INSTITUTO DE COMPUTAÇÃO

MATA50 – Linguagens Formais e Autômatos – 2023.1
Professor: Roberto Freitas Parente
Monitor: Fernando Franco de Lacerda Neto

Gabarito – Grupo 02

Exercício 1 (Entrega: 12/05/2023). *Construa expressões regulares para as seguintes linguagens com alfabeto* $\{a, b\}$*:*

1. *A linguagem cujas palavras* $w \in \Sigma^*$ *são da forma* $w = x\mathbf{abba}y$*, com* $x, y \in \Sigma^*$*.*

   Resposta. Uma expressão regular é : $(a + b)^* + abba + (a + b)^*$ □

2. *A linguagem em que todo **a** é precedido por **bb***

   Resposta. Uma expressão regular é : $(b + bba)^*$ □

3. *O conjunto das palavras de a's e b's cujo número de a's é divisível por 5.*

   Resposta. Uma expressão regular é : $(b + b^*ab^*ab^*ab^*ab^*ab^*)^*$ □

Exercício 2 (Entrega: 12/05/2023). *Utilizando os algoritmos visto em sala, faça o seguinte:*

1. *Transforme em expressão regular o AFD descrito pelo diagrama de transição da Figura 1*

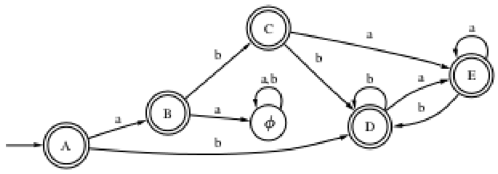
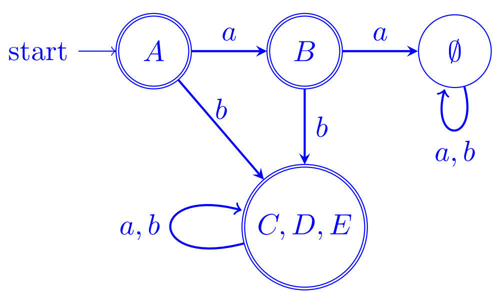


Figura 1: AFD do item (1)

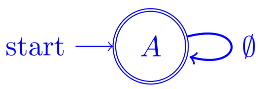
Resposta. Reduzindo o AFD temos

B	X	-	-	-	-
C	X	X	-	-	-
D	X	X		-	-
E	X	X			-
$\emptyset$	X	X	X	X	X
	A	B	C	D	E



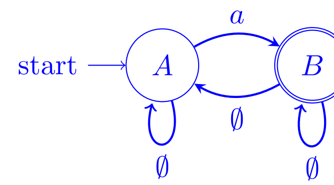
Temos 3 possiveis casos

(a) Considerando A como estado final.
Podemos eliminar os estado B, C, D, E e $\emptyset$ já que a partir deles não podem voltar para o A.



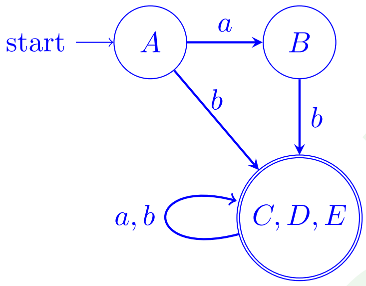
E a expressão regular é: $\emptyset^* = \varepsilon$

(b) Considerando B como estado final.
Podemos eliminar os estado C, D, E e $\emptyset$ já que a partir deles não podem voltar para o B.

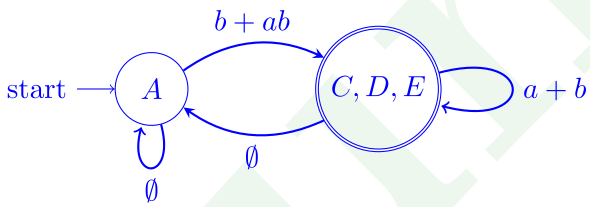


E a expressão regular é: $(\emptyset + a\emptyset^*\emptyset)^*a\emptyset^* = \emptyset^*a\varepsilon = \varepsilon a = a$

(c) Considerando C, D, E como estado final.
Podemos eliminar o estado $\emptyset$ já que a partir dele não pode voltar para o C, D, E.



Removendo o estado intermediário B temos:



E a expressão regular é: $(\emptyset + (b + ab)(a + b)^*\emptyset)^*(b + ab)(a + b)^* = (\emptyset + \emptyset)^*(b + ab)(a + b)^* = \varepsilon(b + ab)(a + b)^* = (b + ab)(a + b)^*$

Assim a expressão regular final do AFD é : $\varepsilon + a + (b + ab)(a + b)^*$

□

2. *Converta o AFND em AFD e posteriormente em expressão regular o AFND descrito pelo diagrama de transição da Figura 2*

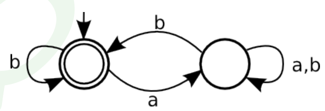
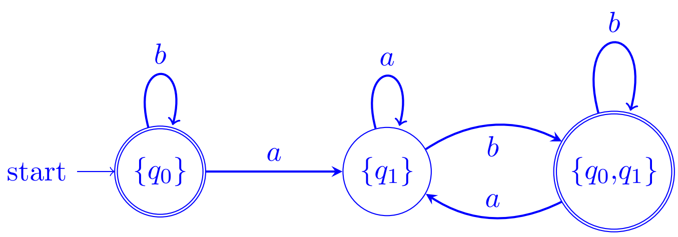


Figura 2: NFA do item (2)

Resposta. Criando a tabela para converter em AFD escrevendo apenas os estado alcançaveis

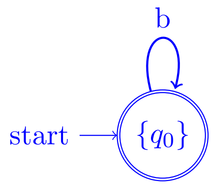
	a	b
$\rightarrow^*\{q_0\}$	$\{q_1\}$	$\{q_0\}$
$\{q_1\}$	$\{q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$
$^*\{q_0, q_1\}$	$\{q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$

Assim o AFD equivalente é:



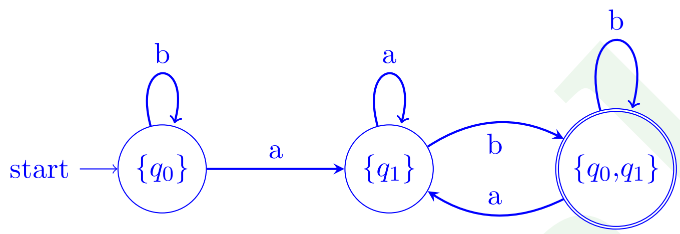
Temos 2 possiveis casos:

- Considerando $\{q_0\}$ como estado final. Podemos eliminar $\{q_1\}$ e $\{q_0,q_1\}$ já que a partir deles não podemos chegar em $\{q_0\}$

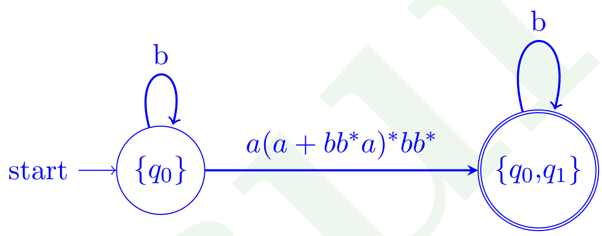


E a expressão regular é: b^*

- Considerando $\{q_0,q_1\}$ como estado final.



Removendo o estado intermediário $\{q_1\}$



Assim a expressão regular é: $b^*a(a+bb^*a)^*bb^*b^* = b^*a(a+bb^*a)^*bb^*$

E a expressão regular final é: $b^* + b^*a(a+bb^*a)^*bb^*$ $\square$

Exercício 3 (Entrega: 12/05/2023)**.** *Utilizando os algoritmos visto em sala, converta as seguintes expressões regulares em ε-AFND e posteriormente minimize o AFD equivalente:*

1. $a(ab+a)^*$

Resposta.

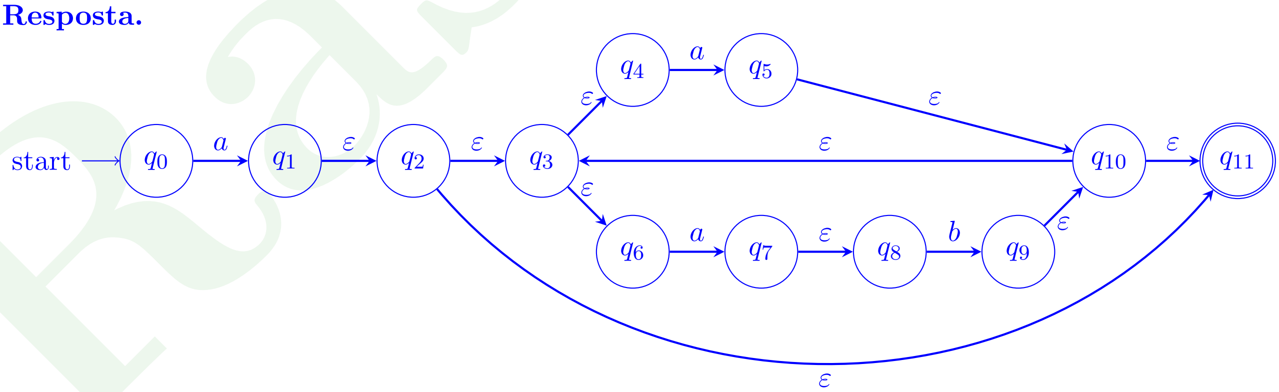


Tabela de conversão para os estados alcançáveis:

	a	b
$\rightarrow\{q_0\} = A$	$\{q_1, q_2, q_3, q_4, q_6, q_{11}\}$	$\emptyset$
$^*\{q_1, q_2, q_3, q_4, q_6, q_{11}\} = B$	$\{q_5, q_{10}, q_3, q_4, q_6, q_{11}, q_7, q_8\}$	$\emptyset$
$^*\{q_5, q_{10}, q_3, q_4, q_6, q_{11}, q_7, q_8\} = C$	$\{q_5, q_{10}, q_3, q_4, q_6, q_{11}, q_7, q_8\}$	$\{q_9, q_{10}, q_{11}, q_3, q_4, q_6\}$
$^*\{q_9, q_{10}, q_{11}, q_3, q_4, q_6\} = D$	$\{q_5, q_{10}, q_3, q_4, q_6, q_{11}, q_7, q_8\}$	$\emptyset$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

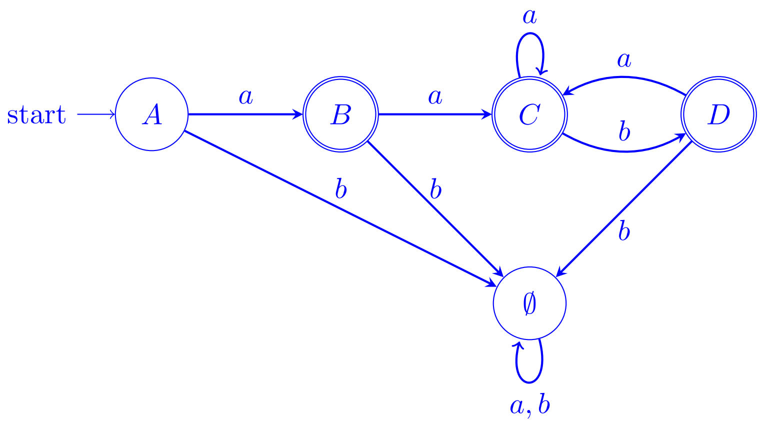
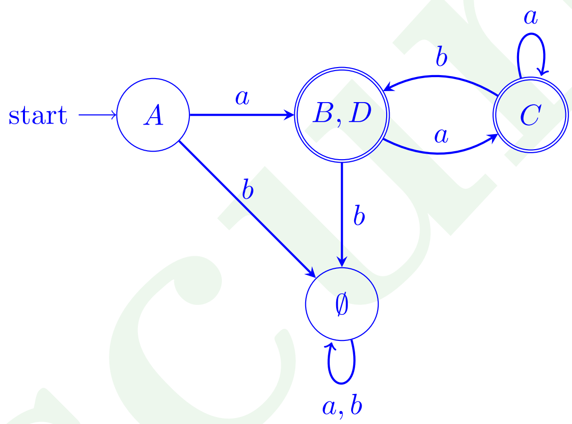


Tabela de minimização

B	X	-	-	-
C	X	X	-	-
D	X		X	-
∅	X	X	X	X
	A	B	C	D

AFD minimizado



□

2. $((a+b)^*)^*$

Resposta.

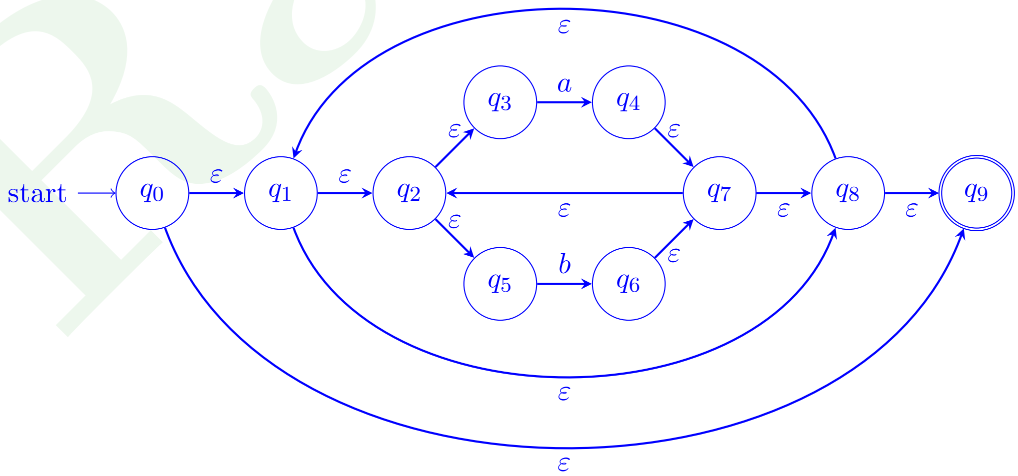


Tabela de conversão para os estados alcançáveis:

	a	b
$\rightarrow\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_5, q_8, q_9\} = A$	$\{q_4, q_7, q_2, q_3, q_5, q_8, q_1, q_9\}$	$\{q_6, q_7, q_2, q_3, q_5, q_8, q_1, q_9\}$
$^*\{q_4, q_7, q_2, q_3, q_5, q_8, q_1, q_9\} = B$	$\{q_4, q_7, q_2, q_3, q_5, q_8, q_1, q_9\}$	$\{q_6, q_7, q_2, q_3, q_5, q_8, q_1, q_9\}$
$^*\{q_6, q_7, q_2, q_3, q_5, q_8, q_1, q_9\} = C$	$\{q_4, q_7, q_2, q_3, q_5, q_8, q_1, q_9\}$	$\{q_6, q_7, q_2, q_3, q_5, q_8, q_1, q_9\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

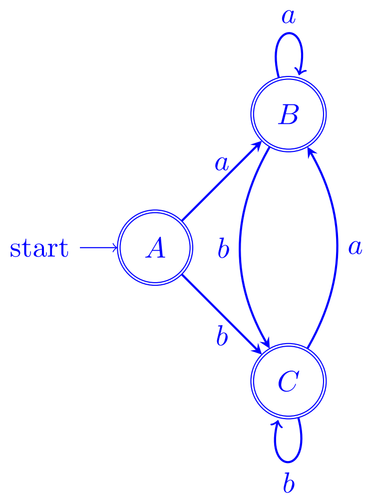
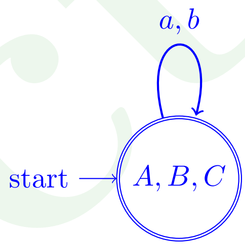


Tabela de minimização

B		-
C		
	A	B

AFD minimizado



□

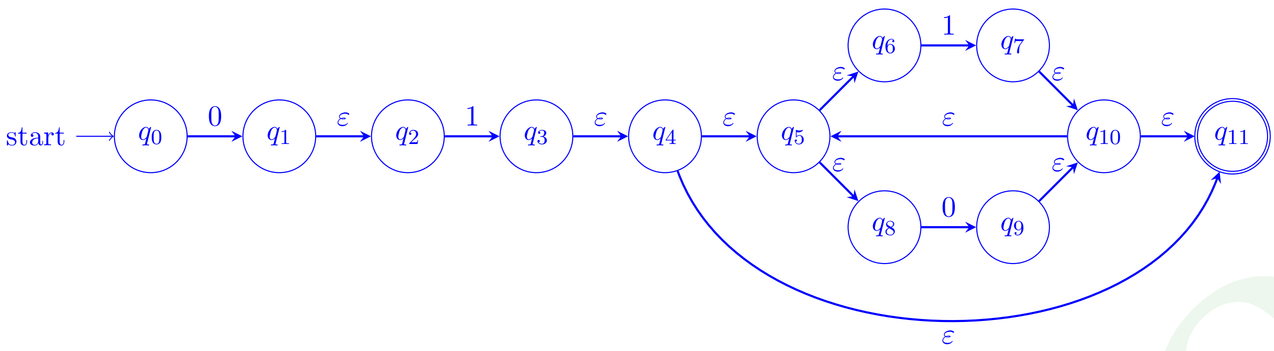
Exercício 4 (Entrega: 12/05/2023 – (2 pontos)). *Baseado nos algoritmos vistos em sala, descreva como poderíamos utilizá-los para dada uma expressão regular α, encontrarmos a expressão regular $\bar{\alpha}$ tal que $L(\bar{\alpha}) = \overline{L(\alpha)}$. Aplique sua descrição para a expressão regular $\alpha = 01(1+0)^*$.*

Resposta. Dada uma expressão α, os passos para criar $\bar{\alpha}$ baseado nos algoritmos visto em sala são:

1. Criar um ε-AFND A tal que $L(A) = L(\alpha)$.
2. Transformar ε-AFND N em AFD A' de forma que $L(A') = L(\alpha)$
3. Minimar A' gerando A'' temos que $L(A'') = L(\alpha)$ (opcional)
4. Gerar automato B que é o complementar de A'' (visto em sala) tal que $L(B) = L(A)$
5. Gerar expressão regular a partir de B.

Sendo $\alpha = 01(1+)^*$ e aplicando os passos acima temos:

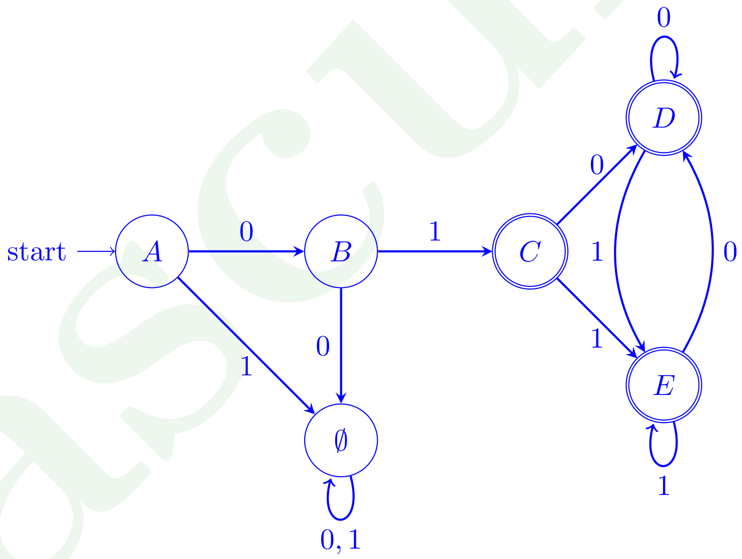
1. Criar um automato para α.



E $L(A) = L(\alpha)$

2. Transformar o automato em AFD.
Tabela de conversão para os estados alcançáveis de A em A':

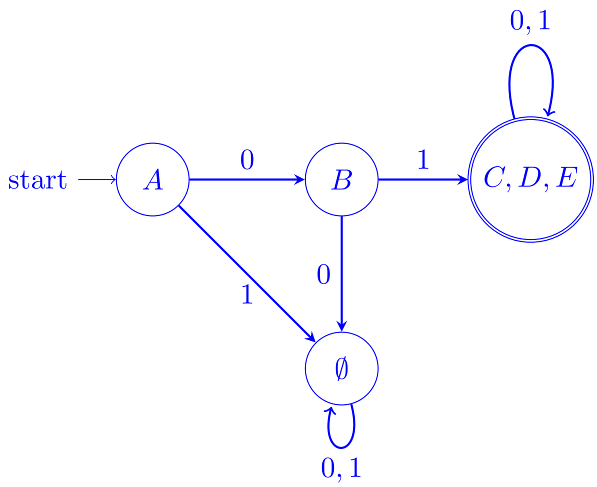
	0	1
$\rightarrow\{q_0\} = A$	$\{q_1, q_2\}$	$\emptyset$
$\{q_1, q_2\} = B$	$\emptyset$	$\{q_3, q_4, q_5, q_6, q_8, q_{11}\}$
$^*\{q_3, q_4, q_5, q_6, q_8, q_{11}\} = C$	$\{q_9, q_{10}, q_5, q_6, q_8, q_{11}\}$	$\{q_7, q_{10}, q_5, q_6, q_8, q_{11}\}$
$^*\{q_9, q_{10}, q_5, q_6, q_8, q_{11}\} = D$	$\{q_9, q_{10}, q_5, q_6, q_8, q_{11}\}$	$\{q_7, q_{10}, q_5, q_6, q_8, q_{11}\}$
$^*\{q_7, q_{10}, q_5, q_6, q_8, q_{11}\} = E$	$\{q_9, q_{10}, q_5, q_6, q_8, q_{11}\}$	$\{q_7, q_{10}, q_5, q_6, q_8, q_{11}\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$



Sendo $L(A) = L(A')$

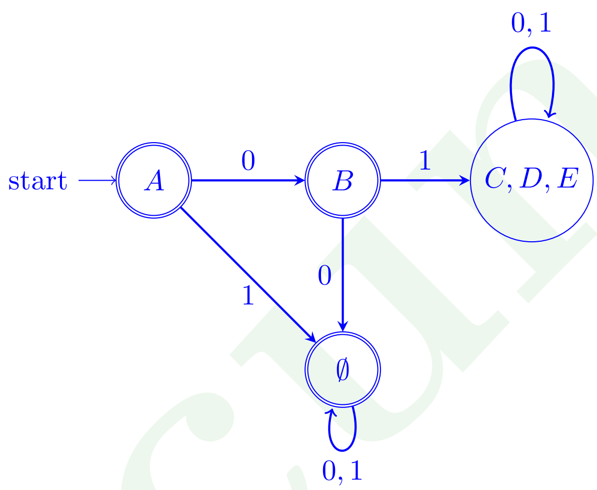
3. Minimizar o AFD obtido
Tabela de minimização de A' para A''

B	X	-	-	-	-
C	X	X	-	-	-
D	X	X		-	-
E	X	X			-
$\emptyset$	X	X	X	X	X
	A	B	C	D	E



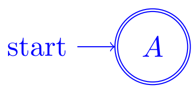
Sendo que $L(A') = L(A'')$

4. Transformar em um AFD que aceita a linguagem complementar do que já temos
   Transformando A'' em B

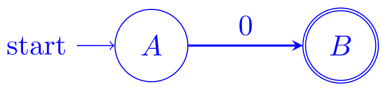


Sendo que $L(B) = \overline{L(A'')}$

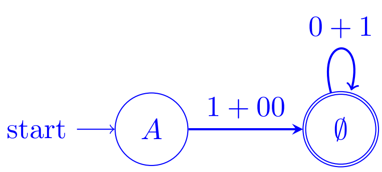
5. Transformar o AFD complemento em um expressão regular
   Para B temos 3 casos
   - Considerando A como o estado final, podemos eliminar os estados $\emptyset$,B e C, D, E para a construção da expressão regular.

     E a expressão regular é ε
   - Considerando B como o estado final, podemos eliminar os estados $\emptyset$ e C, D, E para a construção da expressão regular.

     E a expressão regular é 0
   - Considerando $\emptyset$ como o estado final, podemos eliminar o estado C, D, E para a construção da expressão regular e, então, eliminando o estado intermediário B.

E a expressão regular é $(1+00)(0+1)^*$

Assim a expressão regular final é $\overline{\alpha} = \varepsilon + 0 + (1+00)(0+1)^*$ e $L(\bar{\alpha}) = L(B)$ e pela maneira com que a expressão regular $\bar{\alpha}$ foi construida temos que $L(\bar{\alpha}) = \overline{L(\alpha)}$ $\square$

Exercício 5 (Entrega: 28/05/2023 – (4 pontos)). *Prove que as seguintes linguagens não são regulares:*

- $L_1 = \{0^n\colon\ n \text{ é um quadrado perfeito}\}$

  Resposta. Seja $k > n$ constante do lema do bombeamento e $w = 0^{k^2}$, assim $y = 0^i$, com $i \leq n$. A palavra xy^2z não pertence a linguagem pois

  $$k^2 < |xy^2z| = k^2 + i \leq k^2 + n < k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$$

  assim $|xy^2z|$ não pode ser um quadrado perfeito. $\square$

- $L_2 = \{w1^n\colon w \in \{0,1\} \text{ e } n = |w|\}$

  Resposta. Seja n a constante do lema do bombeamento e $w = 0^n1^n$, assim $y = 0^i$, com $i \leq n$. A palavra xy^0z não pertence a linguagem pois

  $$|xz| = 0^{n-i}1^n$$

  e $n - i \neq n$ $\square$

- $L_3 = \{a^mb^na^m\colon m, n \geq 0\}$

  Resposta. Seja n a constante do lema do bombeamento e $w = a^nb^na^n$, assim $y = a^i$, com $i \leq n$. A palavra xy^0z não pertence a linguagem pois

  $$|xz| = a^{n-i}b^na^n$$

  e $n - i \neq n$ $\square$

- $L_4 = \{0^n1^m2^{n-m}\colon n \geq m \geq 0\}$

  Resposta. Seja n a constante do lema do bombeamento e $w = 0^n1^n$, assim $y = 0^i$, com $i \leq n$. A palavra xy^0z não pertence a linguagem pois

  $$|xz| = 0^{n-i}1^n$$

  e $n - i - n \neq 0$ $\square$

Exercício 6 (Entrega: 28/05/2023). *Prove o seguinte sobre linguagens regulares:*

1. *Se L é uma linguagem, e a um símbolo, então L/a, o quociente de L e a, é o conjunto das palavras w tais que wa estão em L. Ex: Se $L = \{a, aab, baa\}$, então $L/a = \{\varepsilon, ba\}$. Prove que se L é regular, então L/a é regular.*

   Resposta. Seja $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ o AFD associado a L já que ela é regular, podemos criar o AFD $B = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F')$, sendo $F' = \{q \in Q|\ \delta(q, a) \in F\}$. Assim, uma palavra w chega em um estado final de B apenas quando wa chega em um estado final de A, i.e., B irá aceitar a palavra w apenas quando $wa \in L$, que é a definição de L/a, logo B é um AFD para L/a, ou seja, L/a é um linguagem regular. $\square$

2. *Se L é uma linguagem, e a um símbolo, então $a \setminus L$ é o conjunto das palavras w tais que $aw \in L$. Ex: Se $L = \{a, aab, baa\}$, então $a \setminus L = \{\varepsilon, ab\}$. Prove que se L é regular, então $a \setminus L$ é regular.*

   Resposta. Seja $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ o AFD associado a L já que ela é regular, podemos criar o AFD $B = (Q, \Sigma, \delta, \delta(q_0, a), F)$. Logo $w \in L(B)$ se e somente se $\hat{\delta}(\delta(q_0, a), w) = \hat{\delta}(q_0, aw) \in F$, ou seja, é um AFD para $a \setminus L$, logo $a \setminus L$ é regular. $\square$

Dica: *Comece com um AFD para L e considere o conjunto dos estados de aceitação.*

Exercício 7 (Entrega: 28/05/2023 – (2 pontos))**.** *Mostre que as linguagen regulares são fechadas sob as seguintes operações:*

1. $\min(L) = \{w\colon w \in L,$ *mas nenhum prefixo próprio de* w *está em* $L\}$.

Resposta. Para garantir que nenhum prefixo próprio de w está em L, basta garantir que se estamos em um estado final não passamos por outro.
Seja $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ o AFD assiciado a L. A partir de A construa $B = (Q, \Sigma, \delta', q_0, F)$, sendo $\delta' = \delta \setminus \{((q, a), p) \in (Q \times \Sigma) \times Q \mid q \in F\}$ (retiramos todas as transições que saem de um estado final).
Seja $w \in L(B)$, suponha, por absurdo, que algum prefixo própio x de w pertence a $L(B)$, isto é, $\hat{\delta}(q_0, x) \in F$. Além disso, sabemos que $\hat{\delta}(q_0, w) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q_0, x), y) \in F$, para um y tal que $xy = w$, isso é absurdo pois $\delta(\hat{\delta}(q_0, x), a)$, com $a \in \Sigma$, é o estado vazio que não é final. Logo B é um AFD para $min(L)$. □

2. $\max(L) = \{w\colon w \in L$ *e, para nenhum* $x \neq \varepsilon$, $wx \in L\}$.

Resposta. Para $\max(L)$ basta garantir que a partir de um estado final não é possivel chegar em outro.
Sejam $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ o AFD assiciado a L e o conjunto $I = \{q \in F | \exists w \in \Sigma^+ \ (\hat{\delta}(q, w) \in F)\}$, que é o conjunto de estados finais que você pode chegar em outro estado final a partir dele. A partir de A construa $B = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F')$, sendo $F' = F \setminus I$. Então B aceita w se e somente se $\hat{\delta}(q_0, w) \in F$ e $\nexists x \in \Sigma^+ \ (\ \hat{\delta}(\hat{\delta}(q_0, w)x) = \hat{\delta}(q_0, wx) \in F\ )$, portanto B é um AFD para $\max(L)$. □

Dica: *É mais fácil começar com um AFD para L e executar uma construção para obter a linguagem desejada.*

Exercício 8 (Entrega: 28/05/2023)**.** *Mostre o que acontece quando tentamos aplicar o Lema do Bombeamento para a linguagem* $L((00 + 11)^*)$.

Resposta. Como a linguagem é regular, o lema do bombeamento é valido para toda palavra pertencente a linguagem, ou seja, não poderemos encontrar uma contradição, que é a base da prova de não ser regular. □