Análisis Lógico 2025-2
Tarea pre-examen Unidad II

November 11, 2025

Expediente	**Nombre**
219208106	Bórquez Guerrero Angel Fernando

I. Responde si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F), justificando en una línea si es falso (corrige la afirmación)

1. [V] En un lenguaje de primer orden no puede haber símbolos de función de aridad 0.
2. [V] Toda constante es, desde el punto de vista sintáctico, un término.
3. [F] El alcance de un cuantificador $\forall x$ o $\exists x$ es toda la fórmula en la que aparece.
   El alcance se limita a la subfórmula que sigue al cuantificador.
4. [F] El alfabeto de primer orden se compone de variables, constantes, funciones, predicados, conectivos lógicos, símbolos especiales.
   Faltan los cuantificadores.
5. [F] Los predicados se representan con una letra minúscula (Ej. $p(x)$ = "x es par").
   La letra debe de ser mayúscula.
6. [F] La aridad representa el número de predicado o función sobre el cual estamos hablando.
   La aridad es el número de elementos (objetos o variables) sobre los que un predicado o una función se aplica.
7. [V] $Ama(x, y)$ = "x ama a y" es un ejemplo de aridad 2.
8. [F] Un término es cualquier expresión que "nombra" un objeto del dominio. Nos dice si algo es verdadero o falso.
   Aunque es verdad que un término nombra un objeto del dominio, lo que nos dice si algo es verdadero o falso es un predicado.
9. [F] Un predicado es un ejemplo de término.
   Un predicado dice si algo es verdadero o falso, los términos representan objetos del dominio.
10. [V] Una fórmula atómica (o átomo) es un predicado aplicado a un término.
11. [F] LPO significa: Lógica de primer orden.
    LPO significa: Lenguaje de Primer Orden.
12. [F] Una variable ligada es aquella que no cae dentro del alcance de un cuantificador.
    Las variables ligadas son aquellas ocurrencias de variables que se dan dentro del alcance del cuantificador que la nombra..
13. [V] Clausurar significa convertir nuestra fórmula en una oración, ligando todas las variables libres.

14. [V] Una estructura M consta de un dominio y una interpretación que le da sentido a todos nuestros símbolos no lógicos de nuestra función.
15. [V] Si nuestra fórmula tiene variables libres su verdad dependerá de una asignación s.
16. [V] Una fórmula es válida si es verdadera en toda estructura (y toda asignación).
17. [V] Si φ es válida, entonces $\neg\varphi$ es insatisfacible.
18. [V] Dos estructuras pueden tener el mismo dominio, pero ser distintas si se interpretan de forma diferente algún símbolo no lógico.
19. [V] Si $\varphi \vDash \theta$ entonces toda estructura que satisface a φ satisface θ.
20. [F] La interpretación de un símbolo de función f en una estructura está determinada sólo por el dominio.
    La interpretación de una función también depende de cómo se asigna una operación específica dentro de ese dominio.

II. Traducir los siguientes argumentos en lenguaje natural a LPO.
Ejemplos

1. Cualquiera puede cocinar.
   - $D = \{\text{Personas}\}$
   - $P(x) =$ "x puede cocinar"

   $\forall x P(x)$
2. Todo el que conoce a Julia la ama.
   - $D = \{\text{Personas}\}$
   - $j =$ Julia
   - $Conoce(x, y) =$ "x conoce a y"
   - $Ama(x, y) =$ "x ama a y"

   $\forall x(Conoce(x, j) \to Ama(x, j))$

Ejercicios

1. No hay barbero que afeite precisamente a aquellos hombres que no se afeitan a sí mismos.
   - $D = \{ \text{ Personas } \}$
   - $B(x) =$ "x es barbero"
   - $H(x) =$ "x es hombre"
   - $A(x, y) =$ "x afeita a y"

   $\neg\exists x(B(x) \land \forall y(H(y) \to (A(x, y) \leftrightarrow \neg A(y, y))))$

2. Andrés odia a aquellas personas que no se odian a sí mismas.
   - $D = \{ \text{ Personas } \}$
   - $O(x, y) =$ "x odia a y"
   - $a =$ Andrés

   $\forall x(O(a, x) \to \neg O(x, x))$

3. Nadie en la clase de estadística es más inteligente que cualquiera en la clase de lógica.

    - $D = \{$ Estudiantes $\}$
    - $E(x) :=$ "x está en clase de estadística"
    - $L(x) :=$ "x está en clase de lógica"
    - $I(x, y) :=$ "x es más inteligente que y"

    $\neg\exists x(E(x) \wedge \forall y(L(y) \rightarrow I(x, y)))$

4. Si cualquiera puede resolver el problema, entonces Amaya puede.

    - $D = \{$ Personas $\}$
    - $R(x) =$ "x puede resolver el problema"
    - $a = Amaya$

    $\forall x(R(x) \rightarrow R(a))$

5. Nadie ama a un americanista.

    - $D = \{$ Personas $\}$
    - $A(x, y) =$ "x ama a y"
    - $M(x) =$ "x es americanista"

    $\neg\exists x\exists y(M(y) \wedge A(x, y)))$

6. No existe ningún conjunto que pertenezca precisamente a aquellos conjuntos que no pertenecen a sí mismos.

    - $D = \{$ Conjuntos $\}$
    - $P(x, y) :=$ "x pertenece a y"

    $\neg\exists x\forall y(P(x, y) \leftrightarrow \neg P(y, y))$

7. Existen al menos dos personas distintas que son profesores

    - $D = \{$ Personas $\}$
    - $P(x) :=$ "x es profesor"

    $\exists x\exists y(x \neq y \wedge P(x) \wedge P(y))$

8. Existe alguien que conoce a Julia y no la ama.

    - $D = \{$ Personas $\}$
    - $C(x, y) :=$ "x conoce a y"
    - $A(x, y) :=$ "x ama a y"
    - $j =$ Julia

    $\exists x(C(x, j) \wedge \neg A(x, j))$

III. Traduzca de LPO a lenguaje natural lo siguiente.

A. Estructura 1:

- $D =$Personas
- $Conoce(x, y)$ = "x conoce a y"
- $Odia(x, y)$ = "x odia a y"
- j = Juan
- g = Gerardo

Ejemplo
$\forall x(Conoce(x, j) \rightarrow Odia(x, j))$
"Todo el que conoce a Juan lo odia"
Ejercicios

1. $\neg\exists x Odia(x, g)$
   "Nadie odia a Gerardo"
2. $\exists x \neg Conoce(x, j)$
   "Alguien no conoce a Juan"
3. $\forall x(Odia(x, j) \leftrightarrow Odia(x, g))$
   "Toda persona que odia a Juan también odia a Gerardo y toda persona que odia a Gerardo también odia a Juan"

B. Estructura 2:

- $D =$Personas, cursos
- $Est(x)$:= "x es un estudiante"
- $Prof(x)$:= "x es un profesor"
- $Curso(x)$:= "x es un curso"
- $Toma(x, y)$ = "x toma el curso y"
- $Conoce(x, y)$ = "x conoce a y"
- log = Lógica
- mat = Matemáticas

1. $\forall x(Est(x) \rightarrow \exists y(Curso(y) \wedge Toma(x, y)))$
   "Toda persona que es estudiante toma un curso"
2. $\forall x(Est(x) \rightarrow \neg Toma(x, mat))$
   "Toda persona que es estudiante no toma el curso de matemáticas"

IV. Para las siguientes fbf, determine:
a) El alcance de cada cuantificador.
b) Variables libres (FV()) y ligadas.
c) Si hay variables libres, clausurar de manera existencial y universal.

1. $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$

Alcance	$FV(\varphi)$	$LV(\varphi)$
$\forall x$: $P(x) \rightarrow Q(x)$	$\emptyset$	x

2. $\exists y P(y, z)$

Alcance	$FV(\varphi)$	$LV(\varphi)$	$Cl_\exists$	$Cl_\forall$
$\exists y$: $P(y, z)$	z	y	$\exists z \exists y P(y, z)$	$\forall z \exists y P(y, z)$

3. $\forall x(P(x) \wedge \forall y Q(y))$

Alcance	$FV(\varphi)$	$LV(\varphi)$
$\forall x$: $P(x) \wedge \forall y Q(y)$, $\forall y$: $Q(y)$	$\emptyset$	x, y

4. $\forall x(P(y) \rightarrow \exists y(Q(y) \wedge R(x,y)))$

Alcance	$FV(\varphi)$	$LV(\varphi)$
$\forall x$: $P(y) \rightarrow \exists y(Q(y) \wedge R(x,y))$, $\exists y$: $Q(y) \wedge R(x,y)$	$\emptyset$	x, y

5. $\exists x \forall y(R(x,y) \rightarrow R(y,x))$

Alcance	$FV(\varphi)$	$LV(\varphi)$
$\exists x$: $R(x,y) \rightarrow R(y,x)$, $\forall y$: $R(x,y) \rightarrow R(y,x)$	$\emptyset$	x, y

6. $\forall x(P(f(x)) \vee \exists y Q(g(y),x))$

Alcance	$FV(\varphi)$	$LV(\varphi)$	$Cl_\exists$	$Cl_\forall$

7. $\exists z(\forall x P(x,z) \rightarrow \exists x Q(x,z))$

Alcance	$FV(\varphi)$	$LV(\varphi)$	$Cl_\exists$	$Cl_\forall$

8. $\forall x P(x, f(y))$

Alcance	$FV(\varphi)$	$LV(\varphi)$	$Cl_\exists$	$Cl_\forall$
$\forall x$: $P(x, f(y))$	y	x	$\exists y(\forall x P(x, f(y)))$	$\forall y(\forall x P(x, f(y)))$

9. $\exists x(Q(x) \wedge \forall y(x = y \rightarrow P(y)))$

Alcance	$FV(\varphi)$	$LV(\varphi)$	$Cl_\exists$	$Cl_\forall$

10. $\exists y(R(y) \wedge \forall x(P(x,y) \rightarrow \exists y Q(x,y)))$

Alcance	$FV(\varphi)$	$LV(\varphi)$	$Cl_\exists$	$Cl_\forall$

V. Para las siguientes fbf

a) Proponga una estructura M que la satisfaga

b) Proponga una estructura M que la haga falsa (contra-modelo)

Ejemplos

$\forall x(P(x) \rightarrow \exists y R(x,y))$

1. Propuesta de modelo 1.
   - $D = \{0, 1\}$
   - $P^M = \{0\}$
   - $R^M = \{(0,0)\}$
2. Propuesta de modelo 2.
   - $D = \mathbb{N}$
   - $P^M(x) :=$ "x es par"
   - $R^M(x,y) :=$ "x es mayor que y"

3. Propuesta de contra-modelo 1.
   - $D = \{a\}$
   - $P^M = \{a\}$
   - $R^M = \emptyset$ (es falsa porque hay a con $P(a)$ pero sin testigo y).
4. Propuesta de contra-modelo 2.
   - $D = \mathbb{N}$
   - $P^M(x) :=$ "x es un número natural"
   - $R^M(x, y) :=$ "x es menor que y"

Ejercicios

1. $\exists x(P(x) \land \forall y Q(y))$

   a) M:
   - $D =$

   b) M:
   - $D =$

2. $\forall x \exists y(x = y \land R(x, y))$

   a) M:
   - $D = \mathbb{N}$
   - $R^M(x, y) :=$ "$\frac{x}{y} = 1$"

   b) M:
   - $D = \mathbb{N}$
   - $R^M(x, y) :=$ "$x > y$"

3. $\forall x P(f(x))$

   a) M:
   - $D = \mathbb{N}$
   - $P^M(x) :=$ "x es par"
   - $f^M(x) = 2x$

   b) M:
   - $D = \mathbb{N}$
   - $P^M(x) :=$ "x es par"
   - $f^M(x) = 2x + 1$

4. $\exists x(x = c \land f(f(x)) = x)$

   a) M:
   - $D = \mathbb{R}$
   - $c^M = 5$
   - $f^M(x) = 1(x)$

   b) M:
   - $D = \mathbb{R}$
   - $c^M = 5$
   - $f^M(x) = x + 1$

5. $\forall x(f(x) = x) \to \forall x P(x)$

   a) M:

   - $D =$

   b) M:

   - $D =$

6. $\forall x \forall y(E(x, y) \to E(y, x))$

   a) M:

   - $D = \{$ (Fer, Fer), (Fer, Javi), (Javi, Fer), (Javi, Javi) $\}$
   - $E^M(x, y) :=$ "x conoce a y"

   b) M:

   - $D = \{$ (Fer, Javi) $\}$
   - $E^M(x, y) :=$ "x conoce a y"

VI. Dada la siguiente estructura M, determine si $M \vDash \varphi_n$

- $D = \mathbb{R}$
- $a^M = 4$
- $f^M(n) = n - 2$
- $Par^M(n) :=$ "n es par"
- $R^M(m,n) := m < n$
- Secuencia: $s(x) = 3$, $s(y) = 2$

Ejemplo
$\varphi = R(x, f(y))$
$\rightarrow s^*(x) = 3, s^*(y) = 2, s^*(f(y)) = 0$
$\rightarrow R(x, f(y)) = R(3, 0); (3, 0) \notin R^M \therefore M \nvDash \varphi_1$

Ejercicios

1. $\varphi_1 = Par(f(x))$
   $\rightarrow s^*(x) = 3$
   $\rightarrow s^*(f(x)) = 3 - 2 = 1;\ 1 \notin Par(x)$
   $\rightarrow \therefore M \nvDash \varphi_1$
2. $\varphi_2 = \forall x R(x, f(x))$
   $\rightarrow \forall d \in \mathbb{R}$
   $\rightarrow s^*[x|d](x) = d$
   $\rightarrow s^*[x|d](f(x)) = d - 2$
   $\rightarrow R(d, d-2) \notin R^M$ ya que $d \not< d - 2$
   $\rightarrow \therefore M \nvDash \varphi_2$
3. $\varphi_3 = \forall x(Par(x) \rightarrow Par(f(x))$
   $\rightarrow \forall d \in \mathbb{R}$
   $\rightarrow s^*[x|d](x) = d$
   $\rightarrow s^*[x|d](f(x)) = d - 2$
   $\rightarrow d \in Par^M$ solo si $d \in \{x \in \mathbb{Z} | x = 2k, k \in \mathbb{Z}\}$
   $\rightarrow$ Reemplazamos d por $2k$ en $d - 2$
   $\rightarrow 2k - 2 = 2(k-1) = 2j;\ d - 2 \in Par^M$
   $\rightarrow \therefore M \vDash \varphi_3$
4. $\varphi_4 = \forall x R(a, x)$
   $\rightarrow \forall d \in \mathbb{R}$
   $\rightarrow s^*[x|d] = d$
   $\rightarrow R(4, d) = 4 < d$
   $\rightarrow$ Dado que la fórmula no se cumple con valores para d menores o iguales a 4 la fórmula no es satisfacible.
   $\rightarrow \therefore M \nvDash \varphi_4$
5. $\varphi_5 = \exists y R(a, f(y))$
   $\rightarrow \forall d \in \mathbb{R}$
   $\rightarrow s^*[y|d](y) = d$
   $\rightarrow s^*[y|d](f(y)) = d - 2$
   $\rightarrow R(4, d-2) = 4 < d - 2$
   $\rightarrow R(4, d-2)$ se cumple cuando $d > 6$, por lo tanto si existen valores que hacen la fórmula satisfacible.
   $\rightarrow \therefore M \vDash \varphi_5$