Probabilidad 2025-1
Tareas Parcial 4

12 de mayo de 2025

Expediente	Nombre
219208106	Bórquez Guerrero Angel Fernando
223203899	Tostado Cortes Dante Alejanro

Tarea 13

1. Suponga que el tiempo promedio que le toma a una persona cualquiera terminar un videojuego es de 30 horas, con una desviación estándar de 5 horas. Suponiendo una distribución aproximada normal con estos parámetros, determine:

   a) La probabilidad de terminar el videojuego en menos de 20 horas.
   $P[X < 20]$

   $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{20-30}{5} = -\frac{10}{5} = -2$

   $P[Z < -2] = 0.02275 = 2.275\,\%$

   b) La probabilidad de terminar el videojuego en menos de 40 horas.
   $P[X < 40]$

   $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{40-30}{5} = \frac{10}{5} = 2$

   $P[Z < 2] = 0.97725 = 97.725\,\%$

   c) La probabilidad de terminar el videojuego entre 20 y 40 horas.
   $P[20 <\leq X \leq 40] = P[X \leq 40] - P[X \leq 20]$

   $P[-2 \leq X \leq 2] = P[Z \leq 2] - P[Z \leq -2]$

   $0.97725 - 0.02275 = 0.9545 = 95.45\,\%$

   d) El tiempo que tarda el 0.01 % de las personas que tardan menos en terminar el videojuego.
   $P[Z \leq z] = 0{,}00001$

   $Z \approx -3.71902$

   $X = Z\sigma + \mu = (-3.71902)(5) + 30 = -18.595 + 30 = 11.405$

Tarea 14

1. Describa con sus propias palabras.

   a) La ley de los grandes números.

   Esta ley dice que al tomar una muestra aleatoria de un universo esta tendrá a estar cerca de la media de ese universo. Esto nos dice que relativamente podemos calcular la media de un universo con pocos datos.

   b) El teorema del límite central.

   Este teorema nos dice que para una muestra cualquiera de una población con n elementos en ella tiene una distribución normal estándar a medida que n tiende al infinito

2. Demuestre que las siguientes funciones son de densidad.

   a)

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & x, y > 0 \\ 0 & \text{Otro caso} \end{cases}$$

- $\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x+y)} dydx = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x-y} dydx = \int_0^\infty e^{-x} \int_0^\infty e^{-y} dydx$
- $\int_0^\infty e^{-y} dy = -e^{-y}\Big|_0^\infty = \text{lím}_{y\to\infty} -\frac{1}{e^y} - (e^0) = 0 - (-1) = 1$
- $\int_0^\infty e^{-x} \int_0^\infty e^{-y} dydx = \int_0^\infty e^{-x}(1)dx = \int_0^\infty e^{-x} dx$
- $\int_0^\infty e^{-x} dx = -e^{-x}\Big|_0^\infty = \text{lím}_{x\to\infty} -\frac{1}{e^x} - (e^0) = 0 - (-1) = 1$

Dado que el resultado de la integral de la función $f(x,y)$ es igual a 1 hemos demostrado que es una función de densidad.

   b)

$$f(x,y) = \begin{cases} 3xy(1-x) & 0 < x < 1, 0 < y < 2 \\ 0 & \text{Otro caso} \end{cases}$$

- $\int_0^1 \int_0^2 3xy(1-x) dydx = \int_0^1 3x(1-x) \int_0^2 ydydx$
- $\int_0^2 ydydx = \frac{y^2}{2}\Big|_0^2 = \frac{2^2}{2} = \frac{4}{2} = 2$
- $\int_0^1 3x(1-x) \int_0^2 ydydx = \int_0^1 3x(1-x)(2)dx = \int_0^1 6x - 6x^2 = 6\left[\int_0^1 xdx - \int_0^1 x^2dx\right]$
- $\int_0^1 xdx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}$
- $\int_0^1 xdx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$
- $6\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right] = 6\left[\frac{1}{6}\right] = 1$

Dado que el resultado de la integral de la función $f(x,y)$ es igual a 1 hemos demostrado que es una función de densidad.

Tarea 15

1. Calcular las funciones de densidades marginales $f_X(x)$ y $f_Y(y)$

$$f(x,y) = \begin{cases} 4xy & 0 < x, y < 1 \\ 0 & \text{Otro caso} \end{cases}$$

- Densidad marginal de $f_X(x)$

$f_X(x) = \int_0^1 4xydy = 4x\int_0^1 ydy = 4x\left[\frac{y^2}{2}\Big|_0^1\right] = 4x\left[\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right] = 4x\left[\frac{1}{2}\right] = 2x$

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{Otro caso} \end{cases}$$

- Densidad marginal de $f_Y(y)$

$f_Y(y) = \int_0^1 4xydy = 4y\int_0^1 xdx = 4y\left[\frac{x^2}{2}\Big|_0^1\right] = 4y\left[\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right] = 4y\left[\frac{1}{2}\right] = 2y$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2y & 0 < y < 1 \\ 0 & \text{Otro caso} \end{cases}$$

2. Encuentre las funciones de distribución marginales $F_X(x)$ y $F_Y(y)$

$$F(x,y) = \begin{cases} (1-e^{-x})(1-e^{-y}) & x, y > 0 \\ 0 & \text{Otro caso} \end{cases}$$

- Distribución marginal de $f_X(x)$

$f_X(x) = \lim_{y\to\infty}(1-e^{-x})(1-\frac{1}{e^y}) = (1-e^{-x})(1-\frac{1}{e^\infty}) = (1-e^{-x})(1-0) = (1-e^{-x})(1) = 1-e^{-x}$

$$f_X(x) = \begin{cases} 1-e^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

- Distribución marginal de $f_Y(y)$

$f_Y(y) = \lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{e^x})(1-e^{-y}) = (1-\frac{1}{e^\infty})(1-e^{-y}) = (1-0)(1-e^{-y}) = (1)(1-e^{-y}) = 1-e^{-y}$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1-e^{-y} & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}$$

Tarea 16

1. Un equipo de fútbol puede tener uno de los siguientes estados tras cada partido.
G: gana el partido
P: pierde el partido
La probabilidad de ganar o perder depende del resultado del partido anterior, de la siguiente manera:

- Si gana un partido, tiene una probabilidad de 0.7 de ganar el siguiente y 0.3 de perder.
- Si pierde un partido, tiene una probabilidad de 0.4 de ganar el siguiente y 0.6 de perder.

a) Escribe la matriz de transición de esta cadena de Markov.

$$\begin{bmatrix} P(G \to G) & P(G \to P) \\ P(P \to G) & P(P \to P) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

b) Si el equipo ganó el primer partido, ¿cuál es la probabilidad de que gane el tercer partido?

- Vector inicial

$v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$

- Probabilidad del segundo partido

$v_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \end{bmatrix}$

- Probabilidad del tercer partido

$v_3 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.61 & 0.39 \end{bmatrix}$

c) ¿Cuál es la distribución estacionaria?

- Datos iniciales

$\pi P = \pi$

$\begin{bmatrix} \pi G & \pi P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi G & \pi P \end{bmatrix}$

- Sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \pi G + \pi P = 1 \\ 0.7\pi G + 0.4\pi P = \pi G \\ 0.3\pi G + 0.6\pi P = \pi P \end{cases}$$

- **Desarrollo**

$0.3\pi G + 0.6\pi P = \pi P$

$0.3\pi G = \pi P - 0.6\pi P$

$0.3\pi G = \pi P(1 - 0.6)$

$0.3\pi G = 0.4\pi P$

$\pi G = \frac{4}{3}\pi P$

- **Solución para πP**

$\frac{4}{3}\pi P + \pi P = 1$

$\pi P(1 + \frac{4}{3}) = 1$

$\pi P \cdot \frac{7}{3} = 1$

$\pi P = \frac{3}{7}$

- **Solución para πG**

$\pi G + \frac{3}{7} = 1$

$\pi G = 1 - \frac{3}{7}$

$\pi G = \frac{4}{7}$

- Respuesta

$$\begin{bmatrix}\pi G & \pi P\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.7 & 0.3\\ 0.4 & 0.6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{4}{7} & \frac{3}{7}\end{bmatrix}$$

d) ¿Cuál es la distribución de probabilidad después de muchos partidos?
La distribución de probabilidad después de muchos partidos es la distribución estacionaria, tal que $\pi = \begin{bmatrix}\pi G & \pi P\end{bmatrix}$.

La cual, se obtiene con el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases}\pi G + \pi P = 1\\ 0.7\pi G + 0.4\pi P = \pi G\\ 0.3\pi G + 0.6\pi P = \pi P\end{cases}$$

Lo que nos da el siguiente resultado:

$$\pi = \begin{bmatrix}\frac{4}{7} & \frac{3}{7}\end{bmatrix}.$$

2. Un jugador participa en un juego en el que, en cada turno, gana o pierde 25 pesos con probabilidad $p = 0.5$. El capital del jugador puede tomar los valores $\{0, 25, 50, 75\}$, donde si alcanza los 75 pesos, el jugador gana definitivamente y deja de jugar. Si su capital llega a 0, se arruina y también deja de jugar. Mientras tenga 25 o 50 pesos, el juego continúa.

   a) Modele esta situación como una cadena de Markov y escriba su matriz de transición, considerando los estados en el orden 0, 25, 50, 75.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   b) ¿Cuál es la probabilidad de que el jugador se haya arruinado después de tres juegos si comienza con 25 pesos?

   - Vector inicial

   $v_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

   - Probabilidad del segundo juego

$$v_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

   - Probabilidad del tercer juego

$$v_3 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.625 & 0 & 0.125 & 0.25 \end{bmatrix}$$

c) ¿Existe una distribución estacionaria?

- Definición

Una distribución estacionaria π es un vector de probabilidades que satisface: $\pi = \pi P$ y $\Sigma_i \pi_i = 1$ donde P es la matriz de transición.

- Estados absorbentes

0: Una vez que el jugador se arruina, permanece en 0.
75: Una vez que el jugador gana, permanece en 75.

- Estados transitorios

25 y 50: El jugaodr puede moverse entre estos estados o ser absorbido por 0 o 75.

- Existencia de la distribución estacionaria

En una cadena de Markov con estados absorbentes, la distribución estacionaria depende de las probabilidades de absorción:
Si el proceso comienza en un estado transitorio, eventualmente será absorbido por uno de los estados absorbentes.
La distribución estacionaria π tendrá más masa probabilística únicamente en los estados absorbentes, ya que son los únicos que persisten a largo plazo.

- Cálculo de la distribución

Dado que los estados 0 y 75 son absorbentes, cualquier distribución estacionaria π debe satisfacer $\pi_0 + \pi_{75} = 1$, $\pi_{25} = \pi_{50} = 0$.
Además, π debe cumplir $\pi = \pi P$:

$$\begin{cases} \pi_0 = \pi_0 \cdot 1 + \pi_{25} \cdot 0.5 + \pi_{50} \cdot 0 + \pi_{75} \cdot 0 \\ \pi_{25} = \pi_0 \cdot 0 + \pi_{25} \cdot 0 + \pi_{50} \cdot 0.5 + \pi_{75} \cdot 0 \\ \pi_{50} = \pi_0 \cdot 0 + \pi_{25} \cdot 0.5 + \pi_{50} \cdot 0 + \pi_{75} \cdot 0 \\ \pi_{75} = \pi_0 \cdot 0 + \pi_{25} \cdot 0 + \pi_{50} \cdot 0.5 + \pi_{75} \cdot 1 \end{cases}$$

De estas ecuaciones, se deduce que $\pi_{25} = \pi_{50} = 0$, y π_0 y π_{75} pueden ser cualesquiera tales que $\pi_0 + \pi_{75} = 1$.

- Conclusión

Existen infinitas distribuciones estacionarias, todas de la forma: $\pi = (\alpha, 0, 0, 1-\alpha)$, donde $\alpha \in [0, 1]$

d) ¿Existe una distribución límite para esta cadena de Markov?
La distribución límite describe la probabilidad de estar en cada estado cuando el número de pasos tiende a infinito, es decir:

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = i) = \pi_i$$

La cadena tiene dos estados absorbentes (0 y 75) y dos estados transitorios (25 y 50), cualquier trayectoria eventualmente será absorbida por 0 o 75.
En cadenas con estados absorbentes, esta distribución límite nos dice la probabilidad de que el proceso termine en cada estado absorbente, dependiendo de dónde empieces.

$$\begin{cases} \text{Si empieza en 0} & \pi = [1, 0, 0, 0] \\ \text{Si empieza en 25} & \pi = \left[\frac{2}{3}, 0, 0, \frac{1}{3}\right] \\ \text{Si empieza en 50} & \pi = \left[\frac{1}{3}, 0, 0, \frac{2}{3}\right] \\ \text{Si empieza en 75} & \pi = [0, 0, 0, 1] \end{cases}$$

Como el límite no es el mismo para cualquier π, no hay una única distribución límite.