

Probabilidad 2025-1

Tareas Parcial 3

7 de abril de 2025

Expediente	Nombre
219208106	Bórquez Guerrero Angel Fernando
223203899	Tostado Cortes Dante Alejandro

Tarea 9

1. Comprobar si la siguiente función es de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1/2}{\sqrt{x}} & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{Otro caso} \end{cases}$$

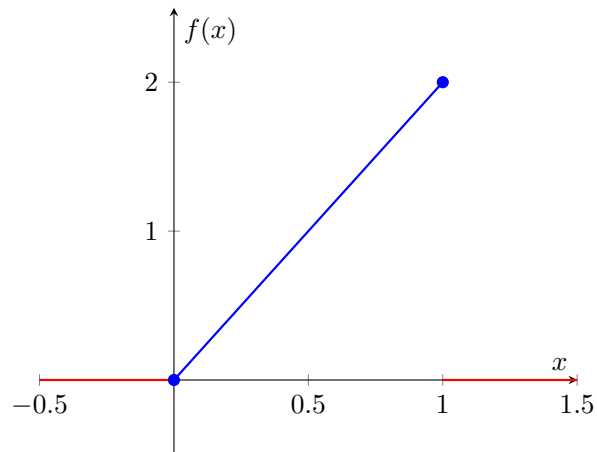
$$\int_0^1 \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2} \left[\frac{\sqrt{x}}{\frac{1}{2}} \right]_0^1 = \sqrt{x} \Big|_0^1 = \sqrt{1} - \sqrt{0} = 1$$

2. Encontrar la función de distribución con la función de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{Otro caso} \end{cases}$$

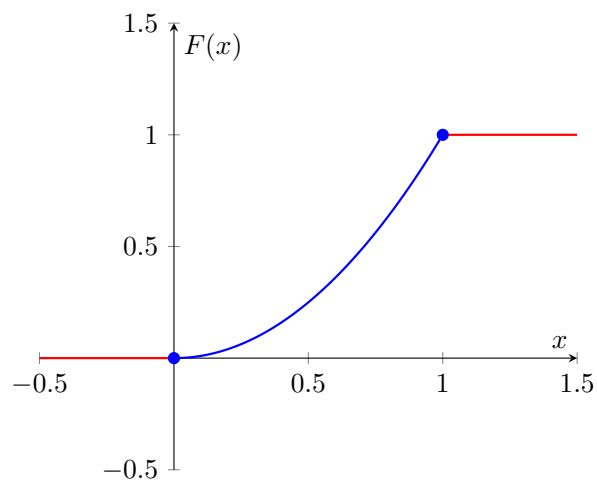
Grafica ambas funciones

a) Función de probabilidad:



b) Función de distribución:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x 2u du = 2 \int_{-\infty}^x u du = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$



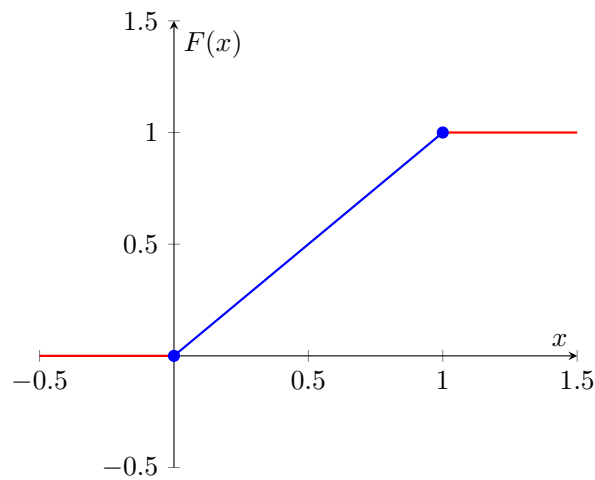
3. Sea la función de distribución

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

Determinar si se trata de la función de distribución de una variable aleatoria discreta o continua. Encontrar además la correspondiente función de probabilidad o densidad y graficarlas.

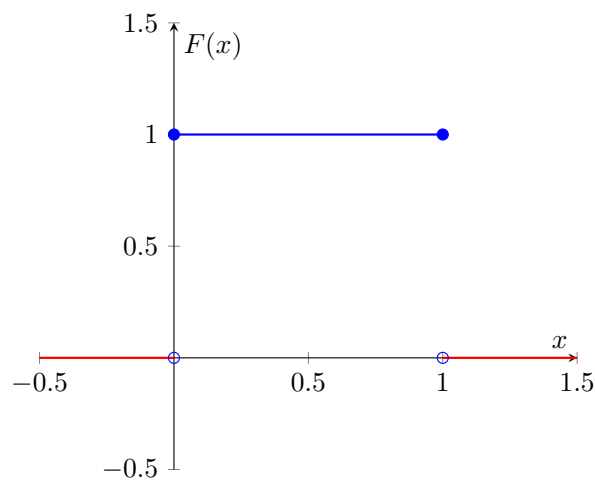
Se trata de una variable continua.

a) Función de distribución:



b) Función de densidad:

$$\frac{d}{dx} F(x) = f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{Otro caso} \end{cases}$$



Tarea 10

1. Encontrar el valor esperado y la desviación estándar de la función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & \text{Otro caso} \end{cases}$$

pwd | xclip -selection clipboard a) Valor esperado:

$$E[X] = \int_0^{\infty} x e^{-x} dx = -x e^{-x} + \int_0^{\infty} e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x} \Big|_0^{\infty} = -\frac{x+1}{e^x} \Big|_0^{\infty} = 1$$

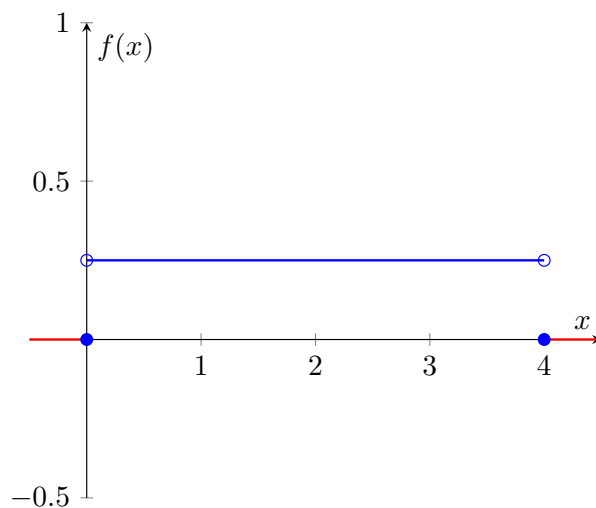
b) Varianza:

$$\text{Var}[X] = \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx - \int_0^{\infty} (x-1)^2 e^{-x} dx = 2 - 1 = 1$$

2. Encontrar la función de densidad y distribución con $U \sim U(0, 4)$. Graficas ambas funciones y encontrar el valor esperado y la desviación estándar.

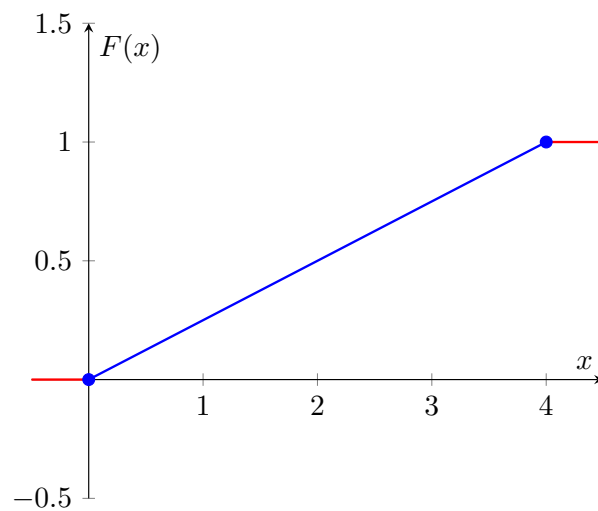
a) Función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & 0 < x < 4 \\ 0 & \text{Otro caso} \end{cases}$$



b) Función de distribución:

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{4} du = \frac{1}{4} \int_0^x du = \frac{u}{4} \Big|_0^x = \frac{u}{4} = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{x}{4} & 0 < x < 4 \\ 1 & x \geq 4 \end{cases}$$



c) Valor esperado:

$$E[X] = \frac{1}{4} \int_0^4 x dx = \frac{x^2}{8} \Big|_0^4 = 2$$

d) Varianza:

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{1}{4} \int_0^4 x^2 dx - 2^2 = \frac{16}{3} - 4 = \frac{4}{3}$$

e) Desviación estándar:

$$\sigma = \sqrt{\frac{4}{3}}$$

3. Sea X una variable aleatoria con distribución uniforme entre -1 y 1 . Demuestre lo siguiente

$$E[X^n] = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es impar} \\ \frac{1}{n+1} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{Otro caso} \end{cases}$$

Valor esperado de X^n

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^n dx = \frac{x^{n+1}}{2(n+1)} \Big|_{-1}^1 = \frac{1^{n+1}}{2(n+1)} - \frac{(-1)^{n+1}}{2(n+1)} = \frac{1 - (-1)^n(-1)}{2(n+1)} = \frac{1 + (-1)^n}{2(n+1)}$$

Queremos comprobar que cuando n es impar la función vale 0 y cuando es par vale $\frac{1}{n+1}$, para esto vamos a reescribir a n como $2k$ para valores pares, como $2k+1$ para valores impares y evaluamos por partes.

- Cuando n es par:

- Reemplazamos n por $2k$ en la función obtenida para el valor esperado de X^n .

$$\frac{1 + (-1)^{2k}}{2(2k+1)}$$

- Desarrollamos la función.

$$\frac{1 + ((-1)^2)^k}{2(2k+1)} = \frac{1 + (1)^k}{2(2k+1)} = \frac{1+1}{2(2k+1)} = \frac{2}{2(2k+1)} = \frac{1}{2k+1}$$

- Reemplazamos $2k$ por n .

$$\frac{1}{n+1}$$

Hemos demostrado que para valores pares de n la función tiene un valor de $\frac{1}{n+1}$.

- Cuando n es impar:

- Reemplazamos n por $2k+1$.

$$\frac{1 + (-1)^{2k+1}}{2(2k+1+1)} = \frac{1 + (-1)^{2k+1}}{2(2k+2)}$$

- Desarrollamos la función.

$$\frac{1 + ((-1)^2)^k(-1)}{2(2k+2)} = \frac{1 + (1)(-1)}{2(2k+2)} = \frac{1-1}{2(2k+2)} = \frac{0}{2(2k+2)} = 0$$

Hemos demostrado que para valores impares de n la función tiene un valor de 0.

Por lo tanto

$$E[X^n] = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es impar} \\ \frac{1}{n+1} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

QED

4. Usted no conoce el tiempo de respuesta a una solicitud, pero sabe que el mínimo posible es de 5 minutos y el máximo es de 25 minutos.

a) ¿Qué distribución recomendaría utilizar?

Uniforme

b) ¿Cuál es la probabilidad de recibir una respuesta entre 5 y 7 minutos?

$$\frac{1}{7-5} = \frac{1}{2}$$

c) ¿Cuánto tiempo debe esperar en promedio?

$$\frac{5+7}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

Tarea 11

1. El tiempo medido en horas para reparar una máquina es una variable aleatoria exponencial de parámetro $\lambda = \frac{1}{2}$
 - a) ¿Cuál es la función de distribución?
 - b) ¿Cuál es la probabilidad de que un tiempo de reparación tome más de 2 horas?
 - c) ¿Cuál es la probabilidad de que un tiempo de reparación tome a lo más 4 horas dado que no se ha logrado la reparación en las primeras 2 horas?
 - d) ¿Cuál es la probabilidad de que un tiempo de reparación tome más de 4 horas dado que no se ha logrado la reparación en las primeras 2 horas?
 - e) ¿Cuál es la varianza?
2. Sea X una variable aleatoria con distribución $\exp(\lambda)$. Demostrar que $E[X^3] = 6/\lambda^3$.
3. Genere números aleatorios de una variable aleatoria exponencial con parámetro λ en cualquier lenguaje de programación. Para ello, siga estos pasos:
 - Genere un número aleatorio a partir de una distribución uniforme en $(0, 1)$.
 - Utilice la inversa de la función de distribución de la variable aleatoria exponencial para determinar el valor generado.

Tarea 12

1. Sea $X \sim N(7, 2^2)$ y Z con distribución normal estándar. Calcular lo siguiente:

a) $P[X \leq 5]$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{5 - 7}{2} = -\frac{2}{2} = -1$$

$$P[Z \leq -1] = 0.1587$$

b) $P[X \geq 8]$

$$P[X \geq 8] = 1 - P[X < 8]$$

$$Z = \frac{8 - 7}{2} = \frac{1}{2}$$

$$P[X > 8] = 1 - P\left[Z \leq \frac{1}{2}\right] = 1 - 0.6915 = 0.3085$$

c) $P[4 \leq X \leq 6]$

$$P[4 \leq X \leq 6] = P[X \leq 6] - P[X \leq 4]$$

$$Z = \frac{6 - 7}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$Z = \frac{4 - 7}{2} = -\frac{3}{2}$$

d) $P[-1 \leq Z \leq 1]$

e) $P[-2 \leq Z \leq 2]$

f) $P[-3 \leq Z \leq 3]$