Teoría de la Computación 2026-1
Ejercicio 7

January 26, 2026

Expediente	Nombre
223209096	Ahumada Herrera Jorge Alán
219208106	Bórquez Guerrero Angel Fernando
222206586	Juan Valenzuela Gael
223201053	Solis Zatarain Owen Adiel

Sean L, M y N lenguajes cualesquiera, todos con un mismo alfabeto. Pruebe o de un contraejemplo de cada una de las siguientes afirmaciones:

1. $L(M \cap N) = LM \cap LN$
   Supongamos $L = \{u, uv\}$, $M = \{v\}$ y $N = \{\varepsilon\}$

   Se define a la concatenación de lenguajes como $LM = \{xy : x \in L \wedge y \in M\}$

   reemplazamos los valores en la igualdad

   $\{u, uv\}(\{v\} \cap \{\varepsilon\}) = \{uv, uvv\} \cap \{u, uv\}$

   $\{u, uv\}\varnothing = \{uv\}$

   $\varnothing = \{uv\}$

   $\therefore L(M \cap N) \neq LM \cap LN$

2. $L \cap (MN) = (L \cap M)(L \cap N)$
   Supongamos $L = \{u, v, w\}$, $M = \{v\}$ y $N = \{w\}$

   Reemplazamos en la igualdad

   $\{u, v, w\} \cap \{vw\} = (\{u, v, w\} \cap \{v\})(\{u, v, w\} \cap \{w\})$

   $\varnothing = (\{v\})(\{w\})$

   $\varnothing = \{vw\}$

   $\therefore L \cap (MN) \neq (L \cap M)(L \cap N)$

3. $LM = ML$
   Supongamos $L = \{u\}$ y $M = \{v\}$

   Se define a la concatenación de lenguajes como $LM = \{xy : x \in L \wedge y \in M\}$

   Entonces $LM = \{uv\}$ y $ML = \{vu\}$

   $\therefore LM \neq ML$

4. $LL^* = L^*L$

Parte 1: $LL^* \subseteq L^*L$

Sea $w \in LL^*$.

Por definición, $w = x \cdot y$ con $x \in L$ e $y \in L^*$.

Por definición de cerradura de Kleene, existe $n \geq 0$ tal que $y \in L^n$.

Caso $n = 0$ ($y = \varepsilon$):

$w = x \cdot \epsilon = x$

$w = \epsilon \cdot x \implies w \in L^0 L \subseteq L^*L$

Caso $n > 0$:

Por definición, $y = x_1 \dots x_n$ con $x_i \in L$ para $i = 1, \dots, n$.

Sustituyendo en w:

$w = x \cdot (x_1 \dots x_n)$

Por asociatividad de la concatenación:

$w = (x \cdot x_1 \dots x_{n-1}) \cdot x_n$

Sea $z = x \cdot x_1 \dots x_{n-1}$.

Notamos que z está formado por la concatenación de x (1 elemento) y $n - 1$ elementos ($x_1 \dots x_{n-1}$).

Total de elementos: $1 + (n - 1) = n$.

$\therefore z \in L^n \subseteq L^*$

Como $x_n \in L$, tenemos:

$w = z \cdot x_n \implies w \in L^*L$

$\therefore LL^* \subseteq L^*L$

Parte 2: $L^*L \subseteq LL^*$

Sea $w \in L^*L$.

Por definición, $w = y \cdot x$ con $y \in L^*$ y $x \in L$.

Por definición, existe $n \geq 0$ tal que $y \in L^n$.

Caso $n = 0$ ($y = \epsilon$):

$w = \epsilon \cdot x = x$

$w = x \cdot \epsilon \implies w \in LL^0 \subseteq LL^*$

Caso $n > 0$:

Por definición, $y = x_1 \dots x_n$ con $x_i \in L$.

Sustituyendo en w:

$w = (x_1 \dots x_n) \cdot x$

Por asociatividad, separamos el primer elemento:

$w = x_1 \cdot (x_2 \dots x_n \cdot x)$

Sea $z = x_2 \dots x_n \cdot x$.

Notamos que z está formado por $n - 1$ elementos ($x_2 \dots x_n$) más el elemento x.

Total de elementos: $(n - 1) + 1 = n$.

$\therefore z \in L^n \subseteq L^*$

Como $x_1 \in L$, tenemos:

$w = x_1 \cdot z \implies w \in LL^*$

$\therefore L^*L \subseteq LL^*$

Conclusión

$LL^* \subseteq L^L \quad \wedge \quad L^*L \subseteq LL^* \implies LL^* = L^*L \quad \blacksquare$

5. Para todo $n > 0$, $(LM)^n = L^n M^n$.
   Sea $L = \{u\}$, $M = \{v\}$ y $n = 2$

   $(LM)^2 = L^2 M^2$

   $(\{u\}\{v\})(\{u\}\{v\}) = \{u\}\{u\}\{v\}\{v\}$

   $\{uvuv\} = \{uuvv\}$

   $\therefore n > 0,\ (LM)^n \neq L^n M^n$

6. Para todo n, $m > 0$, $(L^n)^m = (L^m)^n$.
   Sea $w = u_1 u_2 ... u_m$ con $u_i \in L^n$

   $w \in (L^n)^m$

   Cada cadena $u_i = x_{i1} x_{i2} ... x_{in}$ con $x_{ij} \in L$

   Por lo tanto $w = (x_{11} ... x_{1n})(x_{21} ... x_{2n}) ... (x_{m1} ... x_{mn})$

   Esto es una concatenación de nm cadenas de L, en este orden fijo

   Agrupamos ahora en bloques de tamaño m

   $w = (x_{11} x_{21} ... x_{m1})(x_{12} x_{22} ... x_{m2}) ... (x_{1n} x_{2n} ... x_{mn})$

   Cada bloque es una concatenación de m cadenas de L

   $(x_{1j} x_{2j} ... x_{mj}) \in L^m$

   Y hay n bloques

   Por definición $w \in (L^m)^n$

   Entonces $(L^n)^m \subseteq (L^m)^n$

   Por simetría podemos decir que el mismo razonamiento al revés nos da $(L^m)^n \subseteq (L^n)^m$

   $\therefore n,\ m > 0,\ (L^n)^m = (L^m)^n$