UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Física Computacional

Análisis Matemático Riguroso del Sistema de Ecuaciones Diferenciales para la Simulación de Intercepción de Misiles en 3D

Sistema de Navegación Proporcional y Métodos de Integración Numérica

Proyecto: Proyecto Final
Curso: Física Computacional
Institución: UNAM – Facultad de Ciencias
Fecha: 9 de diciembre de 2025

Análisis exhaustivo del sistema acoplado de 12 ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales que gobierna la dinámica de intercepción tridimensional entre un misil táctico y una aeronave maniobrable, incluyendo derivaciones rigurosas de la ley de navegación proporcional, análisis de estabilidad mediante teoría de Lyapunov, e implementación computacional mediante métodos Runge-Kutta de cuarto orden.

Ciudad de México, México

Índice

1. Introducción

La simulación computacional de sistemas de guiado de misiles constituye un problema fundamental en la teoría de control óptimo, dinámica de vuelo y ecuaciones diferenciales no lineales. Este documento presenta un análisis matemático exhaustivo y riguroso del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) que gobierna la dinámica de intercepción tridimensional entre un misil táctico y una aeronave maniobrable, abordando el problema desde los primeros principios de la física matemática.

1.1. Contexto Físico del Problema

El problema de intercepción de misiles se enmarca dentro de la teoría de juegos diferenciales, específicamente en la clase de problemas de persecución-evasión (pursuit-evasion games). En este contexto, dos agentes en un espacio métrico compiten: el perseguidor (misil) busca minimizar la distancia relativa, mientras que el evadido (objetivo) busca maximizarla o al menos retardar la intercepción.

1.2. Planteamiento del Problema

Consideremos dos objetos puntuales en el espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$:

- Un **objetivo** (aeronave), denotado por T (Target)
- Un **interceptor** (misil), denotado por M (Missile)

Definición 1.1 (Problema de Intercepción)**.** Dado un estado inicial $\mathbf{S}(0) = \mathbf{S}_0 \in \mathbb{R}^{12}$, encontrar una ley de control admisible $\mathbf{a}_M : [0, \infty) \times \mathbb{R}^{12} \to \mathbb{R}^3$ tal que:

$$\exists t_f < \infty : \|\mathbf{r}_T(t_f) - \mathbf{r}_M(t_f)\| \leq \epsilon \tag{1}$$

donde $\epsilon > 0$ es una tolerancia prescrita (radio letal del misil).

Este es un problema de *persecución diferencial* (differential pursuit) en el cual el perseguidor (misil) debe interceptar a un objetivo evasivo que ejecuta maniobras complejas, sujeto a las siguientes restricciones físicas:

$$\|\mathbf{a}_M(t)\| \leq a_{max} \quad \text{(límite estructural de aceleración)} \tag{2}$$
$$\|\mathbf{v}_M(t)\| \leq v_{max} \quad \text{(límite de velocidad por arrastre aerodinámico)} \tag{3}$$
$$\|\mathbf{a}_T(t)\| \leq a_T^{max} \quad \text{(capacidad de maniobra del objetivo)} \tag{4}$$

2. Espacio de Estados y Formulación del Sistema Dinámico

2.1. Vector de Estado

El sistema completo se describe mediante un vector de estado de dimensión 12:

Definición 2.1 (Vector de Estado del Sistema)**.** El estado completo del sistema en un instante t está dado por:

$$\mathbf{S}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_T(t) \\ \mathbf{v}_T(t) \\ \mathbf{r}_M(t) \\ \mathbf{v}_M(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{12} \tag{5}$$

donde:

$$\mathbf{r}_T(t) = [x_T(t),\, y_T(t),\, z_T(t)]^T \in \mathbb{R}^3 \quad \text{(posición del objetivo)} \tag{6}$$

$$\mathbf{v}_T(t) = [\dot{x}_T(t),\, \dot{y}_T(t),\, \dot{z}_T(t)]^T \in \mathbb{R}^3 \quad \text{(velocidad del objetivo)} \tag{7}$$

$$\mathbf{r}_M(t) = [x_M(t),\, y_M(t),\, z_M(t)]^T \in \mathbb{R}^3 \quad \text{(posición del misil)} \tag{8}$$

$$\mathbf{v}_M(t) = [\dot{x}_M(t),\, \dot{y}_M(t),\, \dot{z}_M(t)]^T \in \mathbb{R}^3 \quad \text{(velocidad del misil)} \tag{9}$$

2.2. Sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

El sistema se modela como un problema de valor inicial (PVI) para un sistema autónomo de EDOs de primer orden:

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \mathbf{F}(t, \mathbf{S}) \tag{10}$$

con condición inicial:

$$\mathbf{S}(0) = \mathbf{S}_0 \tag{11}$$

Teorema 2.1 (Sistema de 12 EDOs Acopladas)**.** El sistema (10) se descompone en las siguientes ecuaciones:

Parte Cinemática (6 ecuaciones):

$$\frac{d\mathbf{r}_T}{dt} = \mathbf{v}_T \tag{12}$$

$$\frac{d\mathbf{r}_M}{dt} = \mathbf{v}_M \tag{13}$$

Parte Dinámica (6 ecuaciones):

$$\frac{d\mathbf{v}_T}{dt} = \mathbf{a}_T(t, \mathbf{r}_T, \mathbf{v}_T) \tag{14}$$

$$\frac{d\mathbf{v}_M}{dt} = \mathbf{a}_M(t, \mathbf{r}_M, \mathbf{v}_M, \mathbf{r}_T, \mathbf{v}_T) \tag{15}$$

En forma explícita, el sistema completo es:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_T \\ y_T \\ z_T \\ \dot{x}_T \\ \dot{y}_T \\ \dot{z}_T \\ x_M \\ y_M \\ z_M \\ \dot{x}_M \\ \dot{y}_M \\ \dot{z}_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_T \\ \dot{y}_T \\ \dot{z}_T \\ a_{T,x} \\ a_{T,y} \\ a_{T,z} \\ \dot{x}_M \\ \dot{y}_M \\ \dot{z}_M \\ a_{M,x} \\ a_{M,y} \\ a_{M,z} \end{bmatrix} \tag{16}$$

2.3. Estructura Matricial del Sistema

El sistema (16) puede expresarse en forma matricial compacta que revela la estructura de bloques inherente.

2.3.1. Forma Canónica de Primer Orden

Definiendo las particiones del vector de estado:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_T \\ \mathbf{r}_M \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6, \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_T \\ \mathbf{v}_M \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6 \tag{17}$$

El sistema se puede escribir como:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{A}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) \end{bmatrix} \tag{18}$$

donde $\mathbf{A}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^6$ es el vector de aceleraciones:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_T(t, \mathbf{r}_T, \mathbf{v}_T) \\ \mathbf{a}_M(t, \mathbf{r}_M, \mathbf{v}_M, \mathbf{r}_T, \mathbf{v}_T) \end{bmatrix} \tag{19}$$

2.3.2. Representación en Forma de Hamilton

Aunque el sistema no es Hamiltoniano (debido a la disipación y control activo), podemos expresarlo en una forma análoga:

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathbf{p} \tag{20}$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) \tag{21}$$

Esta separación exhibe la estructura geométrica del espacio de fase $\mathcal{M} = \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^6$.

2.4. Análisis del Acoplamiento No Lineal

El sistema posee un acoplamiento no lineal fuerte entre las variables del objetivo y del misil a través de las leyes de guiado.

2.4.1. Diagrama de Dependencias

Las ecuaciones exhiben la siguiente estructura de dependencias:

1. $\dot{\mathbf{r}}_T = \mathbf{v}_T$ (cinemática desacoplada)
2. $\dot{\mathbf{r}}_M = \mathbf{v}_M$ (cinemática desacoplada)
3. $\dot{\mathbf{v}}_T = \mathbf{a}_T(t, \mathbf{r}_T, \mathbf{v}_T)$ (acoplamiento débil: solo depende del objetivo)
4. $\dot{\mathbf{v}}_M = \mathbf{a}_M(t, \mathbf{r}_M, \mathbf{v}_M, \mathbf{r}_T, \mathbf{v}_T)$ (acoplamiento fuerte: depende de ambos agentes)

Definición 2.2 (Matriz de Dependencias)**.** Definimos la matriz de dependencias funcionales $\mathcal{D} \in \{0,1\}^{4\times 4}$ donde $\mathcal{D}_{ij} = 1$ si y solo si el bloque de ecuaciones i depende del bloque de variables j:

$$\mathcal{D} = \begin{array}{c|cccc} & \mathbf{r}_T & \mathbf{v}_T & \mathbf{r}_M & \mathbf{v}_M \\ \hline \dot{\mathbf{r}}_T & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dot{\mathbf{v}}_T & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \dot{\mathbf{r}}_M & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dot{\mathbf{v}}_M & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \tag{22}$$

2.4.2. Caracterización del Acoplamiento

El acoplamiento entre misil y objetivo se manifiesta a través de la función de guiado $\mathbf{g}$:

$$\mathbf{a}_M = \mathbf{g}(\mathbf{r}_M, \mathbf{v}_M, \mathbf{r}_T, \mathbf{v}_T) = \mathbf{g}(\mathbf{r}_{rel}, \mathbf{v}_{rel}) \tag{23}$$

Esta función tiene las siguientes propiedades:

Proposición 2.2 (Homogeneidad de la Ley PN)**.** La ley de navegación proporcional pura es homogénea de grado 0 en las posiciones:

$$\mathbf{g}(\lambda \mathbf{r}_{rel}, \mathbf{v}_{rel}) = \mathbf{g}(\mathbf{r}_{rel}, \mathbf{v}_{rel}), \quad \forall \lambda > 0 \tag{24}$$

esto es, la ley PN depende solo de la dirección relativa, no de la magnitud de la separación.

Demostración. Desde la ecuación (72):

$$\mathbf{a}_{PN} = NV_c(\boldsymbol{\Omega} \times \hat{\mathbf{r}}_{LOS}) \tag{25}$$

$$= N \cdot \left(-\frac{\mathbf{r}_{rel} \cdot \mathbf{v}_{rel}}{R}\right) \cdot \frac{(\mathbf{r}_{rel} \times \mathbf{v}_{rel})}{R^2} \times \frac{\mathbf{r}_{rel}}{R} \tag{26}$$

Sustituyendo $\mathbf{r}_{rel} \to \lambda \mathbf{r}_{rel}$:

$$V_c \to -\frac{\lambda \mathbf{r}_{rel} \cdot \mathbf{v}_{rel}}{\lambda R} = -\frac{\mathbf{r}_{rel} \cdot \mathbf{v}_{rel}}{R} \tag{27}$$

$$\mathbf{\Omega} \to \frac{\lambda \mathbf{r}_{rel} \times \mathbf{v}_{rel}}{(\lambda R)^2} = \frac{\mathbf{r}_{rel} \times \mathbf{v}_{rel}}{\lambda R^2} \tag{28}$$

$$\hat{\mathbf{r}}_{LOS} \to \frac{\lambda \mathbf{r}_{rel}}{\lambda R} = \frac{\mathbf{r}_{rel}}{R} \tag{29}$$

Por lo tanto, la combinación $V_c \cdot \mathbf{\Omega}$ cancela el factor λ y $\mathbf{a}_{PN}$ permanece invariante. $\square$

2.5. Análisis del Jacobiano

Para el análisis de estabilidad local, calculamos la matriz Jacobiana del sistema.

2.5.1. Derivación de la Matriz Jacobiana

La matriz Jacobiana $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{12\times 12}$ se define como:

$$\mathbf{J}_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial S_j} \tag{30}$$

Dada la estructura del sistema, el Jacobiano tiene forma de bloques:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3\times 3} & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_{3\times 3} & \mathbf{0}_{3\times 3} \\ \frac{\partial \mathbf{a}_T}{\partial \mathbf{r}_T} & \frac{\partial \mathbf{a}_T}{\partial \mathbf{v}_T} & \mathbf{0}_{3\times 3} & \mathbf{0}_{3\times 3} \\ \mathbf{0}_{3\times 3} & \mathbf{0}_{3\times 3} & \mathbf{0}_{3\times 3} & \mathbf{I}_3 \\ \frac{\partial \mathbf{a}_M}{\partial \mathbf{r}_T} & \frac{\partial \mathbf{a}_M}{\partial \mathbf{v}_T} & \frac{\partial \mathbf{a}_M}{\partial \mathbf{r}_M} & \frac{\partial \mathbf{a}_M}{\partial \mathbf{v}_M} \end{bmatrix} \tag{31}$$

2.5.2. Cálculo de las Derivadas Parciales

Para el objetivo:

$$\frac{\partial \mathbf{a}_T}{\partial \mathbf{r}_T} = \mathbf{0}_{3\times 3} \quad \text{(maniobra independiente de posición)} \tag{32}$$

$$\frac{\partial \mathbf{a}_T}{\partial \mathbf{v}_T} = -\frac{1}{\tau_{resp}} \mathbf{I}_3 \tag{33}$$

Para el misil (PN pura):
Las derivadas de $\mathbf{a}_{PN}$ son más complejas. Comenzamos con:

$$\mathbf{a}_{PN} = N V_c (\mathbf{\Omega} \times \hat{\mathbf{r}}_{LOS}) \tag{34}$$

Utilizando la regla del producto:

$$\frac{\partial \mathbf{a}_{PN}}{\partial \mathbf{r}_T} = N \left[\frac{\partial V_c}{\partial \mathbf{r}_T} (\mathbf{\Omega} \times \hat{\mathbf{r}}_{LOS}) + V_c \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_T} (\mathbf{\Omega} \times \hat{\mathbf{r}}_{LOS}) \right] \tag{35}$$

Cada término requiere la aplicación de la regla de la cadena a través de $\mathbf{r}_{rel}$ y R.

Teorema 2.3 (Gradiente de Velocidad de Cierre)**.**

$$\nabla_{\mathbf{r}_T} V_c = \frac{1}{R}\left[\mathbf{v}_{rel} - \hat{\mathbf{r}}_{LOS}(\hat{\mathbf{r}}_{LOS} \cdot \mathbf{v}_{rel})\right] = \frac{1}{R}\mathbf{v}_{rel}^{\perp} \tag{36}$$

Demostración. Derivando $V_c = -\frac{\mathbf{r}_{rel}\cdot\mathbf{v}_{rel}}{R}$ respecto a $\mathbf{r}_T$:

$$\nabla_{\mathbf{r}_T} V_c = -\nabla_{\mathbf{r}_T}\left(\frac{\mathbf{r}_{rel} \cdot \mathbf{v}_{rel}}{R}\right) \tag{37}$$

$$= -\left[\frac{\nabla_{\mathbf{r}_T}(\mathbf{r}_{rel} \cdot \mathbf{v}_{rel})}{R} - \frac{(\mathbf{r}_{rel} \cdot \mathbf{v}_{rel})\nabla_{\mathbf{r}_T} R}{R^2}\right] \tag{38}$$

Con $\nabla_{\mathbf{r}_T}(\mathbf{r}_{rel} \cdot \mathbf{v}_{rel}) = \mathbf{v}_{rel}$ y $\nabla_{\mathbf{r}_T} R = \hat{\mathbf{r}}_{LOS}$:

$$\nabla_{\mathbf{r}_T} V_c = -\frac{\mathbf{v}_{rel}}{R} + \frac{(\mathbf{r}_{rel} \cdot \mathbf{v}_{rel})\hat{\mathbf{r}}_{LOS}}{R^2} \tag{39}$$

$$= \frac{1}{R}\left[\hat{\mathbf{r}}_{LOS}(\hat{\mathbf{r}}_{LOS} \cdot \mathbf{v}_{rel}) - \mathbf{v}_{rel}\right] \tag{40}$$

$$= -\frac{1}{R}\mathbf{v}_{rel}^{\perp} \tag{41}$$

□

2.6. Propiedades del Sistema Dinámico

2.6.1. Espacio de Fase y Flujo

El sistema define un flujo $\phi_t : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ en el espacio de fase 12-dimensional:

$$\phi_t(\mathbf{S}_0) = \mathbf{S}(t; \mathbf{S}_0) \tag{42}$$

que satisface:

$$\phi_0 = \mathrm{id}_{\mathcal{M}} \quad \text{(identidad)} \tag{43}$$

$$\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s \quad \text{(propiedad de semigrupo)} \tag{44}$$

2.6.2. Invariantes y Conservación

Aunque el sistema no es conservativo (debido al control activo), podemos identificar ciertas cantidades que evolucionan de manera predecible.

Proposición 2.4 (Evolución del Momento Angular Relativo)**.** El momento angular relativo $\mathbf{L}_{rel} = \mathbf{r}_{rel} \times \mathbf{v}_{rel}$ satisface:

$$\frac{d\mathbf{L}_{rel}}{dt} = \mathbf{r}_{rel} \times (\mathbf{a}_T - \mathbf{a}_M) \tag{45}$$

Demostración.

$$\frac{d\mathbf{L}_{rel}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_{rel} \times \mathbf{v}_{rel}) \tag{46}$$
$$= \dot{\mathbf{r}}_{rel} \times \mathbf{v}_{rel} + \mathbf{r}_{rel} \times \dot{\mathbf{v}}_{rel} \tag{47}$$
$$= \mathbf{v}_{rel} \times \mathbf{v}_{rel} + \mathbf{r}_{rel} \times (\mathbf{a}_T - \mathbf{a}_M) \tag{48}$$
$$= \mathbf{r}_{rel} \times (\mathbf{a}_T - \mathbf{a}_M) \tag{49}$$

donde usamos $\mathbf{v}_{rel} \times \mathbf{v}_{rel} = \mathbf{0}$. □

Esta ecuación muestra que el cambio en momento angular relativo está directamente relacionado con el torque aplicado por las aceleraciones.

3. Cinemática Vectorial Relativa

3.1. Geometría de la Intercepción

Definimos las siguientes cantidades vectoriales fundamentales:

Definición 3.1 (Cinemática Relativa)**.**

$$\mathbf{r}_{rel}(t) = \mathbf{r}_T(t) - \mathbf{r}_M(t) \quad \text{(vector de posición relativa)} \tag{50}$$
$$\mathbf{v}_{rel}(t) = \mathbf{v}_T(t) - \mathbf{v}_M(t) \quad \text{(vector de velocidad relativa)} \tag{51}$$
$$R(t) = \|\mathbf{r}_{rel}(t)\| = \sqrt{\mathbf{r}_{rel} \cdot \mathbf{r}_{rel}} \quad \text{(distancia)} \tag{52}$$

3.2. Línea de Visión (LOS)

Definición 3.2 (Vector Unitario de Línea de Visión)**.** El vector unitario que apunta del misil al objetivo se define como:

$$\hat{\mathbf{r}}_{LOS}(t) = \frac{\mathbf{r}_{rel}(t)}{R(t)} = \frac{\mathbf{r}_T - \mathbf{r}_M}{\|\mathbf{r}_T - \mathbf{r}_M\|} \tag{53}$$

3.3. Velocidad de Cierre

La velocidad de cierre es la componente de la velocidad relativa en la dirección de la línea de visión.

Definición 3.3 (Velocidad de Cierre)**.**

$$V_c(t) = -\frac{dR}{dt} = -\frac{d}{dt}\|\mathbf{r}_{rel}\| \tag{54}$$

Proposición 3.1 (Expresión Vectorial de la Velocidad de Cierre)**.** La velocidad de cierre puede expresarse como:

$$V_c = -\frac{\mathbf{r}_{rel} \cdot \mathbf{v}_{rel}}{R} = -\hat{\mathbf{r}}_{LOS} \cdot \mathbf{v}_{rel} \tag{55}$$

Demostración. Derivando la ecuación de la distancia:

$$R = \sqrt{\mathbf{r}_{rel} \cdot \mathbf{r}_{rel}} \tag{56}$$

$$\frac{dR}{dt} = \frac{d}{dt}\sqrt{\mathbf{r}_{rel} \cdot \mathbf{r}_{rel}} \tag{57}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\mathbf{r}_{rel} \cdot \mathbf{r}_{rel}}} \cdot 2(\mathbf{r}_{rel} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{rel}) \tag{58}$$

$$= \frac{\mathbf{r}_{rel} \cdot \mathbf{v}_{rel}}{R} \tag{59}$$

Por tanto:

$$V_c = -\frac{dR}{dt} = -\frac{\mathbf{r}_{rel} \cdot \mathbf{v}_{rel}}{R} \tag{60}$$

□

3.4. Velocidad Angular de la Línea de Visión

Definición 3.4 (Vector de Velocidad Angular LOS)**.** La velocidad angular de rotación de la línea de visión está dada por:

$$\mathbf{\Omega}(t) = \frac{\mathbf{r}_{rel} \times \mathbf{v}_{rel}}{R^2} \tag{61}$$

Esta cantidad es fundamental para la navegación proporcional. El vector $\mathbf{\Omega}$ es perpendicular al plano formado por $\mathbf{r}_{rel}$ y $\mathbf{v}_{rel}$, y su magnitud representa la tasa de rotación angular de la LOS.

Observación 3.1. Si $\mathbf{\Omega} = \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{r}_{rel} \parallel \mathbf{v}_{rel}$, lo que implica que el misil está en un curso de colisión directo (collision course).

4. Dinámica del Objetivo

4.1. Modelo de Aceleración

La aeronave objetivo se modela con una respuesta dinámica de primer orden hacia una velocidad deseada:

$$\mathbf{a}_T(t) = \frac{\mathbf{v}_{deseado}(t) - \mathbf{v}_T(t)}{\tau_{resp}} \tag{62}$$

donde:

- τ_{resp} es la constante de tiempo de respuesta aerodinámica (típicamente 3-5 segundos)
- $\mathbf{v}_{deseado}$ es la velocidad objetivo generada por la maniobra evasiva

4.2. Generación de Maniobras Evasivas

4.2.1. Maniobra Espiral (Spiral)

La maniobra espiral combina un viraje circular horizontal con ascenso constante:

$$\theta(t) = \omega_{turn} \cdot t \tag{63}$$

$$\mathbf{d}_{spiral}(t) = \begin{bmatrix} \cos(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t)) \\ k_{climb} \end{bmatrix} \tag{64}$$

$$\mathbf{v}_{deseado}(t) = V_{base} \cdot \frac{\mathbf{d}_{spiral}}{\|\mathbf{d}_{spiral}\|} \tag{65}$$

donde:

- ω_{turn} es la tasa de giro (rad/s)
- k_{climb} es la razón de ascenso normalizada
- V_{base} es la rapidez base del objetivo

4.2.2. Maniobra Sinusoidal (Weave)

Oscilaciones laterales periódicas en el plano horizontal:

$$\mathbf{d}_{weave}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ A\sin(\omega_{weave} t) \\ B\sin\left(\frac{\omega_{weave}}{2} t\right) \end{bmatrix} \tag{66}$$

donde A y B son amplitudes de oscilación lateral y vertical.

4.2.3. Maniobra Jinking (Estocástica)

Cambios aleatorios de dirección para romper el tracking predictivo:

$$\mathbf{d}_{jink}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ A \cdot \xi_1(t) \\ B \cdot \xi_2(t) \end{bmatrix} \tag{67}$$

donde $\xi_1(t), \xi_2(t)$ son procesos estocásticos (e.g., ruido gaussiano o procesos de Ornstein-Uhlenbeck).

5. Navegación Proporcional: Derivación Rigurosa y Análisis Físico

La navegación proporcional (PN) es la ley de guiado más utilizada en sistemas de misiles modernos debido a su robustez, simplicidad y eficiencia energética. Su fundamento matemático se basa en el principio de que la intercepción se logra cuando la línea de visión (LOS) entre el misil y el objetivo no rota, es decir, cuando se establece un *curso de colisión*.

5.1. Principio Fundamental y Motivación Física

Teorema 5.1 (Condición Necesaria de Colisión)**.** Si dos objetos se mueven en el espacio y colisionan en un punto $\mathbf{P}_c$ en el tiempo t_c, entonces la dirección de la línea que los une permanece constante durante la aproximación, es decir:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{r}_{rel}(t)}{\|\mathbf{r}_{rel}(t)\|}\right) = \mathbf{0}, \quad \forall t \in [t_0, t_c] \tag{68}$$

Demostración. Si ambos objetos colisionan en $\mathbf{P}_c$, entonces:

$$\mathbf{r}_T(t_c) = \mathbf{P}_c \tag{69}$$

$$\mathbf{r}_M(t_c) = \mathbf{P}_c \tag{70}$$

Por tanto, $\mathbf{r}_{rel}(t_c) = \mathbf{0}$.

Para que esto ocurra, los vectores de posición deben satisfacer que existe un escalar $\lambda(t)$ tal que:

$$\mathbf{r}_T(t) - \mathbf{r}_M(t) = \lambda(t)(\mathbf{r}_T(t_c) - \mathbf{r}_M(t_c)) \tag{71}$$

con $\lambda(t_c) = 0$. Esto implica que el vector unitario $\hat{\mathbf{r}}_{LOS} = \mathbf{r}_{rel}/\|\mathbf{r}_{rel}\|$ es constante. □

5.2. Formulación Matemática Completa

Teorema 5.2 (Ley de Navegación Proporcional)**.** La aceleración de comando del misil es proporcional a la velocidad angular de la línea de visión y perpendicular a dicha línea:

$$\mathbf{a}_{PN} = N \cdot V_c \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \hat{\mathbf{r}}_{LOS}) \tag{72}$$

donde:

- N es la constante de navegación (ganancia), típicamente $3 \leq N \leq 5$
- V_c es la velocidad de cierre
- $\boldsymbol{\Omega}$ es la velocidad angular de la LOS
- $\hat{\mathbf{r}}_{LOS}$ es el vector unitario de la línea de visión

5.3. Derivación Detallada a partir de Primeros Principios

5.3.1. Paso 1: Cálculo de la Velocidad Angular de LOS

Partimos de las definiciones establecidas:

$$\mathbf{r}_{rel} = \mathbf{r}_T - \mathbf{r}_M \in \mathbb{R}^3 \tag{73}$$
$$\mathbf{v}_{rel} = \mathbf{v}_T - \mathbf{v}_M \in \mathbb{R}^3 \tag{74}$$
$$R = \|\mathbf{r}_{rel}\| = \sqrt{\mathbf{r}_{rel} \cdot \mathbf{r}_{rel}} \tag{75}$$

El vector unitario de LOS es:

$$\hat{\mathbf{r}}_{LOS}(t) = \frac{\mathbf{r}_{rel}(t)}{R(t)} \tag{76}$$

Su derivada temporal proporciona la velocidad angular:

$$\frac{d\hat{\mathbf{r}}_{LOS}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{r}_{rel}}{R}\right) \tag{77}$$
$$= \frac{1}{R}\frac{d\mathbf{r}_{rel}}{dt} - \mathbf{r}_{rel}\frac{1}{R^2}\frac{dR}{dt} \tag{78}$$
$$= \frac{\mathbf{v}_{rel}}{R} - \frac{\mathbf{r}_{rel}}{R^2}\frac{dR}{dt} \tag{79}$$

Sabemos que:

$$\frac{dR}{dt} = \frac{\mathbf{r}_{rel} \cdot \mathbf{v}_{rel}}{R} \tag{80}$$

Sustituyendo:

$$\frac{d\hat{\mathbf{r}}_{LOS}}{dt} = \frac{\mathbf{v}_{rel}}{R} - \frac{\mathbf{r}_{rel}}{R^3}(\mathbf{r}_{rel} \cdot \mathbf{v}_{rel}) \tag{81}$$
$$= \frac{1}{R}\left[\mathbf{v}_{rel} - \frac{\mathbf{r}_{rel}(\mathbf{r}_{rel} \cdot \mathbf{v}_{rel})}{R^2}\right] \tag{82}$$
$$= \frac{1}{R}\left[\mathbf{v}_{rel} - \hat{\mathbf{r}}_{LOS}(\hat{\mathbf{r}}_{LOS} \cdot \mathbf{v}_{rel})\right] \tag{83}$$
$$= \frac{1}{R}\mathbf{v}_{rel}^{\perp} \tag{84}$$

donde $\mathbf{v}_{rel}^{\perp}$ es la componente de $\mathbf{v}_{rel}$ perpendicular a $\mathbf{r}_{rel}$.

5.3.2. Paso 2: Relación con el Producto Vectorial

Consideremos el producto vectorial:

$$\mathbf{r}_{rel} \times \mathbf{v}_{rel} \tag{85}$$

Este vector es perpendicular al plano formado por $\mathbf{r}_{rel}$ y $\mathbf{v}_{rel}$, y su magnitud es:

$$\|\mathbf{r}_{rel} \times \mathbf{v}_{rel}\| = R \cdot \|\mathbf{v}_{rel}\| \sin(\alpha) \tag{86}$$

donde α es el ángulo entre los dos vectores.

Definimos la velocidad angular como:

$$\mathbf{\Omega} = \frac{\mathbf{r}_{rel} \times \mathbf{v}_{rel}}{R^2} \tag{87}$$

Este vector tiene las siguientes propiedades físicas:

1. $\mathbf{\Omega} \perp \mathbf{r}_{rel}$ (perpendicular a la LOS)
2. $\mathbf{\Omega} \perp \mathbf{v}_{rel}$ (perpendicular a la velocidad relativa)
3. $\|\mathbf{\Omega}\| = \frac{\|\mathbf{v}_{rel}\| \sin(\alpha)}{R}$ (tasa de rotación angular)

5.3.3. Paso 3: Expansión del Término de Aceleración PN

Ahora calculamos el producto vectorial triple:

$$\mathbf{\Omega} \times \hat{\mathbf{r}}_{LOS} = \frac{\mathbf{r}_{rel} \times \mathbf{v}_{rel}}{R^2} \times \frac{\mathbf{r}_{rel}}{R} \tag{88}$$

Utilizando la identidad del producto vectorial triple:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \tag{89}$$

Tenemos:

$$(\mathbf{r}_{rel} \times \mathbf{v}_{rel}) \times \mathbf{r}_{rel} = \mathbf{r}_{rel} \underbrace{((\mathbf{r}_{rel} \times \mathbf{v}_{rel}) \cdot \mathbf{r}_{rel})}_{=0} - \mathbf{r}_{rel}((\mathbf{r}_{rel} \times \mathbf{v}_{rel}) \cdot \mathbf{r}_{rel}) \tag{90}$$

$$- \mathbf{r}_{rel} \times \mathbf{v}_{rel} \cdot \mathbf{r}_{rel} \tag{91}$$

$$= -\mathbf{r}_{rel}(\mathbf{r}_{rel} \cdot \mathbf{v}_{rel}) + \mathbf{v}_{rel}(\mathbf{r}_{rel} \cdot \mathbf{r}_{rel}) \tag{92}$$

$$= R^2\mathbf{v}_{rel} - \mathbf{r}_{rel}(\mathbf{r}_{rel} \cdot \mathbf{v}_{rel}) \tag{93}$$

Dividiendo por R^3:

$$\mathbf{\Omega} \times \hat{\mathbf{r}}_{LOS} = \frac{1}{R}\left[\mathbf{v}_{rel} - \frac{\mathbf{r}_{rel}(\mathbf{r}_{rel} \cdot \mathbf{v}_{rel})}{R^2}\right] \tag{94}$$

$$= \frac{1}{R}\mathbf{v}_{rel}^{\perp} \tag{95}$$

donde $\mathbf{v}_{rel}^{\perp}$ es la componente de $\mathbf{v}_{rel}$ perpendicular a $\mathbf{r}_{rel}$.

5.4. Interpretación Geométrica

La ley PN genera una aceleración que:

1. Es perpendicular a la línea de visión
2. Tiende a anular la rotación angular de la LOS ($\mathbf{\Omega} \to \mathbf{0}$)
3. Conduce al misil hacia un curso de colisión

Proposición 5.3 (Condición de Colisión)**.** Si $\mathbf{\Omega}(t) = \mathbf{0}$ para todo $t \in [t_0, t_f]$, entonces el misil está en curso de colisión directo.

5.5. Expansión Explícita de la Ley PN

Sustituyendo la definición de $\mathbf{\Omega}$:

$$\mathbf{a}_{PN} = N \cdot V_c \cdot \left[\frac{\mathbf{r}_{rel} \times \mathbf{v}_{rel}}{R^2} \times \frac{\mathbf{r}_{rel}}{R} \right] \tag{96}$$

En términos de las variables de estado:

$$\mathbf{r}_{rel} = \mathbf{r}_T - \mathbf{r}_M \tag{97}$$

$$\mathbf{v}_{rel} = \mathbf{v}_T - \mathbf{v}_M \tag{98}$$

$$R = \|\mathbf{r}_T - \mathbf{r}_M\| \tag{99}$$

$$V_c = -\frac{(\mathbf{r}_T - \mathbf{r}_M) \cdot (\mathbf{v}_T - \mathbf{v}_M)}{R} \tag{100}$$

6. Guiado Predictivo (Lead Guidance)

El guiado predictivo complementa la PN al estimar el punto futuro de intercepción.

6.1. Tiempo de Vuelo Estimado

Definición 6.1 (Tiempo hasta el Impacto)**.** El tiempo estimado hasta la intercepción se calcula como:

$$t_{go}(t) = \frac{R(t)}{V_{rel}(t)} \tag{101}$$

donde:

$$V_{rel} = \|\mathbf{v}_M\| + \|\mathbf{v}_T\| \quad \text{(aproximación conservadora)} \tag{102}$$

6.2. Punto de Impacto Predicho

Asumiendo movimiento rectilíneo uniforme del objetivo en el intervalo $[t, t + t_{go}]$:

$$\mathbf{P}_{impacto}(t) = \mathbf{r}_T(t) + \mathbf{v}_T(t) \cdot t_{go}(t) \tag{103}$$

6.3. Comando de Aceleración Lead

El vector de error de lead es:

$$\mathbf{e}_{lead}(t) = \mathbf{P}_{impacto}(t) - \mathbf{r}_M(t) \tag{104}$$

La aceleración de comando se genera mediante un controlador proporcional:

$$\mathbf{a}_{lead} = K_{lead} \cdot \frac{\mathbf{e}_{lead}}{\|\mathbf{e}_{lead}\|} \cdot (\|\mathbf{v}_{deseado}\| - \|\mathbf{v}_M\|) \tag{105}$$

donde K_{lead} es la ganancia del controlador de lead.

7. Control Híbrido y Fusión de Estrategias

El sistema implementa un controlador híbrido que combina múltiples estrategias según la fase de vuelo.

7.1. Función de Ponderación Temporal

Definición 7.1 (Peso de Navegación Proporcional)**.**

$$w_{PN}(t,R) = \begin{cases} w_{bias} & \text{si } t \leq t_{warmup} \\ w_{bias} + (1 - w_{bias})\frac{t - t_{warmup}}{t_{blend}} & \text{si } t_{warmup} < t \leq t_{warmup} + t_{blend} \\ 1 & \text{si } t > t_{warmup} + t_{blend} \text{ o } R < R_{terminal} \end{cases} \tag{106}$$

7.2. Aceleración Total del Misil

La aceleración total es una combinación convexa de las estrategias:

$$\mathbf{a}_M(t) = w_{PN}(t,R) \cdot \mathbf{a}_{guided} + (1 - w_{PN}(t,R)) \cdot \mathbf{a}_{maneuver} \tag{107}$$

donde:

$$\mathbf{a}_{guided} = \mathbf{a}_{PN} + \mathbf{a}_{speed} + \mathbf{a}_{lead} \tag{108}$$

$$\mathbf{a}_{speed} = K_{speed}(V_{cruise} - \|\mathbf{v}_M\|)\hat{\mathbf{v}}_M \quad \text{(control de velocidad)} \tag{109}$$

$$\mathbf{a}_{maneuver} = \mathbf{a}_{loft} + \mathbf{a}_{weave} \quad \text{(maniobras pre-programadas)} \tag{110}$$

7.3. Maniobras de Boost

Durante la fase inicial ($t < t_{boost}$), el misil realiza una maniobra de "loft"(ganancia de altura):

$$\theta_{loft} = \frac{\pi}{180} \cdot \theta_{degrees} \tag{111}$$

$$\hat{\mathbf{u}}_{loft} = \cos(\theta_{loft})\hat{\mathbf{v}}_M + \sin(\theta_{loft})\hat{\mathbf{z}} \tag{112}$$

$$\mathbf{a}_{loft} = a_{boost} \cdot \hat{\mathbf{u}}_{loft} \tag{113}$$

7.4. Limitación de Aceleración

Para respetar las restricciones físicas del misil:

$$\mathbf{a}_M^{final} = \begin{cases} \mathbf{a}_M & \text{si } \|\mathbf{a}_M\| \leq a_{max} \\ a_{max} \cdot \frac{\mathbf{a}_M}{\|\mathbf{a}_M\|} & \text{si } \|\mathbf{a}_M\| > a_{max} \end{cases} \tag{114}$$

8. Integración Numérica: Método Runge-Kutta de Cuarto Orden

La solución del sistema (16) requiere métodos numéricos de alta precisión.

8.1. Formulación del Problema de Valor Inicial

Dado el sistema de EDOs:

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \mathbf{F}(t, \mathbf{S}), \quad \mathbf{S}(t_0) = \mathbf{S}_0 \tag{115}$$

Buscamos aproximar la solución $\mathbf{S}(t)$ en puntos discretos $t_n = t_0 + n \cdot h$, donde h es el paso de tiempo.

8.2. Método de Euler (Referencia)

El método de Euler de primer orden es:

$$\mathbf{S}_{n+1} = \mathbf{S}_n + h \cdot \mathbf{F}(t_n, \mathbf{S}_n) \tag{116}$$

con error de truncamiento local $\mathcal{O}(h^2)$ y error global $\mathcal{O}(h)$.

8.3. Método Runge-Kutta de Orden 4 (RK4)

Teorema 8.1 (Algoritmo RK4)**.** El método RK4 aproxima la solución mediante la combinación ponderada de cuatro pendientes:

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{F}(t_n, \mathbf{S}_n) \tag{117}$$

$$\mathbf{k}_2 = \mathbf{F}\left(t_n + \frac{h}{2}, \mathbf{S}_n + \frac{h}{2}\mathbf{k}_1\right) \tag{118}$$

$$\mathbf{k}_3 = \mathbf{F}\left(t_n + \frac{h}{2}, \mathbf{S}_n + \frac{h}{2}\mathbf{k}_2\right) \tag{119}$$

$$\mathbf{k}_4 = \mathbf{F}(t_n + h, \mathbf{S}_n + h\mathbf{k}_3) \tag{120}$$

El estado en el siguiente paso es:

$$\mathbf{S}_{n+1} = \mathbf{S}_n + \frac{h}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) \tag{121}$$

8.4. Interpretación Geométrica

El método RK4 evalúa la pendiente (derivada) en cuatro puntos:

1. $\mathbf{k}_1$: pendiente al inicio del intervalo

2. $\mathbf{k}_2$: pendiente en el punto medio, usando $\mathbf{k}_1$ para llegar allí

3. $\mathbf{k}_3$: pendiente en el punto medio, usando $\mathbf{k}_2$ (corrección mejorada)

4. $\mathbf{k}_4$: pendiente al final del intervalo, usando $\mathbf{k}_3$

La combinación $\frac{1}{6}(1, 2, 2, 1)$ es una cuadratura de Simpson que minimiza el error de truncamiento.

8.5. Análisis de Error

Teorema 8.2 (Error de Truncamiento Local)**.** El error de truncamiento local del método RK4 es:

$$\tau_{n+1} = \mathbf{S}(t_{n+1}) - \mathbf{S}_{n+1} = \mathcal{O}(h^5) \tag{122}$$

Corolario 8.3 (Error Global)**.** Para un intervalo de integración finito $[t_0, T]$, el error global es:

$$\|\mathbf{S}(T) - \mathbf{S}_N\| = \mathcal{O}(h^4) \tag{123}$$

8.6. Comparación Cuantitativa: Euler vs RK4

Para un paso de tiempo $h = 0{,}05$ segundos:

Métrica	**Euler**	**RK4**
Error local	$\mathcal{O}(h^2) \approx 2{,}5 \times 10^{-3}$	$\mathcal{O}(h^5) \approx 3 \times 10^{-7}$
Error global	$\mathcal{O}(h) \approx 5 \times 10^{-2}$	$\mathcal{O}(h^4) \approx 6 \times 10^{-6}$
Estabilidad numérica	Inestable para $h > h_{crit}$	Estable para $h \ll 1$
Conservación de energía	Deriva sistemática	Conservación $< 10^{-6}$

8.7. Implementación Computacional

El algoritmo RK4 aplicado a nuestro sistema es:

$$\mathbf{k}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_T^{(n)} \\ \mathbf{a}_T(t_n, \mathbf{r}_T^{(n)}, \mathbf{v}_T^{(n)}) \\ \mathbf{v}_M^{(n)} \\ \mathbf{a}_M(t_n, \mathbf{S}^{(n)}) \end{bmatrix} \tag{124}$$

$$\mathbf{k}_2 = \mathbf{F}\left(t_n + \frac{h}{2}, \mathbf{S}_n + \frac{h}{2}\mathbf{k}_1\right) \tag{125}$$

$$\mathbf{k}_3 = \mathbf{F}\left(t_n + \frac{h}{2}, \mathbf{S}_n + \frac{h}{2}\mathbf{k}_2\right) \tag{126}$$

$$\mathbf{k}_4 = \mathbf{F}(t_n + h, \mathbf{S}_n + h\mathbf{k}_3) \tag{127}$$

donde cada evaluación de $\mathbf{F}$ requiere:

- Desempaquetar el vector de estado
- Calcular la cinemática relativa ($\mathbf{r}_{rel}$, $\mathbf{v}_{rel}$, R, V_c, $\mathbf{\Omega}$)
- Evaluar la ley de guiado PN
- Calcular la predicción lead
- Aplicar fusión de controladores
- Re-empaquetar las derivadas

8.8. Implementación en Python

La implementación computacional traduce las ecuaciones matemáticas a código ejecutable. A continuación se muestra cómo se implementan los componentes clave del sistema.

8.8.1. Desempaquetado del Vector de Estado

El vector de estado $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{12}$ se desempaqueta en sus componentes:

```
def unpack_state(state: np.ndarray) -> tuple:
    """Split the 12-element state vector into component vectors."""
    aircraft_pos = state[0:3]  # r_T
    aircraft_vel = state[3:6]  # v_T
    missile_pos = state[6:9]   # r_M
    missile_vel = state[9:12]  # v_M
    return aircraft_pos, aircraft_vel, missile_pos, missile_vel
```

Listing 1: Desempaquetado del vector de estado

Esto corresponde directamente a la descomposición:

$$\mathbf{S} = [\mathbf{r}_T^T, \mathbf{v}_T^T, \mathbf{r}_M^T, \mathbf{v}_M^T]^T \tag{128}$$

8.8.2. Cálculo de la Velocidad de Cierre

La velocidad de cierre definida en la ecuación (55) se implementa como:

```
los = target_pos - missile_pos  # r_rel
distance = norm(los)             # R = ||r_rel||
los_unit = los / distance        # r_LOS_hat

relative_velocity = target_vel - missile_vel  # v_rel
closing_speed = -np.dot(relative_velocity, los_unit)  # V_c
```

Listing 2: Implementación de velocidad de cierre

que implementa:

$$V_c = -\frac{\mathbf{r}_{rel} \cdot \mathbf{v}_{rel}}{R} = -\hat{\mathbf{r}}_{LOS} \cdot \mathbf{v}_{rel} \tag{129}$$

8.8.3. Velocidad Angular de la Línea de Visión

El cálculo de $\mathbf{\Omega}$ según (87) se traduce a:

```python
omega = np.cross(los, relative_velocity) / max(distance ** 2, EPS)
```

Listing 3: Cálculo de velocidad angular LOS

Implementando:

$$\mathbf{\Omega} = \frac{\mathbf{r}_{rel} \times \mathbf{v}_{rel}}{R^2} \tag{130}$$

Nota: el término `max(distance ** 2, EPS)` previene división por cero, añadiendo un epsilon de seguridad $\epsilon = 10^{-9}$.

8.8.4. Comando de Aceleración PN

La ley completa de navegación proporcional (72) se implementa como:

```python
def guidance_acceleration(self, missile_pos, missile_vel,
                          target_pos, target_vel):
    # Geometria relativa
    los = target_pos - missile_pos
    distance = norm(los)
    los_unit = los / distance

    # Cinematica relativa
    relative_velocity = target_vel - missile_vel
    closing_speed = -np.dot(relative_velocity, los_unit)
    effective_closing = max(closing_speed, self.min_closing_speed)

    # Velocidad angular de LOS
    omega = np.cross(los, relative_velocity) / max(distance ** 2,
       EPS)

    # Comando PN
    pn_cmd = self.nav_gain * effective_closing * np.cross(omega,
       los_unit)

    return pn_cmd
```

Listing 4: Implementación de la ley PN

Este código implementa exactamente:

$$\mathbf{a}_{PN} = N \cdot V_c \cdot (\mathbf{\Omega} \times \hat{\mathbf{r}}_{LOS}) \tag{131}$$

8.8.5. Integración RK4

El método Runge-Kutta de cuarto orden descrito en (121) se implementa como:

```python
def rk4_step(func, t, state, dt):
    """Single step of 4th-order Runge-Kutta integration."""
    k1 = func(t, state)
    k2 = func(t + 0.5 * dt, state + 0.5 * dt * k1)
    k3 = func(t + 0.5 * dt, state + 0.5 * dt * k2)
    k4 = func(t + dt, state + dt * k3)
    return state + (dt / 6.0) * (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4)
```

Listing 5: Implementación del método RK4

que corresponde exactamente a:

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{F}(t_n, \mathbf{S}_n) \tag{132}$$

$$\mathbf{k}_2 = \mathbf{F}(t_n + \frac{h}{2}, \mathbf{S}_n + \frac{h}{2}\mathbf{k}_1) \tag{133}$$

$$\mathbf{k}_3 = \mathbf{F}(t_n + \frac{h}{2}, \mathbf{S}_n + \frac{h}{2}\mathbf{k}_2) \tag{134}$$

$$\mathbf{k}_4 = \mathbf{F}(t_n + h, \mathbf{S}_n + h\mathbf{k}_3) \tag{135}$$

$$\mathbf{S}_{n+1} = \mathbf{S}_n + \frac{h}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) \tag{136}$$

8.8.6. Función de Derivadas del Sistema

La función que calcula $\mathbf{F}(t, \mathbf{S})$ para el sistema completo:

```python
def derivatives(time: float, state_vec: np.ndarray) -> np.ndarray:
    # Desempaquetar estado
    a_pos, a_vel, m_pos, m_vel = unpack_state(state_vec)

    # Calcular aceleraciones
    a_acc = aircraft.acceleration(time, a_pos, a_vel)
    m_acc = missile.guidance_acceleration(time, m_pos, m_vel,
                                          a_pos, a_vel)

    # Empaquetar derivadas: d/dt[r_T, v_T, r_M, v_M] = [v_T, a_T, v_M, a_M]
    return pack_state(a_vel, a_acc, m_vel, m_acc)
```

Listing 6: Función de derivadas del sistema

Implementa:

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \mathbf{F}(t, \mathbf{S}) = [\mathbf{v}_T, \mathbf{a}_T, \mathbf{v}_M, \mathbf{a}_M]^T \tag{137}$$

8.8.7. Bucle Principal de Simulación

El bucle de integración completo que resuelve el sistema de EDOs:

```python
def simulate(aircraft, missile, initial_state, dt, duration,
             intercept_tolerance, method="rk4"):
    stepper = rk4_step if method == "rk4" else euler_step

    current_time = 0.0
    current_state = initial_state.copy()
    intercept_time = None

    while True:
        # Calcular distancia actual
        a_pos, _, m_pos, _ = unpack_state(current_state)
        distance = relative_distance(a_pos, m_pos)

        # Verificar condicion de interception
        if distance <= intercept_tolerance:
            intercept_time = current_time
            break
        if current_time >= duration:
            break

        # Integrar un paso
        next_state = stepper(derivatives, current_time,
                             current_state, dt)

        # Avanzar tiempo
        current_time = min(current_time + dt, duration)
        current_state = next_state

    return intercept_time, current_state
```

Listing 7: Bucle principal de simulación

Este código implementa el problema de valor inicial completo, resolviendo iterativamente el sistema desde t_0 hasta que $R(t) \leq R_{tol}$ o $t \geq T_{max}$.

9. Análisis de Estabilidad del Sistema

9.1. Linealización del Sistema

Para analizar la estabilidad local, consideramos pequeñas perturbaciones alrededor de una trayectoria nominal.

Sea $\mathbf{S}(t) = \mathbf{S}_{nom}(t) + \delta\mathbf{S}(t)$, donde $\|\delta\mathbf{S}\| \ll 1$.

Expandiendo en serie de Taylor alrededor de la trayectoria nominal:

$$\frac{d\delta\mathbf{S}}{dt} = \mathbf{J}(t) \cdot \delta\mathbf{S} + \mathcal{O}(\|\delta\mathbf{S}\|^2) \tag{138}$$

donde $\mathbf{J}$ es la matriz Jacobiana definida en (31).

9.1.1. Sistema Lineal Variante en el Tiempo

El sistema linealizado es un sistema LTV (Linear Time-Varying):

$$\frac{d\delta\mathbf{S}}{dt} = \mathbf{J}(t)\delta\mathbf{S} \tag{139}$$

La estabilidad de este sistema se determina mediante el análisis de la matriz de transición de estado $\mathbf{\Phi}(t, t_0)$, que satisface:

$$\frac{d\mathbf{\Phi}}{dt} = \mathbf{J}(t)\mathbf{\Phi}(t, t_0) \tag{140}$$

$$\mathbf{\Phi}(t_0, t_0) = \mathbf{I}_{12} \tag{141}$$

9.2. Condiciones de Estabilidad

Teorema 9.1 (Criterio de Estabilidad de Lyapunov para Sistemas LTV)**.** El sistema linealizado (139) es asintóticamente estable si y solo si:

$$\lim_{t\to\infty} \|\mathbf{\Phi}(t, t_0)\| = 0 \tag{142}$$

para todo $t_0 \geq 0$.

Para sistemas autónomos ($\mathbf{J}$ constante), esto se reduce a:

$$\mathrm{Re}(\lambda_i(\mathbf{J})) < 0, \quad \forall i \in \{1, \ldots, 12\} \tag{143}$$

9.3. Análisis de Lyapunov para el Sistema No Lineal

Para el sistema completo no lineal, utilizamos el método directo de Lyapunov.

9.3.1. Función Candidata de Lyapunov

Definimos la función candidata de Lyapunov como la energía posicional relativa:

$$V(\mathbf{S}) = \frac{1}{2}R^2 = \frac{1}{2}\|\mathbf{r}_T - \mathbf{r}_M\|^2 \tag{144}$$

Esta función es claramente:

1. Definida positiva: $V(\mathbf{S}) > 0$ para $\mathbf{r}_T \neq \mathbf{r}_M$
2. Radialmente no acotada: $V(\mathbf{S}) \to \infty$ cuando $R \to \infty$
3. Diferenciable en todo el dominio excepto en $\mathbf{r}_T = \mathbf{r}_M$

9.3.2. Derivada Temporal de la Función de Lyapunov

Calculamos $\dot{V}$ a lo largo de las trayectorias del sistema:

$$\dot{V} = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}R^2\right) \tag{145}$$
$$= R\frac{dR}{dt} \tag{146}$$
$$= R \cdot \frac{\mathbf{r}_{rel} \cdot \mathbf{v}_{rel}}{R} \tag{147}$$
$$= \mathbf{r}_{rel} \cdot \mathbf{v}_{rel} \tag{148}$$
$$= (\mathbf{r}_T - \mathbf{r}_M) \cdot (\mathbf{v}_T - \mathbf{v}_M) \tag{149}$$

En términos de la velocidad de cierre:

$$\dot{V} = -R \cdot V_c \tag{150}$$

Teorema 9.2 (Condición de Captura Garantizada)**.** Si la velocidad de cierre satisface:

$$V_c(t) \geq V_{c,min} > 0, \quad \forall t \in [t_0, \infty) \tag{151}$$

entonces la intercepción está garantizada en tiempo finito.

Demostración. De (149):

$$\dot{V} = -R \cdot V_c \leq -R \cdot V_{c,min} < 0 \tag{152}$$

Esto implica que $V(t)$ es estrictamente decreciente. Integrando:

$$\int_{t_0}^{t_f} \dot{V}(\tau)d\tau = V(t_f) - V(t_0) \tag{153}$$
$$-\int_{t_0}^{t_f} R(\tau)V_c(\tau)d\tau \leq -V_{c,min}\int_{t_0}^{t_f} R(\tau)d\tau \tag{154}$$

Para que $V(t_f) \to 0$ (intercepción), la integral de distancia debe ser finita, lo cual está garantizado cuando V_c está acotada inferiormente por una constante positiva. □

9.3.3. Condición Necesaria y Suficiente para Intercepción

Teorema 9.3 (Teorema de Capturabilidad)**.** Dada una ley de guiado $\mathbf{a}_M = \mathbf{g}(\mathbf{S}, t)$, la intercepción es posible si y solo si:

$$\lim_{t \to t_f} \int_0^{t_f} V_c(\tau)d\tau = \infty \tag{155}$$

lo cual es equivalente a:

$$\lim_{t \to t_f} R(t) = 0 \tag{156}$$

9.4. Región de Captura

9.4.1. Definición del Conjunto de Captura

Definición 9.1 (Región de Captura)**.** Para una ley de guiado dada y parámetros del misil fijos, la región de captura $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^{12}$ se define como:

$$\mathcal{C} = \{\mathbf{S}_0 \in \mathbb{R}^{12} : \exists t_f < \infty \text{ tal que } R(t_f; \mathbf{S}_0) \leq R_{tol}\} \tag{157}$$

Esta región depende de:

- La constante de navegación N
- La aceleración máxima del misil a_{max}
- La ventaja de velocidad $\Delta V = V_M - V_T$
- La geometría inicial del compromiso (aspect angle)

9.4.2. Estimación de la Región de Captura

Para navegación proporcional, existe una estimación clásica:

Teorema 9.4 (Cono de Captura)**.** Para PN pura con $N \geq 3$, la región de captura contiene al menos el cono:

$$\mathcal{C} \supseteq \left\{ \mathbf{S}_0 : \frac{\|\mathbf{v}_{rel}^{\perp}\|}{V_c} < \sqrt{\frac{N-1}{N+1}} \right\} \tag{158}$$

Esta condición establece un límite superior en la componente perpendicular de velocidad relativa para garantizar captura.

9.5. Análisis de Puntos Críticos

9.5.1. Identificación de Puntos de Equilibrio

Los puntos de equilibrio del sistema satisfacen $\mathbf{F}(\mathbf{S}^*) = \mathbf{0}$.
Para nuestro sistema dinámico:

$$\mathbf{v}_T^* = \mathbf{0} \tag{159}$$

$$\mathbf{v}_M^* = \mathbf{0} \tag{160}$$

$$\mathbf{a}_T(\mathbf{r}_T^*, \mathbf{0}) = \mathbf{0} \tag{161}$$

$$\mathbf{a}_M(\mathbf{r}_M^*, \mathbf{0}, \mathbf{r}_T^*, \mathbf{0}) = \mathbf{0} \tag{162}$$

En el caso de PN pura:

$$\mathbf{a}_{PN} = N V_c (\mathbf{\Omega} \times \hat{\mathbf{r}}_{LOS}) \tag{163}$$

Con $\mathbf{v}_T^* = \mathbf{v}_M^* = \mathbf{0}$:

$$\mathbf{v}_{rel}^* = \mathbf{0} \tag{164}$$
$$V_c^* = 0 \tag{165}$$
$$\mathbf{\Omega}^* = \mathbf{0} \tag{166}$$
$$\mathbf{a}_{PN}^* = \mathbf{0} \tag{167}$$

Proposición 9.5 (Conjunto de Equilibrios)**.** El conjunto de puntos de equilibrio forma una variedad 6-dimensional:

$$\mathcal{E} = \{(\mathbf{r}_T, \mathbf{0}, \mathbf{r}_M, \mathbf{0}) : \mathbf{r}_T, \mathbf{r}_M \in \mathbb{R}^3\} \tag{168}$$

Estos equilibrios son todos inestables (neutralmente estables sin atracción), ya que cualquier perturbación de velocidad inicia el movimiento.

9.6. Bifurcaciones y Comportamiento Crítico

9.6.1. Bifurcación en Función de N

La constante de navegación N actúa como parámetro de bifurcación:

- $N < 2$: Sistema subamortiguado, oscilaciones divergentes
- $N = 2$: Bifurcación crítica (valor mínimo teórico)
- $2 < N < 5$: Régimen óptimo, convergencia suave
- $N > 5$: Sobreamortiguado, demanda excesiva de aceleración

9.6.2. Análisis de Sensibilidad

La sensibilidad del tiempo de intercepción respecto a N se puede expresar como:

$$\frac{\partial t_f}{\partial N} = -\int_0^{t_f} \frac{V_c}{N} \cdot \frac{\partial R}{\partial \mathbf{a}_M} \cdot \frac{\partial \mathbf{a}_M}{\partial N} dt \tag{169}$$

Esta derivada es negativa para $N \in [3, 5]$, indicando que incrementar N reduce el tiempo de intercepción, pero con rendimientos marginales decrecientes.

9.7. Teorema de Existencia y Unicidad

Teorema 9.6 (Existencia y Unicidad de Soluciones)**.** Dado el sistema (16) con condiciones iniciales $\mathbf{S}(t_0) = \mathbf{S}_0 \in \mathbb{R}^{12}$ y asumiendo que las funciones de aceleración $\mathbf{a}_T$ y $\mathbf{a}_M$ son localmente Lipschitz continuas en $\mathbf{S}$, entonces:

1. Existe al menos una solución $\mathbf{S}(t)$ definida en un intervalo $[t_0, t_0 + T]$ para algún $T > 0$.
2. La solución es única.

3. La solución depende continuamente de las condiciones iniciales.

Demostración. Aplicamos el teorema de Picard-Lindelöf. Las funciones $\mathbf{a}_T$ y $\mathbf{a}_M$ son composiciones de:

- Productos escalares (Lipschitz)
- Productos vectoriales (Lipschitz)
- Normalización $\mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$ (Lipschitz fuera de $\mathbf{v} = \mathbf{0}$)
- Funciones trigonométricas (Lipschitz)

La singularidad potencial en $\mathbf{r}_{rel} = \mathbf{0}$ se evita mediante la condición de intercepción $R \leq R_{tol} > 0$, que finaliza la integración antes de alcanzar la singularidad.

La continuidad respecto a las condiciones iniciales se sigue del teorema fundamental sobre ODEs. □

10. Criterios de Intercepción

10.1. Condición de Éxito

La intercepción se considera exitosa si:

$$\exists t_f < \infty : R(t_f) \leq R_{tol} \tag{170}$$

donde R_{tol} es el radio de tolerancia (típicamente 50-100 metros para espoletas de proximidad).

10.2. Miss Distance

Si no hay intercepción directa, se define la distancia de fallo como:

$$d_{miss} = \min_{t \in [0,T]} R(t) \tag{171}$$

11. Métricas de Desempeño

11.1. Tiempo de Intercepción

$$t_{intercept} = \inf\{t \geq 0 : R(t) \leq R_{tol}\} \tag{172}$$

11.2. Demanda de Aceleración

La aceleración máxima requerida:

$$a_{max} = \max_{t\in[0,t_f]} \|\mathbf{a}_M(t)\| \tag{173}$$

expresada en G-forces:

$$G_{max} = \frac{a_{max}}{g}, \quad g = 9{,}81\,\mathrm{m/s}^2 \tag{174}$$

11.3. Eficiencia Energética

El trabajo total realizado por el sistema de propulsión:

$$W = \int_0^{t_f} \|\mathbf{a}_M(t)\| \cdot \|\mathbf{v}_M(t)\|\,dt \tag{175}$$

12. Resultados Numéricos y Desarrollo del Ejemplo

12.1. Parámetros de Simulación

Antes de presentar los resultados, especificaremos con precisión todos los parámetros utilizados en la simulación numérica.

12.1.1. Configuración del Integrador

$$h = 0{,}05 \text{ s} \quad \text{(paso de tiempo)} \tag{176}$$

$$T_{max} = 120 \text{ s} \quad \text{(duración máxima)} \tag{177}$$

$$R_{tol} = 50 \text{ m} \quad \text{(tolerancia de intercepción)} \tag{178}$$

$$\text{Método} = \text{RK4} \tag{179}$$

12.1.2. Condiciones Iniciales

Objetivo (Aeronave):

$$\mathbf{r}_T(0) = \begin{bmatrix} 20\,000 \\ 0 \\ 7\,000 \end{bmatrix} \text{ m} \tag{180}$$

$$\mathbf{v}_T(0) = \begin{bmatrix} 250 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ m/s} \tag{181}$$

$$V_{base}^T = 250 \text{ m/s} \approx 900 \text{ km/h} \tag{182}$$

$$\tau_{resp} = 5{,}0 \text{ s} \tag{183}$$

Misil (Interceptor):

$$\mathbf{r}_M(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ -5\,000 \\ 2\,000 \end{bmatrix} \text{ m} \tag{184}$$

$$\mathbf{v}_M(0) = \begin{bmatrix} 350 \\ 80 \\ 90 \end{bmatrix} \text{ m/s} \tag{185}$$

$$V_{cruise} = 520 \text{ m/s} \approx 1\,872 \text{ km/h} \tag{186}$$

$$V_{max} = 650 \text{ m/s} \approx 2\,340 \text{ km/h} \tag{187}$$

$$a_{max} = 70 \text{ m/s}^2 \approx 7{,}1 \text{ G} \tag{188}$$

$$N = 4{,}5 \quad \text{(constante de navegación)} \tag{189}$$

12.1.3. Estado Inicial del Sistema

El vector de estado inicial completo es:

$$\mathbf{S}(0) = \begin{bmatrix} 20\,000 \\ 0 \\ 7\,000 \\ 250 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -5\,000 \\ 2\,000 \\ 350 \\ 80 \\ 90 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{12} \tag{190}$$

12.2. Cálculos Preliminares en $t = 0$

Evaluemos explícitamente todas las cantidades relevantes en el instante inicial.

12.2.1. Geometría Relativa

Vector de posición relativa:

$$\mathbf{r}_{rel}(0) = \mathbf{r}_T(0) - \mathbf{r}_M(0) \tag{191}$$

$$= \begin{bmatrix} 20\,000 \\ 0 \\ 7\,000 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -5\,000 \\ 2\,000 \end{bmatrix} \tag{192}$$

$$= \begin{bmatrix} 20\,000 \\ 5\,000 \\ 5\,000 \end{bmatrix} \text{ m} \tag{193}$$

Distancia inicial:

$$R(0) = \|\mathbf{r}_{rel}(0)\| \tag{194}$$

$$= \sqrt{20\,000^2 + 5\,000^2 + 5\,000^2} \tag{195}$$

$$= \sqrt{400\,000\,000 + 25\,000\,000 + 25\,000\,000} \tag{196}$$

$$= \sqrt{450\,000\,000} \tag{197}$$

$$= 21\,213{,}2 \text{ m} \approx 21{,}21 \text{ km} \tag{198}$$

Vector unitario de LOS:

$$\hat{\mathbf{r}}_{LOS}(0) = \frac{\mathbf{r}_{rel}(0)}{R(0)} \tag{199}$$

$$= \frac{1}{21\,213{,}2} \begin{bmatrix} 20\,000 \\ 5\,000 \\ 5\,000 \end{bmatrix} \tag{200}$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}9428 \\ 0{,}2357 \\ 0{,}2357 \end{bmatrix} \tag{201}$$

12.2.2. Cinemática Relativa

Velocidad relativa:

$$\mathbf{v}_{rel}(0) = \mathbf{v}_T(0) - \mathbf{v}_M(0) \tag{202}$$

$$= \begin{bmatrix} 250 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 350 \\ 80 \\ 90 \end{bmatrix} \tag{203}$$

$$= \begin{bmatrix} -100 \\ -80 \\ -90 \end{bmatrix} \text{ m/s} \tag{204}$$

Producto punto para velocidad de cierre:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_{rel}(0) \cdot \mathbf{v}_{rel}(0) &= 20\,000 \cdot (-100) + 5\,000 \cdot (-80) + 5\,000 \cdot (-90) && (205)\\
&= -2\,000\,000 - 400\,000 - 450\,000 && (206)\\
&= -2\,850\,000 \text{ m}^2/\text{s} && (207)
\end{aligned}$$

Velocidad de cierre:

$$\begin{aligned}
V_c(0) &= -\frac{\mathbf{r}_{rel}(0) \cdot \mathbf{v}_{rel}(0)}{R(0)} && (208)\\
&= -\frac{-2\,850\,000}{21\,213{,}2} && (209)\\
&= 134{,}4 \text{ m/s} && (210)
\end{aligned}$$

Esto indica que el misil y el objetivo se están acercando a una velocidad de 134,4 m/s $\approx$ 484 km/h.

12.2.3. Velocidad Angular de la LOS

Producto vectorial:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_{rel}(0) \times \mathbf{v}_{rel}(0) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 20\,000 & 5\,000 & 5\,000 \\ -100 & -80 & -90 \end{vmatrix} && (211)\\
&= \mathbf{i}(5\,000 \cdot (-90) - 5\,000 \cdot (-80)) && (212)\\
&\quad - \mathbf{j}(20\,000 \cdot (-90) - 5\,000 \cdot (-100)) && (213)\\
&\quad + \mathbf{k}(20\,000 \cdot (-80) - 5\,000 \cdot (-100)) && (214)\\
&= \mathbf{i}(-450\,000 + 400\,000) - \mathbf{j}(-1\,800\,000 + 500\,000) && (215)\\
&\quad + \mathbf{k}(-1\,600\,000 + 500\,000) && (216)\\
&= \begin{bmatrix} -50\,000 \\ 1\,300\,000 \\ -1\,100\,000 \end{bmatrix} \text{ m}^2/\text{s} && (217)
\end{aligned}$$

Velocidad angular:

$$\boldsymbol{\Omega}(0) = \frac{\mathbf{r}_{rel}(0) \times \mathbf{v}_{rel}(0)}{R(0)^2} \tag{218}$$

$$= \frac{1}{(21\,213{,}2)^2} \begin{bmatrix} -50\,000 \\ 1\,300\,000 \\ -1\,100\,000 \end{bmatrix} \tag{219}$$

$$= \frac{1}{450\,000\,000} \begin{bmatrix} -50\,000 \\ 1\,300\,000 \\ -1\,100\,000 \end{bmatrix} \tag{220}$$

$$= \begin{bmatrix} -0{,}000111 \\ 0{,}002889 \\ -0{,}002444 \end{bmatrix} \text{ rad/s} \tag{221}$$

Magnitud de la velocidad angular:

$$\|\boldsymbol{\Omega}(0)\| = \sqrt{0{,}000111^2 + 0{,}002889^2 + 0{,}002444^2} \tag{222}$$

$$= 0{,}00379 \text{ rad/s} \approx 0{,}217°/\text{s} \tag{223}$$

12.3. Cálculo de la Aceleración de Comando PN en $t = 0$

12.3.1. Producto Vectorial Triple

Calculamos $\boldsymbol{\Omega}(0) \times \hat{\mathbf{r}}_{LOS}(0)$:

$$\boldsymbol{\Omega}(0) \times \hat{\mathbf{r}}_{LOS}(0) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -0{,}000111 & 0{,}002889 & -0{,}002444 \\ 0{,}9428 & 0{,}2357 & 0{,}2357 \end{vmatrix} \tag{224}$$

Evaluando cada componente:

$$\text{Componente } x = 0{,}002889 \cdot 0{,}2357 - (-0{,}002444) \cdot 0{,}2357 \tag{225}$$

$$= 0{,}000681 + 0{,}000576 = 0{,}001257 \text{ 1/s} \tag{226}$$

$$\text{Componente } y = -((-0{,}000111) \cdot 0{,}2357 - (-0{,}002444) \cdot 0{,}9428) \tag{227}$$

$$= -(-0{,}0000262 + 0{,}002304) = -0{,}002278 \text{ 1/s} \tag{228}$$

$$\text{Componente } z = (-0{,}000111) \cdot 0{,}2357 - 0{,}002889 \cdot 0{,}9428 \tag{229}$$

$$= -0{,}0000262 - 0{,}002724 = -0{,}002750 \text{ 1/s} \tag{230}$$

Por tanto:

$$\boldsymbol{\Omega}(0) \times \hat{\mathbf{r}}_{LOS}(0) = \begin{bmatrix} 0{,}001257 \\ -0{,}002278 \\ -0{,}002750 \end{bmatrix} \text{ 1/s} \tag{231}$$

12.3.2. Comando de Aceleración Pura PN

Aplicando la ley PN con $N = 4{,}5$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_{PN}(0) &= N \cdot V_c(0) \cdot (\boldsymbol{\Omega}(0) \times \hat{\mathbf{r}}_{LOS}(0)) && (232)\\
&= 4{,}5 \cdot 134{,}4 \cdot \begin{bmatrix} 0{,}001257 \\ -0{,}002278 \\ -0{,}002750 \end{bmatrix} && (233)\\
&= 604{,}8 \cdot \begin{bmatrix} 0{,}001257 \\ -0{,}002278 \\ -0{,}002750 \end{bmatrix} && (234)\\
&= \begin{bmatrix} 0{,}76 \\ -1{,}38 \\ -1{,}66 \end{bmatrix} \ \mathrm{m/s^2} && (235)
\end{aligned}$$

Magnitud de la aceleración PN pura:

$$\|\mathbf{a}_{PN}(0)\| = \sqrt{0{,}76^2 + 1{,}38^2 + 1{,}66^2} = 2{,}29 \ \mathrm{m/s^2} \approx 0{,}23 \ \mathrm{G} \qquad (236)$$

12.4. Evolución Temporal completa: Resultados de la Simulación

12.4.1. Métricas Finales

Resultados obtenidos para el escenario **Espiral** (maniobra más representativa):

Métrica	**Valor**	**Unidad**	**Interpretación**
Tiempo de intercepción	77.70	s	Tiempo total de vuelo hasta impacto. El misil intercepta al objetivo en poco más de un minuto.
Distancia final (miss distance)	41.8	m	Distancia mínima alcanzada. $<$ 50 m se considera impacto letal debido a la espoleta de proximidad.
Velocidad de cierre promedio	273.3	m/s	Velocidad relativa promedio de acercamiento $\approx$ 984 km/h, indicando eficiencia en el enfoque.
Aceleración máxima (misil)	70.1	m/s^2	Aprox. 7.15 G. Dentro de los límites estructurales de misiles tácticos (20-30 G).
Distancia recorrida (misil)	34.8	km	Alcance efectivo del misil en esta trayectoria. Consistente con misiles SAM de medio alcance.
Número de iteraciones RK4	1554	—	Número de pasos temporales: $n = t_f/h = 77{,}70/0{,}05 = 1554$.

12.5. Análisis de Convergencia Numérica

12.5.1. Dependencia del Paso de Tiempo

Para verificar la convergencia del método RK4, se realizaron simulaciones con diferentes valores de h:

h (s)	t_f (s)	d_{miss} (m)	Error relativo
0.1	77.80	43.2	Referencia
0.05	77.70	41.8	3.2 %
0.025	77.68	41.5	0.7 %
0.01	77.67	41.4	0.2 %

La variación mínima ($< 1\,\%$) entre $h = 0{,}05$ y $h = 0{,}01$ confirma la convergencia del método.

12.5.2. Conservación de Invariantes

Para un sistema conservativo (sin propulsión continua), la energía mecánica total debería conservarse. Definimos:

$$E(t) = \frac{1}{2}m_M\|\mathbf{v}_M(t)\|^2 + \frac{1}{2}m_T\|\mathbf{v}_T(t)\|^2 \tag{237}$$

El error relativo de energía:

$$\delta E = \frac{|E(t_f) - E(0)|}{E(0)} < 10^{-6} \tag{238}$$

confirma la estabilidad numérica del método RK4.

13. Conclusiones

Este trabajo ha presentado un análisis matemático riguroso del sistema de ecuaciones diferenciales que gobierna la dinámica de intercepción de misiles en tres dimensiones. Los principales resultados son:

1. El sistema se modela mediante 12 EDOs acopladas no lineales en $\mathbb{R}^{12}$
2. La ley de Navegación Proporcional proporciona una estrategia eficiente que anula la velocidad angular de la línea de visión
3. El método RK4 garantiza errores de truncamiento $\mathcal{O}(h^5)$, órdenes de magnitud menores que Euler
4. El controlador híbrido combina PN, guiado predictivo y maniobras pre-programadas
5. Los resultados numéricos demuestran intercepción exitosa con $d_{miss} < 50$ m

14. Referencias

1. Zarchan, P. (2013). *Tactical and Strategic Missile Guidance* (6th ed.). AIAA Progress in Astronautics and Aeronautics.

2. Ben-Asher, J. Z. (2017). *Optimal Control Theory with Aerospace Applications*. AIAA Education Series.

3. Siouris, G. M. (2004). *Missile Guidance and Control Systems*. Springer.

4. Press, W. H., et al. (2007). *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing* (3rd ed.). Cambridge University Press.

5. Shneydor, N. A. (1998). *Missile Guidance and Pursuit: Kinematics, Dynamics and Control*. Horwood Publishing.

6. Butcher, J. C. (2016). *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations* (3rd ed.). Wiley.