

# ***Métodos Energéticos de la Mecánica Analítica en el Modelado de Sistemas Físicos en Ingeniería: Ecuaciones de Euler-Lagrange Ecuaciones de Hamilton y PHS***

**Código: A\_DSf\_EL&pHS**

**DINÁMICA DE LOS SISTEMAS FÍSICOS - A12 Ingeniería Electrónica. E11 Ingeniería Eléctrica. M10 Ingeniería Mecánica**

## ***Introducción.***

Las leyes de Newton de la Mecánica son la culminación teórica de un proceso de indagación experimental de la naturaleza que sienta las bases de la Física y, con ella, de la Ciencia. La Mecánica Newtoniana se expresa en términos de fuerzas, cantidades de movimiento, posiciones y velocidades – todas ellas magnitudes vectoriales – y del principio de acción y reacción. En los 1700 y primera parte de los 1800 se produce una formulación teórica matemática de la Mecánica Clásica, conocida como Mecánica Analítica, que desarrolla los modelos de los sistemas mediante el empleo de los conceptos de (co-) energías cinética y potencial, todas ellas magnitudes escalares. Los nombres descolantes asociados con este desarrollo son los de Euler, Lagrange y Hamilton, y los dos formalismos principales que lo integran son las Ecuaciones de Euler-Lagrange y las Ecuaciones de Hamilton. A lo largo de los s. XIX y XX, la Mecánica Analítica ha sido extendida a otros campos de la Física Clásica y de la Física "Moderna" (fundada en la Física Cuántica y la Relatividad Einsteiniana) donde ha probado ser esencial para la formulación y resolución de los problemas allí abordados. También en la Ingeniería han encontrado aplicación estas teorías y sus metodologías asociadas, con particular desarrollo en el tratamiento de problemas mecánicos, eléctricos y electromecánicos, que son de especial interés para este curso. Si bien aquí no se abordarán en profundidad, se destaca que en las últimas décadas se han realizado generalizaciones de ambos formalismos que encuentran aplicación tanto en Teoría como en Ingeniería de Control. En particular, las ecuaciones de Hamilton han encontrado su generalización en el formalismo conocido como PHS, las siglas del inglés "Port-Hamiltonian Systems", que permite no sólo tratar sistemas conservativos como las ecuaciones de Hamilton clásicas, sino incorporar disipación y también la acción de agentes externos que actúan sobre el sistema vía puertos a través de los cuales se intercambia potencia en los sistemas físicos (razones que explican la designación alternativa inicial PCHD, por Port-Controlled Hamiltonian systems with Dissipation)<sup>1</sup>.

El enfoque Lagrangiano, a diferencia del Newtoniano, produce un número mínimo de ecuaciones diferenciales para describir la dinámica del sistema. Además, la forma de las ecuaciones obtenidas es independiente del sistema de coordenadas elegido para describir al sistema. En estas notas se hace una presentación introductoria del tema, simple y concisa. No se incluye ninguna fundamentación teórica, para lo cual se redirige al alumno a la bibliografía sobre el mismo.<sup>2</sup>

## ***Elementos básicos. Sistemas Mecánicos.***

A continuación se presentan los ingredientes básicos de esta Teoría con foco en los sistemas mecánicos. No obstante, se aclara que, *mutatis mutandis*, todo lo presentado se puede extender a otros dominios de la Física, particularmente al Electromagnetismo, lo que se hará en la sección subsiguiente a esta.

<sup>1</sup> Véase por ejemplo:

- Jeltsema D. and J. Scherpen (2009). Multidomain Modeling of Nonlinear Networks and Systems, Energy- and Power-Based Perspectives. IEEE Control Systems Magazine, August 2009, pp. 28-59. *Artículo tutorial que ofrece un panorama global introductorio al tema.*

- van der Schaft A. (2000). Port-Controlled Hamiltonian systems: towards a theory for control and design of nonlinear physical systems. J. Soc. Instr. and Control Eng. of Japan (SICE), Vol. 39, nr. 2, pp. 91-98. *Artículo introductorio al tema en un nivel de posgrado.*

<sup>2</sup> Véase por ejemplo:

- Lanczos, C. (1960). The variational principles of Mechanics. Toronto: Univ. of Toronto Press. *Expone fundamentos en un elevado nivel teórico.*

- Wells, D. (1967). Theory and Problems of Lagrangian Dynamics. Schaum's Outlines. McGraw-Hill. *Libro de grado para estudiantes de Ingeniería y Física, en un nivel de especialización en el tema.*

**Coordenadas Generalizadas de Movimiento (CGM):** es todo conjunto de coordenadas suficiente y necesario para especificar o describir en todo momento la posición de todos los objetos de un sistema mecánico (lo cual en la literatura específica suele designarse como *la configuración del sistema*)<sup>3</sup>. Es, por lo tanto, un conjunto independiente de coordenadas, lo cual significa que no están sujetas a restricciones estáticas.

**Número de Grados de Libertad (GL):** es igual al número de CGM.

**Velocidades Generalizadas (VG):** son las derivadas temporales de las CGM.

**Notación generalizada:**

$q_i$ :  $i$ -ésima CGM, correspondiente al  $i$ -ésimo GL.

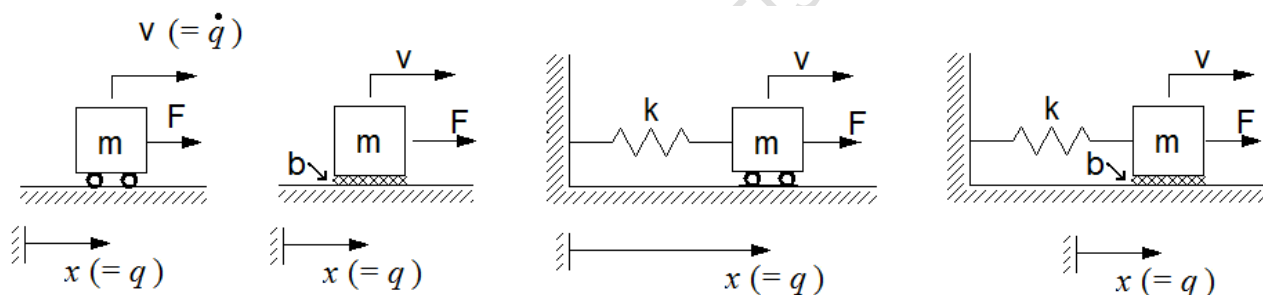
$F_i$  (comúnmente anotada  $Q_i$  en este contexto): *Fuerza Generalizada* asociada a la CGM. El subíndice sólo indica que actúa en la  $i$ -ésima CGM.

$\dot{q}_i$ :  $i$ -ésima VG, correspondiente al  $i$ -ésimo GL.

$p_i$ : Cantidad de Movimiento (CM) o Momento asociado a  $\dot{q}_i$ .

### Ejemplo 1:

- a) *Punto material en un espacio lineal unidimensional.* Si no le es impuesta ni la posición ni la velocidad, sino a lo sumo una fuerza externa resultante, entonces tiene un GL y cualquier sistema de referencia sobre la recta en la que se mueve provee una CGM.



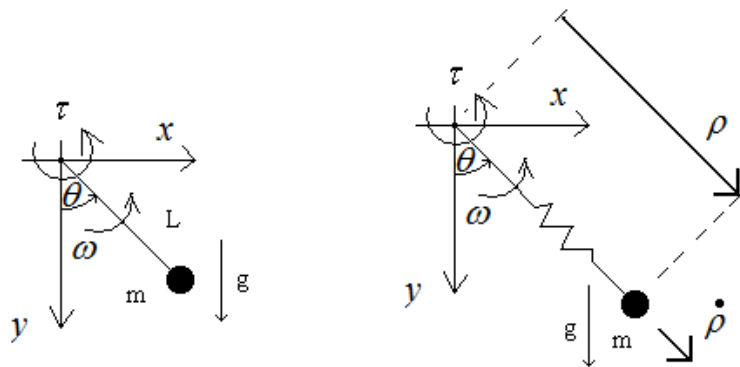
**Figura 1:** Punto material. Asumiendo que la entrada es la fuerza  $F$  indicada, en cualquiera de las cuatro configuraciones mostradas se tiene 1 GL. La **configuración** que liga a los componentes del sistema impone restricciones estáticas que limitan el número de GL. En los ejemplos con resorte, al tener éste uno de sus extremos fijo al sistema inercial de referencia y el otro solidario con el punto material, las coordenadas de sus extremos no tienen ninguna libertad, por lo que no agregan ninguna CGM si ya contamos la posición del punto material como CGM. En las dos figuras de la derecha se muestran dos alternativas de elección de la CGM: i) La primera tiene su origen en el punto de sujeción del resorte, con lo que es necesario usar el parámetro  $D$ , la longitud del resorte desenergizado o sin deformar (una constante geométrica de diseño), para expresar la relación entre la deformación  $\delta$  del resorte y la posición  $q$  del punto material:  $\delta = q - D$ . ii) La segunda evita el uso de este parámetro (con lo que se simplifican las ecuaciones), ya que pone el origen de coordenadas donde estaría el extremo derecho del resorte sin energizar:  $\delta = q$ .

- b) *Punto material que se mueve en una recta fija en un plano.* Como cualquiera de los ejemplos precedentes, tiene un solo GL y, por lo tanto, una sola CGM. Es posible realizar la descripción del movimiento con las coordenadas cartesianas  $(x, y)$ , por ejemplo, pero estas no son independientes, ya que están ligadas estáticamente por la ecuación de la recta del tipo:  $y = m x + h$ . La ecuación de

<sup>3</sup> Algunos comentarios sobre esta definición: i) muchos autores no imponen en ella el requisito de necesidad y suficiencia que hacemos aquí, sino que –a veces sólo tácitamente– las asumen sólo como suficientes para especificar la configuración del sistema; ii) esta condición “si y sólo si” hace que el número de coordenadas sea minimal, y esto conlleva que sean variables independientes; iii) estas coordenadas no tienen por qué ser las de un sistema cartesiano sino que pueden ser variables de cualquier otro sistema de especificación posicional (por ejemplo, coordenadas polares), y por lo tanto no tienen por qué ser componentes de un vector espacial, como no lo son, por ejemplo, los ángulos de un sistema polar; iv) más aún, cuando se generaliza todavía más el concepto de coordenada generalizada, puede tenerse entre ellas variables que representan magnitudes físicas como cantidad de movimiento y/o fuerzas generalizadas.

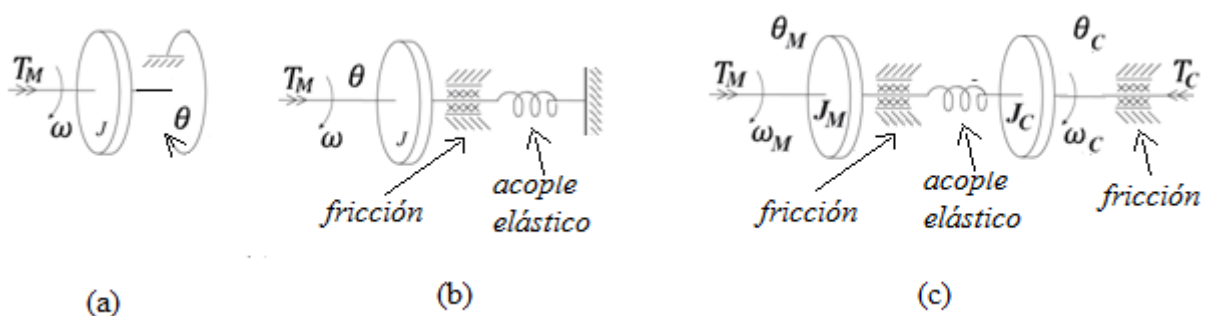
la recta se dice una restricción (*constraint*, en inglés) impuesta a las coordenadas  $x$  e  $y$ . Este ejemplo es inmediatamente generalizable al movimiento circunscripto a una recta en el espacio, o a una curva cualquiera en el plano.

- c) *Péndulo simple*. Caso particular del último ejemplo del punto anterior; con el centro de rotación fijo en el espacio y el brazo del péndulo de longitud constante, el punto de masa  $m$  está constreñido a moverse sobre una circunferencia. Si bien el movimiento puede describirse con el sistema cartesiano ortogonal de coordenadas  $(x, y)$ , una de ellas es superflua al estar ligada a la otra por la ecuación de la circunferencia, que es la restricción en este caso particular. La CGM evidente en este caso es el ángulo que forma (la línea del brazo de) el péndulo con alguna recta fija en el plano, siendo la vertical la elección más común. La VG es la velocidad angular  $\omega$ .
- d) *Péndulo con brazo elástico (sólo deformación longitudinal)*. Cualquier posición en el plano es admisible, por lo que las dos coordenadas  $x$  e  $y$  son independientes y pueden tomarse como CGM. Otra elección posible son las coordenadas polares  $\varphi$  y  $\rho$ . Las VG son, en cada caso, las derivadas temporales del par de CGM, es decir, el par  $V_x = \dot{x}$ ,  $V_y = \dot{y}$  o el par  $\omega = \dot{\theta}$ ,  $V = \dot{\rho}$ .



**Figura 2:** Péndulos.

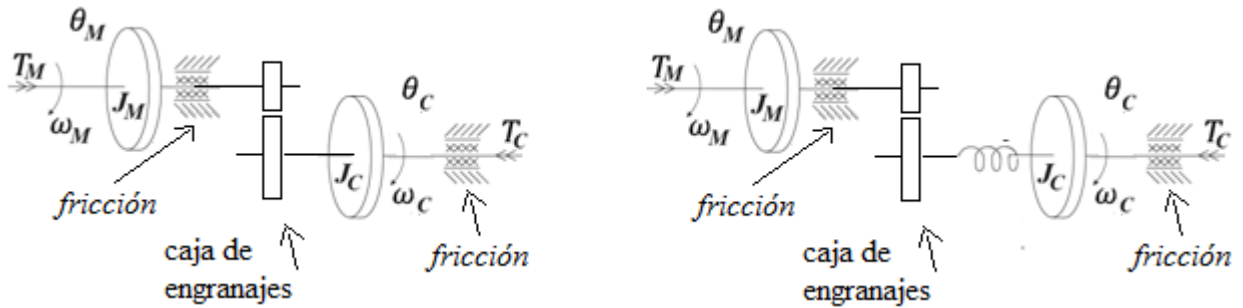
- e) *Rotación de cuerpos rígidos alrededor de un eje fijo*. El ángulo girado por el rígido en torno al eje es una CGM. En cualquiera de los dos primeros casos de la Figura 3 hay un solo GL, siendo el ángulo  $\theta$  la CGM natural y la velocidad angular  $\omega$  la VG natural. El segundo caso es totalmente análogo al último de la Figura 1, por lo cual lo anterior se puede fundamentar con el mismo razonamiento de aquel caso. En el caso (c), cada volante de inercia provee un GL cuyas CGM son las posiciones angulares de cada uno de ellos y las VG sus derivadas temporales (las respectivas velocidades angulares); el resorte que modela el acople elástico no contribuye ninguna coordenada adicional, ya que las posiciones de sus extremos son las de los volantes.



**Figura 3:** Rotación alrededor de un eje fijo.

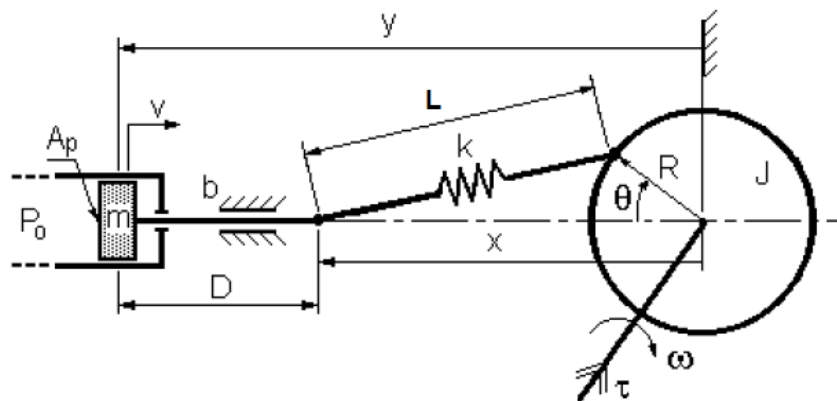
- f) *Rotación de dos volantes alrededor de sendos ejes fijos*. En la Figura 4, izquierda, se muestra una configuración donde los cuerpos están ligados por restricciones estáticas entre sus posiciones (debido a la caja de engranajes ideal), por lo que se tiene un solo GL y una sola CGM (cualquiera de los dos ángulos de rotación). En la figura de la derecha, el acople, al ser elástico, destruye la restricción estática entre las velocidades y posiciones angulares (uno puede imaginar valores arbitrarios de los ángulos y las velocidades de rotación sin ningún tipo de contradicción), por lo que

esta configuración tiene dos GL y dos CGM. Cualquier sistema traslacional con sendas masas moviéndose en línea recta y acopladas por una palanca ideal, o por un polipasto, etc., es análogo al primero de estos ejemplos rotacionales (la palanca y el polipasto ideales juegan el rol de la caja de engranajes).



**Figura 4:** Rotación de dos volantes alrededor de sendos ejes.

- g) *Punto material en el espacio.* Se necesitan 3 CGM para especificar completamente su posición en el espacio geométrico 3D, en correspondencia con los 3 GL.
- h) *Sistema de  $N$  partículas en el espacio.* Si no hay ninguna restricción estática impuesta directamente a las posiciones de las partículas (o indirectamente a través de sus velocidades) se tienen  $3N$  GL y  $3N$  CGM en correspondencia.
- i) *Movimiento de un rígido en el espacio.* Para especificar completamente la posición de cualquier punto del rígido en el espacio se necesita conocer la posición del centro de masa en el espacio, lo que requiere 3 coordenadas, y los 3 ángulos de rotación del cuerpo en torno a dicho centro de masa. Excepto que estas coordenadas estén sujetas a restricciones estáticas, esto significa que se tienen 6 grados de libertad y, por lo tanto, se necesitan 6 CGM, que pueden ser las variables mencionadas. Las respectivas derivadas temporales son las VG de este sistema. Una esfera restringida a moverse en un plano ofrece un ejemplo de restricción a los 6 GL de un rígido, que se reducen a 5. Suponiendo que se trate de un plano horizontal, la restricción es que la coordenada vertical del centro de la esfera es constante (los GL están dados por las dos coordenadas horizontales del centro de la esfera y los tres ángulos de rotación).
- j) *Sistema Pistón-Biela-Manivela.* Típico mecanismo de interconversión de movimientos traslacional y rotacional. Las posiciones  $y$  del pistón y  $\theta$  de la manivela (de radio  $R=\text{constante}$ ) están ligadas por la restricción geométrica (RG)  $L^2 = R^2 + (y - D)^2 - 2 R (y - D) \cos \theta$  (teorema del coseno para el triángulo de lados  $x$ ,  $L$  y  $R$ ). Con la **hipótesis de biela rígida** (longitud  $L=\text{constante}$ ), las constancias de  $L$  y  $R$  hacen de la RG una restricción estática para las coordenadas  $y$  y  $\varphi$ . Por lo tanto, bajo esta hipótesis, hay un solo GL. En cambio, si se supone que la **biela es elástica** (se puede deformar a lo largo de su propio eje longitudinal),  $L$  ya no es constante. En este caso, la RG (que sigue cumpliéndose) ya no es una restricción estática para las coordenadas  $y$  y  $\varphi$ , que pueden tomarse entonces como CGM al recuperarse los 2 GL.



**Figura 5:** Sistema Biela-Manivela. La biela se representa como un resorte para indicar su posible elasticidad. En la discusión de arriba se considera también el caso de que sea rígida.

### DEFINICIONES:

**Espacio de Configuración:** el espacio de **dimensión  $\nu$  ("nu")** definido por las CGM  $\{q_1, q_2, \dots, q_\nu\}$ , donde  $\nu = \text{nro. GL} = \text{nro. CGM}$ .

**Espacio de Fases o de Estados:** el espacio de **dimensión  $n = 2\nu = 2 \times \text{nro. GL} = 2 \times \text{nro. CGM}$** , definido por las CGM  $q := \{q_1, q_2, \dots, q_\nu\}$  y las VG  $\dot{q} := \{\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_\nu\}$  o los momentos  $p := \{p_1, p_2, \dots, p_\nu\}$ . O sea que las coordenadas de este espacio son  $\{q_1, q_2, \dots, q_\nu, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_\nu\}$  o  $\{q_1, q_2, \dots, q_\nu, p_1, p_2, \dots, p_\nu\}$ .

**(Conjunto de) Variables de Estado:** el más comúnmente empleado en el contexto de los modelos de Euler-Lagrange:  $\{q_1, q_2, \dots, q_\nu, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_\nu\}$  o el más comúnmente empleado en el marco Hamiltoniano:  $\{q_1, q_2, \dots, q_\nu, p_1, p_2, \dots, p_\nu\}$ .

**Espacio de Eventos:** el espacio de estados aumentado con el tiempo; es decir, sus coordenadas son las del conjunto  $\{q_1, q_2, \dots, q_\nu, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_\nu, t\}$  o las de  $\{q_1, q_2, \dots, q_\nu, p_1, p_2, \dots, p_\nu, t\}$ .

Al emplearlos en ecuaciones y otro tipo de fórmulas matemáticas es usual tratar formalmente a estos conjuntos como vectores<sup>4</sup>, que aquí definiremos como columnas:

$$\begin{aligned} q &:= [q_1, q_2, \dots, q_\nu]^T & x &:= [q_1, q_2, \dots, q_\nu, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_\nu]^T \\ \dot{q} &:= [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_\nu]^T & o & \\ p &:= [p_1, p_2, \dots, p_\nu]^T & x &:= [q_1, q_2, \dots, q_\nu, p_1, p_2, \dots, p_\nu]^T \end{aligned} \quad (1)$$

### Funciones de Estado:

**Energía y Co-Energía Cinéticas, Energía y Co-Energía Potenciales:** se definen en la Mecánica y se pueden generalizar a todos los otros dominios de la Física.

**Lagrangiano, Hamiltoniano:** son funciones de las anteriores y, por lo tanto, también funciones de estado. Todas son funciones escalares que dependen de las variables de estado, según se indica en cada caso.

**Energía Cinética:**  $T = T(p)$ , aunque con más generalidad debe escribirse  $T = T(q, p, t)$  ya que, para ciertas configuraciones de sistema, puede depender de las CGM y del tiempo.

**Co-Energía Cinética:**  $T^* = T^*(\dot{q})$  o  $T^* = T^*(\dot{q}, q, t)$  ya que, para ciertas configuraciones de sistema, puede depender de las CGM y del tiempo.

**Energía Potencial:**  $V = V(q, t)$ .

**Co-Energía Potencial:**  $V^* = V^*(F, t)$ , donde F es un vector o conjunto de Fuerzas Generalizadas.

<sup>4</sup> Sólo en el sentido del agrupamiento de las variables en una columna o en una fila. Por otra parte, este tratamiento típico en Ingeniería no debe hacer pensar que las trayectorias solución de las ecuaciones diferenciales asociadas en el correspondiente espacio de estados constituyen un espacio vectorial. Esto es sólo cierto en el caso de ecuaciones lineales.

Lo anterior **solamente** introduce la nomenclatura a usar para estas funciones de estado e indica de qué variables dependen. Antes de avanzar con la lectura de estos apuntes, se recomienda ver su definición concreta en distintos dominios de la Física en las Transparencias de Clase “Pres\_DSf\_20\_ClasifVariables\_Estado\_Energía\_IntroModClásico.pdf”.

**Observación 1.** Si las Relacs de los elementos dinámicos (almacenadores de energía) asociados son lineales, las energías y co-energías arriba definidas toman los mismos valores. Este es el caso de la Energía y la Co-Energía Cinéticas en la Mecánica Clásica,  $T(p) = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2} m v^2 = T^*(\dot{q} = v)$ , donde la Relac en cuestión es la que liga la velocidad con la cantidad de movimiento:  $p = m v$ . Esto no vale en la Mecánica Relativista, vista la dependencia de la masa de la velocidad.

**Lagrangiano:** es la diferencia entre la co-energía cinética y la energía potencial en el sistema:

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) := T^*(q, \dot{q}, t) - V(q, t) \quad (2)$$

Es frecuente encontrar como definición del **Lagrangiano** la diferencia entre la energía cinética y la potencial:  $T - V$ , incluso escrita con más detalle como

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) := T(q, \dot{q}, t) - V(q, t) \quad (3)$$

es decir, con la notación de la energía cinética pero expresada como la co-energía cinética. Debe tenerse en cuenta que esto es sólo válido para el caso de almacenadores lineales de energía cinética (relación lineal entre  $p$  y  $\dot{q}$ ; ver *Observación 1*).

**Hamiltoniano:** es la energía total almacenada en el sistema <sup>5</sup>:

$$\mathcal{H}(q, p, t) := T(q, p, t) + V(q, t) \quad (4)$$

## Ecuaciones de Movimiento de Euler-Lagrange.

Teoría nacida en la Mecánica Clásica para sistemas conservativos (cerrados, i.e., sin interacción con el medio, sin fuerzas externas y sin disipación).

**Las Ecuaciones de E-L para sistemas conservativos:**

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \quad i = 1, \dots, \nu \quad (5)$$

<sup>5</sup> Esto no es siempre cierto, pero lo es en la mayoría de los casos (y en todos los que veremos aquí). La definición rigurosa del Hamiltoniano se hace aplicando la Transformación de Legendre al Lagrangiano (como se verá más adelante en estas notas). Cuando las ecuaciones de transformación no dependen explícitamente del tiempo y la energía potencial sólo depende de las coordenadas, entonces el Hamiltoniano es igual a la energía almacenada (ver, p. ej., *P. Hamill, Lagrangians and Hamiltonians, Cambridge Univ. Press, UK, 2014.*)

Hay una ecuación para cada CGM o GL. Los términos de esta ecuación son fuerzas. **Las Ecuaciones de E-L producen sistemas de ecuaciones diferenciales de 2<sup>do</sup> orden en las CGM  $q_i$ . Hay tantas ecuaciones como GL o CGM.**

Hacemos notar que, con la notación vectorial ya introducida

$$\mathbf{q} := [q_1, q_2, \dots, q_v]^T$$

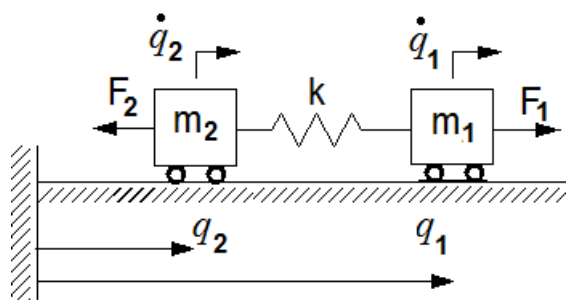
$$\dot{\mathbf{q}} := [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_v]^T$$

es común encontrar la **formulación compacta de las ecuaciones de E-L**:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} = 0 \quad (6)$$

En los ejemplos que siguen, las ecuaciones se derivarán empleando la formulación escalar para cada grado de libertad. Más adelante se utilizará la formulación vectorial (en el sentido de colección en columnas o filas de variables) para simplificar la deducción de las ecuaciones de Hamilton a partir de las de Euler-Lagrange.

**Ejemplo 2:** “Sistema 2 Masas Resorte” (2MR). En la siguiente figura, **considere  $\mathbf{F}_{1,2} \equiv \mathbf{0}$** .



**Figura 6:** “Sistema 2 Masas Resorte”.

Hay 2 GL. CGM:  $q_1, q_2$ . VG:  $\dot{q}_1, \dot{q}_2$

$$T^*(\dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} m_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{q}_2^2$$

$$V(\mathbf{q}) = V(q_1, q_2) = \frac{1}{2} k (q_1 - q_2 - D)^2$$

$q_1 - q_2 - D = \delta$ : deformación del resorte (supuesta positiva cuando está estirado, es decir que la fuerza del resorte positiva es la de tracción).  $D$ : longitud del resorte sin deformar (o desenergizado).

En este ejemplo, el Lagrangiano vale:

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) := T^*(\dot{\mathbf{q}}) - V(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} m_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{q}_2^2 - \frac{1}{2} k (q_1 - q_2 - D)^2 \quad (7)$$

Por su parte, las ecuaciones de Euler-Lagrange para cada CGM son:

1<sup>ra</sup> CGM,  $q_1$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = 0 \quad (8)$$

$$\frac{d}{dt} (m_1 \dot{q}_1) - [-k (q_1 - q_2 - D)] = 0 \quad \rightarrow \quad m_1 \ddot{q}_1 + k(q_1 - q_2 - D) = 0 \quad (9)$$

Este problema es tan elemental que la corrección de este resultado se puede verificar por simple inspección del  $\Sigma\Phi$  (recordando que, como efectivamente se comprueba en las ecuaciones, los términos que aparecen en ellas son fuerzas): en efecto, en la Figura 6 se observa que la única fuerza actuando sobre el cuerpo 1 es la del resorte (recuerde que, por hipótesis,  $F_{1,2} \equiv 0$ ), la cual se ejerce hacia la izquierda (para el caso de que su deformación sea positiva). O sea que sobre el cuerpo 1 hay una fuerza neta de desaceleración, que resulta ser la fuerza del resorte, lo cual se puede poner en evidencia directa reescribiendo la ecuación anterior como sigue:

$$m_1 \ddot{q}_1 = -k(q_1 - q_2 - D)$$

Normalizamos esta ecuación agrupando en el 1<sup>er</sup> miembro las incógnitas asociadas con este GL, es decir, las que tienen subíndice 1; el resto va al 2<sup>do</sup> miembro:

$$m_1 \ddot{q}_1 + k q_1 = k(q_2 + D) \quad (10)$$

2<sup>da</sup> CGM,  $q_2$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} = 0 \quad (11)$$

$$\frac{d}{dt} (m_2 \dot{q}_2) - [-k(q_1 - q_2 - D)(-1)] = 0 \rightarrow m_2 \ddot{q}_2 = k(q_1 - q_2 - D)$$

Lo que para la otra coordenada operaba como fuerza neta de desaceleración, para esta es de aceleración (sobre el cuerpo 2). Normalizando con el mismo criterio, se obtiene:

$$m_2 \ddot{q}_2 + k q_2 = k(q_1 - D) \quad (12)$$

Resumiendo, las ecuaciones de E-L del “Sistema 2 Masas Resorte” de la Figura 6 (sin fuerzas externas) son las siguientes, que confirman que *este método produce sistemas de ecuaciones diferenciales de orden 2 en las CGM*:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{q}_1 + k q_1 = k(q_2 + D) \\ m_2 \ddot{q}_2 + k q_2 = k(q_1 - D) \end{cases} \quad (13)$$

En ambas expresiones anteriores, los términos de los segundos miembros que contienen variables dependientes (en este caso, las posiciones) expresan el acoplamiento entre la dinámica de ambas CGM. En la 1<sup>ra</sup> ecuación se ve el efecto de  $q_2$  sobre la dinámica de  $q_1$  y viceversa en la 2<sup>da</sup> ecuación. Los términos que contienen la constante  $D$  son simplemente un *offset* que expresa que se debe satisfacer  $q_1 - q_2 = D$  como condición necesaria para el equilibrio.

Las ecuaciones anteriores pueden escribirse compactamente en la siguiente versión matricial, donde el acoplamiento entre las dinámicas de ambas coordenadas se ve en la presencia de elementos no nulos fuera de la diagonal (en la anti-diagonal, para este caso de sólo dos CGM) de la segunda matriz:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ -k \end{bmatrix} D$$

Apelando a la notación vectorial  $q$  para el conjunto de las CGM, podemos escribir la ecuación anterior de la forma compacta siguiente (aunque no lo hacemos aquí, podría definirse, para mayor compacidad, una notación para cada una de las matrices allí presente; esto se hará más adelante con otros propósitos):



$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} + \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \mathbf{q} = \begin{bmatrix} k \\ -k \end{bmatrix} D \quad (14)$$

que presenta como modelo E-L a una ecuación diferencial vectorial de orden 2 en el vector  $\mathbf{q}$ .

### Las Ecuaciones de E-L para sistemas no-conservativos (abiertos y/o con disipación):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \sum_j FF_{NC_i} \quad i = 1, \dots, v \quad (15)$$

donde la notación  $\sum_j FF_{NC_i}$  significa la suma de todas las fuerzas no-conservativas (subíndice  $j$ ) externas y/o disipativas que actúan en la  $i$ -ésima CGM. En un primer momento, beneficiándonos de la simplicidad de los ejemplos tratados y con el fin de facilitar la comprensión de las ecuaciones de Euler-Lagrange vía la conexión de esta manera de modelar con la clásica empleada en la enseñanza básica de la dinámica, presentamos la incorporación de los fenómenos no conservativos con un enfoque Newtoniano. Luego, introduciendo otras funciones de estado, presentaremos una formulación más acorde con el modelado en base a principios energéticos produciendo las ecuaciones dinámicas mediante operaciones sobre funciones escalares (las funciones de estado).

### Ejemplo 3: Sistema 2MR considerando las dos fuerzas externas $F_{1,2}$ .

Todas las funciones de estado son iguales a las del caso anterior, al igual que los primeros miembros de las ecs. de E-L que **—tal como han sido presentadas hasta ahora—** sólo conciernen a la parte conservativa del sistema. Lo que cambia es que ahora deben incluirse las dos fuerzas externas en los segundos miembros de las ecs. de E-L. Vista la configuración de la Figura 6, las sumatorias en los segundos miembros de las ecs. de E-L (una por cada GL) se reducen cada una de ellas a un término:

$$\sum_j FF_{NC_1} = F_1 \quad \text{y} \quad \sum_j FF_{NC_2} = -F_2$$

En las sumatorias, las fuerzas se suman si actúan en el sentido positivo de la CGM y se restan en caso contrario. Esto explica que  $F_1$  se sume y  $F_2$  se reste.

Para la 1<sup>ra</sup> CGM, se tiene:

$$\frac{d}{dt} (m_1 \dot{q}_1) - [-k(q_1 - q_2 - D)] = F_1$$

Para la 2<sup>da</sup> CGM, se tiene:

$$\frac{d}{dt} (m_2 \dot{q}_2) - [-k(q_1 - q_2 - D)(-1)] = -F_2$$

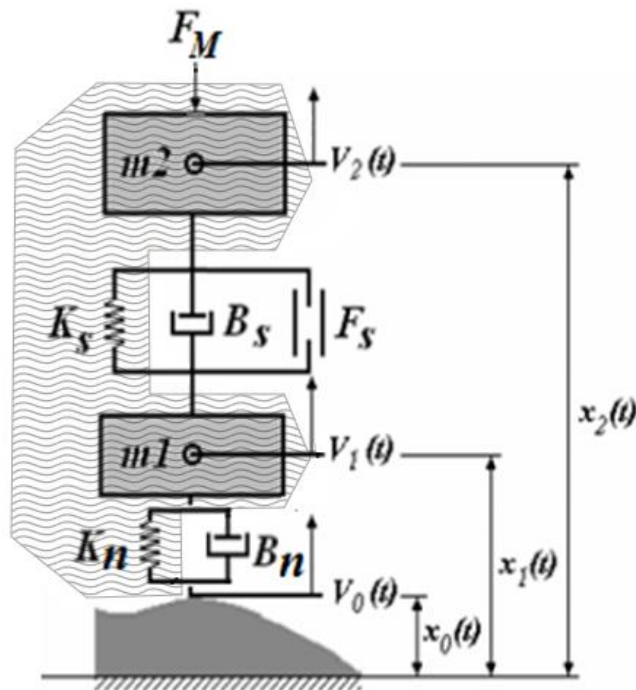
Resumiendo, las ecuaciones de E-L del “Sistema 2 Masas Resorte” de la Figura 6 (con fuerzas externas) son:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{q}_1 + k q_1 = F_1 + k(q_2 + D) \\ m_2 \ddot{q}_2 + k q_2 = -F_2 + k(q_1 - D) \end{cases}$$

Pasando aquí también a la forma matricial, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k \\ -k \end{bmatrix} D \quad (16)$$

### Ejemplo 4: Modelo “Cuarto de Auto” con suspensión semi-activa.



**Figura 7:** Modelo de "cuarto de auto".

La parte sombreada destaca la parte conservativa del modelo.

En este modelo, la masa  $m_2$  (masa suspendida) incluye el chasis, el motor, los pasajeros, etc. La masa  $m_1$  (masa no suspendida) representa la masa de la rueda y de los ejes, apoyada sobre los neumáticos. Entre ambas masas está el sistema de suspensión, que consiste de un resorte y un amortiguador pasivos, y una fuente de fuerza  $F$  (que normalmente se controla por retroalimentación). El neumático se representa como un par resorte-amortiguador que captura su elasticidad (esencialmente la compresibilidad del aire en su interior) y sus pérdidas. Con la fuerza  $F_M$  se pueden modelar cargas dinámicas originadas en el motor y transmitidas al chasis por los puntos de anclaje.

Las entradas son  $F_M$ ,  $F_s$ ,  $x_0$  y  $V_0$ . Sólo se consideran movimientos verticales.  $x_0$  es la geometría del piso que, vista desde el auto, se desplaza hacia uno de sus extremos (el opuesto al de circulación del vehículo) y somete al esquema a una excitación vertical forzando una velocidad  $V_0$  en el punto de contacto del neumático con el piso (aquí se modela con la hipótesis de que este contacto nunca se pierde).

**CGM.** Con las hipótesis mencionadas aquí arriba, el sistema tiene 2 GL representados por las coordenadas de ambas masas:

$$q_1 = x_1, q_2 = x_2.$$

$$\text{VG: } \dot{q}_1 = V_1, \dot{q}_2 = V_2$$

**Funciones de Estado:**

$$\text{Co-Energía Cinética (= Energía Cinética): } T^*(\dot{q}) = \frac{1}{2}m_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{q}_2^2$$

$$\text{Energía Potencial: } V(q) = V(q_1, q_2) = \frac{1}{2}k_s(q_1 - q_2 + D_s)^2 + \frac{1}{2}k_n(x_0 - q_1 + D_n)^2$$

donde  $\delta_s := q_1 - q_2 + D_s$  es la deformación del resorte de la suspensión, definida positiva como acortamiento, por lo que la fuerza elástica asociada será de compresión cuando sea positiva.  $D_s$  es la distancia entre las dos masas cuando el resorte no está cargado (deformado o energizado)<sup>6</sup>. Lo análogo puede decirse para la deformación del neumático  $x_0 - q_1 + D_n =: \delta_n$  en relación con las posiciones de contacto con el piso y la masa no suspendida.

**Lagrangiano:**

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) := T^*(\dot{q}) - V(q) = \frac{1}{2}m_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{q}_2^2 - \frac{1}{2}k_s(q_1 - q_2 + D_s)^2 - \frac{1}{2}k_n(x_0 - q_1 + D_n)^2$$

**Deducción de las ecs. de Euler-Lagrange:**

**Observación práctica:** Técnica de modelado asociada a la presentación hecha hasta aquí del Lagrangiano: los términos del primer miembro de las ecs. de E-L están todos ligados a los almacenadores en el sistema y

<sup>6</sup> Para que esto fuera rigurosamente así, habría que considerar en el modelo las fuerzas de gravedad. Aquí no se hará, suponiéndose que las deformaciones de los resortes se miden como diferencia con las necesarias para compensar los pesos de las masas. Esto es una práctica habitual y lógica, dado que normalmente interesa estudiar las vibraciones verticales en el vehículo debido a los otros agentes externos. Por otra parte, como los resortes se han supuesto lineales, la forma de las ecuaciones no cambiaría de incorporarse estas fuerzas, lo que de todas formas es trivial, por lo que se lo deja como ejercicio (se las puede incorporar directamente en el modelo final o hacerlas aparecer vía la inclusión temprana de la energía potencial gravitatoria en el Lagrangiano).

se calculan simplemente operando sobre el Lagrangiano. Los del 2<sup>do</sup> miembro son las fuerzas ligadas a las acciones externas o disipación en el sistema, a la parte que queda fuera de la región sombreada en el caso de la Figura 7. Considerando cada coordenada y –insistimos– mirando esta parte del problema con un enfoque Newtoniano, debemos sumar las fuerzas que actúan a favor del movimiento de la CGM correspondiente y restar las que se oponen (enfoque Newtoniano = enfoque vectorial separado en sus coordenadas).

$$1^{\text{ra}} \text{ CGM}, q_1: \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = Q_1$$

(donde, como suele hacerse, se ha escrito  $Q_i := \sum_j F F_{NCi}$ , en este caso para  $i = 1$ ).

$$m_1 \ddot{q}_1 - [-k_s(q_1 - q_2 + D_s) - k_n(x_0 - q_1 + D_n)(-1)] = Q_1$$

Para calcular  $Q_1$  empleamos la técnica sugerida arriba. Para decidir los signos, recordamos que las fuerzas de los elementos que están a velocidades diferenciales son de compresión, de acuerdo a lo convenido:

$$Q_1 = B_n(V_0 - \dot{q}_1) - B_s(\dot{q}_1 - \dot{q}_2) - F_s$$

$$m_1 \ddot{q}_1 + k_s(q_1 - q_2 + D_s) - k_n(x_0 - q_1 + D_n) = B_n(V_0 - \dot{q}_1) - B_s(\dot{q}_1 - \dot{q}_2) - F_s$$

$$2^{\text{da}} \text{ CGM}, q_2: \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} = Q_2$$

$$Q_2 = B_s(\dot{q}_1 - \dot{q}_2) + F_s - F_M$$

Operando, se obtiene:

$$m_2 \ddot{q}_2 - [-k_s(q_1 - q_2 + D_s)(-1)] = B_s(\dot{q}_1 - \dot{q}_2) + F_s - F_M$$

$$m_2 \ddot{q}_2 - k_s(q_1 - q_2 + D_s) = B_s(\dot{q}_1 - \dot{q}_2) + F_s - F_M$$

Las ecuaciones anteriores admiten la siguiente forma matricial que pone en evidencia la naturaleza de las fuerzas en juego:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix}}_{\text{fuerzas inerciales}} + \underbrace{\begin{bmatrix} B_n + B_s & -B_s \\ -B_s & B_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}}_{\text{fuerzas disipativas}} + \underbrace{\begin{bmatrix} k_n + k_s & -k_s \\ -k_s & k_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}}_{\text{fuerzas elásticas}} =$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} B_n V_0 + k_n(x_0 + D_n) \\ -F_M + k_s D_s \end{bmatrix}}_{\substack{\text{fuerzas perturbativas} \\ \text{fuerzas externas: entradas}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} F_s}_{\text{fuerzas de control}}$$

La separación de las entradas entre perturbaciones (por simplicidad se incluyeron las fuerzas debidas a los *offsets*) y fuerzas de control responde, evidentemente, a un punto de vista de Ingeniería de Control. Aquí se aprecia nuevamente el acople entre la dinámica de las dos coordenadas, esta vez no sólo debido a las fuerzas elásticas sino también a las disipativas que aparecen en el problema, en ambos casos manifestándose en los elementos no nulos de las antidiagonales de las matrices correspondientes.

Definiendo de manera obvia las matrices M, B y K, y el vector F, el sistema anterior se puede escribir de forma más compacta aún:

$$M \ddot{q} + B \dot{q} + K q = F$$

Lo que permite verlo como una generalización de la ecuación escalar

$$m \ddot{x} + b \dot{x} + kx = F$$

de un simple sistema masa-resorte-amortiguador excitado por una fuerza externa aplicada a la masa.

### **Distinción en las Ecuaciones de E-L de las fuerzas externas y las fuerzas internas disipativas dependientes de las VG.**

El ejemplo anterior introdujo un problema de modelado en el cual hay disipación en el sistema. La técnica de modelado usada en este ejemplo “traiciona” el espíritu de – o es “tramposa” con – el método de modelado energético que se está presentando, que en su esencia consiste en deducir la dinámica a partir de operaciones (las prescritas por las ecuaciones de EL) sobre funciones (escalares) de estado (hasta aquí el Lagrangiano). Esto se respetó mientras se trató el caso conservativo pero no en el último ejemplo, en el cual las fuerzas disipativas fueron introducidas directamente con el mismo enfoque con que se lo hace en el método Newtoniano de modelado, ya que lo que se hizo es implícitamente equivalente a haber hecho el diagrama de cuerpo libre de las masas para ver como actúan dichas fuerzas (lo que equivale a un enfoque vectorial de trabajo, en el cual los vectores no aparecieron explícitamente porque hay una sola coordenada de movimiento). Para respetar el nuevo espíritu es necesario introducir una función escalar de estado que capture la acción energética asociada a los fenómenos disipativos, esta es la función de disipación de Rayleigh presentada a continuación (para el caso de disipación con función constitutiva lineal), y definir una operación sobre la misma que, adecuadamente incorporada a las ecuaciones de EL, genere las fuerzas disipativas. Esto es muy conveniente desde un punto de vista teórico, ya que permite expresar con mayor precisión una mayor clase de modelos; pudiendo incluso utilizarse para tratar las fuerzas externas independientes del sistema.

Prevía introducción de la **función (escalar) potencial de disipación de Rayleigh**

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}(\dot{q}) \quad (17)$$

cuyo gradiente<sup>7</sup> respecto a las VG

$$\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}} := \left[ \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_1} \quad \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_2} \quad \dots \quad \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_v} \right]^T \quad (18)$$

da el conjunto de las fuerzas disipativas (la derivada parcial  $\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_i}$  en la ecuación E-L del  $i$ -ésimo GL es el elemento del gradiente correspondiente a esa CGM), las ecuaciones de E-L se escriben:

$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = Q_i - \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_i} \quad i = 1, \dots, v \quad (19)$
--

En el ejemplo “Cuarto de Auto” anterior la **función (escalar) potencial de disipación de Rayleigh** es la siguiente forma cuadrática típica de disipación lineal:

$$\mathcal{D}(\dot{q}) = \frac{1}{2} B_n (V_0 - \dot{q}_1)^2 + \frac{1}{2} B_s (\dot{q}_1 - \dot{q}_2)^2 \quad (20)$$

Una *expresión general de la función potencial de disipación* válida para el caso de disipadores con relación constitutiva *no-lineal*  $F_{disipativa} = F(\dot{q})$  está dada por la expresión, que algunos autores suelen denominar como **Función Contenido** (“**Content Function**”, ver la primera referencia en la nota de pie de página Nro. 1):

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}(\dot{q}) = \int_0^{\dot{q}} F(v) dv \quad (21)$$

<sup>7</sup> Aquí definimos al gradiente como un vector columna, en otros casos suele definírselo como una fila.

## Sistemas Electromagnéticos.

La extensión a este dominio se hace poniendo en correspondencia las CGM con las cargas eléctricas como CG y las VG con las derivadas temporales de las cargas, es decir, con las corrientes eléctricas:

$$\begin{array}{ll} \text{CG} & q := q: \text{carga eléctrica} \\ \text{VG} & \dot{q} := I: \text{corriente eléctrica} \end{array}$$

Las fuerzas generalizadas son las tensiones eléctricas y los impulsos generalizados los flujos magnéticos:

$$\begin{array}{ll} \text{FG} & Q := U = V: \text{tensión eléctrica} \\ \text{IG} & p := \psi = \phi = \lambda: (\text{notaciones alternativas para el}) \text{ flujo magnético.} \end{array}$$

Los elementos dinámicos (almacenadores de energía) en el dominio eléctrico son los capacitores y los inductores. A cada uno de ellos se asocia una carga y una corriente, si bien en el caso de los inductores la carga carece de efectos (es simplemente la carga que circuló por el inductor en un determinado intervalo temporal).

La energía y la co-energía cinéticas se corresponden con la energía y la co-energía del campo magnético, habiendo similar analogía entre la energía y la co-energía potenciales mecánicas con las correspondientes potenciales del campo eléctrico.

Es de destacar que, a diferencia del caso de la Mecánica Clásica donde la energía y la co-energía cinéticas siempre asumen valores idénticos, en el caso del Electromagnetismo las cantidades análogas energía y co-energía del campo magnético pueden ser distintas ya que las RelaCs de los inductores (relación flujo magnético-corriente) pueden ser no lineales, a diferencia de las RelaCs de las masas (relación cantidad de movimiento-velocidad) que siempre son lineales (Mecánica Clásica).

	Energía		Co-Energía	
	RelaC NL	RelaC Lineal	RelaC NL	RelaC Lineal
Campo Eléctrico (Almacenador: Capacitor)	$E_C(q) = \int_0^q V(\zeta) d\zeta$	$E_C(q) = \int_0^q \frac{1}{C} \zeta d\zeta = \frac{1}{2C} q^2$	$E_C^*(V) = \int_0^V q(u) du$	$E_C^*(V) = \int_0^V C u du = \frac{1}{2} C V^2$
Campo Magnético (Almacenador: Inductor)	$E_M(\psi) = \int_0^\psi I(\phi) d\phi$	$E_M(\psi) = \int_0^\psi \frac{1}{L} \phi d\phi = \frac{1}{2L} \psi^2$	$E_M^*(I) = \int_0^I \psi(i) di$	$E_M^*(I) = \int_0^I L i di = \frac{1}{2} L I^2$

Los ejemplos que siguen ilustran las cuestiones relacionadas con las coordenadas y sus derivadas, las energías y co-energías, el orden, etc.

### Ejemplo 5. Circuitos RLC.

a) Circuito RLC-serie con fuente de tensión (sistema no conservativo).

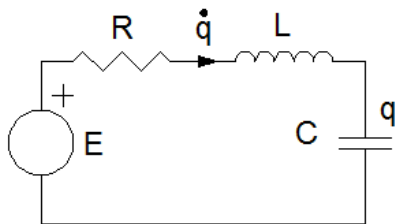


Figura 8: Circuito RLC serie.

Dado que la estructura serie impone corriente única por el inductor y el capacitor, sus VG son iguales. Esta restricción entre las VG (la más elemental posible,  $I_1 = : \dot{q}_1 = \dot{q}_2 := I_C$ ) es integrable y resulta en similar restricción entre las cargas ( $q_1 = q_2$ ), las CG (por eso se dice que se trata de una restricción holónoma).

CG:  $q$ , carga en el capacitor. VG:  $\dot{q} = I_I$ , corriente en el capacitor (en el inductor y en la malla).

Funciones:

$$T^*(\dot{q}) = \frac{1}{2} L \dot{q}^2, \quad V(q) = \frac{1}{2C} q^2, \quad \mathcal{D}(\dot{q}) = \frac{1}{2} R \dot{q}^2$$

Lagrangiano (clásico):

$$\mathcal{L} = T^*(\dot{q}) - V(q) = \frac{1}{2} L \dot{q}^2 - \frac{1}{2C} q^2$$

Ecuaciones E-L:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = Q - \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}} \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt} (L \dot{q}) - \left( -\frac{q}{C} \right) = E - R \dot{q}$$

$$L \ddot{q} + \frac{q}{C} = E - R \dot{q}$$

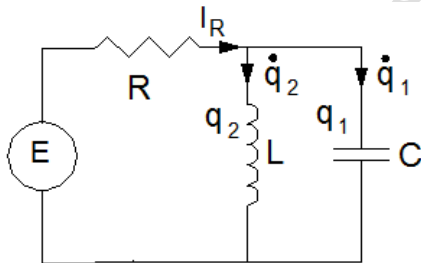
**Observación 4:** así como en sistemas mecánicos los términos de las ecs. de E-L son fuerzas, aquí son tensiones eléctricas (que caen dentro de la generalización del concepto de fuerza). Se observa que el miembro de la derecha es simplemente la fuerza generalizada no conservativa neta aplicada sobre el conjunto de almacenadores asociados al GL, es decir, sobre la serie LC. Este hecho es el que se hubiera empleado para modelar si no hubiésemos usado la función de disipación de Rayleigh, obteniéndose, obviamente, el mismo resultado.

Reordenando se tiene la ecuación clásica del circuito serie si se usa la carga como variable descriptiva interna.

$$L \ddot{q} + R \dot{q} + \frac{q}{C} = E$$

**Ejercicio:** Reelabore el ejemplo precedente y todos los siguientes introduciendo el efecto de las fuentes no pensando en sumatoria de tensiones (en el caso de fuentes de tensión) en una rama, sino a partir de la introducción de la potencia asociada con ellas,  $E \dot{q}$  en el caso precedente.

b) Circuito paralelo-LC en serie con R y fuente de tensión.



**Figura 9:** Circuito RLC serie.

$$I_R = \dot{q}_1 + \dot{q}_2$$

En este caso, las dos VG  $\dot{q}_1$  y  $\dot{q}_2$  son independientes, por lo que deben conservarse, así como  $q_1$  y  $q_2$ .

CG:  $q_1$  y  $q_2$ ;  $q_1$ : carga en el capacitor.

VG:  $\dot{q}_1$  y  $\dot{q}_2$ ;  $\dot{q}_2 = I_L$ : corriente en el inductor.

Funciones:

$$T^*(\dot{q}) = \frac{1}{2} L \dot{q}_2^2, V(q) = \frac{1}{2C} q_1^2, \mathcal{D}(\dot{q}) = \frac{1}{2} R (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2$$

$$\text{Lagrangiano (clásico): } \mathcal{L} = T^*(\dot{q}) - V(q) = \frac{1}{2} L \dot{q}_2^2 - \frac{1}{2C} q_1^2$$

Ecuaciones E-L:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = Q_i - \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_i} \quad i = 1, 2$$

En ambos casos, el 1<sup>er</sup> miembro se calcula haciendo las operaciones indicadas sobre el Lagrangiano. El 2<sup>do</sup> miembro es idéntico en ambos casos, ya que, al estar conectados en paralelo, los almacenadores comparten la tensión aplicada, que es igual a la tensión de la fuente menos la caída en la resistencia:

$$Q_i - \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_i} = \underbrace{E}_{Q_i} - \underbrace{R(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)}_{\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_i}}$$

$$\text{CG1:} \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = \frac{d}{dt} (0) - \left( -\frac{q_1}{C} \right) = \frac{q_1}{C} = E - R(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)$$

$$\frac{q_1}{C} = E - R(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)$$

$$\text{CG2:} \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} = \frac{d}{dt} (L \dot{q}_2) - (0) = L \ddot{q}_2 = E - R(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)$$

$$L \ddot{q}_2 = E - R(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)$$

Como vemos, no se obtiene una EDO de orden 2 por cada CG, sino una de orden 1 y otra de orden 2. Para el capacitor, la única variable relevante (que captura todo su estado) es  $q_1$ , no así su derivada  $\dot{q}_1$ , lo que explica el orden 1 de la 1ª EDO. Que para el inductor la carga  $q_2$  no es relevante (no determina su estado) se observa en el hecho de que la EDO de orden 2 para su CG se puede reescribir como una de orden 1 dejándola en términos de la corriente  $I_I =: \dot{q}_2$  (que sí es relevante), ya que en la segunda EDO no aparece  $q_2$ . Reordenando convenientemente las ecuaciones anteriores y reemplazando, se tienen las siguientes ecuaciones equivalentes, que tienen un aspecto más habitual, el común en Ingeniería Eléctrica:

$$R \dot{q}_1 + \frac{q_1}{C} = E - R I_I$$

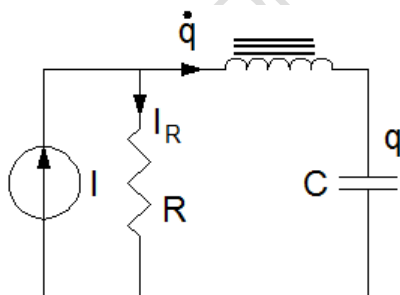
$$L \dot{I}_I + R I_I = E - R \dot{q}_1$$

Por supuesto, para el sistema total, que es de orden 2, se puede escribir una única EDO de orden 2, que captura la dinámica del inductor y del capacitor en ese sistema. Esta EDO puede ponerse tanto en términos de  $I_I$  como de  $q_1$ , según se muestra a continuación (obtenga las EDO con algún otro método de modelado y/o manipulando el par de ecuaciones anteriores).

$$\ddot{q}_1 + \frac{1}{RC} \dot{q}_1 + \frac{1}{LC} q_1 = \frac{1}{R} \dot{E}$$

$$\ddot{I}_I + \frac{1}{RC} \dot{I}_I + \frac{1}{LC} I_I = \frac{1}{RLC} E$$

c) *Circuito con inductor no lineal.* Supóngase que el inductor tiene una característica magnética no lineal (curva de saturación) dada simbólicamente por la expresión  $\psi_I = g_M(I_I)$ .



**Figura 10:** Circuito RLC paralelo.

$$I_R = I - \dot{q}$$

Al igual que en el problema a), dado que la estructura serie impone corriente única por el inductor y el capacitor, sus VG son iguales. Esta restricción entre las VG  $I_I =: \dot{q}_1 = \dot{q}_2 := I_C =: \dot{q}$  es integrable y resulta en similar restricción entre las cargas  $q_1 = q_2 =: q$ , la CG.

Funciones:

$$T^*(\dot{q}) = E_M^*(\dot{q}) = \int_0^{\dot{q}} \psi_I(I_I) dI_I, \quad V(q) = \frac{1}{2C} q^2,$$

$$\mathcal{D}(\dot{q}) = \frac{1}{2} R \dot{q}^2 - R I \dot{q}$$

$$\text{Lagrangiano (clásico): } \mathcal{L} = T^*(\dot{q}) - V(q) = \int_0^{\dot{q}} g_M(I_I) dI_I - \frac{1}{2C} q^2$$

Ecuación de E-L:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = Q - \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}}$$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \int_0^{\dot{q}} g_M(I_I) dI_I = g_M(\dot{q})$ , o sea, es igual al flujo magnético expresado en función de la corriente.

$$E-L: \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt}(g_M(\dot{q})) + \frac{q}{C} = 0 - (R \dot{q} - R I) \quad \rightarrow$$

$$g_M'(\dot{q}) \ddot{q} + R \dot{q} + \frac{q}{C} = R I$$

Donde  $g_M'(\dot{q})$  indica la derivada de la característica magnética respecto a  $\dot{q}$  (ella misma función de  $\dot{q}$ ), o sea, la derivada del flujo respecto a la corriente por el inductor, es decir, es la función inductancia incremental dinámica (varía -instante a instante- con la corriente).

**Ejercicio 1.** Obtenga las ecuaciones de E-L del problema precedente a este suponiendo inductor no lineal.



## Sistemas Electromecánicos.

La simple combinación de los resultados obtenidos separadamente para sistemas mecánicos y eléctricos en las secciones precedentes permite extender el método al modelado de sistemas electromecánicos. Es de gran utilidad para modelar dispositivos y sistemas de interconversión entre energías eléctrica-electromagnética y mecánica. Al pie de la página se indica una referencia bibliográfica clásica sobre el tema<sup>8</sup>.

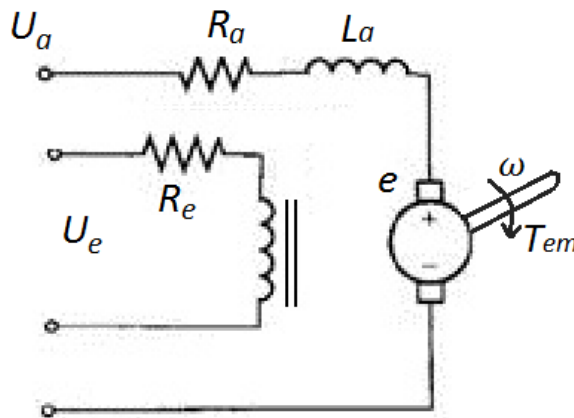
En primer lugar, se derivará el modelo E-L de una máquina de corriente continua a partir de su circuito equivalente, construyendo así un modelo (el de E-L) a partir de un metamodelo formal (en este caso, el circuito equivalente) previamente obtenido con un trabajo de modelado específico de un dominio de la ingeniería. Más adelante, se presentarán otros casos donde se procede al modelado E-L partiendo directamente de un esquema físico idealizado (que es también un modelo de la realidad, aunque con menos grado de formalización que, por ejemplo, un circuito equivalente).

### Ejemplo 6. Motor de Corriente Continua (MCC) con Excitación Independiente.

La figura muestra el circuito equivalente clásico de esta máquina con este tipo de conexionado de su circuito de excitación. El elemento visto como fuente de fuerza (contra) electromotriz del lado eléctrico y de cupla del lado mecánico es el componente estático conservador de potencia que modela el acoplamiento electromecánico. Su relación constitutiva está dada por las dos ecuaciones siguientes:

$$T_{em} = k_m \psi_e I_a \quad (22)$$

$$e = k_m \psi_e \omega \quad (23)$$



**Figura 11:** Motor de corriente continua con excitación independiente.

Hay tres coordenadas de movimiento, las cargas  $q_a$  y  $q_e$  asociadas a las corrientes de armadura  $I_a = \dot{q}_a$  y de excitación  $I_e = \dot{q}_e$ , respectivamente, y el ángulo de rotación del motor  $q_m = \theta$ , con  $\dot{q}_m = \omega$  como VG asociada.

Si la característica magnética de excitación fuera lineal, de manera que la relación entre el flujo de excitación  $\psi_e$  y la corriente de excitación  $I_e$  estuviera dada por  $\psi_e = L_e I_e$ , la co-energía cinética generalizada estaría dada por:

$$T^*(q_a, q_e, q_m) = \frac{1}{2} L_a \dot{q}_a^2 + \frac{1}{2} L_e \dot{q}_e^2 + \frac{1}{2} J \dot{q}_m^2 \quad (24)$$

Si considerásemos en cambio el caso más general de una característica magnética no lineal dada por  $\psi_e = g_m(I_e)$ , la co-energía cinética generalizada resultaría:

<sup>8</sup>Meisel, J. (1969). Principios de Conversión de Energía Electromecánica. McGraw-Hill.

$$T^*(\dot{q}_a, \dot{q}_e, \dot{q}_m) = \frac{1}{2} L_a \dot{q}_a^2 + \int_0^{\dot{q}_e} g_m(I_e) dI_e + \frac{1}{2} J \dot{q}_m^2 \quad (25)$$

Por su parte, la función de disipación de Rayleigh está dada por:

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} R_a \dot{q}_a^2 + \frac{1}{2} R_e \dot{q}_e^2 + \frac{1}{2} b \dot{q}_m^2 \quad (26)$$

No hay energía potencial asociada a este problema, de manera que  $V \equiv 0$ . A su vez, esto implica que el Lagrangiano es igual a la co-energía cinética, que – en este caso – no depende de ninguna CGM, con lo que el Lagrangiano mismo no depende de ninguna CGM. Las CGM que no aparecen en el Lagrangiano se denominan cíclicas (o ignorables), en este caso son todas.

$$\mathcal{L} = T^* - V = T^* \quad (27)$$

La ecuación de E-L para una CGM genérica es

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = Q - \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}}$$

Si la particularizamos para cada CGM ( $q_a$ ,  $q_e$  y  $q_m$ ), obtenemos:

1ª CGM ( $q_a$ ):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} &= Q_a - \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_a} \\ L_a \ddot{q}_a &= (U_a - e) - R_a \dot{q}_a \\ L_a \ddot{q}_a + R_a \dot{q}_a &= -k_m g_m(\dot{q}_e) \dot{q}_m + U_a \end{aligned} \quad (28)$$

2ª CGM ( $q_e$ ):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_e} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_e} &= Q_e - \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_e} \\ \frac{d}{dt} (g_m(\dot{q}_e)) &= U_e - R_e \dot{q}_e \\ g'_m(\dot{q}_e) \ddot{q}_e + R_e \dot{q}_e &= U_e \end{aligned} \quad (29)$$

3ª CGM ( $q_m$ ):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_m} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_m} &= Q_m - \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_m} \\ J \ddot{q}_m &= [k_m g_m(\dot{q}_e) \dot{q}_a - T_c] - b \dot{q}_m \\ J \ddot{q}_m + b \dot{q}_m &= k_m g_m(\dot{q}_e) \dot{q}_a - T_c \end{aligned} \quad (30)$$

Nótese que las ecuaciones (32), (33) y (34) son un sistema de tres EDOs en las CG, cada una de orden 2, pero que en ellas aparecen sólo las derivadas primeras y segundas de las CG y no las CG mismas (esto es una consecuencia de que las CGM son cíclicas). Esto se debe a que no hay energía potencial en absoluto en el sistema. Es fácil ver que se puede reescribir el sistema como uno de tres EDOs de primer orden cada una. En efecto, recordando las definiciones de las VG  $\dot{q}_a$ ,  $\dot{q}_e$  y  $\dot{q}_m$ , las ecuaciones (32), (33) y (34) pueden reescribirse con la siguiente notación más habitual en Ingeniería:

$$\begin{aligned}
L_a \dot{I}_a + R_a I_a &= -k_m \overbrace{g_m(I_e)}^{\psi_e} \omega + U_a \\
g'_m(I_e) \dot{I}_e + R_e I_e &= U_e \\
J \dot{\omega} + b \omega &= k_m \underbrace{g_m(I_e)}_{\psi_e} I_a - T_c
\end{aligned} \tag{31}$$

Cátedra Dinámica Sistemas Físicos. FCEIA. UNR

## Modelado Euler-Lagrange de Sistemas con Campos de Almacenadores.

Destacamos dos características del MCC modelado precedentemente: i) el modelo base es un circuito equivalente; ii) el problema del acoplamiento entre los subsistemas eléctrico y mecánico ya está resuelto en el circuito equivalente con el elemento bipuerto que impone  $f_{cem}$  al subsistema eléctrico y cupla al subsistema mecánico; el circuito equivalente resuelve el acoplamiento con un elemento estático (no almacena energía; en el lenguaje de los BG es un conservador de potencia). A continuación presentamos un ejemplo que nos permite: i) mostrar cómo modelar partiendo más cercanamente de la física ya que, si bien se trata de un sistema físico idealizado, no está completamente determinado por un circuito equivalente; ii) introducir los campos de almacenadores como elementos de acoplamiento dinámico entre subsistemas; es el caso del conjunto arrollamiento y circuito magnético con pieza móvil del Ejemplo 7. En el tratamiento con el enfoque Euler-Lagrange no queda completamente explícito el campo de almacenamiento, lo que sí ocurre cuando se emplea la técnica Bond Graph para modelar este tipo de sistemas<sup>9</sup>.

### Ejemplo 7:

Imaginemos un circuito magnético como el que se muestra en la Figura 12, constituido por un armazón fijo de material magnético con un arrollamiento en torno al mismo y un vástago de hierro dulce que se puede mover en un entrehierro.

Antes de proceder al modelado del sistema completo, presentamos una expresión explícita de la inductancia de magnetización, cuyo valor depende de  $x$ , la longitud libre del entrehierro<sup>10</sup>, por lo que la notaremos con  $L_m(x)$ . Destacamos que el problema se podría resolver sin este paso previo, es decir, trabajando con la expresión simbólica  $L_m(x)$ , sin calcularla explícitamente. Con la hipótesis adicional de que el material magnético y el hierro dulce tienen permeabilidad infinita, toda la reluctancia del circuito magnético está concentrada en el entrehierro de longitud  $(x + d)$ , con lo cual la fuerza magnetomotriz vale:

$$f_{mm} := H (x + d) = N i \quad (32)$$

La inducción magnética  $B$  vale:

$$B = \mu_0 H \quad (33)$$

El flujo magnético en el entrehierro  $\varphi$ , por su parte, vale:

$$\varphi = B A, \quad (34)$$

donde  $A$  es el área de la sección del entrehierro.

Entonces, del flujo total concatenado por el arrollamiento, la parte  $\psi_M$  que atraviesa el entrehierro vale<sup>11</sup>:

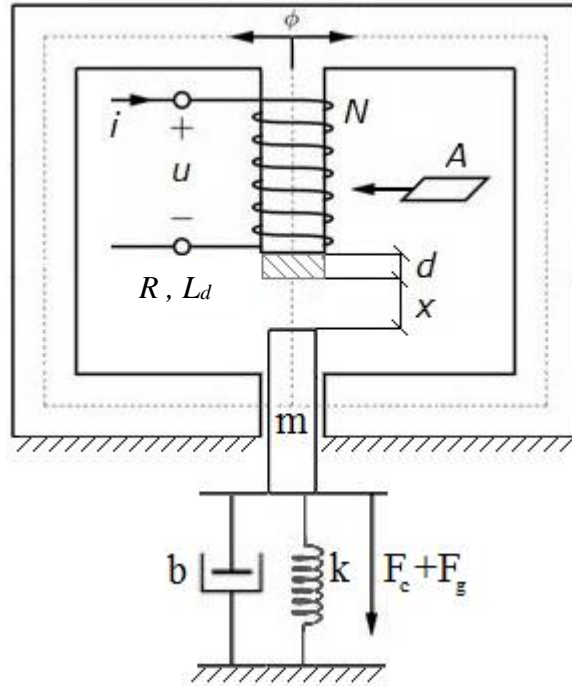
$$\psi_M = N \varphi, \quad (35)$$

donde  $N$  es el número de espiras del arrollamiento.

<sup>9</sup> Para completar en este sentido lo presentado a continuación, se recomienda ver el apunte "Modelado de Campos de Almacenadores con los métodos BG y E-L".

<sup>10</sup> La longitud total del entrehierro es  $(x+d)$ , donde  $d$  es la longitud de un separador de material paramagnético puesto como tope para el recorrido del vástago.

<sup>11</sup> El subíndice  $M$  se emplea para subrayar la correspondencia de este flujo con la inductancia de magnetización  $L_M$  definida más adelante.



**Figura 12:** Circuito magnético con vástago móvil.

En definitiva, puede escribirse:

$$\psi_M = N A \mu_0 H = \underbrace{\frac{N^2 A \mu_0}{(x + d)}}_{L_M(x)} i \quad (36)$$

Con lo cual la inductancia de magnetización  $L_M$  resulta:

$$L_M(x) = \frac{N^2 A \mu_0}{(x + d)} \quad (37)$$

Según se sugiere en la figura precedente, el sistema se completa con ciertos fenómenos secundarios, que son: resistencia del arrollamiento ( $R$ ) e inductancia de dispersión en el mismo ( $L_d$ ), masa del vástago ( $m$ ), un vínculo elástico entre el vástago y una superficie fija ( $k$ ) y rozamiento viscoso en el vástago ( $b$ ). Además, supongamos que se aplica una fuerza de carga externa ( $F_c$ ) sobre el vástago y que sobre el mismo actúa también la fuerza de gravedad ( $F_g$ ).

Nos proponemos obtener las ecuaciones de Euler-Lagrange de este sistema. Para comenzar, debemos calcular el Lagrangiano, la diferencia entre la co-energía cinética generalizada y la energía potencial generalizada:

$$\mathcal{L}(\dot{q}, q) = T^*(\dot{q}, q) - V(q)$$

La co-energía cinética total del sistema está dada por la suma de la co-energía de campo magnético y la co-energía cinética propiamente dicha:

$$T^* = \frac{1}{2} L(x) \dot{i}^2 + \frac{1}{2} m v^2 \quad (38)$$

Donde  $L(x) = L_d + L_M(x)$  es la inductancia total del arrollamiento.

Por su parte, la energía potencial total es simplemente la energía potencial elástica almacenada en el resorte<sup>12</sup>:

$$V = \frac{1}{2} k \Delta^2 \quad (39)$$

Reemplazando las ecuaciones (38) y (39) en la expresión del Lagrangiano, obtenemos:

$$\mathcal{L}(x, v, \Delta) = \frac{1}{2} L(x) \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} k \Delta^2 \quad (40)$$

Se observa que el Lagrangiano de (40) no está completamente escrito en función de las coordenadas generalizadas. Es importante explicitar esta dependencia para evitar confusiones que conduzcan a errores en los cálculos; para ello tomamos las siguientes definiciones:

$$q_m = x \rightarrow \dot{q}_m = v \quad (41)$$

$$q_e = q \rightarrow \dot{q}_e = i \quad (42)$$

$$\Delta = x - x_d = q_m - x_d, \quad (43)$$

donde  $x_d$  es un valor constante igual al valor de la coordenada  $x$  o  $q_m$  asociado a la posición en la que el resorte está desenergizado.

Con todo lo anterior obtenemos la siguiente expresión para el Lagrangiano (usamos la misma notación  $\mathcal{L}$  que en (40) a pesar de que lo escribimos en función de otras variables).

$$\mathcal{L}(q_m, q_e, \dot{q}_m, \dot{q}_e) = \frac{1}{2} L(q_m) \dot{q}_e^2 + \frac{1}{2} m \dot{q}_m^2 - \frac{1}{2} k (q_m - x_d)^2 \quad (44)$$

Recordando la expresión original (37) de la inductancia  $L_M$  en función de  $x$  y la definición  $q_m = x$  dada en (41), se tiene:

$$L(q_m) = L_d + \frac{N^2 A \mu_0}{(q_m + d)} \quad (45)$$

*Ecuaciones de Euler-Lagrange.*

Recordamos que hay una por cada CGM genérica  $q_i$ , de la forma:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \sum_j F_{NC_i} \quad (46)$$

donde  $f_{NC_i}$  son las fuerzas no conservativas (fuerzas externas) asociadas a la coordenada  $q_i$ .

<sup>12</sup> Téngase en cuenta que el efecto de la energía potencial gravitatoria está tratado vía la incorporación directa de la fuerza de gravedad. Como ejercicio, se sugiere hacerlo alternativamente modificando la expresión de la energía potencial total.

Particularizamos ahora (46) para cada una de las CGMs específicas del problema.

Para  $q_m$  vale:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_m} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_m} = F_c + F_g - b \dot{q}_m \quad (47)$$

$$\frac{d}{dt} (m \dot{q}_m) - \left[ \frac{1}{2} \dot{q}_e^2 \frac{dL(q_m)}{dq_m} - k (q_m - x_d) \right] = F_c + m g - b \dot{q}_m$$

$$m \ddot{q}_m - \left[ -\frac{1}{2} \dot{q}_e^2 \frac{N^2 A \mu_0}{(q_m + d)^2} - k (q_m - x_d) \right] = F_c + m g - b \dot{q}_m$$

$$\underbrace{m \ddot{q}_m}_{F_a} + \underbrace{b \dot{q}_m}_{F_f} + \underbrace{k (q_m - x_d)}_{F_k} + \underbrace{\frac{1}{2} \dot{q}_e^2 \frac{N^2 A \mu_0}{(q_m + d)^2}}_{F_{em}} = F_c + m g \quad (48)$$

En la ecuación anterior se ha destacado la fuerza de origen electromagnético  $F_{em}$  que, como se ve, es siempre positiva (de atracción o hacia arriba) independientemente del signo de la corriente, y que se puede escribir alternativamente en términos de la inductancia de magnetización (¡no depende de la inductancia de dispersión!) y el correspondiente flujo como:

$$F_{em} = \frac{1}{2} \dot{q}_e^2 \frac{L_M(q_m)}{(q_m + d)} = \frac{1}{2} \dot{q}_e \frac{\psi_M(q_m)}{(q_m + d)}$$

Para la coordenada  $q_e$  se tiene:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_e} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_e} = u_F - R \dot{q}_e \quad (49)$$

$$\frac{d}{dt} (L(q_m) \dot{q}_e) - 0 = u_F - R \dot{q}_e$$

$$L(q_m) \ddot{q}_e + \frac{dL(q_m)}{dq_m} \dot{q}_m \dot{q}_e = u_F - R \dot{q}_e$$

$$L(q_m) \ddot{q}_e + R \dot{q}_e + \frac{dL(q_m)}{dq_m} \dot{q}_m \dot{q}_e = u_F$$

$$\underbrace{\left[ L_d + \frac{N^2 A \mu_0}{(q_m + d)} \right] \ddot{q}_e}_{u_L} + \underbrace{R \dot{q}_e}_{u_R} - \underbrace{\frac{N^2 A \mu_0}{(q_m + d)^2} \dot{q}_e \dot{q}_m}_{u_{qm} = u_{vel} = f_{cem}} = u_F \quad (50)$$

En la ecuación anterior se ha destacado la fuerza contraelectromotriz  $f_{cem}$  originada en el movimiento del vástago (cambio de la reluctancia magnética debido al movimiento), la que se puede reescribir en términos de la inductancia y del flujo de magnetización como sigue:

$$f_{cem} = - \frac{L_M(q_m) \dot{q}_e}{(q_m + d)} \dot{q}_m = - \frac{\psi_M(q_m)}{(q_m + d)} \dot{q}_m$$

(¿A qué se debe el signo menos en la expresión de esta  $f_{cem}$ ?)

En resumen, las ecuaciones de Euler-Lagrange resultantes son las siguientes:

$$\underbrace{m \ddot{q}_m}_{F_a} + \underbrace{b \dot{q}_m}_{F_f} + \underbrace{k (q_m - x_d)}_{F_k} + \underbrace{\frac{1}{2} \dot{q}_e^2 \frac{N^2 A \mu_0}{(q_m + d)^2}}_{F_{em}} = F_c + m g \quad (51)$$

$$\underbrace{\left[ L_d + \frac{N^2 A \mu_0}{(q_m + d)} \right] \ddot{q}_e}_{u_L} + \underbrace{R_a \dot{q}_e}_{u_R} - \underbrace{\frac{N^2 A \mu_0}{(q_m + d)^2} \dot{q}_m \dot{q}_e}_{f_{cem}} = u_F \quad (52)$$



## Ecuaciones de Hamilton y Modelos port-Hamiltonian Systems o pHS.

La presentación clásica de las Ecuaciones de Hamilton se hace a partir de las Ecuaciones de E-L empleando una transformación de Legendre. La presentación de este formalismo se hará aquí de una forma mucho más simple y natural para el Ingeniero, habida cuenta de su formación. Posteriormente se hará la presentación clásica recurriendo a la transformación de Legendre.

### **Ingredientes del formalismo Hamiltoniano:**

Los elementos básicos de este formalismo son:

- i) el conjunto de variables de estado (*las CG y los impulsos generalizados en el contexto que venimos viendo, aunque pueden ser otras en la generalización del formalismo*),
- ii) la energía total almacenada en el sistema como *función del estado* del mismo. Para el caso de la extensión ingenieril conocida como **pHS**, por el inglés *port-Hamiltonian Systems*, corresponde hablar – en términos más generales – de una *Función de Almacenamiento*, que en el caso de los sistemas físicos puede ser la energía total o la co-energía o una combinación de energías y co-energías.
- iii) el gradiente respecto al estado de esta función (de estado) *Almacenamiento* y, por supuesto,
- iv) las variables compartidas por el sistema y el medio en su interacción mutua. En primer lugar, distinguimos aquí las que son independientes del sistema (en el contexto clásico de control denominadas variables de entrada). Para el caso de los pHS también debe considerarse
- v) un conjunto de variables dependientes del sistema, complementario del anterior, denominado conjunto de variables de salida.

**Conjunto de variables de estado:** tratado formalmente como el vector columna de  $n$  componentes

$$x := [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \quad (53)$$

Como se dijo más arriba, en el contexto que venimos estudiando, la elección más natural de este conjunto es la colección de las CG y los impulsos generalizados, es decir

$$x := [q^T \quad p^T]^T \quad (54)$$

**Hamiltoniano:** es la energía total almacenada en el sistema (o, en términos más generales, una función de almacenamiento o storage function):

$$\mathcal{H}(x, t) := T(x, t) + V(x, t), \quad (55)$$

siendo usual en la Física Clásica la expresión ya presentada:

$$\mathcal{H}(q, p, t) := T(q, p, t) + V(q, t) \quad (56)$$

**El gradiente de la función de energía respecto a los estados:**

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} := \left[ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_1}, \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_n} \right]^T \quad (57)$$

a menudo representado por las notaciones alternativas  $\nabla_x \mathcal{H}(x)$  o  $\mathcal{H}_x(x)$ .

---

**A los efectos de facilitar la interpretación física de estos conceptos y fortalecer una visión global y unificada del modelado de los sistemas físicos, los asociamos a los conceptos del formalismo de los BG<sup>13,14</sup>. Si Ud. aun no conoce dicho formalismo de modelado, puede saltar esta subsección sin perder el hilo argumental.**

**El Gradiente del Hamiltoniano y los Almacenadores de Energía o Interpretación Física del Gradiente.**

Más allá de su interpretación formal como el resultado de aplicar el operador matemático  $\nabla$  (nabla) al Hamiltoniano, este gradiente tiene, como se verá en los ejemplos, una interpretación física importante que, básicamente, es la siguiente:

**Las componentes del gradiente del Hamiltoniano son las salidas de los almacenadores de energía en causalidad integral.**

Se puede dar una mayor precisión en base a la siguiente clasificación y generalización de variables (ver Transparencias de clase “Pres\_DSf\_20\_ClasifVariables\_Estado\_Energía\_IntroModClásico.pdf”):

*Esfuerzos generalizados  $e$ :* fuerza, cupla, diferencia de potencial eléctrico, presión, etc.

*Flujos o velocidades generalizadas  $f$ :* velocidad, velocidad angular, corriente eléctrica, caudal volumétrico, etc.

*Impulsos generalizados  $p$ :* cantidad de movimiento lineal, íd. angular, flujo magnético, impulso de la presión, etc.

*Cargas generalizadas  $q$ :* desplazamiento o deformación lineal, íd. angular, carga eléctrica, volumen, etc.

*Variables de potencia:  $e$ ,  $f$ .* Son las variables externas de los componentes que representan los fenómenos elementales, entre ellos los almacenadores de energía.

*Variables de potencia conjugadas:* son las  $e$  y las  $f$ , así clasificadas visto que su producto es la potencia asociada a cada componente.

*Variables de energía:  $p$  y  $q$ .* Son las variables internas de los almacenadores, las  $p$  de las inercias generalizadas (almacenadores de energía cinética generalizada) y las  $q$  de los capacitores generalizados (almacenadores de energía potencial generalizada).

*Co-variables de potencia (de las variables de energía de los almacenadores):* en los almacenadores de energía, son las variables de potencia relacionadas estáticamente con sus variables de energía por las RelCs de los almacenadores. Es decir, son las  $f$  en las inercias generalizadas y las  $e$  en los capacitores generalizados.

**Las componentes del gradiente del Hamiltoniano son las co-variables de potencia de los almacenadores de energía en causalidad integral.**

---

<sup>13</sup> Un método práctico para convertir **modelos BG a PHS** puede verse en:

- Donaire, A. and Junco, S., Derivation of Input-State-Output Port-Hamiltonian Systems from Bond Graphs, Simulation Modelling Practice and Theory, Special Issue on Bond Graph Modelling, 17 (1), pp. 137-151, 2009.

<sup>14</sup> Además de interesantes ejemplos de aplicación, el siguiente artículo presenta un método práctico de conversión de **modelos BG a ecuaciones de Euler-Lagrange** y, a través del mismo, ilustra las correspondencias entre ambos:

- Karnopp, D. C., 1977, “Lagrange’s Equations for Complex Bond Graphs Systems”, J. Dyn. Syst., Meas. & Control, ASME Tr., Vol. 99 (Dec.), pp. 300-306.

## Modelos pHS o port-Hamiltonian Systems (Ecuaciones de Estado).

A diferencia de las ecuaciones de E-L, **las Ecuaciones de Hamilton** son un sistema de ecuaciones diferenciales **de primer orden**. Más específicamente, **son ecuaciones de estado en cuya expresión teórica genérica la dinámica del estado** (su derivada temporal) **no se formula** (escribe) directamente en términos del estado, como en su versión estándar, sino indirectamente **en términos del gradiente de la energía almacenada** en el sistema (**o sea, del Hamiltoniano**), el cual depende del estado. En la versión más general de los pHS, estas ecuaciones son de la forma:

$$\dot{x} = J(x, u) \frac{\partial \mathcal{H}(x)}{\partial x} - R(x, u) \frac{\partial \mathcal{H}(x)}{\partial x} + g(x, u) \quad (58)$$

Si para un sistema dado ya se obtuvo el modelo pHS (que, enfatizamos, consiste en el **conjunto** de las ecuaciones anteriores y el Hamiltoniano), la forma estándar explícita de las ecuaciones de estado

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (59)$$

se obtiene procediendo a calcular el gradiente del Hamiltoniano. Si bien las ecuaciones de estado en su forma estándar son necesarias para ciertos fines (por ejemplo, la resolución de las ecuaciones para condiciones iniciales y entradas específicas vía simulación o analíticamente), señalamos ya que la forma pHS permite sacar importantes conclusiones cualitativas sobre el comportamiento del sistema y es explotable a los fines teóricos y prácticos en aplicaciones de Dinámica de Sistemas, como por ejemplo Teoría e Ingeniería de Control. Transcribimos al pie de esta página un texto<sup>15</sup> tomado de la página web de un grupo de investigación de la Universidad Politécnica de Cataluña que trabaja con estos formalismos (<https://recerca.upc.edu/aces/en/research/modeling-and-control-1/port-controlled-hamiltonian-systems>)

### Propiedades de las matrices $J$ y $R$ de la forma pHS:

- $J$  es una matriz cuadrada en  $\mathbb{R}^{n \times n}$ , antisimétrica, llamada *matriz de interconexión*.  
Antisimétrica:  $J^T = -J \iff v^T J(x, u) v = 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$
- $R$  es una matriz cuadrada en  $\mathbb{R}^{n \times n}$ , (semi-)definida positiva, llamada *matriz de disipación*.  
Semidefinida positiva:  $R(x, u) \geq 0 \iff v^T R v \geq 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0$ .  
Definida positiva:  $R(x, u) > 0 \iff v^T R v > 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0$ .

El ejemplo más simple de la matriz  $J$  es la matriz antisimétrica ortonormal  $J_2$ :

$$J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow v^T J_2 v = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v_2 & v_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = -v_2 v_1 + v_1 v_2 = 0 !!!$$

<sup>15</sup> Port-controlled Hamiltonian Systems (PCHS) are the natural generalization of Hamiltonian mechanics to describe more general systems as they appear in control engineering. In particular, PCHS theory allows for the presence of control input/output signals of a special nature, the so called power ports, and also extends the Hamiltonian description to arbitrary domains (electrical, hydraulic, thermal) with dissipation, which is present in any real engineering system. PCHS are passive with respect to the port variables, which means that a PCHS evolves to certain kinds of stable orbits (normally stable equilibrium points) when ports are disconnected; this confers PCHS a built-in safety feature which can be very important in critical applications. Interconnecting several PCHS produces again a PCHS. PCHS theory is thus a natural framework for describing complex systems obtained as network interconnections of simpler subsystems. PCHS also yield themselves to a control technique, known as Passivity-Based Control and Injection Damping Assignment (IDA-PBC), which exploits the passive and interconnection properties described above.

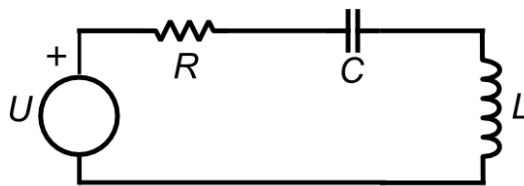
<sup>16</sup> En un caso general de  $J$  no constante (en muchos casos es  $J = J(x, u)$ ), sólo vale  $J^T = -J \implies v^T J v = 0$ , es decir, la forma cuadrática puede anularse aún no siendo  $J$  antisimétrica, aunque en este formalismo lo es.

En ciertos casos  $g(x, u) = g(x) u$ , es decir, las entradas inciden linealmente en las ecuaciones. Muchas veces  $g(x) = G$ , es decir, una matriz constante. En lo que respecta a las matrices  $J$  y  $R$ , pueden depender tanto de los estados como de las entradas, según se indica en la notación general presentada, o sólo de los estados, o de las entradas, o de ninguno de ambos, caso este último en el que se trata de matrices constantes.

**A continuación** se presentarán algunos ejemplos de modelos PHS. Se supondrá que ya se dispone de las ecuaciones de estado en su forma clásica, obtenidas con alguno de los métodos de modelado conocidos. **¡No debe interpretarse esto como un método de modelado pHS, sólo se hace de esta manera para permitir la familiarización del lector con los pHS a partir de un tipo de modelo ya conocido!**

**Ejemplo 8: EE  $\rightarrow$  Ecs. PHS. Circuito RLC.**

Sea un circuito eléctrico RLC serie como el que se muestra en la Figura 13. Nos proponemos obtener una descripción en ecuaciones de Hamilton a partir de las ecuaciones de estado clásicas para distintas elecciones del vector de estados.



**Figura 13:** Circuito eléctrico RLC serie.

Si se selecciona el vector de estados  $x$  como  $x := [q \ \psi]^T$ , las ecuaciones de estado resultan

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{1}{L} \psi \\ \dot{\psi} = -\frac{1}{C} q - \frac{R}{L} \psi + U \end{cases} \quad (60)$$

El Hamiltoniano  $\mathcal{H}$  es igual a la energía total almacenada en el sistema, que es simplemente la suma de la energía de campo eléctrico almacenada en el capacitor y la energía de campo magnético almacenada en el inductor.

$$\mathcal{H}(q, p) = \mathcal{H}(q, \psi) = \frac{1}{2C} q^2 + \frac{1}{2L} \psi^2 \quad (61)$$

El gradiente del Hamiltoniano vale

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} & \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} q & \psi \end{bmatrix}^T \quad (62)$$

Por simple inspección, las ecuaciones de estado (60) pueden reescribirse, en vista de (62), como

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi} \\ \dot{\psi} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} - R \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi} + U \end{cases} \quad (63)$$

A su vez, las ecuaciones (63) pueden reescribirse matricialmente como

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_J \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi} \end{bmatrix}}_{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}} - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}}_R \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi} \end{bmatrix}}_{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_G U \quad (64)$$

que está en la forma Hamiltoniana  $\dot{x} = J \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} - R \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} + G u$ , con las definiciones de  $J$ ,  $R$  y  $G$  que se muestran.

Una elección alternativa del vector de estados (más usual en Ingeniería) es  $z := [U_C, I_L]^T$ . Con esta elección, las ecuaciones de estado son

$$\begin{cases} \dot{U}_C = \frac{1}{C} I_L \\ \dot{I}_L = -\frac{1}{L} U_C - \frac{R}{L} I_L + \frac{1}{L} U \end{cases} \quad (65)$$

Como Función de Almacenamiento (que llamaremos  $\mathcal{E}$ ) o Hamiltoniano para esta segunda elección del vector de estados es:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} C U_C^2 + \frac{1}{2} L I_L^2 \quad (66)$$

Vemos que se trata de la co-energía total en el sistema. Su gradiente vale

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial U_C} & \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial I_L} \end{bmatrix} = [C U_C \quad L I_L] \quad (67)$$

De manera análoga al caso anterior, las ecuaciones de estado (65) pueden reescribirse, en vista de (67), como

$$\begin{cases} \dot{U}_C = \frac{1}{LC} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial I_L} \\ \dot{I}_L = -\frac{1}{LC} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial U_C} - \frac{R}{L^2} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial I_L} + \frac{1}{L} U \end{cases} \quad (68)$$

Por último, las ecuaciones (68) pueden reescribirse matricialmente de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_C \\ \dot{I}_L \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{LC} \\ -\frac{1}{LC} & 0 \end{bmatrix}}_{J_z} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial U_C} \\ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial I_L} \end{bmatrix}}_{\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z}} - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{R}{L^2} \end{bmatrix}}_{R_z} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial U_C} \\ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial I_L} \end{bmatrix}}_{\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}}_{G_z} U \quad (69)$$

que está en la forma PHS:  $\dot{z} = J_z \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} - R_z \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} + G_z u$

#### **Ejemplo 9: EE → Ecs. PHS. Motor de corriente continua.**

Consideremos ahora un motor de corriente continua cuya dinámica está descrita por las siguientes ecuaciones con el vector de estados  $x = [I_a, \omega, \psi_e]^T$ :

$$\begin{cases} \dot{I}_a = -\frac{R_a}{L_a} I_a - \frac{k}{L_a} \psi_e \omega + \frac{1}{L_a} U_a \\ \dot{\omega} = \frac{k}{J} \psi_e I_a - \frac{b}{J} \omega + \frac{1}{J} T_c \\ \dot{\psi}_e = -R_e g_M^{-1}(\psi_e) + U_e \end{cases} \quad (70)$$

Vista las variables de estado elegidas, definimos como Hamiltoniano a la suma de la co-energía de campo magnético de armadura, de la energía del campo de excitación y de la co-energía cinética de la masa rotante del motor. Visto esto, el Hamiltoniano vale:

$$\mathcal{H}(I_a, \omega, \psi_e) = \frac{1}{2} L_a I_a^2 + \frac{1}{2} J \omega^2 + \int_0^{\psi_e} g_M^{-1}(\varphi) d\varphi \quad (71)$$

El gradiente de  $\mathcal{H}$  resulta:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} := \left[ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_a} \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \omega} \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi_e} \right]^T = [L_a I_a \quad J \omega \quad g_M^{-1}(\psi_e)]^T \quad (72)$$

Si se tiene en cuenta (72), las EE dadas en (70) pueden reescribirse en términos de las componentes del gradiente de  $\mathcal{H}$  de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \dot{I}_a = -\frac{R_a}{L_a^2} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_a} - \frac{k}{J L_a} \psi_e \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \omega} + \frac{1}{L_a} U_a \\ \dot{\omega} = \frac{k}{J L_a} \psi_e \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_a} - \frac{b}{J^2} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \omega} + \frac{1}{J} T_c \\ \dot{\psi}_e = -R_e \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi_e} + U_e \end{cases} \quad (73)$$

Las ecuaciones (73) pueden reescribirse matricialmente en la forma PHS:  $\dot{x} = J \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} - R \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} + Gu$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{I}_a \\ \dot{\omega} \\ \dot{\psi}_e \end{bmatrix}}_{\dot{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\frac{k}{J L_a} \psi_e & 0 \\ \frac{k}{J L_a} \psi_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\substack{J(\psi_e)=J(x) \\ \text{antisimétrica}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_a} \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \omega} \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi_e} \end{bmatrix}}_{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}} - \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{R_a}{L_a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{b}{J^2} & 0 \\ 0 & 0 & R_e \end{bmatrix}}_{\substack{R \\ \text{definida positiva}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_a} \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \omega} \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi_e} \end{bmatrix}}_{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} U_a \\ T_c \\ U_e \end{bmatrix}}_{\bar{u}} \quad (74)$$

## ***Deducción clásica del modelo PHS a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange utilizando la transformación de Legendre.***

Si bien las ecuaciones de Hamilton son las clásicas y no los PHS (como veremos, las ecuaciones de Hamilton son un caso particular de los PHS), el procedimiento empleado a continuación para la deducción del modelo PHS es el mismo que para el caso clásico.

Para comenzar, recordemos la expresión general de las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = Q - \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}} \quad (75)$$

Ahora, definamos el momento o impulso generalizado  $\mathbf{p}$  como:

$$\mathbf{p} := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \quad (76)$$

Con esta definición de  $\mathbf{p}$ , se define **la transformación de Legendre del Lagrangiano**  $\mathcal{L}$  como:

$$\mathbb{G}\{\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\} := \mathbf{p}^T \dot{\mathbf{q}} - \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (77)$$

Dado que

$$\mathbf{p}^T \dot{\mathbf{q}} = T(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + T^*(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (78)$$

y

$$\mathcal{L} = T^*(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - V(\mathbf{q}), \quad (79)$$

la ecuación (77) puede reescribirse como:

$$\mathbb{G}\{\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\} = T(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + V(\mathbf{q}) = \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \quad (80)$$

En definitiva, la transformada de Legendre produce una función  $\gamma(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  que no es otra cosa que el Hamiltoniano ya introducido previamente, se nota con  $\mathcal{H}$ , y es igual a la energía almacenada en el sistema (véase la nota de pie de página 5!).

Dadas las definiciones anteriores de  $\mathbf{p}$  y  $\mathcal{H}$  y las ecuaciones de Euler-Lagrange, nos proponemos derivar ecuaciones de primer orden en el vector de estados  $[\mathbf{q}, \mathbf{p}]$ , es decir, las llamadas ecuaciones de Hamilton o el modelo PHS. Como paso previo, resulta útil derivar una serie de igualdades intermedias.

*Igualdad 1:*

Por definición de  $\mathbf{p}$  (ecuación (76)), se cumple:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{d}{dt} \mathbf{p} = \dot{\mathbf{p}} \quad (81)$$

*Igualdad 2:*

De (77) y (80) se deduce que:

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathbf{p}^T \dot{\mathbf{q}} - \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (82)$$

o, equivalentemente,

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{p}^T \dot{\mathbf{q}} - \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \quad (83)$$

Teniendo en cuenta (83), la derivada del Lagrangiano con respecto a  $\mathbf{q}$  puede escribirse como

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} [\mathbf{p}^T \dot{\mathbf{q}} - \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p})] = - \frac{\partial \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{q}} \quad (84)$$

Igualdad 3:

Recordando la ecuación (82), la derivada del Hamiltoniano con respecto a  $\mathbf{p}$  puede escribirse como:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} [\mathbf{p}^T \dot{\mathbf{q}} - \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})] = \dot{\mathbf{q}} \quad (85)$$

Armados con las igualdades anteriores (ecuaciones (81), (84) y (85)), ahora sí procedemos a derivar un conjunto de ecuaciones de primer orden para el vector de estados  $[\mathbf{q}, \mathbf{p}]$ , es decir buscamos determinar  $\dot{\mathbf{q}} = \dots$  y  $\dot{\mathbf{p}} = \dots$ .

La primera ecuación PHS surge inmediatamente de (82) y (85):

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}} \quad (86)$$

Para derivar la segunda, partimos de la ecuación (75):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q} - \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \quad (87)$$

y reemplazamos  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)$  y  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}}$  por sus expresiones en términos de  $\mathcal{H}$  y  $\mathbf{p}$  dadas en (81) y (84), respectivamente. Hecho esto, resulta<sup>17</sup>

$$\dot{\mathbf{p}} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q} - \frac{\partial \mathcal{D}(\dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \quad (88)$$

que puede reescribirse como

$$\dot{\mathbf{p}} = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial \mathcal{D}(\dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} + \mathbf{Q} \quad (89)$$

En suma, la forma **casi definitiva** de las ecuaciones de Hamilton está dada por {(86), (89)} como sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{p}} = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial \mathcal{D}(\dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} + \mathbf{Q} \end{cases} \quad (90)$$

Por inspección se ve que las ecuaciones (90) pueden escribirse matricialmente de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & I_{n \times n} \\ -I_{n \times n} & 0_{n \times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}} \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0_n \\ \frac{\partial \mathcal{D}(\dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_n \\ \mathbf{Q} \end{bmatrix} \quad (91)$$

En la expresión anterior  $I_{n \times n}$  y  $0_{n \times n}$  son la matriz identidad y la matriz nula cuadrada, ambas  $n \times n$ , y  $0_n$  es una columna de  $n$  ceros. En lo que sigue no se escribirán los subíndices de este tipo de matrices y vectores, ya que los mismos se sobreentienden del contexto.

<sup>17</sup> Aquí, hemos supuesto que  $\mathcal{D}$  depende exclusivamente de  $\dot{\mathbf{q}}$ . En ciertas configuraciones puede ser más directo escribir  $\mathcal{D}$  en dependencia de  $\mathbf{q}$  (piénsese en un resistor en paralelo con un capacitor). Para aplicar el método aquí desarrollado en estos casos debe manipularse la expresión de  $\mathcal{D}$  para escribirla en términos de  $\dot{\mathbf{q}}$ .



¿Por qué se dijo más arriba que (90), (91) constituyen la forma *casi* definitiva de las ecuaciones de Hamilton? Porque, como debe recordarse, en el formalismo PHS los vectores que aparecen en el segundo miembro deben escribirse como el gradiente del Hamiltoniano respecto al estado, lo cual no se hace completamente aquí al aparecer la función de disipación de Rayleigh, que además está expresada en términos de  $\dot{\mathbf{q}}$ , que no es una variable del formalismo PHS (está reemplazada por  $\mathbf{p}$ ).

La forma definitiva de las ecuaciones de Hamilton se obtiene reemplazando el vector  $\frac{\partial \mathcal{D}(\dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$  en la expresión anterior por el producto de una matriz  $R(\mathbf{p})$  por  $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}}$  para arribar a la forma canónica de las ecuaciones de Hamilton.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}}_J \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}} \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}} \end{bmatrix}}_{\nabla_x \mathcal{H}(x)} - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R(\mathbf{p}) \end{bmatrix}}_R \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}} \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}} \end{bmatrix}}_{\nabla_x \mathcal{H}(x)} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{Q} \end{bmatrix} \quad (92)$$

La matriz  $R(\mathbf{p})$  se obtiene despejándola de

$$\frac{\partial \mathcal{D}(\dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = R(\mathbf{p}) \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}} \quad (93)$$

utilizando las expresiones específicas de  $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  y  $\mathcal{D}(\dot{\mathbf{q}})$  correspondientes a cada problema en cuestión y la igualdad genérica (86).

Con las correspondencias que se muestran, la ecuación (92) puede reescribirse de forma más compacta como

$$\dot{\mathbf{x}} = J \nabla_x \mathcal{H}(x) - R \nabla_x \mathcal{H}(x) + \mathbf{Q} \quad (94)$$

No se debe perder de vista que el modelo de las ecuaciones (92) o (94) se completa con la definición del Hamiltoniano según (80), es decir, que el modelo completo es:

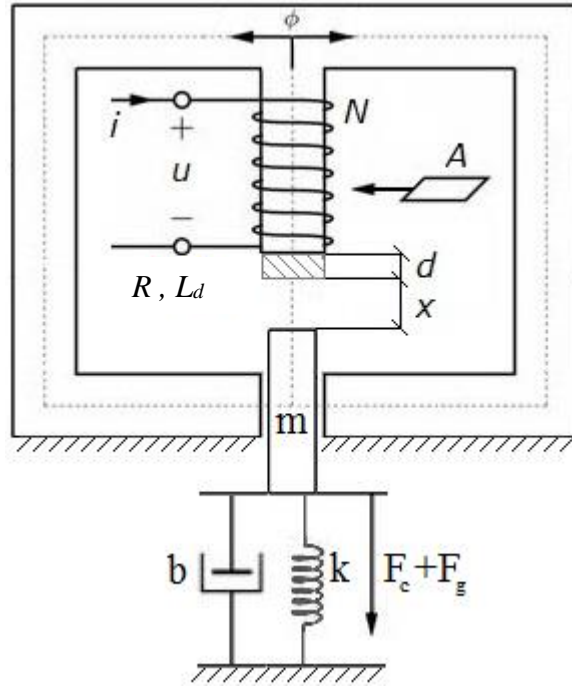
$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}}_J \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}} \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}} \end{bmatrix}}_{\nabla_x \mathcal{H}(x)} - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R(\mathbf{p}) \end{bmatrix}}_R \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}} \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}} \end{bmatrix}}_{\nabla_x \mathcal{H}(x)} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{Q} \end{bmatrix} \\ \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = T(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + V(\mathbf{q}) \end{array} \right. \quad (95)$$

**Ejercicio 2: Replantee el problema del Ejemplo 9** utilizando como variables de estado al conjunto {flujo por el inductor de armadura, cantidad de movimiento angular del rotor, flujo por el inductor de campo}. Compare los elementos de los modelos pHS, es decir, las matrices  $J$ ,  $R$  y  $G$ .

**Ejercicio 3: EL  $\rightarrow$  PHS con el método clásico para el MCC-EI.** A partir de las ecuaciones (28), (29) y (30), obtenga el modelo PHS del MCC-EI con el método que se acaba de presentar. Realice un análisis comparativo de los resultados de este ejercicio y los del Ejercicio 2 precedente (cantidad de ecuaciones, etc.) y explique sus observaciones.

**Ejemplo 10: Ecuaciones de Hamilton de un electroimán.**

Consideremos nuevamente el circuito magnético del Ejemplo 7, esta vez con la metodología de las ecuaciones de Hamilton. Por comodidad, la Figura 12 que ilustra el circuito magnético se repite a continuación.



**Figura 14:** Circuito magnético con vástago móvil.

Para encarar el problema sistemáticamente desde el enfoque Hamiltoniano, el primer paso es definir el vector de estados  $x$ :

$$x := [q_e \quad q_m \quad p_e \quad p_m]^T \quad (96)$$

Donde  $q_e$  es la integral de la corriente por el arrollamiento,  $p_e$  el flujo magnético total concatenado por el mismo,  $q_m$  es la posición del vástago y  $p_e$  su cantidad de movimiento.

El siguiente paso es calcular el Hamiltoniano de acuerdo con (80), es decir, como la energía total almacenada en el sistema en dependencia de las variables de estado.

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2L(q_m)} p_e^2 + \frac{1}{2m} p_m^2 + \frac{1}{2} k(q_m - x_d)^2 \quad (97)$$

A continuación, escribimos el gradiente del Hamiltoniano:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} := \left[ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_e} \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_m} \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_e} \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_m} \right]^T \quad (98)$$

Ahora, escribimos las ecuaciones de estado como caso particular de (90):

$$\begin{cases} \dot{q}_e = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_e} \\ \dot{q}_m = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_m} \\ \dot{p}_e = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_e} - \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_e} + Q_e \\ \dot{p}_m = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_m} - \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_m} + Q_m \end{cases} \quad (99)$$

Como vimos, para obtener la forma PHS canónica (92), (94) o (95), hay que expresar los términos  $\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_e}$  y  $\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_m}$  de (99) en función de  $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_e}$  y  $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_m}$ , respectivamente. Para hacerlo, primero calculemos la función de disipación  $\mathcal{D}$ , asociada a la disipación en la resistencia  $R$  y a las pérdidas por fricción (coeficiente de rozamiento  $b$ ):

$$\mathcal{D}(\dot{q}) = \frac{1}{2} R \dot{q}_e^2 + \frac{1}{2} b \dot{q}_m^2 \quad (100)$$

Ahora, tomamos la derivada de  $\mathcal{D}$  con respecto a  $\dot{q}$ :

$$\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_e} \\ \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \dot{q}_e \\ b \dot{q}_m \end{bmatrix} \quad (101)$$

Si reemplazamos las dos primeras igualdades de (99) en (101), resulta

$$\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_e} \\ \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_e} \\ b \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_m} \end{bmatrix} \quad (102)$$

Ahora estamos en condiciones de reemplazar  $\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_e}$  y  $\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_m}$  en (99) por sus expresiones en función de  $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_e}$  y  $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_m}$ , dadas en (102). Hecho esto, las ecuaciones adquieren la forma canónica presentada en (92):

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{q}_e = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_e} \\ \dot{q}_m = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_m} \\ \dot{p}_e = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_e} - R \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_e} + Q_e \\ \dot{p}_m = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_m} - b \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_m} + Q_m \end{array} \right. \quad (103)$$

Además, podemos reemplazar  $Q_e$  y  $Q_m$  por los valores que asumen en este ejemplo. Dado que las únicas fuerzas externas son la tensión aplicada  $u_F$  y las fuerzas de carga y de gravedad  $F_C$  y  $F_g$ , se cumple que:

$$Q_e = u_F \quad (104)$$

$$Q_m = (F_C + F_g) \quad (105)$$

Con las igualdades (104) y (105), las ecuaciones de estado (103) pueden reescribirse una vez más como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{q}_e = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_e} \\ \dot{q}_m = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_m} \\ \dot{p}_e = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_e} - R \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_e} + u_F \\ \dot{p}_m = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_m} - b \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_m} + (F_C + F_g) \end{array} \right. \quad (106)$$

A su vez, el conjunto de ecuaciones (106) puede reescribirse matricialmente como:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{q}_e \\ \dot{q}_m \\ \dot{p}_e \\ \dot{p}_m \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_J \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_e} \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_m} \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_e} \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_m} \end{bmatrix}}_{\nabla_x \mathcal{H}(x)} - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix}}_R \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_e} \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_m} \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_e} \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_m} \end{bmatrix}}_{\nabla_x \mathcal{H}(x)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_F \\ (F_C + F_g) \end{bmatrix}}_Q \quad (107)$$

Recordamos que el modelo PHS se completa con la expresión del Hamiltoniano dada en (97), de manera que el modelo completo es:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{q}_e \\ \dot{q}_m \\ \dot{p}_e \\ \dot{p}_m \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_J \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_e} \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_m} \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_e} \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_m} \end{bmatrix}}_{\nabla_x \mathcal{H}(x)} - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix}}_R \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_e} \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_m} \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_e} \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_m} \end{bmatrix}}_{\nabla_x \mathcal{H}(x)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_F \\ (F_C + F_g) \end{bmatrix}}_Q \\ \mathcal{H} = \frac{1}{2L(q_m)} p_e^2 + \frac{1}{2m} p_m^2 + \frac{1}{2} k (q_m - x_d)^2 \end{array} \right. \quad (108)$$

Con lo anterior concluye la formulación del modelo pero, a modo de ejercicio, podemos evaluar explícitamente el gradiente de  $\mathcal{H}$  y reemplazarlo en las ecuaciones de Hamilton para obtener las ecuaciones de estado clásicas del sistema. En efecto, el gradiente resulta

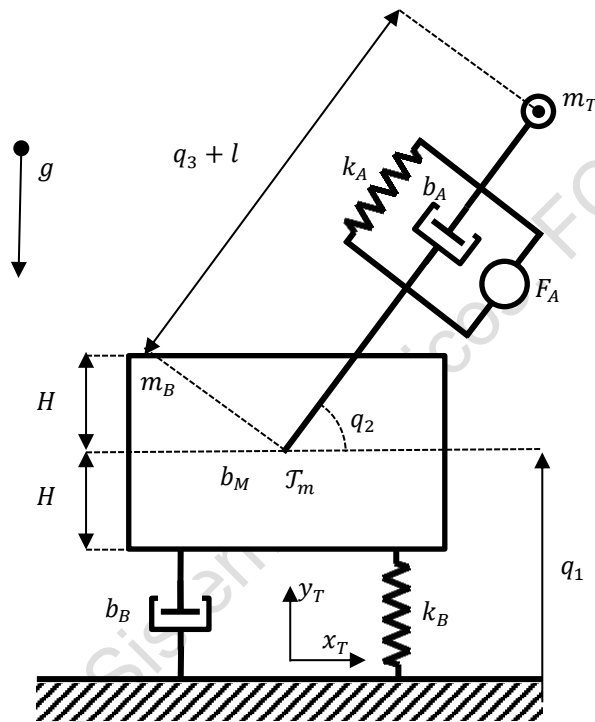
$$\nabla_x \mathcal{H}(x) := \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_e} \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_m} \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_e} \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{p_e^2}{2L^2(q_m)} L'(q_m) + k(q_m - x_d) \\ \frac{1}{L(q_m)} p_e \\ \frac{1}{m} p_m \end{bmatrix} \quad (109)$$

que, reemplazado en (106), produce:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{q}_e = \frac{1}{L(q_m)} p_e \\ \dot{q}_m = \frac{1}{m} p_m \\ \dot{p}_e = -\frac{R}{L(q_m)} p_e + u_F \\ \dot{p}_m = \frac{p_e^2}{2L^2(q_m)} L'(q_m) - k(q_m - x_d) - \frac{b}{m} p_m + (F_C + F_g) \end{array} \right. \quad (110)$$

## Modelado de un Manipulador Robótico simple con las Ecuaciones de Euler-Lagrange y las Ecuaciones de Hamilton<sup>18</sup>

Se considera un manipulador robótico montado sobre una base flexible, cuyo modelo físico idealizado se muestra en la Figura 15. El manipulador consiste en un brazo robótico con un extremo fijo a la base y una herramienta en el otro. Se considera que la base tiene un montaje elástico sobre el piso y un movimiento vertical como único grado de libertad. El brazo tiene dos movimientos, *ambos actuados o accionados*. Uno, telescópico, accionado por un motor lineal que provee una fuerza  $F_A$ ; otro, de rotación en torno al punto de su acople a la base, accionado por un motor rotacional que provee una cupla motriz  $\tau_m$ .



**Figura 15:** Actuador robótico montado sobre una base flexible (Renton *et al.*, 2012).

Nos proponemos realizar un estudio de este manipulador con métodos energéticos, aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange primero y luego el formalismo PHS. Veremos oportunamente que es posible llevar el modelo E-L a una forma matricial compacta que resulta de gran utilidad para un tratamiento teórico-matemático generalizado de los manipuladores robóticos.

### Ejemplo 11: Modelado Euler-Lagrange del Manipulador Robótico.

Comenzamos nuestro estudio con la definición de las coordenadas generalizadas y sus velocidades asociadas.

#### Coordenadas generalizadas:

$q_1$ : Desplazamiento vertical de la base.

$q_2$ : Ángulo de rotación del brazo.

$q_3$ : Deformación (elongación) del resorte del brazo.

<sup>18</sup> Renton, C., Ren Teo Y. and Pérez T. Total Energy Shaping of a Class of Underactuated Port-Hamiltonian Systems using a New Set of Closed-Loop Potential Shape Variables. 51st IEEE Conference on Decision and Control. 2012. P. 4603 - 4609

### **Velocidades generalizadas:**

$\dot{q}_1$ : Velocidad vertical de la base.

$\dot{q}_2$ : Velocidad angular del brazo.

$\dot{q}_3$ : Velocidad de extensión del brazo.

$$q_1 = H + \underbrace{D_B}_{\substack{\text{long. resorte} \\ \text{sin deformación}}} + \underbrace{\delta_B}_{\substack{\text{elongación} \\ \text{resorte}}}$$

Nótese que la fuerza  $F_A$  provista por el actuador telescópico actúa tanto sobre la mano-herramienta de masa  $m_T$  como sobre la base a través de su extremo inferior. O sea que debido a esta doble acción de  $F_A$ , si bien hay dos entradas de control,  $F_A$  y  $\tau_m$ , estas se manifiestan en las tres coordenadas de movimiento: En el primer caso,  $F_A$  **provee** una potencia  $F_A \dot{q}_3$  favorable al movimiento según la coordenada  $q_3$  **al mismo tiempo que quita** una potencia  $F_A \sin(q_2) \dot{q}_1$  al movimiento según la coordenada  $q_1$ . Por su parte,  $\tau_m$  **suministra** potencia  $\tau_m \dot{q}_2$  al movimiento rotacional según la coordenada  $q_2$ .

### **Ecuaciones energéticas**

La co-energía cinética total del sistema está dada por la siguiente expresión conocida:

$$T^* = \frac{1}{2} m_B \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_T v_x^2 + \frac{1}{2} m_T v_y^2 = \frac{1}{2} m_B \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_T (v_x^2 + v_y^2) \quad (111)$$

donde  $v_x$  y  $v_y$  son las velocidades horizontal y vertical de la herramienta.

Es necesario para nuestro estudio que la co-energía cinética esté en función de las VG (y, eventualmente, de las CGM) definidas anteriormente. Para ello, buscaremos expresar  $v_x$  y  $v_y$  en función de lo que corresponda de entre  $\dot{q}_1$ ,  $\dot{q}_2$ ,  $\dot{q}_3$  y/o  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$ .

Por la geometría del problema, son inmediatas las siguientes relaciones:

$$x_T = (q_3 + l) \cos(q_2) \quad (112)$$

$$y_T = q_1 + (q_3 + l) \sin(q_2) \quad (113)$$

Donde  $l$  es la longitud del brazo retraído, es decir, con  $q_3 = 0$  (resorte brazo desenergizado). Y  $x_T$  es el desplazamiento horizontal de la herramienta respecto del punto de unión del brazo con la base (se supone que la base no se desplaza horizontalmente) e  $y_T$  es el desplazamiento vertical total de la herramienta respecto del piso (ver sistema de referencia  $(x,y)$  en la Figura 15).

Las ecuaciones (112) y (113) pueden derivarse m. a. m. respecto del tiempo para obtener las expresiones buscadas de  $v_x$  y  $v_y$  en función de las VG y las CGM pertinentes.

$$v_x = \dot{q}_3 \cos(q_2) - (q_3 + l) \sin(q_2) \dot{q}_2 \quad (114)$$

$$v_y = \dot{q}_1 + \dot{q}_3 \sin(q_2) + (q_3 + l) \cos(q_2) \dot{q}_2 \quad (115)$$

Antes de proceder a reemplazar (114) y (115) en (111), es útil como paso intermedio calcular  $v_x^2$ ,  $v_y^2$  y  $v_x^2 + v_y^2$ :

$$\begin{aligned}
 v_x^2 &= \overbrace{\dot{q}_3^2 \cos^2(q_2)}^{(*)} - \overbrace{2 \dot{q}_3 \dot{q}_2 (q_3 + l) \cos(q_2) \sin(q_2)}^{(**)} + \overbrace{(q_3 + l)^2 \sin^2(q_2) \dot{q}_2^2}^{(***)} \\
 v_y^2 &= \overbrace{\dot{q}_1^2}^{(*)} + \overbrace{\dot{q}_3^2 \sin^2(q_2)}^{(*)} + \overbrace{(q_3 + l)^2 \cos^2(q_2) \dot{q}_2^2}^{(***)} + \overbrace{2 \dot{q}_1 \dot{q}_3 \sin(q_2)}^{(*)} \\
 &\quad + \overbrace{2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 (q_3 + l) \cos(q_2)}^{(*)} + \overbrace{2 \dot{q}_3 \dot{q}_2 (q_3 + l) \cos(q_2) \sin(q_2)}^{(**)} \\
 (v_x^2 + v_y^2) &= \overbrace{\dot{q}_1^2}^{(*)} + \overbrace{\dot{q}_3^2 (\sin^2(q_2) + \cos^2(q_2))}^{1} + \overbrace{\dot{q}_2^2 (q_3 + l)^2 (\sin^2(q_2) + \cos^2(q_2))}^{1} \\
 &\quad + \overbrace{2 \dot{q}_1 (\dot{q}_3 \sin(q_2) + \dot{q}_2 (q_3 + l) \cos(q_2))}^{(*)}
 \end{aligned} \tag{116}$$

Ahora, (116) puede reemplazarse en (111) para obtener **la expresión de la co-energía cinética, que resulta función no sólo de las velocidades sino también de las coordenadas generalizadas**.

$$\begin{aligned}
 T^* &= \frac{1}{2} (m_B + m_T) \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_T \dot{q}_3^2 + \frac{1}{2} m_T (q_3 + l)^2 \dot{q}_2^2 + m_T \dot{q}_1 [\dot{q}_3 \sin(q_2) \\
 &\quad + \dot{q}_2 (q_3 + l) \cos(q_2)]
 \end{aligned} \tag{117}$$

Por su parte, la energía potencial está dada por:

$$V = \frac{1}{2} k_B (\underbrace{q_1 - H - D_B}_{\delta_B})^2 + \frac{1}{2} k_A q_3^2 + V_{grav} \tag{118}$$

donde  $V_{grav}$  es la energía potencial gravitatoria que, a su vez, está dada por:

$$V_{grav} = m_B g q_1 + m_T g [q_1 + (q_3 + l) \sin(q_2)] \tag{119}$$

Obsérvese que la gravedad no se incorpora al modelo como fuerza externa sino a través de la energía potencial.

### Ecuaciones de Euler-Lagrange

Ahora que tenemos las expresiones de la co-energía cinética y la energía potencial en función de las variables generalizadas, podemos calcular el Lagrangiano y usarlo para escribir las ecuaciones de Euler-Lagrange.

El Lagrangiano está dado por:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} = T^* - V &= \frac{1}{2} (m_B + m_T) \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_T \dot{q}_3^2 + \frac{1}{2} m_T (q_3 + l)^2 \dot{q}_2^2 \\
 &\quad + m_T \dot{q}_1 [\dot{q}_3 \sin(q_2) + \dot{q}_2 (q_3 + l) \cos(q_2)] \\
 &\quad - \left[ \frac{1}{2} k_B (q_1 - H - D_B)^2 + \frac{1}{2} k_A q_3^2 + m_B g q_1 + m_T g [q_1 + (q_3 + l) \sin(q_2)] \right]
 \end{aligned} \tag{120}$$

La ecuación de Euler-Lagrange asociada con la coordenada generalizada  $q_1$  está dada por (nótese la acción ya mencionada de la fuerza  $F_A$  sobre esta coordenada):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = -b_B \dot{q}_1 - F_A \sin(q_2) \quad (121)$$

$$(m_B + m_T) \ddot{q}_1 + m_T \frac{d}{dt} [\dot{q}_3 \sin(q_2) + \dot{q}_2 (q_3 + l) \cos(q_2)] - \{ -[k_B q_1 + (m_B + m_T)g] \} \\ = -b_B \dot{q}_1 - F_A \sin q_2$$

$$(m_B + m_T) \ddot{q}_1 + m_T \{ \ddot{q}_3 \sin(q_2) + \dot{q}_3 \cos(q_2) \dot{q}_2 \\ + \ddot{q}_2 (q_3 + l) \cos(q_2) + \dot{q}_2 [\dot{q}_3 \cos(q_2) - (q_3 + l) \sin(q_2) \dot{q}_2] \} + k_B q_1 \\ + (m_B + m_T)g = -b_B \dot{q}_1 - F_A \sin(q_2)$$

$$\Rightarrow (m_B + m_T) \ddot{q}_1 + b_B \dot{q}_1 + k_B q_1 + (m_B + m_T)g + m_T [\ddot{q}_2 (q_3 + l) \cos(q_2) + \dot{q}_3 \sin(q_2) \\ + 2 \dot{q}_2 \dot{q}_3 \cos(q_2) - \dot{q}_2^2 (q_3 + l) \sin(q_2)] + F_A \sin(q_2) = 0 \quad (122)$$

Por su parte, la ecuación de Euler-Lagrange asociada con la coordenada generalizada  $q_2$  está dada por:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} = \tau_m - b_M \dot{q}_2 \quad (123)$$

$$m_T \frac{d}{dt} [(q_3 + l)^2 \dot{q}_2] + m_T \frac{d}{dt} [\dot{q}_1 (q_3 + l) \cos(q_2)] \\ - m_T \dot{q}_1 \{ \dot{q}_3 \cos(q_2) - \dot{q}_2 (q_3 + l) \sin(q_2) - m_T g (q_3 + l) \cos(q_2) \} \\ = \tau_m - b_M \dot{q}_2$$

$$m_T [2(q_3 + l) \dot{q}_2 \dot{q}_3 + (q_3 + l)^2 \ddot{q}_2] \\ + m_T \{ \ddot{q}_1 (q_3 + l) \cos(q_2) + \dot{q}_1 [\dot{q}_3 \cos(q_2) - (q_3 + l) \sin(q_2) \dot{q}_2] \} \\ - m_T \dot{q}_1 \{ \dot{q}_3 \cos(q_2) - \dot{q}_2 (q_3 + l) \sin(q_2) - m_T g (q_3 + l) \cos(q_2) \} + b_M \dot{q}_2 \\ = \tau_m$$

$$m_T (q_3 + l)^2 \ddot{q}_2 + m_T \ddot{q}_1 (q_3 + l) \cos(q_2) + 2 m_T (q_3 + l) \dot{q}_2 \dot{q}_3 + m_T g (q_3 + l) \cos(q_2) + b_M \dot{q}_2 = \tau_m \quad (124)$$

Por último, la ecuación de Euler-Lagrange asociada con la coordenada generalizada  $q_3$  está dada por:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_3} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_3} = F_A - b_A \dot{q}_3 \quad (125)$$

$$m_T \ddot{q}_3 + m_T \frac{d}{dt} [\dot{q}_1 \sin(q_2)] - \{ m_T (q_3 + l) \dot{q}_2^2 + m_T \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos(q_2) - k_A q_3 - m_T g \sin(q_2) \} \\ = F_A - b_A \dot{q}_3$$

$$m_T \ddot{q}_3 + m_T \ddot{q}_1 \sin(q_2) + m_T \dot{q}_1 \cos(q_2) \dot{q}_2 - m_T (q_3 + l) \dot{q}_2^2 - m_T \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos(q_2) + k_A q_3 \\ + m_T g \sin(q_2) + b_A \dot{q}_3 = F_A$$

$$m_T \ddot{q}_3 + m_T \ddot{q}_1 \sin(q_2) - m_T (q_3 + l) \dot{q}_2^2 + k_A q_3 + m_T g \sin(q_2) + b_A \dot{q}_3 = F_A \quad (126)$$



Las ecuaciones (122), (128) y (126) pueden reescribirse en una forma matricial compacta, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{R} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) &= \mathbf{P}(\mathbf{q}) \mathbf{u}, \\ \mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{R} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) &= \mathbf{P}(\mathbf{q}) \mathbf{u}, \end{aligned} \quad (127)$$

donde:

$$\mathbf{u} = [\tau_M \quad F_A]^T$$

$$\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2 \quad q_3]^T, \quad \dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1 \quad \dot{q}_2 \quad \dot{q}_3]^T, \quad \ddot{\mathbf{q}} = [\ddot{q}_1 \quad \ddot{q}_2 \quad \ddot{q}_3]^T \text{ y}$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} (m_B + m_T) & m_T(q_3 + l)\cos(q_2) & m_T\sin(q_2) \\ m_T(q_3 + l)\cos(q_2) & m_T(q_3 + l)^2 & 0 \\ m_T\sin(q_2) & 0 & m_T \end{bmatrix} \quad (128)$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} b_B & 0 & 0 \\ 0 & b_M & 0 \\ 0 & 0 & b_A \end{bmatrix} \quad (129)$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} 0 & m_T\cos(q_2)\dot{q}_3 - m_T(q_3 + l)\sin(q_2)\dot{q}_2 & m_T\cos(q_2)\dot{q}_2 \\ 0 & m_T(q_3 + l)\dot{q}_3 & m_T(q_3 + l)\dot{q}_2 \\ 0 & -m_T(q_3 + l)\dot{q}_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (130)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} k_B q_1 + g(m_B + m_T) \\ m_T g(q_3 + l)\cos(q_2) \\ k_A q_3 + m_T g\sin(q_2) \end{bmatrix} \quad (131)$$

$\mathbf{M}(\mathbf{q})$  es una matriz (cuadrada) simétrica definida positiva llamada *matriz de inercia* (o de masa algunas veces). Estas propiedades hacen que

- exista su inversa  $\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q})$  para todo  $\mathbf{q}$ ,
- y que transponerlas no cambie nada, es decir:  $\mathbf{M}^T(\mathbf{q}) = \mathbf{M}(\mathbf{q})$  y  $\{\mathbf{M}^{-1}\}^T(\mathbf{q}) = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q})$ .

$\mathbf{R}$  es una matriz *semidefinida positiva* llamada *matriz de disipación*.

$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  es una matriz cuyos elementos multiplicados por el vector  $\dot{\mathbf{q}}$  dan lugar a dos clases de términos: unos, cuadráticos en las velocidades, llamados *Centrífugos*; otros, proporcionales al producto de CGs y VGs, llamados *de Coriolis*.

$\mathbf{g}(\mathbf{q})$  es un vector que – en su definición más corriente – contiene las fuerzas de origen gravitatorio, habiéndose aquí incluido también las derivadas de las energías potenciales de naturaleza elástica.

$\mathbf{P}(\mathbf{q})$  es una matriz que expresa las proyecciones de las fuerzas generalizadas externas, reunidas en el vector  $\mathbf{u}$ , sobre cada una de las coordenadas:

$$\mathbf{P}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 & -\sin(q_2) \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (132)$$

La ecuación (127) puede generalizarse de la siguiente manera, donde  $\mathbf{Q} = \mathbf{P}(\mathbf{q})\mathbf{u}$  es el vector que colecta las fuerzas generalizadas externas actuando en cada una de las CGM:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{R} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{Q} \quad (133)$$

Esta última ecuación es una expresión que cubre prácticamente todos los modelos EL para diferentes tipos de robots de  $n$  grados de libertad, con las definiciones adecuadas de los vectores  $n$ -dimensionales  $\mathbf{q}$  y  $\dot{\mathbf{q}}$ .<sup>19</sup>

#### **Ejemplo 12: Modelado pHS del Manipulador Robótico.**

Para este enfoque necesitamos al Hamiltoniano  $\mathcal{H}$ , es decir la energía total almacenada en el sistema escrita en términos de  $\mathbf{q}$  y  $\mathbf{p}$ .

Tanto la energía como la co-energía cinética total pueden escribirse de manera compacta en términos de la matriz de inercia  $\mathbf{M}(\mathbf{q})$  y de las variables  $\mathbf{p}$  o  $\dot{\mathbf{q}}$ , según corresponda, de la siguiente manera:

*Co-energía cinética:*

$$T^*(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (134)$$

Haciendo los cálculos indicados en esta expresión se obtiene el resultado detallado en (117)

*Energía cinética:*

Utilizando primero la definición (76) del vector impulso o momento generalizado  $\mathbf{p}$ , luego la del Lagrangiano y *finalmente* la ecuación (134), se obtiene:

$$\mathbf{p} := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} [T^*(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - V(\mathbf{q})] = \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} T^*(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \left[ \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right] = \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (135)$$

Como  $\mathbf{M}$  es invertible vale:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{p} \quad (136)$$

En términos de  $\mathbf{p}$  la energía cinética se expresa como:

$$T(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{p} \quad (137)$$

Utilizando las propiedades de  $\mathbf{M}$  se puede verificar fácilmente la igualdad de (134) y (137).

Nótese la analogía de las expresiones (134)–(137) con las expresiones conocidas para la interrelación de las variables escalares  $V := \dot{q}$  y  $p$ , y las funciones de estado energía y co-energía cinética en el caso de un punto material de masa  $m$  en movimiento unidimensional rectilíneo.

Volvamos ahora al *modelado Hamiltoniano del manipulador robótico*. El modelo PHS es simplemente el dado en las expresiones (95) con las particularizaciones pertinentes:

<sup>19</sup> Por las definiciones anteriores y detalles sobre este modelo genérico en robótica el lector interesado puede consultar el capítulo 9 (Dynamics) del libro “Spong, M. and M. Vidyasagar. Robot Dynamics and Control, 2nd. Edition. Wiley, 1989.”

$$\left\{ \begin{aligned} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}}_J \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}} \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}} \end{bmatrix}}_{\nabla_x \mathcal{H}(\mathbf{x})} - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R(\mathbf{p}) \end{bmatrix}}_R \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}} \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}} \end{bmatrix}}_{\nabla_x \mathcal{H}(\mathbf{x})} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -\sin(q_2) \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\substack{G(\mathbf{x}) \\ \begin{bmatrix} 0_n \\ \mathbf{q} \end{bmatrix}}} \begin{bmatrix} \tau_M \\ F_A \end{bmatrix} \end{aligned} \right. \quad (138)$$

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = T(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + V(\mathbf{q})$$

con

$$\begin{aligned} - \mathbf{q} &= [q_1 \quad q_2 \quad q_3]^T \quad \text{y} \quad \mathbf{p} = \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}, \text{ donde } \mathbf{M}(\mathbf{q}) \text{ está definida en (128) y} \\ - \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) &= \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{p} + \left\{ \frac{1}{2} k_B (\underbrace{q_1 - H - D_B}_{\delta_B})^2 + \frac{1}{2} k_A q_3^2 + m_B g q_1 + m_T g [q_1 + (q_3 + \right. \\ &\quad \left. l) \sin(q_2)] \right\} \end{aligned} \quad (139)$$

de acuerdo a (137) y (118)-(119) para la energías cinética y potencial, respectivamente.

$$- \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & | & -F_A \sin(q_2) & \tau_M & F_A \end{bmatrix}^T$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\mathbf{q}^T} \underbrace{\hspace{2em}}_{\mathbf{u}^T}$$

$$- R(\mathbf{p}) \text{ tal que satisface (93): } \frac{\partial \mathcal{D}(\dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = R(\mathbf{p}) \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}}$$

Lo único que falta entonces para definir completamente el modelo PHS es calcular la matriz de disipación  $R(\mathbf{p})$ . Para ello, determinamos primero la función de disipación de Rayleigh  $\mathcal{D}(\dot{\mathbf{q}})$ , así como los dos gradientes que aparecen en (93):

$$\mathcal{D}(\dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} b_B \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} b_M \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} b_A \dot{q}_3^2 = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}} \quad (140)$$

donde se ha definido la matriz de coeficientes de fricción

$$\mathbf{D} := \text{diag}(b_B, b_M, b_A) \quad (141)$$

El gradiente de esta matriz es  $\frac{\partial \mathcal{D}(\dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}}$ , mientras que el gradiente del Hamiltoniano respecto a los momentos vale  $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{p} = \dot{\mathbf{q}}$  (no es otra cosa que el vector de VGs!), con lo que (93) se puede reescribir como  $\mathbf{D} \dot{\mathbf{q}} = R(\mathbf{p}) \dot{\mathbf{q}}$ , de donde sale que la matriz de disipación buscada no es otra que la matriz constante diagonal de los coeficientes de fricción introducida en (141):

-  $R(\mathbf{p}) = \mathbf{D}$ . O sea que, en relación con (95), se tiene

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R(\mathbf{p}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{D} \end{bmatrix} \quad (142)$$

## Pasividad de los modelos PHS.

Los sistemas pasivos constituyen una clase importante de sistemas dinámicos. Un sistema se dice pasivo si la energía almacenada en él en todo intervalo arbitrario de tiempo es menor o igual a la energía que le fue provista desde el medio. La diferencia que pudiera haber entre ambas es la energía disipada por el sistema. En términos de potencia la definición anterior equivale a decir que la tasa a la cual el sistema almacena energía (o potencia instantánea que ingresa a los almacenadores) es menor o igual a la tasa a la que recibe energía del medio (o potencia instantánea recibida).

Evidentemente las definiciones anteriores ponen en juego a las variables de estado, ya que involucran a la energía almacenada en el sistema. También es evidente que, al involucrar a la potencia recibida del medio, ponen en juego a las variables de entrada. Pero como estas son insuficientes para el cálculo o determinación de la potencia, también deben poner en juego a un conjunto de variables dependientes del sistema (o sea, a un grupo de variables de salida) que permitan expresar a la potencia junto con las entradas. Entonces, para formalizar las definiciones sobre un modelo matemático, utilizaremos uno que incluya tanto a las ecuaciones de estado como a las de salida, variables estas últimas que en este caso se denominan “co-locadas” con las entradas (cada salida tiene grado relativo 1 respecto a su entrada co-locada). El siguiente modelo, donde  $y$  es el conjunto de variables de salida, permite analizar fácilmente la pasividad de modelos PHS:

$$\begin{cases} \dot{x} = J(x, u) \frac{\partial \mathcal{H}(x)}{\partial x} - R(x, u) \frac{\partial \mathcal{H}(x)}{\partial x} + g(x) u \\ y = g^T(x) \frac{\partial \mathcal{H}(x)}{\partial x} \end{cases} \quad (143)$$

En el modelo anterior hay  $n$  variables de estado,  $m$  de entrada y  $m$  de salida (de los sistemas con la misma cantidad de entradas y salidas suele decirse que son cuadrados). Las matrices  $J$  y  $R$  son cuadradas  $n \times n$  (ver “Propiedades de las matrices  $J$  y  $R$  del modelo PHS”) y  $g(x)$  es una matriz  $g = [g_{ik}(x)]$  cuyos elementos  $g_{ik}$  ( $i, k = 1, 2, \dots, m$ ) pueden ser funciones del estado y/o constantes. Las variables de salida están elegidas de tal modo que la potencia suministrada por el medio al sistema pueda escribirse como:

$$\wp(t) = y^T u \quad (144)$$

### Ejemplo 13 (circuito RLC serie, cont.):

La corriente por la fuente de tensión es la variable de salida que permite expresar a la potencia entregada al sistema por la fuente como  $\wp(t) = I_L U$ . Teniendo en cuenta que la corriente se puede escribir en función del gradiente del Hamiltoniano como  $I_L = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi}$ , el modelo PHS completo {EE, ES} resulta:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_J \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi} \end{bmatrix}}_{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}} - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -R \end{bmatrix}}_R \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi} \end{bmatrix}}_{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_G U \\ y := I_L = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{G^T} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} & \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi} \end{bmatrix}^T}_{\frac{\partial \mathcal{H}^T}{\partial x}} \end{cases} \quad (145)$$

### La Desigualdad de Disipatividad y la Pasividad.

- Un sistema es **CICLO-PASIVO** si en cualquier intervalo de tiempo arbitrario  $[t_0, t_1]$  se satisface la siguiente desigualdad de disipatividad<sup>20</sup>:

$$\mathcal{H}(x(t_1)) \leq \mathcal{H}(x(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} y^T(t) u(t) dt \quad (146)$$

En la interpretación general de (146),  $\mathcal{H}$  se denomina *función de almacenamiento* ("storage function") y el integrando *tasa de alimentación* ("supply rate"). En el contexto de los sistemas físicos,  $\mathcal{H}$  es la energía almacenada, es decir el *Hamiltoniano*, y el integrando es la *potencia instantánea suministrada al sistema*.

- Si **ADEMÁS** la función de almacenamiento está acotada por debajo, es decir, si

$$\mathcal{H}(x) \geq 0 \quad (\text{aunque puede ser una constante negativa})$$

el sistema se dice **PASIVO**.

### Pasividad del modelo pHS.

La desigualdad de disipatividad no es otra cosa que la definición cualitativa de pasividad que se dio al principio de esta sección. Derivando miembro a miembro (146) respecto del tiempo se tiene la versión de disipatividad en términos de potencia:

$$\frac{d\mathcal{H}(x(t))}{dt} =: \dot{\mathcal{H}}(t) \leq y^T(t) u(t) \quad (147)$$

Evaluando la derivada orbital  $\frac{d\mathcal{H}(x(t))}{dt}$  es muy fácil probar que esto se cumple para el sistema PHS (143):

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{H}(x(t))}{dt} &= \left( \frac{\partial \mathcal{H}(x)}{\partial x} \right)^T \frac{dx}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}(x)}{\partial x}^T \left[ J(x, u) \frac{\partial \mathcal{H}(x)}{\partial x} - R(x, u) \frac{\partial \mathcal{H}(x)}{\partial x} + g(x) u \right] \\ \dot{\mathcal{H}}(t) &= \underbrace{\frac{\partial \mathcal{H}(x)}{\partial x}^T J(x, u) \frac{\partial \mathcal{H}(x)}{\partial x}}_{\equiv 0 \text{ (ver propiedad de } J)} - \underbrace{\frac{\partial \mathcal{H}(x)}{\partial x}^T R(x, u) \frac{\partial \mathcal{H}(x)}{\partial x}}_{\geq 0 \text{ (ver propiedad de } R)} + \frac{\partial \mathcal{H}(x)}{\partial x}^T g(x) u \\ \dot{\mathcal{H}}(t) &= - \underbrace{\frac{\partial \mathcal{H}(x)}{\partial x}^T R(x, u) \frac{\partial \mathcal{H}(x)}{\partial x}}_{\geq 0 \text{ (ver propiedad de } R)} + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{H}(x)}{\partial x}^T g(x) u}_{y^T \text{ (ver ecuación de salida)}} \end{aligned} \quad (148)$$

La ecuación anterior dice que la potencia almacenada en el sistema es igual a la potencia recibida de las fuentes menos la potencia disipada. Eliminando la potencia disipada de la ecuación se obtiene la desigualdad de disipatividad (147), que prueba la pasividad de los PHS bajo las hipótesis hechas.

<sup>20</sup> Willems, J. C. 1972. "Dissipative Dynamical Systems. Part I: General Theory". *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 45, Nº 5 (January), pp. 321-351.

$$\dot{\mathcal{H}}(t) \leq \mathbf{y}^T \mathbf{u} \quad (147)$$

Integrando respecto al tiempo la desigualdad anterior se obtiene la versión integral (146).

En el sencillo *Ejemplo 13*, la potencia disipada  $\frac{\partial \mathcal{H}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}^T R(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \frac{\partial \mathcal{H}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = R I_L^2$ , mientras que  $\mathbf{y}^T \mathbf{u} = I_L U$  y  $\dot{\mathcal{H}}(t)$  es la suma de las potencias entrantes al capacitor y al inductor.

**Ejemplo 14 (Manipulador robótico, cont.):**

Como hemos visto, el modelo PHS se puede escribir así:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}}_J \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}} \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}} \end{bmatrix}}_{\nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{H}(\mathbf{x})} - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{D} \end{bmatrix}}_R \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}} \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}} \end{bmatrix}}_{\nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{H}(\mathbf{x})} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -\text{sen}(q_2) \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{G(\mathbf{x})} \underbrace{\begin{bmatrix} \tau_M \\ F_A \end{bmatrix}}_{\mathbf{q}} \\ \\ \mathbf{y} := \begin{bmatrix} \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{sen}(q_2) & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{G^T} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}} \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}} \end{bmatrix}}_{\nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{H}(\mathbf{x})} \end{array} \right. \quad (149)$$

Con el Hamiltoniano  $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = T(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + V(\mathbf{q})$  especificado en (139):

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{p} + \left\{ \frac{1}{2} k_B (\underbrace{q_1 - H - D_B}_{\delta_B})^2 + \frac{1}{2} k_A q_3^2 + m_B g q_1 + m_T g [q_1 + (q_3 + l) \text{sen}(q_2)] \right\} \quad (139)$$

Y la matriz de disipación  $\mathbf{D}$  según (141),  $\mathbf{D} := \text{diag}(b_B, b_M, b_A)$ .

Haciendo las operaciones indicadas en (148) para este caso particular, se obtiene:

$$\dot{\mathcal{H}}(t) = - \underbrace{\left[ \frac{\partial \mathcal{H}^T}{\partial \mathbf{q}} \quad \frac{\partial \mathcal{H}^T}{\partial \mathbf{p}} \right]}_{\frac{\partial \mathcal{H}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{D} \end{bmatrix}}_R \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}} \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}} \end{bmatrix}}_{\nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{H}(\mathbf{x})} + \underbrace{\left[ \frac{\partial \mathcal{H}^T}{\partial \mathbf{q}} \quad \frac{\partial \mathcal{H}^T}{\partial \mathbf{p}} \right]}_{\frac{\partial \mathcal{H}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -\text{sen}(q_2) \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_G \underbrace{\begin{bmatrix} \tau_M \\ F_A \end{bmatrix}}_{\mathbf{q}} \quad (150)$$

$$\dot{\mathcal{H}}(t) = - \frac{\partial \mathcal{H}^T}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{D} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}} + \frac{\partial \mathcal{H}^T}{\partial \mathbf{p}} \begin{bmatrix} 0 & -\text{sen}(q_2) \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \tau_M \\ F_A \end{bmatrix}}_{\mathbf{q}} \quad (151)$$

De (136, 137), se tiene  $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{p} = \dot{\mathbf{q}}$ , igualdad que, junto con  $\mathbf{D} := \text{diag}(b_B, b_M, b_A)$ , arroja la siguiente **expresión cuadrática** (en este caso, una *función semidefinida positiva de los estados*) para la potencia disipada por el sistema (no es otra cosa que la suma de las potencias disipadas por fricción en las tres coordenadas):

$$\frac{\partial \mathcal{H}^T}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{D} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}} = b_B \dot{q}_1^2 + b_M \dot{q}_2^2 + b_A \dot{q}_3^2 \geq 0 \quad (152)$$

Evaluando el 2° término del 2° miembro de (155) se obtiene la potencia suministrada al sistema por las fuentes (por los accionamientos que proveen la cupla  $\tau_M$  y la fuerza  $F_A$ ):

$$\frac{\partial \mathcal{H}^T}{\partial \mathbf{p}} \begin{bmatrix} 0 & -\text{sen}(q_2) \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_M \\ F_A \end{bmatrix} = -\dot{q}_1 F_A \text{sen}(q_2) + \dot{q}_2 \tau_M + \dot{q}_3 F_A \quad (153)$$

Con lo que, finalmente, se arriba a:

$$\dot{\mathcal{H}}(t) = \underbrace{-(b_B \dot{q}_1^2 + b_M \dot{q}_2^2 + b_A \dot{q}_3^2)}_{\leq 0} + \underbrace{(-\dot{q}_1 F_A \text{sen}(q_2) + \dot{q}_2 \tau_M + \dot{q}_3 F_A)}_{\mathbf{y}^T \mathbf{q}} \quad (154)$$

De donde sale la expresión particular de (147) para este problema:

$$\dot{\mathcal{H}}(t) \leq -\dot{q}_1 F_A \text{sen}(q_2) + \dot{q}_2 \tau_M + \dot{q}_3 F_A \quad (155)$$