



**Aplicación del método de máxima verosimilitud
a la estimación de parámetros y comparación
de curvas de crecimiento de von Bertalanffy.**

Item Type	Journal Contribution
Authors	Aubone, A.; Wöhler, O.C.
Citation	INIDEP informe técnico, 37. p. 1-21
Publisher	Mar del Plata: Instituto Nacional de Investigación y Desarrollo Pesquero
Download date	05/12/2021 09:37:07
Link to Item	http://hdl.handle.net/1834/2541



ISSN 0327-9642

INIDEP Informe Técnico 37

Junio 2000

APLICACION DEL METODO DE MAXIMA VEROSIMILITUD A LA ESTIMACION DE PARAMETROS Y COMPARACION DE CURVAS DE CRECIMIENTO DE VON BERTALANFFY

por

Aníbal Aubone y Otto C. Wöhler

Secretaría de Agricultura, Ganadería, Pesca y Alimentación
Instituto Nacional de Investigación y Desarrollo Pesquero - INIDEP
Mar del Plata, R. ARGENTINA

El Instituto Nacional de Investigación y Desarrollo Pesquero (INIDEP) es un organismo descentralizado del Estado, creado según ley 21673, sobre la base del ex-Instituto de Biología Marina (IBM). Tiene por finalidad la formulación y ejecución de programas de investigación pura y aplicada relacionados con los recursos pesqueros, tanto en los ecosistemas marinos como de agua dulce, su explotación racional en todo el territorio nacional, y los factores económicos que inciden en la producción pesquera. Asimismo, se ocupa del estudio de las condiciones ambientales y del desarrollo de nuevas tecnologías.

La primera publicación periódica fue el Boletín del IBM que concluye con el N° 21, en diciembre de 1973. A partir del año 1979 comienza a publicarse la **Revista de Investigación y Desarrollo Pesquero**, que incluye trabajos originales preferentemente relacionados con temas pesqueros y oceanográficos que trascienden el ámbito local. Las Contribuciones del IBM aparecen en el año 1964 y se continúan con la Serie Contribuciones del INIDEP en el año 1978. A partir del año 1993 es reemplazada por la serie **INIDEP Documento Científico**. Esta publicación incluye trabajos preferentemente descriptivos o más extensos y de un marcado interés regional. Las publicaciones del INIDEP se completan desde el último año mencionado con el denominado **INIDEP Informe Técnico** que incluye temáticas dirigidas fundamentalmente al sector pesquero.

Los trabajos se aceptan en idioma español o inglés.

INIDEP, the National Institute for Fisheries Research and Development, is a decentralized state agency created by statute law 21673, on the basis of the former Institute of Marine Biology (IBM). The main objectives of INIDEP are the formulation and execution of the research programmes on basic and applied matters related to the fisheries resources in marine and freshwater ecosystems, their rational exploitation, the analysis of environmental and economic factors that control fishery production and the development of new technologies.

The first periodical publication was the **Boletín del Instituto de Biología Marina**. It came to an end with N° 21 published in December 1973. The **Revista de Investigación y Desarrollo Pesquero** was first published in 1979. It includes original articles, preferably on fisheries and oceanographic matter having a general interest to fishery biologists and oceanographers throughout the world.

The series **Contribuciones** of the IBM, that appeared in 1964, was renamed in 1978 as **Serie Contribuciones** of INIDEP. In 1993 are replaced by the series **INIDEP Documento Científico**. The series was designed to include papers of a descriptive nature, with a marked regional interest.

Since 1993 the series **INIDEP Informe Técnico** has been introduced, to include information which must be readily made available to the scientific community and fishing trade.

Submissions of papers in Spanish or English are accepted.

Secretario de Agricultura, Ganadería, Pesca y Alimentación

Dr Antonio Berhongaray

A/C de la Dirección del INIDEP

Dr Ramiro P. Sánchez

Miembros del Comité Editor

Miembro Honorario

Dr Víctor Angelescu (CONICET, Argentina)

Consejo Editor

Dr José I. Carreto (INIDEP, Argentina)

Lic. Héctor D. Cordo (INIDEP, Argentina)

Dra Juana D. de Ciechowski (CONICET-INIDEP, Argentina)

Dr Hans Lassen (ICES, Dinamarca)

Dr Jordi Lleonart (Instituto de Ciencias del Mar, España)

Lic. M. Felisa Sánchez (INIDEP, Argentina)

Dr Otto C. Wöhler (INIDEP-CONICET, Argentina)

Lic. Guillermo Verazay (INIDEP, Argentina)

Editor Responsable

Dr Enrique E. Boschi (CONICET-INIDEP, Argentina)

Editores Asociados

Dra Rut Akselman (INIDEP, Argentina)

Lic. Susana I. Bezzi (INIDEP, Argentina)

Correctores de Estilo

Dra Claudia S. Bremec (CONICET-INIDEP, Argentina)

Lic. Rubén M. Negri (INIDEP, Argentina)

Deseamos canje con publicaciones similares
Desejamos permiutar com as publicações congeneres
On prie l'échange des publications
We wish to establish exchange of publications
Austausch erwünscht

INSTITUTO NACIONAL DE INVESTIGACION Y DESARROLLO PESQUERO (INIDEP)

Casilla de Correo 175, 7600 - Mar del Plata - R. ARGENTINA

Te: 54-223-486 2586; Fax: 54-223-486 1830

Impreso en Argentina - Printed in Argentine - ISSN 0327-9642



INIDEP Informe Técnico 37

Junio 2000

APLICACION DEL METODO DE MAXIMA VEROSIMILITUD A LA ESTIMACION DE PARAMETROS Y COMPARACION DE CURVAS DE CRECIMIENTO DE VON BERTALANFFY*

por

Aníbal Aubone y Otto C. Wöhler

Secretaría de Agricultura, Ganadería, Pesca y Alimentación
Instituto Nacional de Investigación y Desarrollo Pesquero - INIDEP
Mar del Plata, R. ARGENTINA

*Contribución INIDEP N° 950

Permitida la reproducción total o parcial mencionando la fuente.
ISSN 0327 - 9642

INIDEP Informe Técnico 37
Junio 2000
Mar del Plata, República Argentina

Primera impresión: 250 ejemplares

Diagramación: María Laura Domato
José Hernández 779, 7600 - Mar del Plata

Impresión: Offset Vega
Bolivar 3715, 7600 - Mar del Plata

Resumida/indizada en: Aquatic Sciences & Fisheries Abstracts (ASFA); Agrindex; INFOMARNAP; Marine, Oceanographic & Freshwater Resources; Wildlife Worldwide; Zoological Record
--

APLICACION DEL METODO DE MAXIMA VEROSIMILITUD A LA ESTIMACION DE PARAMETROS Y COMPARACION DE CURVAS DE CRECIMIENTO DE VON BERTALANFFY*

por

Aníbal Aubone¹ y Otto C. Wöhler^{1,2}

¹ Instituto Nacional de Investigación y Desarrollo Pesquero. C.C. 175, 7600 - Mar del Plata, Argentina. E-mail: aaubone@inidep.edu.ar

² Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas. E-mail: owohler@inidep.edu.ar

SUMMARY

Application of the maximum likelihood method to von Bertalanffy's parameters estimation and growth curves comparison model. With the purpose of easing its application, the theory of parameter estimation by the maximum likelihood method is presented. The theory is general and useful for linear and nonlinear models. The method is applied to the von Bertalanffy's growth model for individual data and for mean values of length-at-age. Statistical tests to compare parameters from different population groups are presented. Problems caused by lack of verification of assumptions are discussed. An example of its application is given and results of nonlinear least squares estimations are compared to those obtained with Allen's method. An example of application implemented on a calculus spreadsheet is attached.

Key words: Maximum likelihood estimation, nonlinear models, von Bertalanffy, growth models.

RESUMEN

Con la finalidad de facilitar su aplicación, se presenta la teoría de la estimación de parámetros por el método de máxima verosimilitud. La teoría es general y útil tanto para modelos lineales como no-lineales. Se aplica al modelo de crecimiento de von Bertalanffy tanto para datos individuales como para valores medios de talla por edad. Se presentan pruebas estadísticas para la comparación de los parámetros en distintos grupos poblacionales. Se discuten los problemas que surgen por no verificarse los supuestos. Se muestra un ejemplo de aplicación comparando los resultados obtenidos con aquellos que surgen del método de Allen. Se adjunta un ejemplo de aplicación implementado en una planilla de cálculo.

Palabras clave: Máxima verosimilitud, estimación no lineal, von Bertalanffy, comparación de curvas, modelos de crecimiento.

INTRODUCCION

La correcta estimación de los parámetros de crecimiento del modelo de von Bertalanffy resulta

*Contribución INIDEP N° 950

de gran significación, dado que estos parámetros son empleados en una serie de modelos utilizados para la evaluación de recursos pesqueros.

La estimación por métodos no lineales, y en particular el método de máxima verosimilitud, ha sido descrita y aplicada al modelo de von Bertalanffy por varios autores, como Kimura (1980), Cohen & Fishman (1980), Francis (1988) y Cerrato (1990). El método de máxima verosimilitud aplicado a un modelo paramétrico, consiste en asignar un valor al conjunto de parámetros tal que los datos observados adquieran máxima probabilidad de haber resultado bajo el modelo asumido. Realiza por lo tanto una correcta estimación de los parámetros y aporta también una herramienta para la comparación de curvas de crecimiento.

A pesar de que el método de máxima verosimilitud fue desarrollado hacia mediados de siglo, aún se siguen empleando metodologías aproximadas para el cálculo de los parámetros del modelo de von Bertalanffy, tales como los métodos de Ford (1933), Walford (1946) y Gulland & Holt (1959). Estas metodologías utilizan simplificaciones sin resolver el problema real de mínimos cuadrados no lineales. La comparación de curvas de crecimiento ha sido también un tema tratado ampliamente (Rao, 1958; Allen, 1976; Gallucci y Quinn, 1979; Kimura, 1980; Misra, 1980; Bernard, 1981; Kappenman, 1981; Munro y Pauly, 1983; Pauly y Munro, 1984; Cerrato, 1990; Hansen *et al.*, 1991 y 1993, entre otros).

El presente trabajo no constituye un desarrollo novedoso de la metodología, sino que persigue un fin divulgativo y práctico tendiente a facilitar la aplicación de la misma en estudios de crecimiento. Tal finalidad ha sido adoptada debido a que en los trabajos citados precedentemente por lo general se han abordado aspectos puntuales del método, no dándosele un enfoque suficientemente abarcativo ni explicativo que permita su uso mediante su implementación en las planillas de cálculo de uso común. Se describe entonces aquí el método de máxima verosimilitud para la estimación de parámetros de un modelo de regresión, en principio sin asumir ningún modelo en particular, para así mostrar una teoría general que puede ser aplicada tanto en problemas de regresión lineal simple, regresión lineal múltiple o modelos no lineales. Se aplica el método a la estimación de los parámetros de crecimiento de von Bertalanffy, analizándose los supuestos y los problemas que surgen ante la violación de los mismos. Por último, se aplican pruebas estadísticas para la comparación de curvas, y se pone a disposición de quien lo requiera, una planilla de cálculo diseñada para la aplicación de la metodología.

ESTIMACION DE PARAMETROS EN MODELOS NO LINEALES

La estimación de modelos no lineales presenta cierta complejidad porque cuando se adopta el principio de mínimos cuadrados o el de máxima verosimilitud, la condición necesaria de minimización o maximización no se puede resolver en forma analítica. Consecuentemente, las estimaciones por mínimos cuadrados o máxima verosimilitud deben obtenerse iterativamente por métodos numéricos. Para emplear estos métodos es necesario conocer una aproximación inicial a la solución de mínimos cuadrados. En general, la solución aproximada debe ser suficientemente cercana al valor óptimo, pues la suma de cuadrados que se minimiza puede presentar varios mínimos locales, o puede suceder que el método numérico no converja si la solución inicial no es una buena aproximación a la buscada.

La inferencia estadística en modelos no lineales se basa en las distribuciones asintóticas de las estimaciones de máxima verosimilitud.

En general, el estimador de máxima verosimilitud (EMV), para modelos no lineales *no es normalmente distribuido, no es insesgado y no es el estimador de mínima varianza*. El estimador de máxima verosimilitud en modelos no lineales tiene propiedades desconocidas para muestras pequeñas. Sin embargo a medida que el tamaño de la muestra crece se pueden predecir las propiedades que el esti-

mador va adquiriendo. Bajo estas circunstancias, la teoría asintótica asegura que el estimador de máxima verosimilitud tiende a ser insesgado, normalmente distribuido, y se aproxima a la varianza mínima (Kendall y Stuart, 1967). Además, en general no es posible estimar un tamaño de muestra mínimo para el cual las propiedades asintóticas se verifiquen aproximadamente. Hay ejemplos de modelos no lineales en los cuales las propiedades asintóticas se verifican bastante aproximadas aún para muestras pequeñas, y otros modelos donde teniendo muestras de tamaño grande las propiedades son todavía muy pobremente aproximadas (Ratkowsky, 1983). Las propiedades asintóticas de los EMV no lineales afectan a las pruebas estadísticas que se realicen sobre los parámetros, por lo tanto hay que tener en cuenta el tamaño de la muestra en toda inferencia estadística que se haga.

Estimación por máxima verosimilitud

Si se parte de un modelo de la forma $l_t = \mu(\theta, t) + \varepsilon_t$, donde ε_t es un término de error aleatorio con la misma distribución para todo t , y $\mu(\theta, t)$ es el valor esperado de la variable l_t para cada valor de t , la función de verosimilitud de una muestra de N observaciones independientes es

$$L(\theta, l_1, \dots, l_N) = f(l_1 | \theta) \cdot f(l_2 | \theta) \cdots f(l_N | \theta) \quad (2.1.1)$$

donde f es la función de densidad de la variable observada l , de forma conocida pero dependiendo de un vector de parámetros θ desconocido.

La estimación de máxima verosimilitud de los parámetros $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)$ es el valor θ_{mv} que maximiza la función (2.1.1), o más generalmente su logaritmo, $\ln(L)$. Aquí no es necesario aplicar logaritmos, pero debido a que es más fácil trabajar con sumas que con productos es lo que se suele hacer.

El estimador de máxima verosimilitud (EMV) es aquel que sea solución de la ecuación vectorial

$$\delta \ln(L) / \delta \theta = 0 \quad (2.1.2)$$

que es la condición necesaria de extremo.

Aquí $\ln(L)$ es una función que depende de la muestra, y de un vector θ ; la condición (2.1.2) expresa que el vector de primeras derivadas parciales de $\ln(L)$, en θ_{mv} , debe ser cero.

Dado que

$$\delta \ln(L) / \delta \theta = (\delta \ln(L) / \delta \theta_1, \dots, \delta \ln(L) / \delta \theta_m) = (0, \dots, 0)$$

resulta

$$\delta \ln(L) / \delta \theta_i = 0, \quad \text{para todo } i=1, \dots, m \quad (2.1.3)$$

Así (2.1.3) es un sistema de ecuaciones en general no lineal, cuya solución es el EMV. Estas ecuaciones se denominan ecuaciones normales, y en el caso de modelos lineales (regresión lineal) las ecuaciones normales forman un sistema de ecuaciones lineales en las incógnitas $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$. En este caso las ecuaciones son fáciles de resolver. Sin embargo, en general, éste es un sistema no lineal, y muy difícil de resolver analíticamente. Es necesario entonces recurrir a métodos numéricos.

El estimador de máxima verosimilitud tiene propiedades deseables, en el sentido que se distribuye asintóticamente con distribución normal (a medida que el tamaño de la muestra crece su dis-

tribución se aproxima más a la normal), y es asintóticamente insesgado (la media tiende a ser θ para muestras grandes). La matriz de covarianza $I(\theta)^{-1}$, es la inversa de la matriz de información

$$I(\theta) = -E(\delta^2 \ln(L) / \delta \theta \delta \theta')$$

El EMV es consistente (converge en probabilidad al verdadero parámetro) y asintóticamente eficiente (es asintóticamente el de menor varianza). Esto es, cualquier otro estimador de θ que sea consistente y asintóticamente normal tiene una matriz asintótica de covarianza más grande que $I(\theta)^{-1}$ (en el sentido que sus elementos son mayores).

En el caso de modelos lineales, las propiedades del EMV dejan de ser asintóticas para hacerse exactas.

Asumiendo que los términos de error ε_i tienen distribución normal $N(0, \sigma^2)$, el estimador de máxima verosimilitud θ_{mv} es también el estimador de mínimos cuadrados ordinarios θ_{mco} , y una estimación de la varianza de error σ^2 , insesgada es $s^2 = S(\theta)/(N-m)$.

Para deducir ésto, si el modelo es $l_i = \mu(\theta, t_i) + \varepsilon_i$, la dependencia de l respecto de la variable t permite poner la función de verosimilitud en términos de t_1, \dots, t_N :

$$L(\theta, t_1, \dots, t_N) = f(t_1 | \theta) \cdot f(t_2 | \theta) \cdots f(t_N | \theta)$$

donde θ será el vector de parámetros del modelo.

$$f(t_i | \theta) = \exp(-(l_i - \mu(\theta, t_i))^2 / (2 \cdot \sigma^2)) / (2 \cdot \Pi \cdot \sigma^2)^{1/2}$$

entonces la función de máxima verosimilitud queda

$$L(\theta, t_1, \dots, t_N) = \exp(-S(\theta)/(2 \cdot \sigma^2)) / (2 \cdot \Pi \cdot \sigma^2)^{N/2} \quad (2.1.4)$$

$$\text{donde } S(\theta) = \sum_{i=1, N} [l_i - \mu(\theta, t_i)]^2 \quad (2.1.5)$$

Si se aplican logaritmos en (2.1.4) se tiene que

$$\ln L = \ln ((2 \cdot \Pi \cdot \sigma^2)^{-N/2}) - S(\theta)/(2 \cdot \sigma^2) \quad (2.1.6)$$

Entonces, maximizar (2.1.4) sobre θ es equivalente a maximizar (2.1.6) sobre θ ya que \ln es una función monótona creciente. Pero maximizar (2.1.6) es equivalente a minimizar $S(\theta)$ sobre θ . De aquí que el estimador θ_{mv} coincida con el estimador de mínimos cuadrados θ_{mco} .

Para calcular una estimación de máxima verosimilitud de σ^2 , se deriva (2.1.6) con respecto a σ y se iguala la derivada a cero (condición necesaria de extremo). El estimador de máxima verosimilitud de σ será aquel que verifique la ecuación

$$\delta \ln L / \delta \sigma = 0$$

y resulta ser entonces $s_{mv}^2 = S(\theta)/N$. Esta estimación resulta ser sesgada, debiendo corregirse por los grados de libertad para obtener un estimador insesgado $s^2 = S(\theta)/(N-m)$.

Los supuestos que se han tenido en cuenta son :

- 1) distribución normal en los términos de error.
- 2) igualdad de varianzas de los errores (homocedasticidad).
- 3) independencia de las observaciones.

Estimación de los parámetros cuando se violan los supuestos

La distribución de los términos de error no es normal

Suponiendo que los términos de error son idénticamente distribuidos, independientes y con media 0, si se conociera la distribución se podría hallar la estimación de máxima verosimilitud, pero habría que deducir las fórmulas correspondientes para calcularla. Desconociendo la distribución, el estimador de mínimos cuadrados ordinarios podría hallarse, pero no se pueden hacer pruebas estadísticas sobre los parámetros poblacionales.

Una manera de solucionar el problema de no normalidad de los errores, puede ser considerar los promedios observados de la variable l_t . El modelo con valores medios será $l_t = \mu(\theta, t) + \tau_t$, y tendrá errores que se distribuyen aproximadamente normales $\tau_t \approx N(0, \sigma_t^2)$, donde σ_t^2 es la varianza de l_t , el valor medio de l para t .

Para muestras grandes, la distribución de los errores será más aproximadamente normal (por el Teorema Central del Límite), y las propiedades del estimador minimocuadrático serán aproximadas a las del EMV.

Errores heterocedásticos

Se dice que hay presencia de heterocedasticidad cuando las varianzas de los términos de error no son iguales para todo t . En este caso, se corrige el modelo para llevarlo a uno de la forma homocedástica.

Considerando un modelo de la forma $l_t = \mu(\theta, t) + \varepsilon_t$, donde ε_t es un término de error aleatorio con distribución normal para todo t , $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_t^2)$, y $\mu(\theta, t)$ es el valor esperado de la variable l_t para cada valor de t , si se efectúa

$$l_t/\sigma_t = \mu(\theta, t)/\sigma_t + \varepsilon_t/\sigma_t$$

se tiene un modelo modificado

$$l'_t = \mu'(\theta, t) + \tau_t, \quad (2.2.1)$$

donde $l'_t = l_t/\sigma_t$; $\mu'(\theta, t) = \mu(\theta, t)/\sigma_t$ y $\tau_t = \varepsilon_t/\sigma_t$

y así $\tau_t \sim N(0, 1)$

Conociendo σ_t , para todo t , pueden estimarse los parámetros del modelo (2.2.1) por mínimos cuadrados ordinarios. La suma de cuadrados quedará

$$S(\theta) = \sum_{i=1, N} [l'_{ti} - \mu'(\theta, t_i)]^2$$

que reescrita con las variables originales queda

$$S'(\theta) = \sum_{i=1,N} [l_{ti} - \mu(\theta, t_i)]^2 / \sigma_{ti}^2 \quad (2.2.2)$$

Sin embargo, las varianzas de los términos de error son generalmente desconocidas, por lo que se estiman a partir de la muestra. Se designa por s_i^2 a la estimación de la varianza del término de error ε_i . Entonces si se reemplaza σ_i^2 por s_i^2 en (2.2.2), se tendrá una suma de cuadrados

$$\check{S}(\theta) = \sum_{i=1,N} [l_{ti} - \mu(\theta, t_i)]^2 / s_{ti}^2 \quad (2.2.3)$$

que minimizada proporciona los estimadores de mínimos cuadrados generalizados factibles (MCGF).

Si se viola el supuesto de homocedasticidad, los estimadores obtenidos por mínimos cuadrados ordinarios no son asintóticamente eficientes, ésto es, no son los de mínima varianza asintótica, por lo que se genera una mayor incertidumbre en el análisis. La corrección del modelo expuesta anteriormente permite encontrar los estimadores con las propiedades deseables.

Las observaciones no son independientes

Suponiendo que los errores se distribuyen idénticamente, con distribución $N(0, \sigma^2)$, la independencia de las observaciones interviene al formar la función de verosimilitud. Si las observaciones están correlacionadas las estimaciones no son de mínima varianza (asintótica). Esto, análogamente al problema de heterocedasticidad, genera mayor incertidumbre que la deseada sobre las estimaciones y hace dudoso todo el análisis. Prácticamente no hay remedio para este problema. Se podrían obtener estimaciones asintóticamente eficientes de los parámetros si se conociera la estructura de la matriz de covarianza de los términos de error, pero esta matriz generalmente no se puede estimar.

Si por algún método o supuesto se pudieran estimar las covarianzas entre los errores, la suma que queda a minimizar es

$$S(\theta) = \sum_{i=1,N} \text{cov}(\varepsilon_{ti}, \varepsilon_{tj}) \cdot [l_{ti} - \mu(\theta, t_i)] \cdot [l_{tj} - \mu(\theta, t_j)]$$

donde $\text{cov}(\varepsilon_{ti}, \varepsilon_{tj})$ es una estimación de la covarianza entre ε_{ti} y ε_{tj} . La minimización de $S(\theta)$ resulta en los EMV llamados de mínimos cuadrados generalizados factibles (MCGF).

EL MODELO DE VON BERTALANFFY Y SU ESTIMACION

Estimaciones de los parámetros a partir de datos individuales

Usando la notación usual:

$$l_t = L_{\infty} \cdot (1 - \exp(-K \cdot (t - T_0))) + \varepsilon_t$$

donde l_t es la talla de un individuo a la edad t ; L_{∞} es la talla asintótica; K es una constante que describe la rapidez con que los individuos alcanzan la talla asintótica y T_0 es la edad hipotética para la cual la talla es cero. Los ε_t son errores aleatorios, que en principio se suponen con igual distribución, independientes entre sí, con $E(\varepsilon_t) = 0$ y $\text{VAR}(\varepsilon_t) = \sigma^2$.

$$(3.1.1)$$

Los parámetros poblacionales L_∞ , K y T_0 permiten describir, en promedio, el crecimiento de los individuos de la población en función de la edad

$$E(l_t | t) = L_\infty \cdot (1 - \exp(-K \cdot (t - T_0))) \quad (3.1.2)$$

para $\mu(t) = E(l_t | t)$.

En el modelo (3.1.2), los parámetros poblacionales pueden estimarse por mínimos cuadrados ordinarios (MCO), minimizando la suma de cuadrados de los errores

$$S(L_\infty, K, T_0) = \sum_{i=1, N} [l_{ti} - \mu(t_i)]^2 \quad (3.1.3)$$

sobre L_∞ , K y T_0 . Aquí l_{ti} es la talla del ejemplar i , a la edad t_i .

Si se desconoce la distribución de los términos de error, básicamente se pueden hallar estimaciones de los parámetros por mínimos cuadrados, pero se está limitado para realizar cualquier inferencia estadística. Una hipótesis adicional que soluciona esto, es suponer que los términos de error ε_i tienen distribución normal. Bajo los supuestos del modelo (3.1.1) y considerando la distribución normal en los errores, se pueden encontrar las estimaciones de máxima verosimilitud de los mismos, que coinciden con las estimaciones por mínimos cuadrados ordinarios.

Estimación de los parámetros a partir de los valores medios

Suponiendo que l_t^- es el valor medio de la variable l_t , calculado sobre los individuos muestreados a la edad t , con $t = 1, \dots, I$. Sean n_1, n_2, \dots, n_I los tamaños de las muestras a partir de las cuales se calcularon los promedios. Considerando también que s_t^2/n_t es la varianza estimada a partir de la muestra, de la talla media para la edad t . En este caso s_t^2 es la varianza estimada de la variable talla para la edad t .

Entonces si se considera el modelo

$$l_t = L_\infty \cdot (1 - \exp(-K \cdot (t - T_0))) + \varepsilon_t$$

donde se supone que $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_t^2)$, resulta que para los valores medios se tiene:

$$l_t^- = L_\infty \cdot (1 - \exp(-K \cdot (t - T_0))) + \tau_t$$

Si la $\text{VAR}(\tau_t) = \sigma^2$ es independiente de la edad, el problema es de mínimos cuadrados ordinarios.

Si $\text{VAR}(\tau_t) = \sigma_t'^2$ depende de t , se puede corregir este problema de la siguiente forma:

$$l_t^- / \sigma_t' = L_\infty \cdot (1 - \exp(-K \cdot (t - T_0))) / \sigma_t' + \tau_t / \sigma_t'$$

de esta forma la varianza de error es $\text{VAR}(\tau_t / \sigma_t') = 1$, cumpliendo con el supuesto de homocedasticidad.

La suma de cuadrados a minimizar queda en este caso

$$S(L_\infty, K, T_0) = \sum_{t=1, I} [l_t^- - \mu(t)]^2 / \sigma_t'^2$$

A menos que se conozca el valor de $\sigma_t'^2$ para cada t , se debe estimar cada varianza de error y al reemplazar en la suma de cuadrados anterior, queda un problema de mínimos cuadrados generalizados factibles

$$\check{S}(L_\infty, K, T_0) = \sum_{t=1, I} [l_t - \mu(t)]^2 \cdot n_t / s_t^2 \quad (3.2.1)$$

Estimación de la matriz de covarianza de los estimadores

La matriz asintótica de covarianza de θ_{mv} es la inversa de la matriz de información $I(\theta_{mv})^{-1}$ (Kendall y Stuart, 1967), donde $I(\theta_{mv}) = (I_{ij})$, con

$$I_{ij} = -E[\delta^2 \ln(L(\theta_{mv}, t_1, \dots, t_N)) / \delta\theta_{mvi} \delta\theta_{mvj}]$$

Por mínimos cuadrados se puede estimar $I(\theta_{mv})^{-1}$ usando

$$W = (Z' \cdot Z)^{-1} \cdot s^2$$

donde $Z = (Z_{ij})$, y Z_{ij} es la derivada parcial de μ con respecto al parámetro j , evaluada en la observación i , donde se toma θ_{mco} ; en tanto s^2 es una estimación insesgada de σ^2 .

Si $\mu(t) = l_\infty \cdot (1 - \exp(-k \cdot (t - t_0)))$, donde l_∞ , k y t_0 son las estimaciones por mínimos cuadrados ordinarios de L_∞ , K y T_0 , respectivamente, entonces

$$\begin{aligned} \delta\mu/\delta l_\infty &= (1 - \exp(-k \cdot (t - t_0))), \\ \delta\mu/\delta k &= l_\infty \cdot (t - t_0) \cdot \exp(-k \cdot (t - t_0)), \text{ y} \\ \delta\mu/\delta t_0 &= -l_\infty \cdot k \cdot \exp(-k \cdot (t - t_0)) \end{aligned}$$

y así resulta la matriz Z cuyas filas están formadas por los vectores

$$(\delta\mu/\delta l_\infty(t_i) \quad \delta\mu/\delta k(t_i) \quad \delta\mu/\delta t_0(t_i)), \text{ con } i=1, \dots, I$$

donde I es el número de edades y $s^2 = S(l_\infty, k, t_0)/(N-3)$.

En este caso, que abarca **el modelo con datos individuales**, se estima la matriz de covarianza de los estimadores efectuando

$$W = (Z' \cdot Z)^{-1} \cdot s^2$$

En el **caso de tener un modelo con errores heterocedásticos**,

$$\mu'(t) = l_\infty \cdot (1 - \exp(-k \cdot (t - t_0))) / s_t,$$

donde l_∞ , k y t_0 son las estimaciones por mínimos cuadrados generalizados factibles de L_∞ , K y T_0 , respectivamente, y s_t es la estimación de la dispersión de l_t , entonces

$$\begin{aligned}\delta\mu'/\delta l_\infty &= (1 - \exp(-k \cdot (t-t_0)))/s_t, \\ \delta\mu'/\delta k &= l_\infty \cdot (t-t_0) \cdot \exp(-k \cdot (t-t_0))/s_t, \text{ y} \\ \delta\mu'/\delta t_0 &= -l_\infty \cdot k \cdot \exp(-k \cdot (t-t_0))/s_t\end{aligned}$$

y así resulta la matriz Z cuyas filas están formadas por los vectores

$$(\delta\mu'/\delta l_\infty(t_i) \quad \delta\mu'/\delta k(t_i) \quad \delta\mu'/\delta t_0(t_i)) \text{ con } i=1,\dots,I \quad (3.3.1)$$

Nuevamente, efectuando $W = (Z'Z)^{-1} \cdot s^2$, se estima la matriz de covarianza de los estimadores.

En el caso de trabajar con datos promedio de l_t y un modelo con errores heterocedásticos, resulta

$$\mu'(t) = l_\infty \cdot (1 - \exp(-k \cdot (t-t_0))) \cdot \sqrt{n_t}/s_t,$$

donde l_∞ , k y t_0 son las estimaciones por mínimos cuadrados generalizados factibles de L_∞ , K y T_0 , respectivamente, y $s_t/\sqrt{n_t}$ es la estimación de la dispersión de l_t , entonces

$$\begin{aligned}\delta\mu'/\delta l_\infty &= (1 - \exp(-k \cdot (t-t_0))) \cdot \sqrt{n_t}/s_t, \\ \delta\mu'/\delta k &= l_\infty \cdot (t-t_0) \cdot \exp(-k \cdot (t-t_0)) \cdot \sqrt{n_t}/s_t \\ \delta\mu'/\delta t_0 &= -l_\infty \cdot k \cdot \exp(-k \cdot (t-t_0)) \cdot \sqrt{n_t}/s_t\end{aligned}$$

y la matriz Z queda con la notación de (3.3.1), y W se calcula como en los casos anteriores.

PRUEBA DE HIPOTESIS DE IGUALDAD DE PARAMETROS DE CRECIMIENTO PRUEBA DEL COCIENTE DE VEROSIMILITUDES

Suponiendo que se tienen dos grupos poblacionales descritos por los modelos

$$\begin{aligned}l_{1t} &= \mu(\theta_1, t) + \varepsilon_{1t}, \text{ para el primer grupo} \\ l_{2t} &= \mu(\theta_2, t) + \varepsilon_{2t}, \text{ para el segundo grupo}\end{aligned} \quad (*)$$

y que además $\text{VAR}(\varepsilon_{1t}) = \text{VAR}(\varepsilon_{2t}) = \sigma^2$, para todo t .

Si se escribe

$$S(\theta_1, \theta_2) = \sum_{i=1,I} [l_{1i} - \mu(\theta_1, t_i)]^2 + \sum_{j=1,J} [l_{2j} - \mu(\theta_2, t_j)]^2$$

resulta que

$$L(\theta_1, \theta_2) = \exp[-S(\theta_1, \theta_2)/(2 \cdot \sigma^2)] / (2 \cdot \pi \cdot \sigma^2)^{N/2} \quad (4.1)$$

es la función de verosimilitud de la muestra combinada (en la notación se suprime la dependencia de L de las edades t_i). Aquí $N = I+J$ es la suma del número de clases de edad en el primer grupo más el segundo.

Para probar la hipótesis $\theta_1 = \theta_2 = \theta$. Entonces

$$L(\theta, \theta) = \exp[-S(\theta, \theta)/(2 \cdot \sigma^2)] / (2 \cdot \pi \cdot \sigma^2)^{N/2} \quad (4.2)$$

es la función de verosimilitud de la muestra combinada con la restricción de igualdad de parámetros $\theta_1 = \theta_2$, por lo que el modelo con $\theta_1 = \theta_2$, se llamará modelo restringido.

La función (4.1) se maximiza en $(\theta_{1mv}, \theta_{2mv})$, parámetros que hacen mínimo a $S(\theta_1, \theta_2)$. Se puede probar que θ_{1mv} es el estimador de máxima verosimilitud para la población 1 y θ_{2mv} es el estimador de máxima verosimilitud para la población 2. La estimación por máxima verosimilitud de σ^2 está dada por $s^2 = S(\theta_{1mv}, \theta_{2mv})/N$. Entonces el valor máximo de la función de verosimilitud es

$$\begin{aligned} L(\theta_{1mv}, \theta_{2mv}) &= \exp[-S(\theta_{1mv}, \theta_{2mv})/(2 \cdot s^2)] / (2 \cdot \pi \cdot s^2)^{N/2} \\ &= (\pi \cdot S(\theta_{1mv}, \theta_{2mv})/N)^{-N/2} \cdot \exp(-N/2) \end{aligned}$$

y para el modelo restringido

$$\begin{aligned} L(\theta_{mv}, \theta_{mv}) &= \exp[-S(\theta_{mv}, \theta_{mv})/(2 \cdot s^2)] / (2 \cdot \pi \cdot s^2)^{N/2} \\ &= (\pi \cdot S(\theta_{mv}, \theta_{mv})/N)^{-N/2} \cdot \exp(-N/2) \end{aligned}$$

Entonces si $\Delta = L(\theta_{mv}, \theta_{mv})/L(\theta_{1mv}, \theta_{2mv})$ es el cociente de verosimilitudes,

puede ser reescrito como

$$\Delta = [S(\theta_{1mv}, \theta_{2mv})/S(\theta_{mv}, \theta_{mv})]^{N/2}$$

$$\text{y resulta que } -2 \cdot \ln(\Delta) = -N \cdot \ln(S(\theta_{1mv}, \theta_{2mv})/S(\theta_{mv}, \theta_{mv})) \quad (4.3)$$

se distribuye *asintóticamente* como $\chi^2(g)$, donde g son los grados de libertad; siendo g la cantidad de restricciones lineales. En este caso como $\theta_1 = (\theta_{11}, \dots, \theta_{m1})$ y $\theta_2 = (\theta_{12}, \dots, \theta_{m2})$, se tienen las siguientes restricciones

$$\begin{aligned} \theta_{11} &= \theta_{21} \\ \theta_{12} &= \theta_{22} \\ &\dots\dots\dots \\ \theta_{m1} &= \theta_{m2} \end{aligned}$$

que son m , la cantidad de parámetros, luego $g = m$.

El valor observado de χ^2 se compara con el valor crítico a un nivel de significación α adecuado. Si χ^2 observado es mayor que el valor crítico se rechaza H_0 , la hipótesis de igualdad de parámetros poblacionales.

Esta misma prueba de hipótesis puede usarse para probar que un determinado parámetro poblacional es igual a un valor dado, en un modelo para una sola población. Por ejemplo si $H_0 : \theta_i = \theta_{i0}$, la χ^2 que resulta tendrá 1 grado de libertad. Con esta prueba podría docimarse, por ejemplo, la hipótesis $T_0 = 0$, en el modelo de von Bertalanffy.

Debe tenerse en cuenta que esta prueba de hipótesis requiere del cálculo del estimador del modelo (*) y del modelo restringido. El cálculo del estimador del modelo (*) se obtiene calculando, para cada muestra separadamente, los valores de θ_{1mv} y θ_{2mv} respectivamente; y para el modelo restringido se forma una muestra combinada con todas las observaciones y se estima θ_{mv} , minimizando $S(\theta, \theta)$.

Como la prueba del cociente de verosimilitudes lleva a un estadístico con distribución asintótica χ^2 , la validez de esta prueba va a depender del tamaño de la muestra. Es de esperar entonces que la distribución sea más aproximada a χ^2 usando datos individuales que los promedios.

PRUEBA F

Gallant (1975) probó que Δ^{-2N} converge asintóticamente a una variable aleatoria cuya distribución bajo la hipótesis nula es una función de la distribución F de Fisher. Así resulta que la hipótesis nula se rechaza a un nivel de significación α cuando $\Delta^{-2N} > (1 + F(g, f_1 + f_2, 1 - \alpha) \cdot g / (f_1 + f_2))$, siendo $f_1 = I - m$ y $f_2 = J - m$, donde I es el número de observaciones para la primer muestra y J para la segunda; y además $N = I + J$ y g es la cantidad de restricciones lineales (si se comparan todos los parámetros será m).

Resulta que la prueba F es más conservativa que la $\chi^2 = -2 \cdot \ln(\Delta)$, ya que si se rechaza la hipótesis nula usando la misma, se rechazará con la prueba χ^2 .

Regiones de confianza para los parámetros

La región de confianza se define por $S(\theta, t_1, \dots, t_N) = c$, constante, pero debido a que no se conocen las propiedades de distribución reales, se imposibilita obtener un nivel específico de probabilidad.

Se puede, por ejemplo tomar la región

$$S(\theta, t_1, \dots, t_N) = S(\theta_{mv}, t_1, \dots, t_N) \cdot [1 + F(m, N - m, 1 - \alpha) \cdot I / (N - m)] \quad (5.1.1)$$

donde m es el número de parámetros en el modelo.

Si el modelo es lineal esta fórmula provee una región exacta de confianza al $100 \cdot (1 - \alpha) \%$ (Draper y Smith, 1981). Si el modelo no es lineal, dará una región aproximada al nivel $100 \cdot (1 - \alpha) \%$. Para dos parámetros ($m=2$) la región de confianza podría dibujarse en el plano, y para tres parámetros en tres dimensiones. Para más parámetros habría que considerar las secciones obtenidas fijando todos salvo dos o tres.

Debe destacarse que la región de confianza aproximada será una buena aproximación de la correcta, si el modelo no lineal se comporta aproximadamente lineal en un entorno del estimador de máxima verosimilitud. Esto es, la aproximación de primer orden en el desarrollo de Taylor, con respecto a los parámetros, es una buena aproximación.

Regiones de confianza para los parámetros del modelo de von Bertalanffy

Para el modelo de von Bertalanffy, la región de confianza queda definida por

$$S(L_{\infty}, K, T_0) = S(l_{\infty}, k, t_0) \cdot [1 + F(3, N - 3, 1 - \alpha) \cdot 3 / (N - 3)]$$

$$\text{Si } c_\alpha = S(l_\infty, k, t_0) \cdot [1 + F(3, N-3, 1-\alpha) \cdot 3/(N-3)]$$

se tiene que

$$S(L_\infty, K, T_0) = c_\alpha \quad (5.2.1)$$

si $d_t = 1 - \exp(-K \cdot (t - T_0))$ y se desarrolla la suma de cuadrados, se tiene

$$S(L_\infty, K, T_0) = \sum_t [l_t^2 - 2 \cdot L_\infty \cdot l_t \cdot d_t + L_\infty^2 \cdot d_t^2]$$

entonces si

$$A = \sum_t d_t^2 \quad ; \quad B = -2 \cdot \sum_t l_t \cdot d_t \quad \text{y} \quad C = \sum_t l_t^2 - c_\alpha$$

resulta

$$A \cdot L_\infty^2 + B \cdot L_\infty + C = 0 \quad (5.2.2)$$

Así un punto (L_∞, K, T_0) está en el contorno de la región de confianza si y sólo si $B^2 - 4 \cdot A \cdot C \geq 0$. Los puntos sobre el contorno de la región de confianza se pueden encontrar, por ejemplo, fijando un valor de T_0 y calculando la región que queda para (L_∞, K) , tomando valores posibles de K que den $B^2 - 4 \cdot A \cdot C \geq 0$, y despejando L_∞ de (5.2.2)

$$L_\infty = (-B \pm (B^2 - 4 \cdot A \cdot C)^{1/2}) / (2 \cdot A)$$

Al variar T_0 , este algoritmo permite tener una visión de la región de confianza. Si se fija $T_0 = t_0$, la estimación de máxima verosimilitud de T_0 , la sección (L_∞, K) provee una impresión de la confianza que se puede tener en los estimadores l_∞ y k .

En el caso de presencia de heterocedasticidad, la región de confianza se determina teniendo en cuenta ahora que

$$S(L_\infty, K, T_0) = \sum_t (1/\sigma_t^2) \cdot [l_t^2 - 2 \cdot L_\infty \cdot l_t \cdot d_t + L_\infty^2 \cdot d_t^2]$$

$$\text{y} \quad A = \sum_t d_t^2 / \sigma_t^2 \quad ; \quad B = -2 \cdot \sum_t l_t \cdot d_t / \sigma_t^2 \quad \text{y} \quad C = \sum_t l_t^2 / \sigma_t^2 - c_\alpha$$

En el caso de tener datos promedio

$$c_\alpha = S(l_\infty, k, t_0) \cdot [1 + F(3, I-3, 1-\alpha) \cdot 3/(I-3)]$$

$$S(L_\infty, K, T_0) = \sum_t (n_t/s_t^2) \cdot [l_t^2 - 2 \cdot L_\infty \cdot l_t \cdot d_t + L_\infty^2 \cdot d_t^2]$$

$$\text{y} \quad A = \sum_t d_t^2 \cdot n_t / s_t^2 \quad ; \quad B = -2 \cdot \sum_t l_t \cdot d_t \cdot n_t / s_t^2 \quad \text{y} \quad C = \sum_t l_t^2 \cdot n_t / s_t^2 - c_\alpha$$

Perfiles de probabilidad e intervalos de confianza de los parámetros

La razón de verosimilitudes puede ser utilizada para probar hipótesis sobre los parámetros y para construir límites de confianza para los mismos.

Por ejemplo si para un parámetro θ_i se fija la hipótesis nula $H_0 : \theta_i = \theta_{i0}$, la prueba $\chi^2(\theta_{i0}) = -2 \cdot \ln(\Delta)$ que resulta, verifica

$$P[\chi^2 \geq \chi^2(\theta_{i0})] = \alpha(\theta_{i0})$$

El perfil de probabilidades surge de la función $\alpha(\theta_{i0})$ al variar θ_{i0} , y muestra para cada θ_{i0} el nivel de significación crítico al cual se rechaza la hipótesis nula $H_0 : \theta_i = \theta_{i0}$. Esto es, si se fija un nivel de significación α para la prueba de hipótesis, si $\alpha > \alpha(\theta_{i0})$ se rechazará H_0 . $\alpha(\theta_{i0})$ es la probabilidad de cometer un error del tipo I (rechazar H_0 cuando es verdadera). Entonces, fijado un nivel de significación α , se puede encontrar un intervalo en el cual toda hipótesis nula que se haga sobre θ_i con valores θ_{i0} en ese intervalo, será aceptada. Así, para encontrar el intervalo de confianza, basta determinar los valores de $\alpha(\theta_{i0})$ que sean mayores que el α fijado como nivel de significación.

Los límites del intervalo de confianza quedan determinados por los valores de θ_{i0} que verifiquen $\alpha(\theta_{i0}) = \alpha$.

Esto es equivalente a resolver la ecuación

$$\chi^2(\theta_{i0}) = -2 \cdot \ln(\Delta) = \chi^2(1, \alpha) \quad (5.3.1)$$

para θ_{i0} .

Notar que la ecuación (5.3.1) requiere de métodos numéricos para su resolución, debido a que para cada θ_{i0} hay que encontrar los estimadores de máxima verosimilitud de los parámetros restantes.

Una solución aproximada se obtiene haciendo una grilla suficientemente fina de valores de θ_{i0} y tomando $\alpha(\theta_{i0})$ lo más próximo a α .

EJEMPLO

El procedimiento general para la estimación de los parámetros y la comparación de curvas puede ser resumido en los siguientes pasos:

- 1) Obtención de los datos básicos (individuales o agrupados).
- 2) Prueba de normalidad de los términos de error (si hay suficientes datos para ello). Prueba de homocedasticidad de los términos de error.
- 3) Estimación inicial de los parámetros del modelo, para ser utilizados como semilla en el ajuste por mínimos cuadrados.
- 4) Obtención de los estimadores por MCO o MCGF (según los resultados del punto 2), mediante procedimientos numéricos.
- 5) Cálculo de los perfiles de probabilidad e intervalos de confianza de los parámetros.
- 6) Prueba de hipótesis para la comparación de curvas (si se tienen datos para ello).

Para la implementación de la metodología en una planilla de cálculo, ésta debe contar con una rutina de optimización que permita hallar soluciones de mínimos cuadrados por procedimientos numéricos. EXCEL o QUATTRO PRO son dos planillas de cálculo apropiadas para este fin. Aunque sea trabajoso implementar las fórmulas por primera vez, el usuario pronto se dará cuenta del poder de cálculo que adquiere y la independencia en la aplicación de la metodología y obtención de los resultados que le interesan. Si se desea se puede solicitar a los autores la planilla de cálculo con el ejemplo aquí presentado.

El ejemplo de aplicación de la metodología ha sido realizado sobre datos de talla y edad de la polaca (*Micromesistius australis*), cedidos por la Lic. Cristina Cassia, del Area de Pesquerías Demersales del INIDEP. El modelo ajustado es el de von Bertalanffy, considerándose los valores medios de talla por edad para machos y hembras (Tabla 1).

Una vez ingresados los datos el próximo paso consiste en realizar una prueba de homocedasticidad sobre los términos de error. Puede utilizarse la prueba de Bartlett o la prueba F de Fisher para comparar las varianzas. Debe observarse que $\text{VAR}(l_t) = \text{VAR}(\epsilon_t)$ ($\text{VAR}(l_t) = \text{VAR}(\tau_t)$) para cada edad t , así que basta con probar la homocedasticidad de la variable talla (talla media) para cada edad.

En este caso se compararon las varianzas de la talla media por edad, y resultaron significativamente diferentes tanto para machos como para hembras. Debido a ello el problema quedó planteado como de mínimos cuadrados generalizados factibles.

En la Tabla 2 pueden observarse las estimaciones de los parámetros del modelo de von Bertalanffy, para machos y para hembras, y las curvas resultantes en la Figura 1. Los intervalos de confianza estimados mediante los perfiles de probabilidad (Figura 2) se muestran en la Tabla 3.

En la Tabla 4 se presentan las pruebas de igualdad de coeficientes entre el modelo de machos y el de hembras, tanto para la prueba χ^2 como la F. Aunque en este caso no hay diferencias en los resultados entre las pruebas estadísticas, de acuerdo a Cerrato (1990) conviene adoptar el criterio de la prueba F, pues el número de observaciones combinadas es menor que 300. Debido a que estas pruebas son aproximadas (la distribución usada es la asintótica), para pocas observaciones pueden aparecer ciertas inconsistencias. Para evitar este tipo de problema, conviene considerar la muestra con las observaciones individuales. Si el tamaño de la muestra es grande, se espera entonces que las conclusiones sean las mismas.

En el ejemplo planteado, de acuerdo a los resultados de ambas pruebas, puede establecerse que existen diferencias entre las curvas de crecimiento, atribuibles a la diferencia en la longitud asintótica. Adicionalmente, en la Tabla 5, se muestran las estimaciones de los parámetros por el método de Allen. Puede observarse la diferencia en los resultados, y por lo tanto, el riesgo que se corre al aproximar la solución del problema.

DISCUSION

La estimación de parámetros de un modelo con errores distribuidos normalmente, se logra minimizando una suma de cuadrados, que en el caso de modelos no lineales, requiere de un algoritmo de optimización no lineal. Son varios los que pueden usarse, como por ejemplo el método de Gauss-Newton (Hartley, 1961); el de Marquardt (1963) o el de Powell (1964), por citar algunos de los más empleados.

Los estimadores que se obtienen por mínimos cuadrados tienen propiedades que son asintóticamente óptimas.

Hay varios métodos aproximados (Ford-Walford, por ejemplo) que permiten obtener estima-

ciones de los parámetros, pero sus propiedades estadísticas no son las mejores.

La inferencia estadística sobre los parámetros poblacionales se basa en las propiedades asintóticas de los estimadores, por lo que hay que tener en cuenta los supuestos del modelo para docimar cualquier hipótesis. Además es necesario contar con suficientes observaciones para tener seguridad sobre los resultados de las pruebas estadísticas. Hansen *et al.* (1991) mencionan que la cuestión más importante en la comparación de curvas consiste en la sensibilidad del método empleado. Ello es necesario para conocer hasta qué punto el estadístico será capaz de discriminar dos curvas que son realmente distintas o bien, por el contrario, dará significación a diferencias cuya magnitud aconsejaría que fueran despreciables en la práctica. Cerrato (1990) analizó empíricamente diversas pruebas estadísticas aplicadas a la comparación de curvas de von Bertalanffy, tales como la *t* de Student, χ^2 univariado, T^2 de Hotelling y la razón de verosimilitudes. Dicho autor señala que la confiabilidad de dichas pruebas depende de ciertos factores, tales como el tamaño muestral, la homocedasticidad y la no linealidad del modelo empleado. De su análisis surge que la razón de verosimilitudes constituye la más confiable de las pruebas estadísticas, entre otras razones porque no se ve afectada por la componente no lineal debida a la parametrización del modelo. También concluye que el efecto no lineal de los parámetros es el factor principal para el sesgo que aparece en las pruebas de *t*, T^2 y χ^2 univariado. Contrastando con estas pruebas, el cociente de verosimilitudes resulta no sesgado.

Cerrato (1990) también sugiere usar la prueba *F* en el caso que la muestra combinada tenga un tamaño menor que 300 observaciones.

Otro problema común en la estimación de parámetros de crecimiento es la heterocedasticidad de la talla al considerar distintas edades. Esto genera estimaciones ineficientes si no se corrige el modelo.

BIBLIOGRAFIA

- ALLEN, K. R. 1966. A method of fitting growth curves of the von Bertalanffy type to observed data. *J. Fish. Res. Board Can.*, 23: 163-179.
- ALLEN, R. L. 1976. Method for comparing fish growth curves. *N. Z. J. Mar. Freshwater Res.*, 10: 687-692.
- BERNARD, D. R. 1981. Multivariate analysis as a mean of comparing growth in fish. *Can. J. Fish. Aquat. Sci.*, 38: 233-236.
- CERRATO, R. M. 1990. Interpretable statistical test for growth comparisons using parameters in the von Bertalanffy equation. *Can. J. Fish. Aquat. Sci.*, 47: 1416-1426.
- COHEN, M. C. & FISHMAN, G. S. 1980. Modeling growth-time and weight-length relationships in a single year-class fishery with examples for North Carolina pink and brown shrimp. *Can. J. Fish. Aquat. Sci.*, 37: 1000-1011.
- DRAPER, N. & SMITH, H. 1981. *Applied Regression Analysis*. John Wiley & Sons, Inc. 709 pp.
- FORD, E. 1933. An account of the herring investigations conducted at Plymouth during the years 1924-1933. *J. Mar. Biol. Assoc. U. K.*, 19: 305-384.

- FRANCIS, R.I.C.C. 1988. The maximum likelihood estimation of growth and growth variability from tagging data. *N.Z.J. Mar. Freshwat. Res.*, 22 (1): 43-51.
- GALLANT, A. R. 1975. The power of the likelihood ratio test of location in nonlinear models. *J. Am. Stat. Assoc.*, 70: 198-203.
- GALUCCI, V. F. & QUINN, T. J. 1979. Reparameterizing, fitting and testing a simple growth model. *Trans. Am. Stat. Assoc.*, 108: 14-25.
- GULLAND, J. A. & HOLT, S. J. 1959. Estimation of growth parameters for data at unequal time intervals, *J. Mar. Biol. Assoc. U. K.*, 19: 305-384.
- HANSEN, J. E., HERNANDEZ, D. R. & CORDO, H. D. 1991. Simulaciones de comparación de curvas de crecimiento en peces. *Frente Marítimo*, 9 (A): 37-45.
- HANSEN, J. E., CORDO, H. D. & HERNANDEZ, D. R. 1993. COMPALEN. Un programa BASIC para la comparación de curvas de crecimiento del tipo von Bertalanffy. *Frente Marítimo*, 14 (A): 41-48.
- HARTLEY, H. O. 1961. The modified Gauss-Newton method for the fitting of nonlinear regression functions by least squares. *Technometrics*, 3: 269-280.
- KAPPENMAN, R. F. 1981. A method for growth curve comparisons. *U. S. Fish. Bull.*, 79 (1): 95-101.
- KENDALL, M. G. & STUART, A. 1967. The advanced theory of statistics. Vol. 2. Inference and relationship. 2nd ed. Hafner Publishing Co., N. Y. 439 pp.
- KIMURA, D. K. 1980. Likelihood methods for the von Bertalanffy growth curve. *Fishery Bulletin*, 77, 4: 765-776.
- MARQUARDT, D. W. 1963. An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 11: 431-441.
- MISRA, R. K. 1980. Statistical comparisons of several growth curves of the von Bertalanffy type. *Can. J. Fish. Aquat. Sci.*, 37: 920-926.
- MUNRO, J. L. & PAULY, D. 1983. A simple method for comparing the growth of fishes and invertebrates. *Fishbyte*, 1: 5-6.
- PAULY, D. & MUNRO, J. L. 1984. Once more on growth comparison in fish and invertebrates. *Fishbyte*, 2 (1): 21.
- POWELL, M. 1964. An efficient method for finding the minimum of a function of several variables without calculating derivatives. *The Computer Journal*, 7: 155-162.
- RAO, C. 1958. Some statistical methods for comparisons of growth curves. *Biometrics*, 14: 1-17.

RATKOWSKY, D. A. 1983. Nonlinear Regression Modeling. A Unified Practical Approach. Marcel Dekker, Inc. New York and Basel. 276 pp.

WALFORD, L. A. 1946. A new graphic method of describing the growth of animals. Biol. Bull. (Woods Hole, Mass.), 90: 141-147.

Tabla 1. Datos básicos de talla media, varianzas y número de ejemplares por clase de edad de la polaca (*Micromesistius australis*) utilizados para el cálculo de los parámetros de crecimiento aplicando la metodología de máxima verosimilitud.

Table 1. Basic data on southern blue whiting (*Micromesistius australis*) mean length, variance and number of individuals per age class used to calculate growth parameters with the maximum likelihood method.

Edad (años)	Machos			Hembras		
	Lt (cm)	Var.	N	Lt (cm)	Var.	N
1	21,50	0,28	10	20,40	0,48	10
2	33,16	1,00	38	33,33	0,93	24
3	37,00	3,25	9	40,13	32,69	8
4	41,33	2,25	9	42,91	7,09	11
5	44,31	5,83	16	46,40	6,30	5
6	46,17	2,33	12	48,00	1,33	4
7	47,06	1,68	17	46,67	4,33	3
8	48,43	3,86	16	50,33	0,33	3
9	49,57	7,03	14	51,21	4,03	14
10	51,07	2,63	15	53,37	5,13	19
11	52,38	4,92	16	53,20	6,58	25
12	53,14	2,48	7	55,13	4,69	15
13	52,85	3,81	13	57,16	7,36	19
14	53,85	2,64	13	56,75	12,21	8
15	54,43	2,26	14	58,57	5,95	7
16	55,19	1,36	16	58,75	0,25	4

Tabla 2. Estimaciones de los parámetros de crecimiento del modelo clásico de von Bertalanffy obtenidos mediante MCGF.

Table 2. Estimates of growth parameters of von Bertalanffy classic model obtained through MCGF.

Parámetro	Machos	Hembras
L_{∞}	53,41	56,78
K	0,35	0,32
t_0	- 0,58	- 0,51

Tabla 3. Intervalos de confianza estimados para cada uno de los parámetros de machos y hembras.
 Table 3. Confidence intervals estimated for each of the males and females parameters.

	Machos	Hembras
Parámetro	I.C. ($\alpha=0,05$)	I.C. ($\alpha=0,05$)
L_{∞}	(52,21 ; 54,74)	(55,19 ; 58,76)
K	(0,29 ; 0,41)	(0,25 ; 0,41)
T_0	(-0,92 ; -0,30)	(-1,02 ; -0,13)

Tabla 4. Comparación de curvas de crecimiento y de parámetros individuales entre sexos. Prueba F y χ^2 ; $\alpha = 0,05$. A : se acepta H_0 ; R : se rechaza H_0 .

Table 4. Comparison of growth curves and individual parameters between sexes. Test F and χ^2 ; $\alpha = 0,05$. A: H_0 is accepted; R: H_0 is rejected.

H_0	SSG	SSR	F_{obs}	F_{crit}	H_0	χ^2_{obs}	χ^2_{crit}	H_0
$L_{\infty}(m)=L_{\infty}(h)$								
$K(m)=K(h)$	697,04	919,32	1,32	1,11	R	8,86	7,81	R
$T_0(m)=T_0(h)$								
$L_{\infty}(m)=L_{\infty}(h)$	697,04	815,22	1,17	1,16	R	5,01	3,84	R
$K(m)=K(h)$	697,04	699,68	1,00	1,16	A	0,12	3,84	A
$T_0(m)=T_0(h)$	697,04	697,74	1,00	1,16	A	0,03	3,84	A

Tabla 5. Estimación por el método de Allen (1966) e intervalos de confianza de los parámetros.
 Table 5. Estimates with Allen's method (1996) and parameters confidence intervals.

Párametro	Machos		Hembras	
	Estimación	I.C. ($\alpha = 0,05$)	Estimación	I.C. ($\alpha = 0,05$)
L_{∞}	54,63	(54,23 ; 55,03)	56,40	(55,85 ; 56,95)
K	0,25	(0,23 ; 0,26)	0,29	(0,26 ; 0,31)
T_0	-1,46	(-1,62 ; -1,30)	-0,83	(-1,03 ; -0,63)

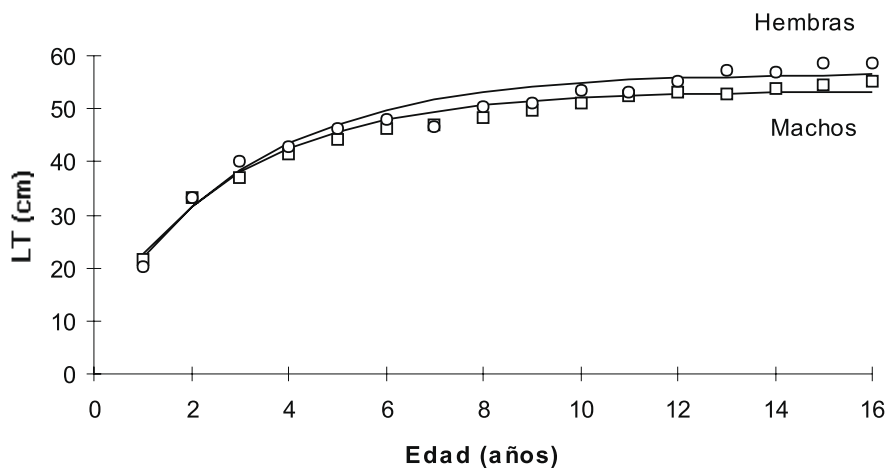


Figura 1. Valores medios de talla por edad y curvas de crecimiento de ambos sexos de *Micromesistius australis* ajustadas mediante el método de máxima verosimilitud.

Figure 1. Mean values of length-at-age and growth curves for both sexes of *Micromesistius australis* fitted with the maximum likelihood method.

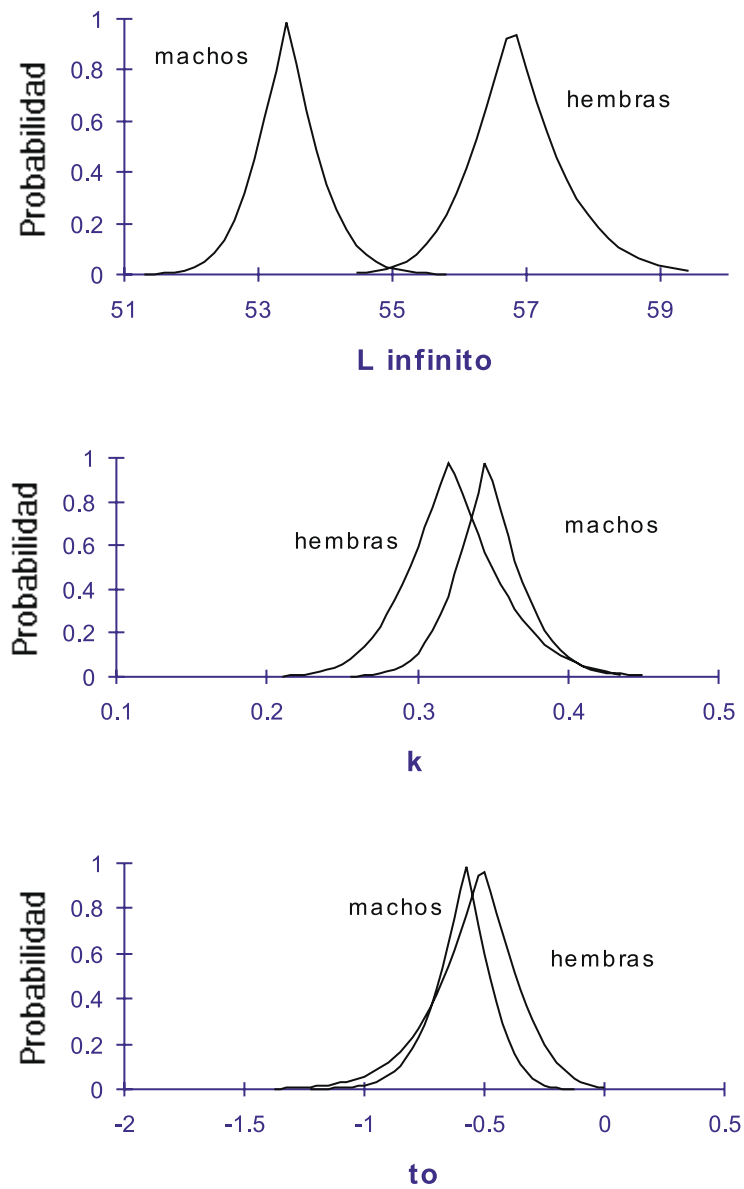


Figura 2. Perfiles de probabilidad para cada parámetro individual correspondientes a la aplicación de la prueba χ^2 .

Figure 2. Probability profiles for each individual parameter corresponding to the application of χ^2 test.

Instrucciones para la preparación de manuscritos correspondientes a la Serie INIDEP Informes Técnicos

Los trabajos publicados en la Serie INIDEP Informes Técnicos incluyen temáticas dirigidas fundamentalmente al sector pesquero y tienen como objetivo la difusión rápida de información científico técnica institucional. Son descriptivos, con discusión mínima y con conclusiones muy acotadas. Esta serie edita anualmente un mínimo de cuatro números.

Para su presentación se tendrán en cuenta las siguientes instrucciones:

1. Los trabajos deberán ser aportes originales. Deberán ser escritos en idioma español preferentemente. Se presentará una copia impresa, con su correspondiente archivo en soporte magnético, acompañada por una nota dirigida al Editor Responsable y presentadas en la secretaría del Comité Editor. Las ilustraciones originales deberán presentarse una vez que el MS haya sido aceptado.

2. La calidad editorial de los MSs será analizada en primera instancia por el Comité Editor. Una vez cumplidos los requisitos editoriales serán enviados a dos especialistas, quienes operarán como revisores anónimos. Si fuese necesario se consultará a un tercer evaluador.

3. El Comité Editor aceptará el trabajo luego de haberse efectuado las correcciones sugeridas por los evaluadores. Los autores presentarán el MS en su versión final en papel, tamaño A4, tipografía Times New Roman cuerpo 11 puntos, con espaciado simple, con las hojas numeradas consecutivamente e incluyendo tablas y figuras, en este orden, después del texto. Deberá entregarse, asimismo, una copia en soporte magnético del manuscrito completo. El texto, las tablas y las figuras se presentarán en procesador Word 97 ó 2000 para Windows. Eventualmente, para una etapa posterior, se podrán solicitar las tablas y figuras guardadas en archivos individuales con sus extensiones originales. Para las abreviaturas se deberá seguir el Sistema Internacional de Unidades.

4. En la primera página del MS figurarán: título, nombres de los autores, institución a la que pertenecen, direcciones postal y electrónica. Deberá presentarse un título abreviado, apto para figurar en el cabezal de las páginas. En las páginas siguientes figurarán: Índice (de ser necesario), Summary, Key words, Resumen, Palabras clave, Introducción, Material y Métodos, Resultados, Discusión, Conclusiones, Agradecimientos, Bibliografía. La Discusión y los Agradecimientos son optativos. Deberán evitarse las notas y llamadas a pie de página.

5. Los nombres científicos de las especies y toda expresión en idiomas extranjeros se escribirán en *itálicas*, y aquellas palabras o expresiones que deseen resaltarse en **negrita**.

6. Los epígrafes de tablas y figuras deberán ser suficientemente claros para que se entienda lo que se desea mostrar sin que sea necesario recurrir al texto. En las figuras deberá tenerse en cuenta la dimensión final cuidando que el tamaño de letras y números sea entre 2 y 4 mm de altura. En tablas y figuras deberán expresarse claramente los símbolos, abreviaturas y denominación de las variables.

7. Para la numeración de tablas y figuras se utilizarán números arábigos. No se incluirán denominaciones tales como: cuadro, diagrama, mapa, lámina, fotografía, etc. La referencia en el texto a tablas y figuras aparecerá en mayúscula: ej. ...como se indica en la Figura 1, ...ver Tabla 2.

8. Las figuras deberán realizarse en blanco y negro. Cuando se incluyan fotografías éstas deberán tener buen contraste y presentarse en papel brillante o escaneadas con alta resolución (300 dpi).

9. Cifras. El lugar decimal deberá indicarse con “coma” o “punto” de acuerdo a que el idioma del trabajo sea español o inglés, respectivamente.

10. En lo referente a las citas y lista bibliográfica, tener en cuenta las instrucciones indicadas para la Revista y Documentos Científicos.

11. Los autores recibirán dos pruebas de pre-impresión, las que deberán ser devueltas corregidas a la brevedad.

12. Tirada mínima: 250 ejemplares.

Trabajos publicados en la serie *INIDEP Informes Técnicos*

- CAROZZA, C. & COTRINA, C. Abundancia relativa y distribución de tallas de corvina rubia (*Micropogonias furnieri*) y pescadilla de red (*Cynoscion striatus*) en la Zona Común de Pesca Argentino-Uruguaya y en El Rincón. Noviembre, 1994. INIDEP Inf. Téc. 21.
- MACCHI, G. & ACHA, M. Aspectos reproductivos de las principales especies de peces en la Zona Común de Pesca Argentino-Uruguaya y en El Rincón. INIDEP Inf. Téc. 21.
- LASTA, C., BREMEC, C. & MIANZAN, H. Areas ícticas costeras en la Zona Común de Pesca Argentino-Uruguaya y en el litoral de la provincia de Buenos Aires. Noviembre, 1994. INIDEP Inf. Téc. 21.
- COUSSEAU, B., CAROZZA, C. & MACCHI, G. Abundancia, reproducción y distribución de tallas del gatuzo (*Mustelus schmitti*) en la Zona Común de Pesca Argentino-Uruguaya y en El Rincón. Noviembre, 1994. INIDEP Inf. Téc. 21.
- BREMEC, C. & LASTA, M. Mapeo sinóptico del macrobentos asociado a la dieta en fondos de alimentación de la corvina rubia (*Micropogonias furnieri*) en el área de El Rincón. Noviembre, 1994. INIDEP Inf. Téc. 21.
- MADIROLAS, A. & CASTRO MACHADO, F. Observaciones sobre la distribución vertical y caracterización de los registros ecoicos de algunas especies de peces costeros en la plataforma bonaerense. Noviembre, 1994. INIDEP Inf. Téc. 21.
- BREMEC, C.S., LASTA, M.L., LUCIFORA, L. & VALERO, J. 1998. Análisis de la captura incidental asociada a la pesquería de vieira patagónica (*Zygochlamys patagonica* King & Broderip, 1832). INIDEP Inf. Téc. 22.
- PERROTTA, R.G., PERTIERRA, J.P., VIÑAS, M.D., MACCHI, G. & TRINGALI, L.S. 1998. Una aplicación de los estudios ambientales para orientar la pesquería de la caballa (*Scomber japonicus*) en Mar del Plata. INIDEP Inf. Téc. 23.
- WÖHLER, O.C., GIUSSI, A.R., GARCIA DE LA ROSA, S., SANCHEZ, F., HANSEN, J. E., CORDO, H.D., ALVAREZ COLOMBO, G.L., INCORVAIA, S., RETA, R. & ABACHIAN, V. 1999. Resultados de la campaña de evaluación de peces demersales australes efectuada en el verano de 1997. INIDEP Inf. Téc. 24.
- WÖHLER, O.C. & MARI, N.R. 1999. Aspectos de la pesca de la polaca (*Micromesistius australis*) por parte de la flota argentina en el periodo 1989 - 1995. INIDEP Inf. Téc. 25.
- PERROTTA, R.G., MADIROLAS, A., VIÑAS, M.D., AKSELMAN, R., GUERRERO, R., SANCHEZ, F., LOPEZ, F., CASTRO MACHADO, F. & MACCHI, G. 1999. La caballa (*Scomber japonicus*) y las condiciones ambientales en el área bonaerense de "El Rincón" (39° - 40°30' S). Agosto, 1996. INIDEP Inf. Téc. 26.
- HANSEN, J.E. 1999. Estimación de parámetros poblacionales del efectivo de sardina fueguina (*Sprattus fuegensis*) de la costa continental argentina. INIDEP Inf. Téc. 27.
- HANSEN, J.E. & MADIROLAS, A. 1999. Algunos resultados de las campañas primaverales de evaluación anual de anchoíta bonaerense efectuadas entre 1993 y 1996. INIDEP Inf. Téc. 28.
- VILLARINO, M.F. & AUBONE, A. 2000. Reconstrucción de la distribución de tallas de abadejo (*Genypterus blacodes*) a partir de una distribución de longitudes de cabeza. INIDEP Inf. Téc. 29.
- BEZZI, S. 2000. Síntesis de las evaluaciones y sugerencias de manejo efectuadas sobre el recurso merluza (*Merluccius hubbsi*) entre el año 1986 y mayo de 1997. INIDEP Inf. Téc. 30.
- LASTA, M., ROUX, A. & BREMEC, C. 2000. Caracoles marinos de interés pesquero. Moluscos gasterópodos volutidos. INIDEP Inf. Téc. 31.
- CAÑETE, G., DATO, C. & VILLARINO, M.F. 2000. Caracterización del proceso de descarte de merluza (*Merluccius hubbsi*) en la flota de buques congeladores y factorías. Resultados preliminares a partir de los datos recolectados por Observadores del INIDEP en seis mareas realizadas entre agosto y diciembre de 1995. INIDEP Inf. Téc. 32.
- ERCOLI, R., GARCIA, J., AUBONE, A., SALVINI, L. & BERTELO, R. 2000. Escape de juveniles de merluza (*Merluccius hubbsi*) en las redes de arrastre de fondo, mediante la aplicación del dispositivo de selectividad DEJUPA con diferentes distancias entre varillas, utilizando un diseño especial de copo de retención en la grilla. INIDEP Inf. Téc. 33.
- BRUNETTI, N., IVANOVIC, M., ROSSI, G., ELENA, B., BENAVIDES, H., GUERRERO, R., BLANCO, G., MARCHETTI, C. & PINERO, R. 2000. JAMARC - INIDEP joint research cruise on Argentine short-finned squid *Illex argentinus*. January-March 1997. Argentine final report. INIDEP Inf. Téc. 34.
- IZZO, A., ISLA, M., SALVINI, L., BARTOZZETTI, J., GARCIA, J., ROTH, R., PRADO, L. & ERCOLI, R. 2000. Artes y métodos de pesca desarrollados en el Canal Beagle, Tierra del Fuego, Argentina. INIDEP Inf. Téc. 35.
- LASTA, C., CAROZZA, C., SUQUELLE, P., BREMEC, C., ERRAZTI, E., PERROTTA, R.G., COTRINA, C., BERTELO, C. & BOCCANFUSO, J. 2000. Característica y dinámica de la explotación de corvina rubia (*Micropogonias furnieri*) durante la zafra invernal. Años 1995 a 1997. INIDEP Inf. Téc. 36.
- AUBONE, A. & WÖHLER, O. 2000. Aplicación del método de máxima verosimilitud a la estimación de parámetros y comparación de curvas de crecimiento de von Bertalanffy. INIDEP Inf. Téc. 37.

Trabajos publicados en la serie *INIDEP Informes Técnicos*

- INIDEP - SHN. 1993. Seminario Taller sobre la dinámica marina y su impacto en la productividad de las regiones frontales del Mar Argentino. INIDEP Inf. Téc. 1.
- VIÑAS, M.D., SANTOS, B.A. & FERNANDEZ ARAOZ, N.C. 1994. Biomasa y composición del zooplankton de interés trófico - pesquero en áreas del Atlántico Sudoccidental. INIDEP Inf. Téc. 2.
- BALDONI, A.G. & GUERRERO, R.A. 1994. Datos de CTD en una sección de la plataforma y talud continental argentinos entre 38° - 39° S, período 1987 - 1991. INIDEP Inf. Téc. 3.
- PERROTTA, R.G. 1995. Caballa (*Scomber japonicus*). Muestreo de desembarque en el puerto de Mar del Plata (38° LS - 57° 30' W). Temporadas de pesca 1991/92 y 1992/93. INIDEP Inf. Téc. 4.
- COUSSEAU, M.B. (Ed.) 1995. Peces, crustáceos y moluscos registrados en el sector del Atlántico Sudoccidental comprendido entre 34° y 55° S, con indicación de las especies de interés pesquero. INIDEP Inf. Téc. 5.
- PERROTTA, R.G., LASTA, C. & AUBONE, A. 1995. Un nuevo criterio de estratificación para campañas demersales costeras y resultados de la evaluación de corvina (*Micropogonias furnieri*) en el invierno de 1994. INIDEP Inf. Téc. 6.
- IRUSTA, G., PEREZ, M., BAMBILL, G. & HERNANDEZ, D. 1996. Análisis de la eficiencia y del poder de pesca relativos entre los BIPs Dr. E.L. Holmberg y Cap. Oca Balda respecto de la merluza común (*Merluccius hubbsi*). INIDEP Inf. Téc. 7.
- BAMBILL, G., PEREZ, M., RENZI, M., DATO, C., WÖHLER, O., CAÑETE, G. & BEZZI, S. 1996. Evaluación de merluza (*Merluccius hubbsi*) en la plataforma argentina, entre 34° S y 48° S en agosto y setiembre de 1993. INIDEP Inf. Téc. 7.
- HANSEN, J.E., MADIROLAS, A. & PERROTTA, R.G. 1996. Evaluación del efectivo bonaerense de anchoíta (*Engraulis anchoita*) entre las latitudes de 34° y 38° S en el otoño de 1994. INIDEP Inf. Téc. 8.
- CASSIA, M.C. & PERROTTA, R.G. 1996. Distribución, estructura de tallas, alimentación y pesca de la merluza negra (*Dissostichus eleginoides* Smith, 1898) en un sector del Atlántico Sudoccidental. INIDEP Inf. Téc. 9.
- GIUSSI, A.R. 1996. Descripción del otolito de la merluza de cola (*Macruronus magellanicus*, Pisces: Merlucciidae) y su utilización en la determinación de la edad. INIDEP Inf. Téc. 10.
- CASSIA, M.C. 1996. Edad y crecimiento de la polaca (*Micromesistius australis* Norman 1937) en el Atlántico Sudoccidental. INIDEP Inf. Téc. 10.
- PERROTTA, R.G. & FERNANDEZ GIMENEZ, A. 1996. Estudio preliminar sobre la edad y el crecimiento del pez palo (*Percophis brasiliensis* Quoy et Gaimard 1824). INIDEP Inf. Téc. 10.
- ROUX, A. & BREMEC, C. 1996. Comunidades bentónicas relevadas en las transecciones realizadas frente al Río de la Plata (35° 15'S), Mar del Plata (38° 10'S) y Península Valdés (42° 35'S), Argentina. INIDEP Inf. Téc. 11.
- VILLARINO, M. 1997. Evolución de las capturas de abadejo (*Genypterus blacodes*) en relación a las de merluza (*Merluccius hubbsi*) por mes y área de pesca durante los años 1987-1990. INIDEP Inf. Téc. 12.
- ROUX, A.M. & FERNANDEZ, M. 1997. Caracterización de los fondos de pesca del langostino patagónico *Pleoticus muelleri* en el golfo San Jorge y litoral de la provincia de Chubut-Argentina. INIDEP Inf. Téc. 13.
- DIAZ DE ASTARLOA, J. M., CAROZZA, C. R., GUERRERO, R. A., BALDONI, A. G. & COUSSEAU, M. B. 1997. Algunas características biológicas de peces capturados en una campaña costera invernal en 1993, en el área comprendida entre 34° y 41° S y su relación con las condiciones ambientales. INIDEP Inf. Téc. 14.
- HANSEN, J.E., PERROTTA, R.G., PAJARO, M., SCARLATO, N., CAROZZA, C.R., COTRINA, C.P. & COUSSEAU, M.B. 1997. Muestreo bioestadístico de pescado en el Puerto de Mar del Plata. Anchoíta (*Engraulis anchoita*). Período 1986 - 1990. Caballa (*Scomber japonicus*). Período 1986 - 1991. Corvina rubia (*Micropogonias furnieri*). Período 1986 - 1988. INIDEP Inf. Téc. 15.
- WÖHLER, O. C. 1997. Crecimiento y mortalidad de la castañeta (*Cheilodactylus bergi*) en la Zona Común de Pesca Argentino - Uruguay. INIDEP Inf. Téc. 16. WÖHLER, O. C. 1997. Aspectos de la biología reproductiva de la castañeta (*Cheilodactylus bergi*) en la Zona Común de Pesca Argentino - Uruguay. INIDEP Inf. Téc. 16.
- IRUSTA, C. G., AUBONE, A., SIMONAZZI, M. & IBÁÑEZ, P. 1997. Estimación de los poderes de pesca relativos de la flota de altura convencional merlucera argentina. Zona patagónica: 41°-48°S. INIDEP Inf. Téc. 17.
- VILLARINO, M. F. 1998. Distribución estacional y estructura de tallas del abadejo (*Genypterus blacodes*) en el Mar Argentino. INIDEP Inf. Téc. 18.
- PEREZ, M., AUBONE, A., SIMONAZZI, M. & IRUSTA, G. 1998. Propuesta de estandarización del área barrida en campañas de investigación dirigidas a evaluar juveniles de merluza común (*Merluccius hubbsi*). INIDEP Inf. Téc. 19.
- ERCOLI, R., MITUHASI, T., IZZO, A., GARCIA, J. C. & BARTOZZETTI, J. D. 1998. Investigaciones sobre selectividad de merluza de cola (*Macruronus magellanicus*) con red de arrastre de fondo. INIDEP Inf. Téc. 20.
- PERROTTA, R.G., LASTA, C. A. & AUBONE, A. Análisis de la estratificación empleada en campañas de evaluación de recursos demersales costeros en la Zona Común de Pesca Argentino-Uruguay y en El Rincón, 1994. INIDEP Inf. Téc. 21.
- GUERRERO, R. Oceanografía física del estuario del Río de la Plata y el sistema costero de El Rincón. Noviembre, 1994. INIDEP Inf. Téc. 21.

(Continúa en el interior de la contratapa)