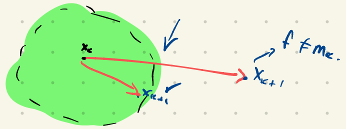
Regiones de Confianza

BL: $X_{k+1} = X_k + \underline{\alpha_k}\, \underline{\vec{P_k}}$.

RC: $X_{k+1} = X_k + P_k$

Ambos son generacción de paso en función del paso anterior.

X_k → genera un radio y confiamos en el modelo cuadrático en ese radio.



$\underline{\Delta_k}$ $\qquad m_k = f_k + \nabla f_k P_k + \frac{P_k^T \nabla^2 f_k P_k}{2}$.

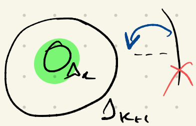
$\cancel{\alpha_k}$

Elegimos dirección y magnitud simultáneamente.

Si el paso no es aceptable achicamos Δ_k y volvemos a optimizar.

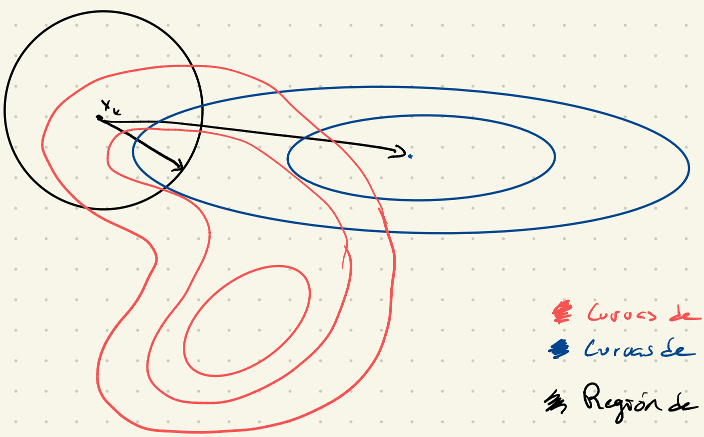
Δ_k es crítica para este Algoritmo.

- chica → no nos movemos
- grande → modelo no tan exacto



✓✓✓ $\Delta \Delta \Delta$

✓✓✗ $\Delta \Delta \Delta$



- Curvas de nivel de f
- Curvas de nivel de m_k
- Región de Confianza.

$$m_k(p) = f_k + g_k^T p + \frac{1}{2} p^T B_k p$$

$$\hookrightarrow f(x_k + p) = f_k + g_k^T p + \frac{1}{2} p^T \nabla^2 f(x_k + tp) p$$

$O(\|p\|^2)$. p, es pequeño m y f no difieren mucho

$\nabla^2 f_k$ $O(\|p\|^3)$

Si tomamos $B_k = \nabla^2 f_k \to$ Algoritmo de Región de Confianza de Newton

$B_k \neq \nabla^2 f_k \to$ Asumir lo menos posible.

Simétrica
Acotada unif.

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

$$\underset{p \in \mathbb{R}^n}{\operatorname{Argmin}}\ m_k(p) \quad \text{s.a.} \quad \|p\| \leq \Delta_k \qquad (1)$$

$\|\cdot\|_2$.

$m_k(p) = f_k^T + g_k^T p + \frac{1}{2} p^T B_k p$, $\Delta_k > 0$. → Radio de confianza

$\|P_k^*\| < \Delta_k$. $\qquad \|B_k^{-1} g_k\| \leq \Delta_k$

Si B_k es pos def y $\Rightarrow P_k^B = B_k^{-1} g_k$, paso Completo

---

$$\rho_k = \frac{f(x_k) - f(x_{k+1})}{m_k(0) - m_k(P_k)} \begin{array}{l} \to \text{Reducción Real} \\ \to \text{Reducción esperada} \end{array}$$

$x_k + P_k$

$\rho_k \approx 1$ modelo Bueno
Quizá expandir Δ_k

$\rho_k > 0$, $\rho_k \ll 1$ no alteramos la región.

$\rho_k < 0$ o $\rho_k \approx 0$ → Achicar Región de Confianza

Algoritmo: (Región de Conf.)

Dado $\tilde{\Delta} > 0$, $\Delta_0 \in (0, \tilde{\Delta})$, $\eta \in [0, 1/4)$

Obtenemos P_k resolviendo (1)
Evaluamos ρ_k
if $\rho_k < 1/4$
  $\Delta_{k+1} = 1/4\, \Delta_k$.
else if $\rho_k > 3/4$ y $\|P_k\| = \Delta_k$
  $\Delta_{k+1} = \min(2\Delta_k, \tilde{\Delta})$.
else
  $\Delta_{k+1} = \Delta_k$
if $\rho_k > \eta$
  $x_{k+1} = x_k + P_k$
else
  $x_{k+1} = x_k$.
fin.