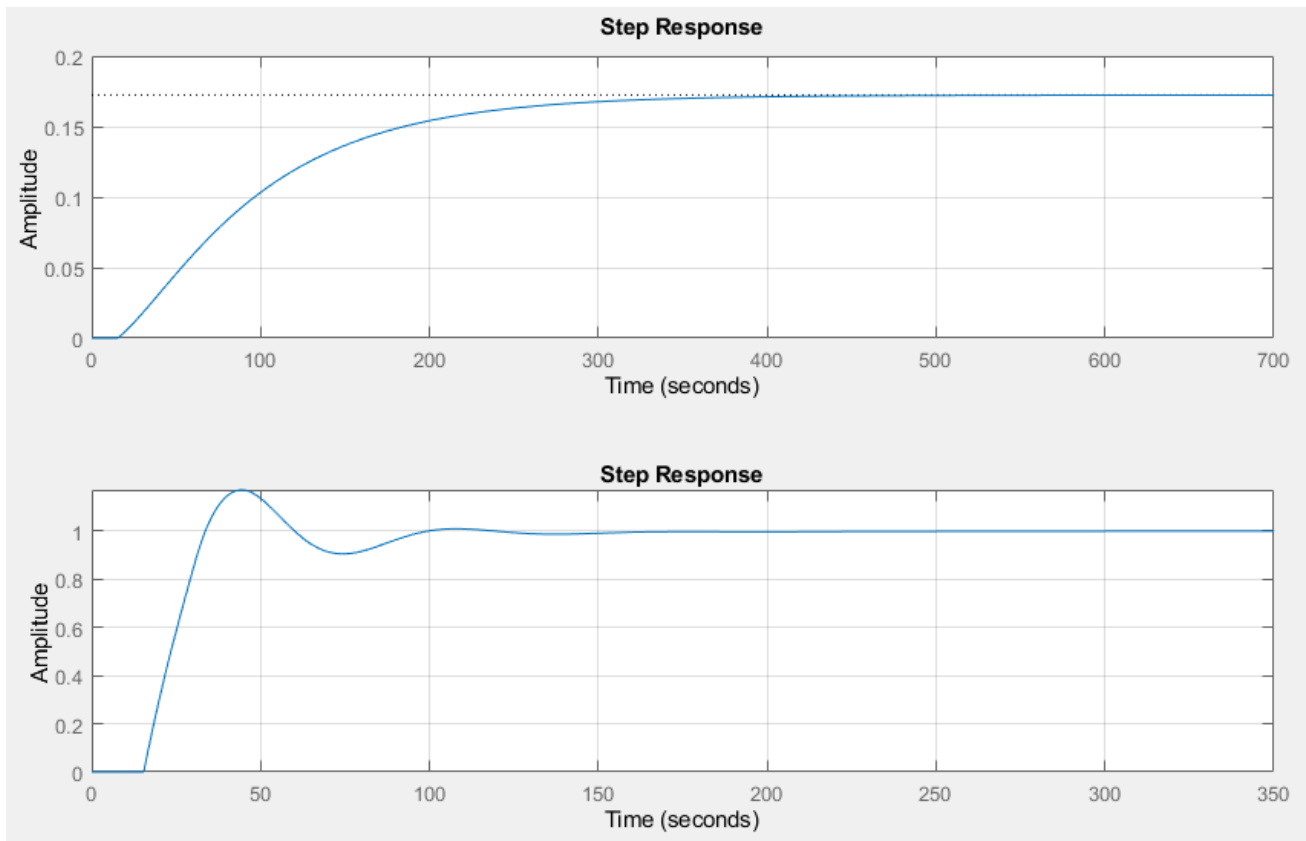


Figura 13 - Comparación respuesta al escalón con controlador de ganancia unitaria(sup) y con controlador construido(inf)

Por último, observamos las evoluciones temporales de la variable manipulada(fig. 14) y controlada(fig.15) para un escalón en la entrada.

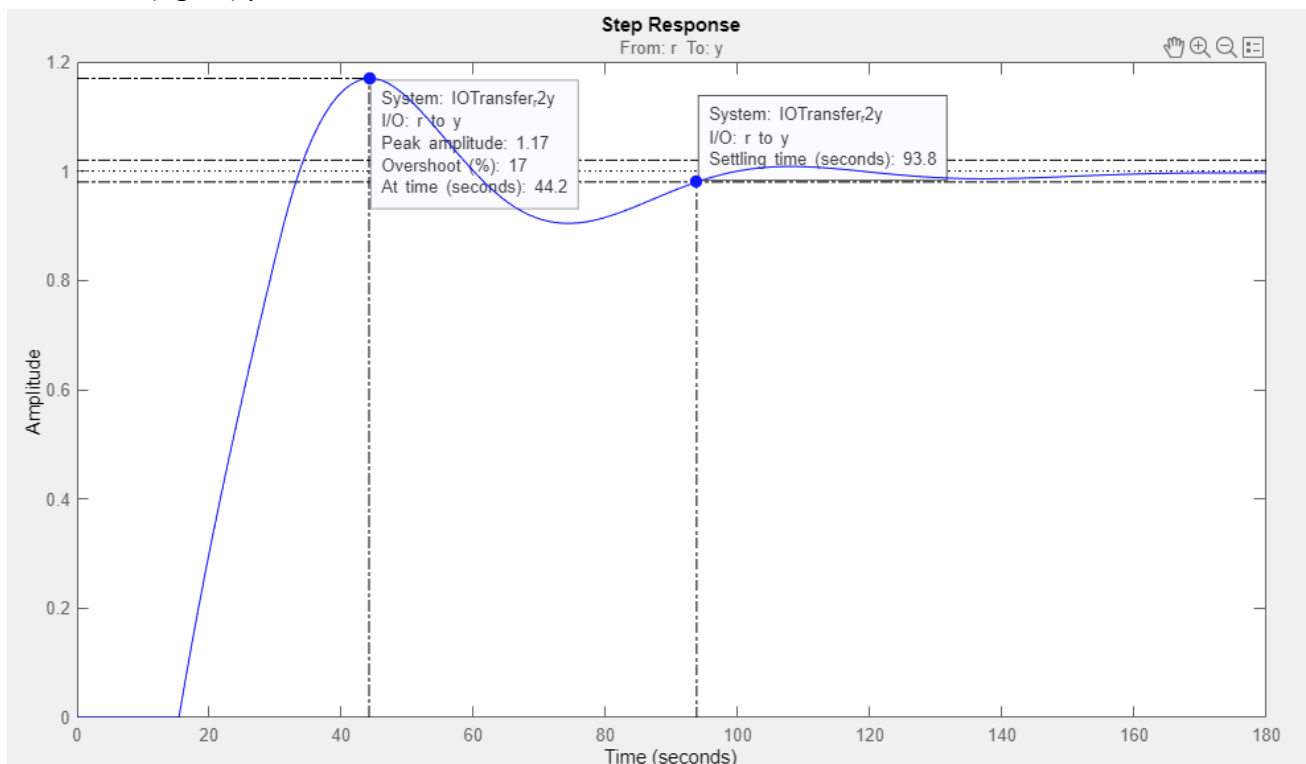


Figura 14 - Gráfica de la variable controlada para un escalón de la entrada

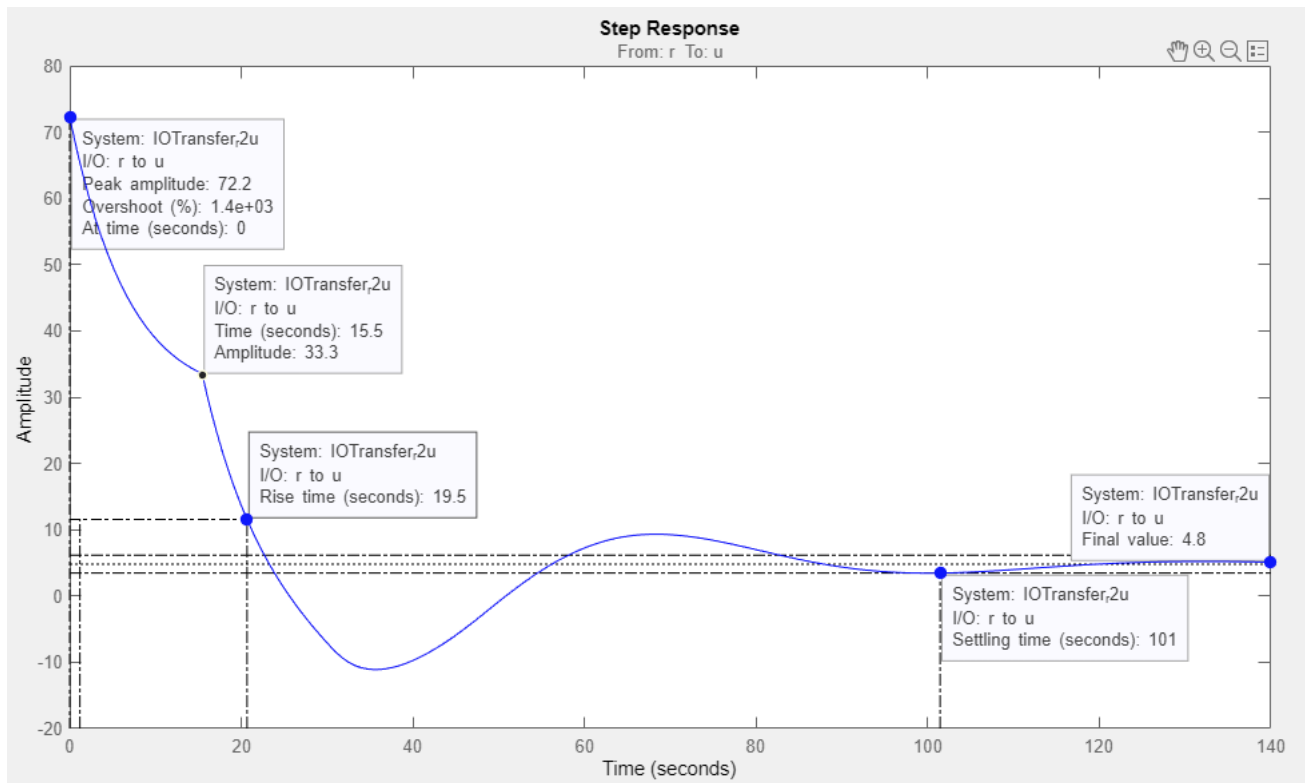


Figura 15 - Gráfica de la variable manipulada asociada a la gráfica 14

Se puede apreciar como se produce un cambio abrupto en la dinámica de la variable manipulada aproximadamente a los 15,5seg. debido al retardo que la planta posee.

Vemos en esta última gráfica lo que parece ser un sistema de 2do orden, o al menos dos polos dominantes, con valor inicial.

5. Verificación del sistema Final

Ahora que ya contamos con el controlador final, lo implementaremos al modelo real del sistema y veremos cómo responde a un escalón del 2% del valor nominal del SetPoint, es decir, en servo-comportamiento.

En la figura 16 observamos una diferencia sustancial con el sistema modelado con funciones transferencias. Esto nos muestra que tal modelado, no es muy fiel al sistema real, pero aun así nos permite generar un controlador satisfactorio. El sobre valor es del $SV[\%]=0.0698\%$ y el error estático es cero, mientras que es evidente a simple vista que el tiempo de respuesta es bastante mayor. Por lo tanto, podemos decir que se cumplió con la mayoría de los requisitos.

Atribuimos la diferencia en mayor medida a suponer que trabajamos con un sistema de segundo orden además de tener en cuenta la alinealidad del "Proceso real".

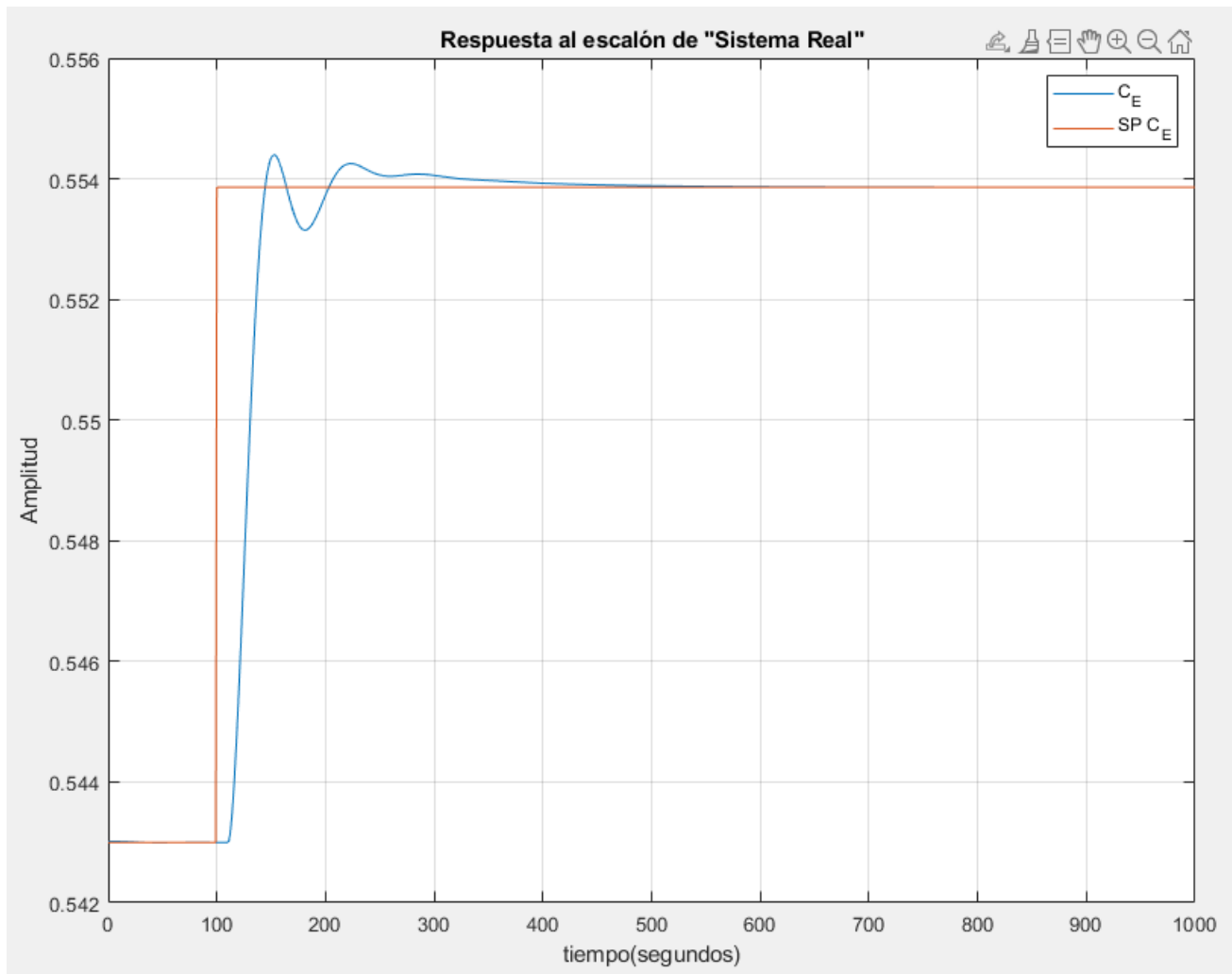


Figura 16 - Respuesta del sistema real con controlador PID, servo-comportamiento con variación del 2%

6. Conclusiones

Durante el desarrollo del trabajo se logró diseñar un controlador para satisfacer los requerimientos tanto estáticos como dinámicos del sistema.

En principio se utilizaron las expresiones teóricas para hallar los valores de polos y ceros necesarios para dar forma a los controladores PD y PI correspondientemente.

Luego, se dio uso a la herramienta Sisotool de Matlab para poder hacer un ajuste más fino y acercarnos más a los valores pedidos. Esta herramienta es de suma utilidad ya que nos permite observar de forma gráfica y en tiempo real, cómo impactan las modificaciones que hagamos en los polos, los ceros y la ganancia de nuestro controlador, a diferentes excitaciones. Estos ajustes son necesarios ya que en el proceso se adoptaron aproximaciones, tales como trabajar con un modelo de segundo orden, para representar la planta de mayor complejidad.

Si bien no se lograron el 100% de los requerimientos, pudimos encontrar un controlador que responde satisfactoriamente con la mayoría de ellos, priorizando en este caso un mejor desempeño en cuanto a sobre valor por sobre el tiempo de respuesta.

Por último, destacamos la utilidad del diseño de controladores en dominio frecuencial ya que, si bien es un poco más trabajoso, en este caso se logró un mucho mejor resultado que trabajando en dominio temporal.