INSTITUTO DE COMPUTAÇÃO

MATA50 – Linguagens Formais e Autômatos – 2023.1
Professor: Roberto Freitas Parente

Gabarito – Grupo 01

Exercício 1. *Seja a um número positivo qualquer. Afirmo que para todo inteiro positivo n tem-se*

$$a^{n-1} = 1$$

Eis uma tentativa de prova por indução em n: Se $n = 1$ então $a^{n-1} = a^0 = 1$ e portanto a afirmação está correta nesse caso. Agora tome $n > 1$ e suponha, a título de hipótese de indução que, $a^{k-1} = 1$ quando $k = n-1, n-2, \ldots, 1$. Temos então

$$a^{n-1} = a^{n-2}a^1 = a^{n-2}\frac{a^{n-2}}{a^{n-3}} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1.$$

Portanto a afirmação está correta para todo inteiro positivo n. Onde está o erro da prova?

Resposta. O erro da prova está na utilização da Hipótese no segmento $a^{n-2} \cdot a^1 = a^{n-2} \cdot \frac{a^{n-2}}{a^{n-3}}$, pois quando utilizamos a^{n-3} no denominador estamos suponto que vale para $n-3 \geq 0$, mas na base só fazemos para $n = 1$ e não $n = 1, 2, 3$. Assim perdemos a possibilidade de n ser igual a 2 e assim a hipótese não vale. Logo, a indução deixa de ser válida. □

Exercício 2. *Descreva precisamente uma maneira de representar, por meio de uma sequência dos símbolos x e o:*

1. *qualquer número inteiro positivo;*
2. *qualquer vetor de números inteiros positivos;*
3. *qualquer matriz de números inteiros positivos.*

Resposta.

1. Uma das maneiras de representar qualquer número inteiro positivo utilizando apenas x e o é utilizar a representação unária com o x. Na representação unária, o valor de um número é dado pelo tamanho da palavra. Exemplo: $(5)_{10} = (xxxxx)_1$
2. Para representar um vetor utilizando apenas x e o podemos utilizar a representação da questão anterior para os números e separar elementos do vetor com o. Exemplo: $(1, 2, 3) = xoxxoxxx$
3. Para representar uma matriz utilizando apenas x e o podemos utilizar a representação da questão anterior para as linhas e separar elas utilizando oo. Exemplo: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = xoxoxooxxoxxoxx$

□

Exercício 3. *Resolva os seguintes exercícios.*

1. *Qual é o número de prefixos, sufixos e subpalavras de uma palavra de tamanho n?*
2. *Seja Σ um alfabeto. Prove que se $x, y, w \in \Sigma^*$ e $xw = yw$, então $x = y$.*
3. *Seja $L = \{\varepsilon, 0, 1\}$.*
   (a) *Que linguagem é L^0?*
   (b) *Que linguagem é L^2?*
   (c) *Que linguagem é L^n para $n \geq 0$?*
   (d) *Quantas palavras tem L^n para $n \geq 0$?*

Resposta.

1. Seja uma palavra $w = a_1a_2...a_n$.
Um prefixo de w será $p = a_1...a_k$ para $1 \leq k \leq n$, i.e., n possibilidades, além disso, a palavra vazia é prefixo de toda palavra então temos $n+1$ prefixos no total.
Um sufixo de w será $s = a_k...a_n$ para $1 \leq k \leq n$, i.e., n possibilidades, além disso, a palavra vazia é sufixo de toda palavra então temos $n+1$ sufixos no total.
Uma subpalavra de w é $a = a_i...a_j$ com $1 \leq i \leq j \leq n$, assim podemos ter subpalavras de tamanho 1, subpalavras de tamanho 2, ... , subpalvras de tamanho n. Assim, o número máximo de subpalavras é o somatório de todos esses tamanhos mais a palavra vazia, que é subpalavra de toda palavra.

$$1 + \sum_{i=1}^{n} i = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$$

E o número minimo de subpalavras acontece quando todos os simbolos de w são iguais, nesse caso w possui $n+1$ subpalavras, já que terá apenas uma subpalavra para cada tamanho.

$$n + 1 \leq \text{quantidade de subpalavras de w} \leq 1 + \frac{n(n+1)}{2}$$

2. Faremos indução no comprimento de w.
Base: Seja $|w| = 0$, o mesmo que $w = \varepsilon$. Temos então

$$\begin{aligned} xw &= yw \\ x\varepsilon &= y\varepsilon \\ x &= y \end{aligned}$$

por definição da concatenação com ε
Hipótese indutiva: Agora suponha que vale para $|w| = n$ sendo $w = w'$
Passo indutivo: Seja $|w| = n + 1$ e $w = w'a$ com $a \in \Sigma$. Temos então

$$\begin{aligned} xw &= yw \\ xw'a &= yw'a \\ xw' &= yw' \\ x &= y \quad \text{(pela H.I.)} \end{aligned}$$

3. (a) A linguagem $L^0 = \{\varepsilon\}$
(b) A linguagem $L^2 = LL = \{\varepsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11\}$
(c) L^n vai ser o conjunto de de palavras formadas por 0's e 1's com tamanho menor ou igual a n. Recursivamente temos:

$$L^n = \begin{cases} \{\varepsilon\} & \text{,se } n = 0 \\ L^{n-1}L & \text{,se } n \geq 1 \end{cases}$$

(d) Exite 2^k palavras de tamanho k pertencentes a L^n, seja $w = a_1...a_k$, já que todo a_i, com $1 \leq i \leq k$, pode assumir dois valores, 0 ou 1, temos que o número de palavras diferentes com tamanho k é 2^k, em particular, temos uma palavra de tamanho zero, a palavra vazia, mas $2^0 = 1$ então a afirmação continua verdadeira. Assim, a quantidade de palavras de L^n é:

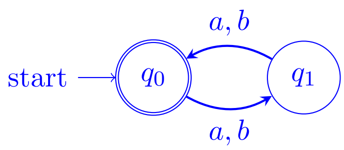
$$|L^n| = \sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$$

$\square$

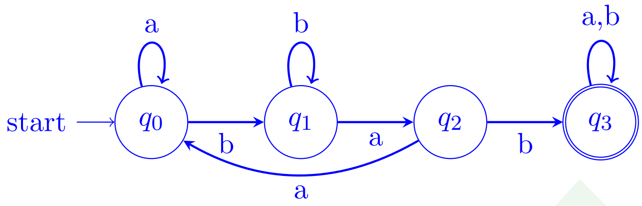
Exercício 4. *Construa Autômatos Finitos Determinísticos (AFDs) para as seguintes linguagens:*
1. $L_1 = \{w \in \{a,b\}^* : |w| \mod 2 = 0\}$
2. $L_3 = \{w \in \{a,b\}^* : w \text{ contém a subpalavra } bab\}$
3. $L_4 = \{w \in \{a,b\}^* : w \text{ não contém a subpalavra } bab\}$
4. $L_5 = \{w \in \{a,b\}^* : w \text{ não contém nem a subpalavra } bab \text{ nem a subpalavra } aab\ \}$
5. *A línguagem que contém um número de a's é divisível por* 5.

Resposta.

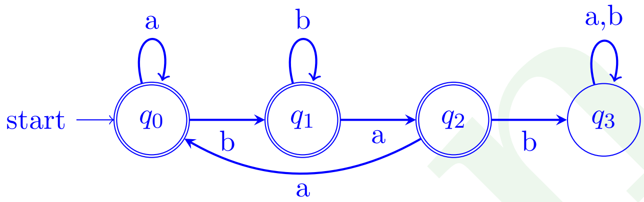
1. Um dos AFD para a $L_1 = \{w \in \{a,b\}^* \colon |w| \mod 2 = 0\}$ é:



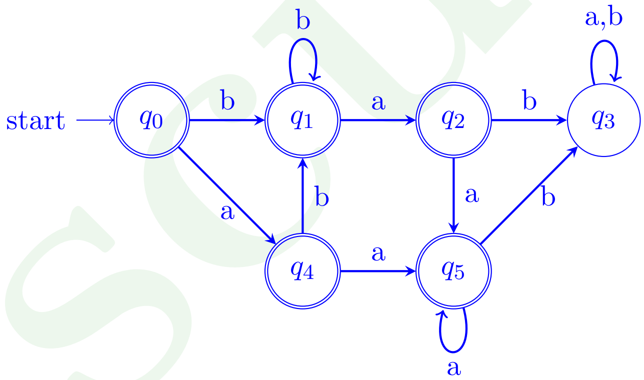
2. Um dos AFD para a $L_3 = \{w \in \{a,b\}^* \colon w \text{ contém a subpalavra } bab\}$ é:



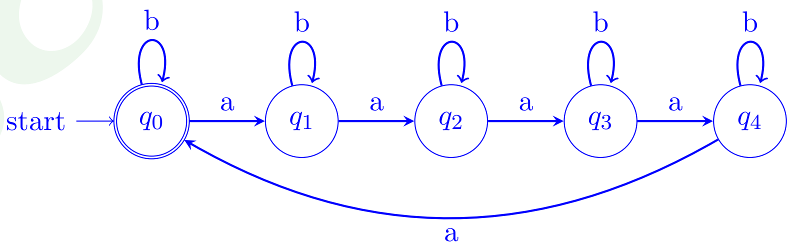
3. Um dos AFD para a $L_4 = \{w \in \{a,b\}^* \colon w \text{ não contém a subpalavra } bab\}$ é:



4. Um dos AFD para a $L_5 = \{w \in \{a,b\}^* \colon w \text{ não contém nem a subpalavra } bab \text{ nem a subpalavra } aab\ \}$ é:



5. Um dos AFD para a línguagem que contém um número de a's é divisível por 5 é:



Sendo que q_n representa que o resto da quantidade de a's por 5 é igual a n

□

Exercício 5. *Quando definimos $\hat{\delta}$ organizamos a indução de forma que $\hat{\delta}(q, wa) = \delta(\hat{\delta}(q,w), a)$, ou seja, quebramos a palavra em uma palavra seguida de um único símbolo. Entretanto é importante que possamos quebrar uma palavra w de qualquer forma e deve fazer sentido a utilização de $\hat{\delta}$. Mostre que, de fato, $\hat{\delta}(q, xy) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q,x), y)$ para qualquer estado q e qualquer palavra x, y. **Dica:** Use indução.*

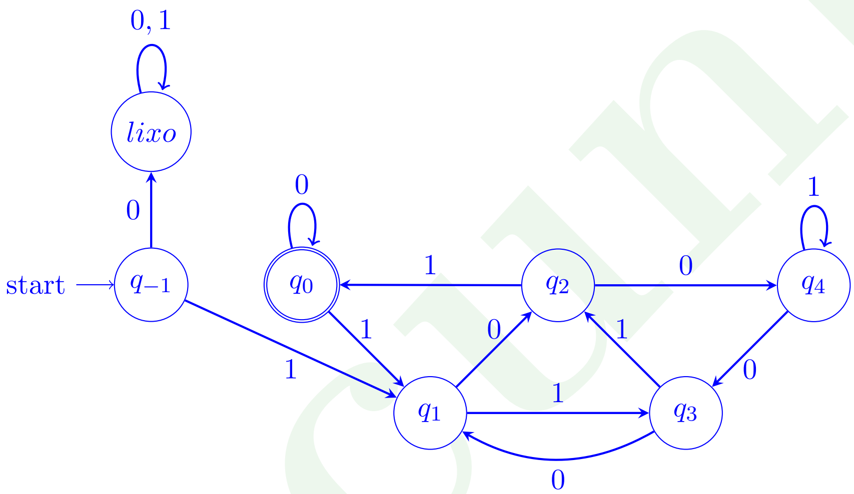
Resposta. Faremos indução no comprimento de y.
Base: Seja $|y| = 0$, o mesmo que $y = \varepsilon$. Temos então

$$\hat{\delta}(q, xy) = \hat{\delta}(q, x\varepsilon) = \delta(\hat{\delta}(q, x), \varepsilon) = \hat{\delta}(q, x) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q, x), \varepsilon) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q, x), y)$$

por definição indutiva de $\hat{\delta}$.
Passo indutivo: Agora, considere que a propriedade vale para $|y'| = n - 1$ quando $n \geq 1$. Sejam $|y| = n$ e $y = y'a$. Ademais, usando a hipóstese de indução temos $\hat{\delta}(q, xy) = \hat{\delta}(q, xy'a) = \delta(\hat{\delta}(q, xy'), a) = \delta(\hat{\delta}(\hat{\delta}(q, x), y'), a)$. Então isso é $\hat{\delta}(q, xy) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q, x), y)$. □

Exercício 6. *Construa um AFD para seguinte linguagem com alfabeto* $\{0, 1\}$*: O conjunto de todas as palavras começando com* 1 *que quando são interpretadas como número binários são múltiplos de* 5*. Por exemplo:* 101*,* 1010 *e* 1111 *estão na línguagem e* 0*,* 100 *e* 111 *não estão.*

Resposta. Nos números binários ao adicionar um 0 no fim do número dobramos o seu valor e ao adicionar um 1 no fim do dele multiplicamos o número por 2 e adicionamos 1, e o mesmo acontece com o seu resto. Assim, utilizar essa ideia para construir um AFD que reconhece palavras que quando são interpretadas como número binários são múltiplos de 5.



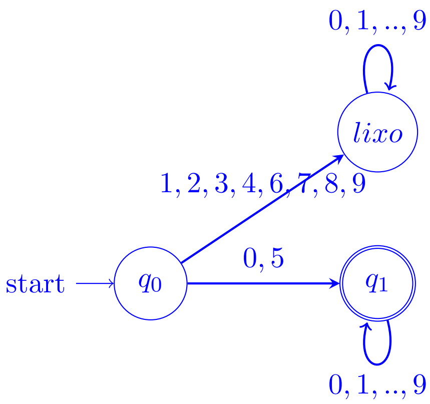
Sendo que q_n representa que o resto da quantidade de a's por 5 é igual a n para $n \neq -1$, q_{-1} é o estado inicial e o estado lixo representa palavras começadas por 0, que não devem ser aceitas. □

Exercício 7. *Construa autômatos finitos (AFD, AFND, ε-AFND) para as linguagens. Descreva de maneira sucinta o que cada estado representa de acordo com a palavra lida até o momento.*

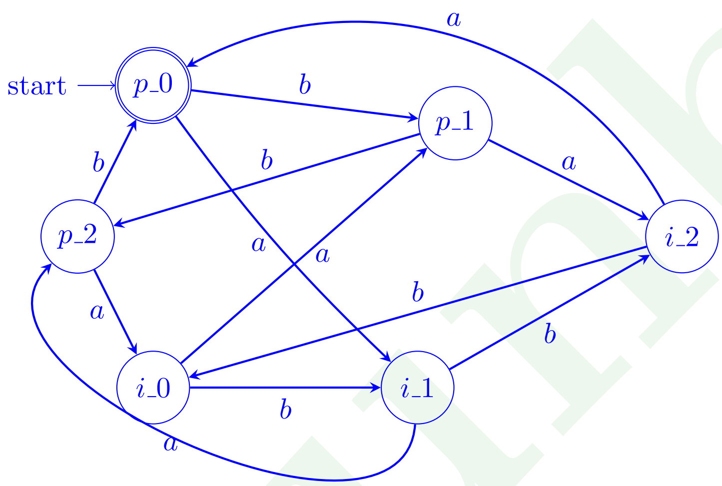
1. $L_1 = \{w \in \{0, 1, ...9\}^* \colon\ w^r$ *corresponde a um número inteiro múltiplo de* $5\}$.
   Observe que exercício anterior era w ser inteiro múltiplo de 5, mas agora é lido de maneira inversa.
2. $L_2 = \{w \in \{a, b\}^* \colon w$ *possui quantidade par de a's e tamanho divisível por* $3\}$
3. *Crie um ε-AFND com três estados para a seguinte Linguagem: O conjunto de palavras que consiste de em zero ou mais a's seguidos por zero ou mais b's, seguidos por zero ou mais c's.*

Resposta.

1. Na base decimal, um número é múltiplo de 5 se o ultimo algarismo for 5 ou 0, como estamos w de maneira inversa basta chegar o primeiro simbolo. Temos o seguinte AFD então

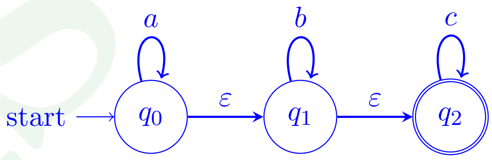


2. Temos o seguinte AFD



Sendo que p representa que a quantidade de a's é par, i representa que a quantidade de a's é impar e os números representam o resto do tamanho da palavra por 3.

3. O ε-AFND é

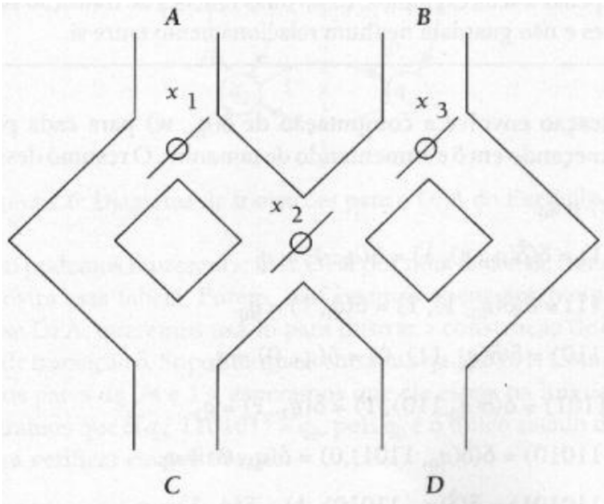


□

Exercício 8. *Na Figura 8 temos um conhecido brinquedo. Uma bola de gude é solta em A e B. As alavanas x_1, x_2 e x_3 fazem a bolinha cair para a esquerda ou para a direita. Sempre que uma bolinha encontra uma alavanca, ela faz a alavanca se inverter após a passagem da bolinha; assim, a próxima bolinha passará pelo desvio oposto.*

1. *Modele esse brinquedo por um autômato finito. Sejam A e B as representações das entradas em que a bolinha pode ser solta. Seja o estado de aceitação correspondente à bolinha saindo em D; a não aceitação representada por uma bolinha saindo em C.*
   Dica: Cada estado pode/deve ser um comportamento possível do brinquedo

Resposta. A construção do autômato leva em consideração as 8 possíveis posições das 3 (três) alavancas e também deve indicar se a última rola para a saída D, ou seja, se a última entrada foi aceita. Seja 0 representado a posição para esquerda (no diagrama) e 1 a posição para direita. Cada estado representa uma sequencia de três 0's ou 1's representando a direção das três avalancas, ordenadas da esquerda para direita. Após os 3 bits 'a' indica aceitação e 'r' indica rejeição. Dos 16 possíveis estados (2^4, 4 bits) somente 13 são acessíveis a partir do estado inicial 000r. Segue a tabela de trasição:



	A	B
→000r	100r	011r
*000a	100r	011r
*001a	101r	000a
010r	110r	001a
*010a	110r	001a
011r	111r	010a
100r	010r	111r
*100a	010r	111r
101r	011r	100a
*101a	011r	100a
110r	000a	101a
*110a	000a	101a
111r	001a	110a

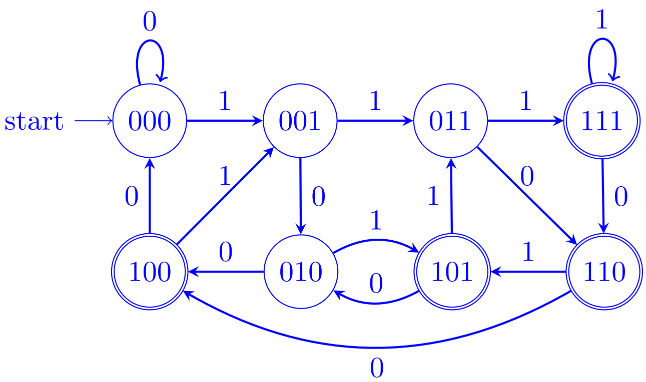
□

Exercício 9. *Vimos em sala um AFD para a linguagem* $L = \{0,1\}^*\{1\}\{0,1\}\{0,1\}$ *e fazemos uma análise do que significado de cada estado. Desta forma faça o seguinte exercício:*

- *Apresente o AFD A*
- *Dê o significado de cada um dos estados*
- *Prove formalmente que esses estados estão de acordo com o significado atribuído (use indução)*
- *Prove que* $L(A) = L$.

Resposta.

- O AFD é:



- 1. O estado 000 "contém" w sse $w = \varepsilon$, 0,00 ou todas as palavras que os 3 últimos símbolos são 000
  2. O estado 001 "contém" w sse $w =$ 1, 01 ou todas as palavras que os 3 últimos símbolos são 001
  3. O estado 010 "contém" w sse $w =$ 10 ou todas as palavras que os 3 últimos símbolos são 010
  4. O estado 011 "contém" w sse $w =$ 1, 11 ou todas as palavras que os 3 últimos símbolos são 011
  5. O estado 100 "contém" w sse $w =$ todas as palavras que os 3 últimos símbolos são 100
  6. O estado 101 "contém" w sse $w =$ todas as palavras que os 3 últimos símbolos são 101
  7. O estado 110 "contém" w sse $w =$ todas as palavras que os 3 últimos símbolos são 110
  8. O estado 111 "contém" w sse $w =$ todas as palavras que os 3 últimos símbolos são 111

- A linguagem que esse AFD aceita é $L = \{w \in \Sigma^* |$ o penúltimo simbolo é $1\}$(ou que queremos mostrar que aceita). Como $L(A) = \{w \in \Sigma^* | \ \hat{\delta}(000, w) \in F\}$ a prova do significado dos estados desse autômatos, em especial a prova de (5), (6), (7), e (8), garante que a linguagem de A é realmente L. Para fazer essa prova considere a forma de uma palavra para chegar em um determinado estado.

  Indução no tamanho da palavra w. **Base:** Para $|w| = 0$, temos $w = \varepsilon$. Afirmação (1) nos diz que o estado 000 deveria "conter"ε e $\delta(000, \varepsilon) = 000$. Para a afirmação (2) temos que w não é igual a 1, 01 ou todas as palavras que os 3 últimos símbolos são 001 e $\delta(000, \varepsilon) \neq 001$ então o sse é verdadeiro, analogamente, para (3), (4), (5), (6), (7) e (8)

  Hipótese indutiva: Suponha que as afirmações valem para $w = w', |w'| = n - 1$ quando $n \geq 1$

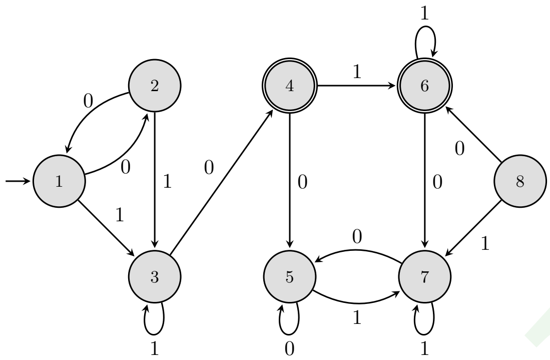
  Passo indutivo: Agora, seja $|w| = n + 1, \ w = w'a, \ a \in \Sigma$

  1. (Se) Assuma que w termina em 000. Se $w = w'a$ temos que $a = 0$ e w' termina em 00. Pela H.I. (1) e (5) temos que
     $$\hat{\delta}(000, w') = 000 \vee \hat{\delta}(000, w') = 100$$
     respectivamente. Como existe uma transição de 000 e de 100 para 000 com o simbolo 0 concluimos que
     $$\hat{\delta}(000, w'a) = \hat{\delta}(000, w) = 000$$
     (Somente se) Suponha que $\hat{\delta}(000, w) = 000$. Se você olhar para o diagram do AFD, vai ver que as únicas maneiras de chegar em 000 é se $w = w'0$ e $\hat{\delta}(000, w') = 000 \vee \hat{\delta}(000, w') = 100$ aplicando a H.I de (1) e (5) temos que w' termina em 00 e portanto $w = w'0$ termina em 000. Isso é suficiente para provar o (Somente se).
  2. (Se) Assuma que w termina em 001. Se $w = w'a$ temos que $a = 1$ e w' termina em 00. Pela H.I. (1) e (5) temos que
     $$\hat{\delta}(000, w') = 000 \vee \hat{\delta}(000, w') = 100$$
     respectivamente. Como existe uma transição de 000 e de 100 para 001 com o simbolo 1 concluimos que
     $$\hat{\delta}(000, w'a) = \hat{\delta}(000, w) = 001$$
     (Somente se) Suponha que $\hat{\delta}(000, w) = 001$. Se você olhar para o diagram do AFD, vai ver que as únicas maneiras de chegar em 001 é se $w = w'1$ e $\hat{\delta}(000, w') = 000 \vee \hat{\delta}(000, w') = 100$ aplicando a H.I de (1) e (5) temos que w' termina em 00 e portanto $w = w'0$ termina em 001. Isso é suficiente para provar o (Somente se).
  3. (Se) Assuma que w termina em 010. Se $w = w'a$ temos que $a = 0$ e w' termina em 01. Pela H.I. (2) e (6) temos que
     $$\hat{\delta}(000, w') = 001 \vee \hat{\delta}(000, w') = 101$$
     respectivamente. Como existe uma transição de 000 e de 100 para 010 com o simbolo 0 concluimos que
     $$\hat{\delta}(000, w'a) = \hat{\delta}(000, w) = 010$$
     (Somente se) Suponha que $\hat{\delta}(000, w) = 010$. Se você olhar para o diagram do AFD, vai ver que as únicas maneiras de chegar em 010 é se $w = w'0$ e $\hat{\delta}(000, w') = 001 \vee \hat{\delta}(000, w') = 101$ aplicando a H.I de (2) e (6) temos que w' termina em 01 e portanto $w = w'0$ termina em 010. Isso é suficiente para provar o (Somente se).
  4. Análogo aos anteriores.
  5. Análogo aos anteriores.
  6. Análogo aos anteriores.

7. Análogo aos anteriores.
8. Análogo aos anteriores.

□

Exercício 10. *Seja o AFD com o seguinte diagrama de estados:*



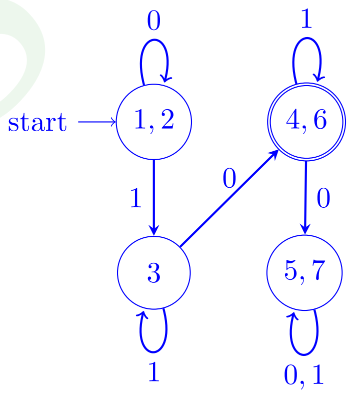
1. *Obtenha o diagrama de estados de um AFD mínimo equivalente*
2. *Que linguagem é reconhecida pelo AFD em questão?*

Resposta.

1. A tabela de minimização é:

2		-	-	-	-	-	-
3	X	X	-	-	-	-	-
4	X	X	X	-	-	-	-
5	X	X	X	X	-	-	-
6	X	X	X		X	-	-
7	X	X	X	X		X	-
8	X	X	X	X	X	X	X
	1	2	3	4	5	6	7

E o AFD mínimo é:



2. A linguagem do AFD é: Conjunto de palavras que consiste de zero ou mais 0's, seguido por um ou mais 1's, seguido por 0, seguido por zero ou mais 1's

□

Exercício 11. *Prove o seguinte sobre linguagens regulares:*

1. *Se L é uma linguagem, e a um símbolo, então L/a, o quociente de L e a, é o conjunto das palavras w tais que wa estão em L. Ex: Se $L = \{a, aab, baa\}$, então $L/a = \{\varepsilon, ba\}$. Prove que se L é regular, então L/a é regular.*

Resposta. Seja $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ o AFD associado a L já que ela é regular, podemos criar o AFD $B = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F')$, sendo $F' = \{q \in Q | \ \delta(q, a) \in F\}$. Assim, uma palavra w chega em um estado final de B apenas quando wa chega em um estado final de A, i.e., B irá aceitar a palavra w apenas quando $wa \in L$, que é a definição de L/a, logo B é um AFD para L/a, ou seja, L/a é um linguagem regular. □

Exercício 12. *Seja $A = (\mathcal{Q}, \Sigma, \delta, q_0, \{q_f\})$ um AFD e suponha que, para todo $a \in \Sigma$, temos $\delta(q_0, a) = \delta(q_f, a)$.*

1. *Mostre que, para todo $w \neq \varepsilon$, temos $\hat{\delta}(q_0, w) = \hat{\delta}(q_f, w)$*
2. *Mostre que, se x é uma palavra não vazia em $L(A)$, então, para todo inteiro $k > 0$, então x^k também está em $L(A)$.*

Resposta.

1. Provaremos por indução no tamanho de w.
   Base: Seja $|w| = 1$, o mesmo que $w = b$ para $b \in \Sigma$. Temos então

   $$\hat{\delta}(q_0, w) = \hat{\delta}(q_0, b) = \delta(q_0, b) = \delta(q_f, b) = \hat{\delta}(q_f, b)$$

   Hipótese indutiva: Agora suponha que vale para $|w| = n$ sendo $w = w'$
   Passo indutivo: Seja $|w| = n + 1$ e $w = w'c$ com $c \in \Sigma$. Temos então

   $$\begin{aligned}
   \hat{\delta}(q_0, w) &= \hat{\delta}(q_0, w'c) \\
   &= \delta(\hat{\delta}(q_0, w'), c) \\
   &= \delta(\hat{\delta}(q_f, w'), c) \quad \text{(pela H.I.)} \\
   &= \hat{\delta}(q_f, w'c) \\
   &= \hat{\delta}(q_f, w)
   \end{aligned}$$

2. Provaremos por indução em k.
   Base: Seja $k = 1$, sabemos que $x^1 = x$ e como $x \in L(A)$ temos que $x^1 \in L(A)$.
   Hipótese indutiva: Agora suponha que vale para $k = n$.
   Passo indutivo: Seja $k = n + 1$

   $$\begin{aligned}
   \hat{\delta}(q_0, x^{n+1}) &= \hat{\delta}(\hat{\delta}(q_0, x^n), x) \\
   &= \hat{\delta}(q_f, x) \quad \text{(pela H.I.)} \\
   &= \hat{\delta}(q_o, x) \quad \text{(pelo (1))} \\
   &= q_f \qquad\quad \text{(já que } x \in L(A)\text{)}
   \end{aligned}$$

   assim, temos que $x^k \in L(A), \forall k \in \mathbb{N}(k > 0)$

□