

PROGRAMACIÓN DINÁMICA

Idalia Flores

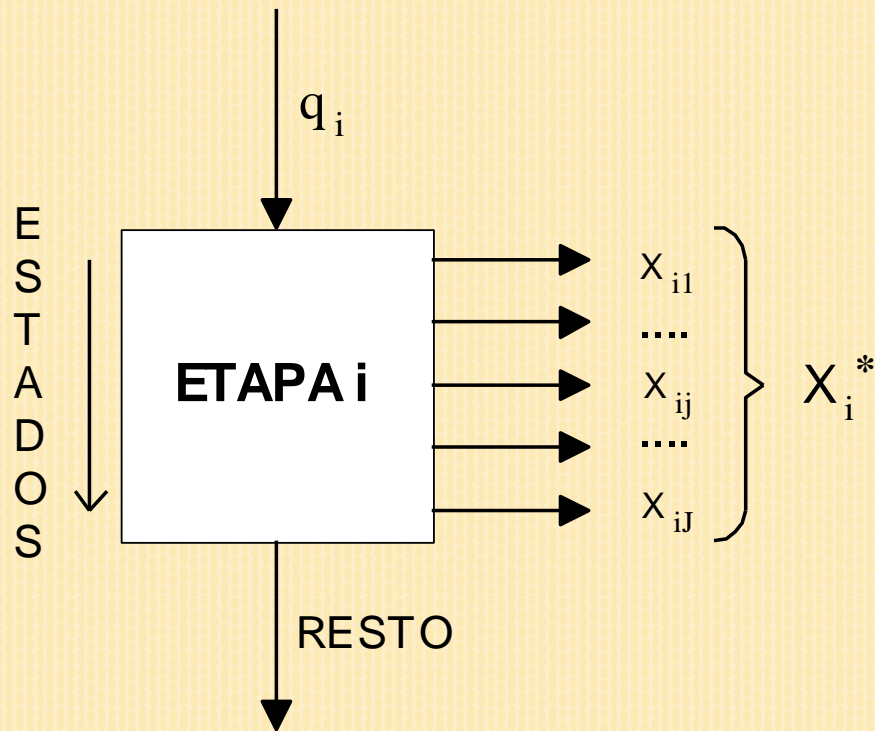
CONCEPTOS

- ✖ La programación dinámica es una técnica matemática que se utiliza para la solución de problemas matemáticos seleccionados, en los cuales se toma una serie de decisiones en forma secuencial.
- ✖ Proporciona un procedimiento sistemático para encontrar la combinación de decisiones que maximice la efectividad total, al descomponer el problema en **etapas**, las que pueden ser completadas por una o más formas (**estados**), y enlazando cada etapa a través de cálculos recursivos.

DEFINICIONES

- ✖ **Etapas:** es la parte del problema que posee un conjunto de alternativas mutuamente excluyentes, de las cuales se seleccionará la mejor alternativa.
- ✖ **Estado:** es el que refleja la condición o estado de las restricciones que enlazan las etapas. Representa la “liga” entre etapas de tal manera que cuando cada etapa se optimiza por separado la decisión resultante es automáticamente factible para el problema completo.

ESQUEMA DE UNA ETAPA



q_i Variable de estado en la etapa i

x_{ij} Uno de los valores que puede adoptar la variable de decisión "Xi" en la etapa i

X_i^* Decisión óptima de la etapa i

FORMULACIÓN Y SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

- ✖ La programación dinámica no cuenta con una formulación matemática estándar, sino que se trata de un enfoque de tipo general para la solución de problemas, y las ecuaciones específicas que se usan se deben desarrollar para que representen cada situación individual.
- ✖ Comúnmente resuelve el problema por etapas, en donde cada etapa interviene exactamente una variable de optimización (u optimizadora)

-
- ✖ La teoría unificadora fundamental de la programación dinámica es el Principio de Optimalidad, que nos indica básicamente como se puede resolver un problema adecuadamente descompuesto en etapas utilizando cálculos recursivos.
 - ✖ “Una política óptima tiene la propiedad de que, independientemente de las decisiones tomadas para llegar a un estado particular, en una etapa particular, las decisiones restantes deben constituir una política óptima para abandonar ese estado”,

PARA RESOLVER PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓN DINÁMICA SE NECESITA:

- ✗ Un grado de creatividad
- ✗ Un buen conocimiento de la estructura general de los problemas de programación dinámica para reconocer cuando un problema se puede resolver por medio de estos procedimientos y como esto se puede llevar a cabo.

CARACTERÍSTICAS DE LOS PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓN DINÁMICA

- ✗ El problema se puede dividir en etapas que requieren una política de decisión en cada una.
- ✗ Cada etapa tiene cierto número de estados asociados a ella.
- ✗ El efecto de la política de decisión en cada etapa es transformar el estado actual en un estado asociado con la siguiente etapa.
- ✗ El procedimiento de solución está diseñado para encontrar una política óptima para el problema completo.

CARACTERÍSTICAS DE LOS PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓN DINÁMICA

- ✗ Dado un estado actual, una política óptima para las etapas restantes es independiente de la política adoptada en las etapas anteriores (principio de optimalidad).
- ✗ El procedimiento de solución se inicia al encontrar la política óptima para la última etapa.
- ✗ Se dispone de una relación recursiva que identifica la política óptima para la etapa n dada la política óptima para la etapa $(n+1)$

RECURSIVIDAD

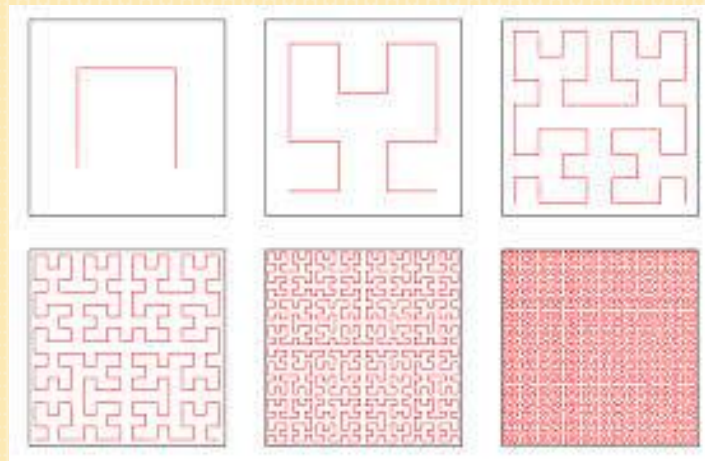
Existen dos formas de plantear la fórmula de recursividad en los problemas de programación dinámica:

- ✗ *Recursividad de Retroceso*: el problema se resuelve partiendo de la última etapa hacia la primera.
- ✗ *Recursividad de Avance*: el problema se resuelve partiendo de la primera etapa hacia la última.

RECURSIVIDAD

Las formulaciones de avance y retroceso son en realidad equivalentes en términos de cálculo. Sin embargo, hay situaciones donde habría alguna diferencia, en la eficiencia del cálculo, según la formulación que se utilice. Esto sucede en particular en problemas donde intervine la toma de decisiones conforme transcurre el tiempo. En este caso las etapas se designan con base en el estricto orden cronológico de los periodos que ellas representan y la eficiencia de los cálculos dependerá de si se utiliza formulación de avance o retroceso.

FRACTALES Y RECURSIVIDAD

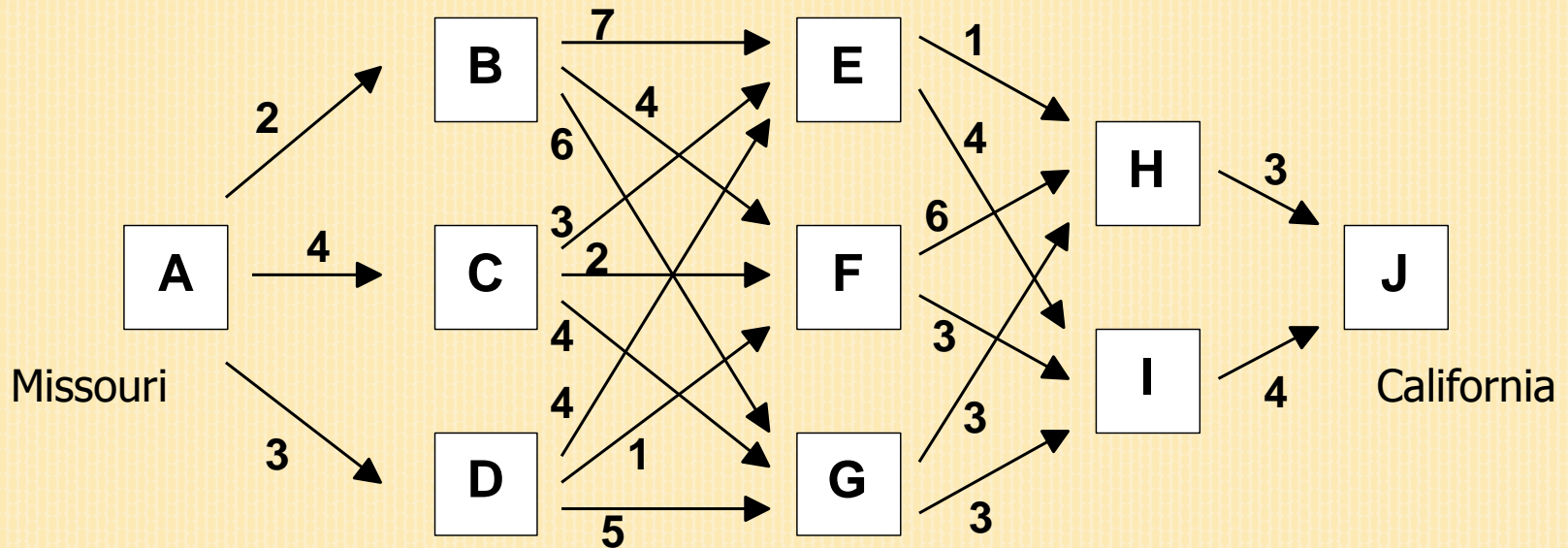


EJEMPLO PROTOTIPO (EL PROBLEMA DE LA DILIGENCIA)

Un caza fortunas de Missouri decide irse al oeste a unirse a la fiebre del oro en California . Tiene que hacer el viaje en diligencia a través de territorios sin ley donde existían serios peligros de ser atacados por merodeadores. Aún cuando su punto de partida y destino eran fijos, tenía muchas opciones en cuanto a que estados debía elegir como puntos intermedios. Se desea estimar la ruta mas segura , como el costo de la póliza para cualquier jornada de la diligencia esta basada en una evaluación de seguridad del recorrido, la ruta mas segura debe ser aquella que tenga el costo total mas barato.

¿Cuál es la ruta que minimiza el costo total de la póliza ?

SISTEMA DE CAMINOS Y LOS COSTOS DEL PROBLEMA DE LA DILIGENCIA



Costos de
Transición:

	B	C	D
A	2	4	3

	E	F	G
B	7	4	6
C	3	2	4
D	4	1	5

	H	I
E	1	4
F	6	3
G	3	3

	J
H	3
I	4

SOLUCIÓN

- ✖ Los cálculos se realizan en etapas dividiendo el problema en subproblemas.
- ✖ Después, se considera por separado cada subproblema con el fin de reducir el número de operaciones de cálculo.
- ✖ Se comienza con una pequeña porción del problema original y se encuentra la solución óptima.
- ✖ Luego, se agranda gradualmente el problema y se encuentra la solución óptima actual a partir de la que le precede , hasta resolver el problema original completo.
- ✖ En cada problema aumentado se puede encontrar la solución óptima tomando en cuenta los resultados obtenidos en la interacción anterior.

PROCEDIMIENTO DE SOLUCIÓN

Para este caso se empleará el desarrollo del problema con un recorrido hacia atrás.

Cuando el cazafortunas tiene una sola etapa por recorrer ($n=4$), su ruta de ahí en adelante esta perfectamente determinada por su estado actual (ya sea H o I) y su destino final, $x_4 = J$, de manera que la ruta para esta ultima jornada en diligencias es $s \rightarrow J$

La solución al problema es:

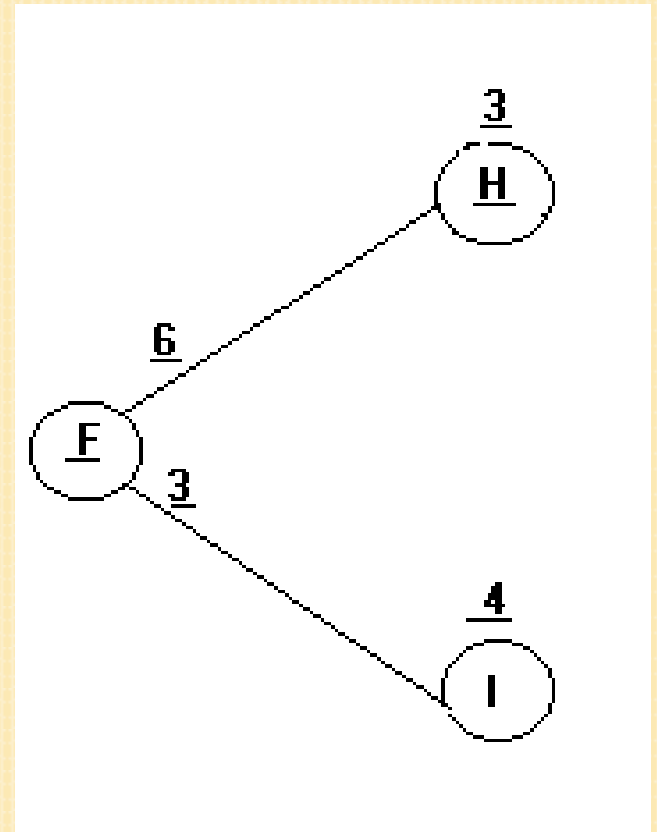


$$f_4^*(H) = 3$$

$$f_4^*(I) = 4$$

PROCEDIMIENTO DE SOLUCIÓN

Cuando se tienen dos etapas por recorrer ($n=3$), se analiza de la siguiente manera: Supóngase que se encuentra en el estado F, entonces como se ve en la figura, se debe ir al estado H ó al estado I. a un costo de $C_{F,H} = 6$ ó $C_{F,I} = 3$. Si se elige el estado H, el costo adicional mínimo al llegar ahí es 3, por tanto el costo de decisión es $6+3=9$, de igual manera si se elige el estado I, el costo total es $3+4=7$ que es menor por lo tanto se escogerá el estado I.



PROCEDIMIENTO DE SOLUCIÓN

Se trabaja de manera similar con los otros dos estados posibles $s=E$ y $s=G$, cuando quedan dos jornadas por viajar, los resultados son:

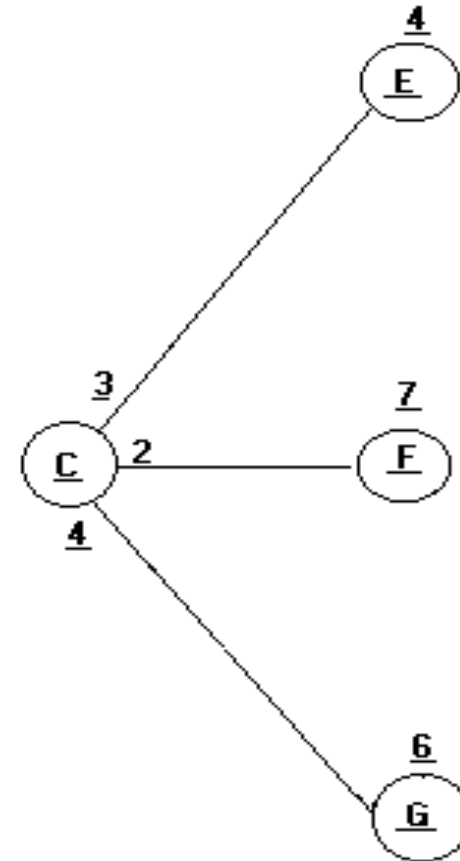
$$f_3^*(E) = 4$$

$$f_3^*(F) = 7$$

$$f_3^*(G) = 6$$

PROCEDIMIENTO DE SOLUCIÓN

La solución para el problema de tres etapas ($n=2$) se obtiene en forma parecida. Por ejemplo supóngase que el agente se encuentra en el estado C, como se muestra el diagrama. Ahora deberá ir al estado E, F ó G con un costo inmediato de $C_{C,E}=3$ ó $C_{C,F}=2$ ó $C_{C,G}=4$, respectivamente.



PROCEDIMIENTO DE SOLUCIÓN

Al llegar aquí el costo adicional mínimo hasta llegar a su destino esta dado de la siguiente manera:

$$x_2 = E \quad f_2(C, E) = c_{C, E} + f_3^*(E) = 3 + 4 = 7$$

$$x_2 = F \quad f_2(C, F) = c_{C, F} + f_3^*(F) = 2 + 7 = 9$$

$$x_2 = G \quad f_2(C, G) = c_{C, G} + f_3^*(G) = 4 + 6 = 10$$

El mínimo de estos tres números es 7, por lo que el costo mínimo desde el estado C al final es $f_2^*(C) = 7$, y el destino inmediato debe ser $x_2^* = E$.

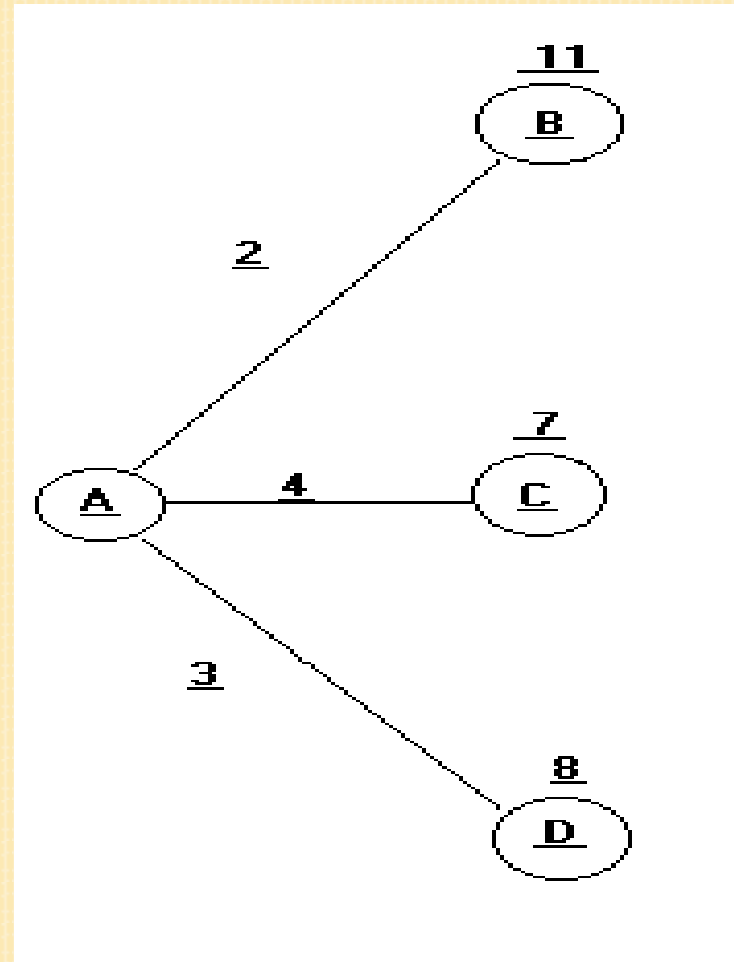
Se realizan cálculos similares cuando se comienza desde el estado B ó D. Los resultados son:

$$f_2^*(B) = 11 \quad f_2^*(C) = 7 \quad f_2^*(D) = 8$$

PROCEDIMIENTO DE SOLUCIÓN

Si se pasa al problema de cuatro etapas ($n=1$), los cálculos son parecidos a los que se acaban de mostrar

para el problema de tres etapas ($n=2$), excepto que ahora hay solo un inicio posible, $s=A$, como se muestra el diagrama.



PROCEDIMIENTO DE SOLUCIÓN

Los resultados se resumen de la siguiente manera :

$$x_1 = B \quad f_1(A,B) = c_{A,B} + f_2^*(B) = 2 + 11 = 13$$

$$x_1 = C \quad f_1(A,C) = c_{A,C} + f_2^*(C) = 4 + 7 = 11$$

$$x_1 = D \quad f_1(A,D) = c_{A,D} + f_2^*(D) = 3 + 8 = 11$$

Como el mínimo costo es 11, por tanto los caminos pueden ser C ó D.

En este punto se puede identificar la solución óptima. Los resultados indican los caminos óptimos a seguir:

$A \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow H \rightarrow J$ ó $A \rightarrow D \rightarrow F \rightarrow I \rightarrow J$, las dos tienen un costo total de 11

PROBLEMAS TÍPICOS DE P.D.

✖ 1. PROBLEMA DE INVERSIÓN DE CAPITAL

- ✖ Veamos un problema simple de inversión de capital. Una corporación tiene \$5 millones para invertir en sus tres plantas para una posible expansión. Cada planta ha presentado un número de propuestas sobre como pretende gastar el dinero. Cada propuesta entrega el costo de la expansión (c) y la ganancia esperada (r). La siguiente tabla resume las propuestas:

- ✖ Cada planta sólo podrá realizar una de sus propuestas. El objetivo es maximizar el retorno de la firma dada su inversión de \$5 millones. Se supondrá que si no se gastan los \$5 millones completamente, ese dinero se perderá.

TABLA

Propuesta	Planta 1		Planta 2		Planta 3	
	c_1	r_1	c_2	r_2	c_3	r_3
1	0	0	0	0	0	0
2	1	5	2	8	1	4
3	2	6	3	9	-	-
4	-	-	4	12	-	-

INVERSIÓN DE CAPITAL

- ✖ Una forma de resolver este problema es intentar todas las posibilidades y elegir la mejor. En ese caso, hay solo $3 \times 4 \times 2 = 24$ formas de invertir el dinero. Muchas de estas son infactibles (por ejemplo, propuestas 3, 4 y 1 para las tres plantas cuesta \$6 millones). Otras propuestas son factibles, pero son muy pobres en retorno (como propuestas 1, 1 y 2, con un retorno de sólo \$4 millones.)
- ✖
- ✖ Desventajas de una enumeración completa:
- ✖
- ✖ Para problemas de gran tamaño la enumeración de todas las posibles soluciones puede no ser factible computacionalmente.
- ✖ Las combinaciones NO factibles no pueden ser detectadas *a priori*, llevando a una ineficiencia.
- ✖ Información sobre combinaciones previamente investigadas no se usan para eliminar otras combinaciones menos buenas, o no factibles.

INVERSIÓN DE CAPITAL

- ✗ Cabe hacer notar que este problema no puede ser formulado como un problema de programación lineal, porque los retornos no son funciones lineales.
- ✗
- ✗ Un método para calcular la solución es:
- ✗
- ✗ Dividamos el problema en 3 etapas: cada etapa representa el dinero asignado a una única planta. Así la etapa 1 representa el dinero asignado a la planta 1. Artificialmente se dará un orden a las etapas, asumiendo que primero se asignará a la planta 1, luego a la planta 2 y finalmente a la planta 3.
- ✗ Cada etapa está dividida en estados. Un estado guarda la información requerida para ir desde una etapa a la siguiente. En este caso los estados por etapa 1, 2 y 3 son:
 - ✗ {0,1,2,3,4,5}: cantidad de dinero gastado en la planta 1, representado como x_1 ,
 - ✗ {0,1,2,3,4,5}: cantidad de dinero gastado en las plantas 1 y 2 (x_2), y
 - ✗ {5}: cantidad de dinero gastado en las plantas 1, 2, y 3 (x_3).

INVERSIÓN DE CAPITAL

- ✗ Es necesario notar que diferentemente a lo que es programación lineal, las x_i no representan variables de decisión: ellas son simplemente representaciones de un estado genérico en la etapa.
- ✗ Un retorno se asocia a cada estado. Se debe notar que para tomar una decisión en el estado 3, es sólo necesario conocer cuanto se gastó en las plantas 1 y 2, no cómo esto fue gastado. También note que se desea que x_3 sea 5
- ✗ Determinando los retornos asociados a cada estado, lo más fácil es en la etapa 1, los estados x_1 . La Tabla 2 muestra el retorno asociado con x_1 .

TABLA 2

Si el capital disponible x_1 es:	Entonces la propuesta óptima es:	Y el retorno para la etapa 1 es:
0	1	0
1	2	5
2	3	6
3	3	6
4	3	6
5	3	6

EL PROBLEMA DE LA MOCHILA.

- ✖ El problema de la mochila es un tipo particular de programación entera con sólo una restricción. Cada artículo que puede ir en la mochila tiene un tamaño y un beneficio asociado. La mochila tiene una capacidad máxima. ¿Qué se debe llevar en la mochila para maximizar el beneficio total? A modo de ejemplo supongamos que hay tres artículos como se muestra en la Tabla 3, y suponga que la capacidad de la mochila es 5.

✖

EL PROBLEMA DE LA MOCHILA

Artículo (j)	Peso (w_j)	Beneficio (b_j)
1	2	65
2	3	80
3	1	30

EL PROBLEMA DE LA MOCHILA

- ✖ Las etapas representan los artículos: luego se tienen tres etapas $j = 1, 2, 3$. El estado y_j en la etapa j representa el peso total de los artículos j más todos los artículos que se agregarán posteriormente a la mochila. La decisión en el etapa j es cuántos artículos j poner en la mochila. Sea ese valor k_j .
- ✖
- ✖ Luego se tienen las siguientes fórmulas recursivas: Sea $f_j(y_j)$ el valor de usar y_j unidades de la capacidad para artículos j más los que se agregarán. Si $[a]$ representa el mayor entero menor o igual a a .

PROBLEMA DE LA MOCHILA

$$f_3(y_j) = 30y_j$$

$$f_j(y_j) = \max_{k_j \leq \lfloor y_j / w_j \rfloor} \{b_j k_j + f_{j+1}(y_j - w_j k_j)\}.$$

REEMPLAZO DE EQUIPO

- ✖ Suponga que un negocio necesita tener una máquina en los próximos 5 años. Cada máquina nueva tiene un costo \$1000. El costo de mantener la máquina durante el año i -ésimo de operación es: $m_1 = \$60$, $m_2 = \$80$, y $m_3 = \$120$. Una máquina se puede usar por tres años y luego ser rematada. El valor de remate de la máquina después de i años es $s_1 = \$800$, $s_2 = \$600$, y $s_3 = \$500$. ¿Cómo podría minimizar los costos el dueño del negocio sobre un período de 5 años?.
- ✖ Las etapas están asociadas a cada año. El estado será la edad de la máquina en ese año. Las decisiones son ya sea mantener la máquina o rematarla y reemplazarla por una nueva.
- ✖ Sea $f_t(x)$ el mínimo costo desde el instante t al 5, dado que la máquina tiene x años de antigüedad en el instante t .

CONCLUSIONES

- ✖ Un problema de optimización que se pueda dividir en etapas y que sea dinámico en el tiempo puede resolverse por programación dinámica.
- ✖ Las soluciones se pueden ver de manera parcial.
- ✖ Si es posible se validan los resultados usando otros métodos de solución como programación lineal, no lineal, entera o teoría de redes.

BIBLIOGRAFÍA

- ✗ **Bertsekas, D.P.**, "Dynamic Programming; Deterministic and Stochastic Models" Academic Press, 1987.
- ✗ **Dreyfus S.E. y Law A.M.**, "The Art and Theory of Dynamic Programming", Academic Press, 1977.
- ✗ **Hiller, F. S.** "Introducción a la Investigación de Operaciones". 2008
- ✗ **Taha, H. A.** "Investigación de Operaciones". 2005