Probabilidad 2025-1
Tareas Parcial 3

10 de abril de 2025

Expediente	**Nombre**
219208106	Bórquez Guerrero Angel Fernando

Tarea 9

1. Comprobar si la siguiente función es de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1/2}{\sqrt{x}} & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{Otro caso} \end{cases}$$

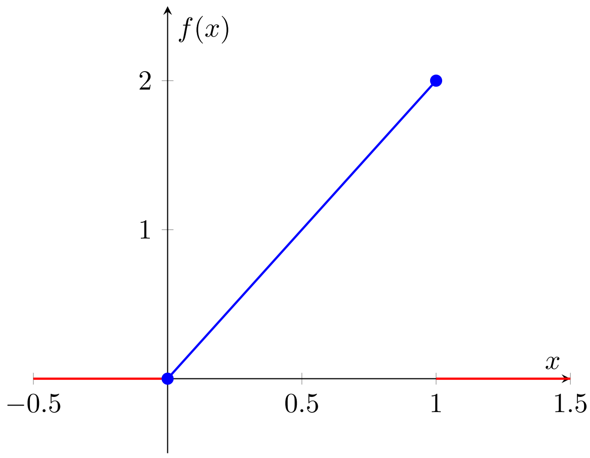
$$\int_0^1 \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2} \left[\frac{\sqrt{x}}{\frac{1}{2}} \Big|_0^1 \right] = \sqrt{x} \Big|_0^1 = \sqrt{1} - \sqrt{0} = 1$$

2. Encontrar la función de distribución con la función de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{Otro caso} \end{cases}$$

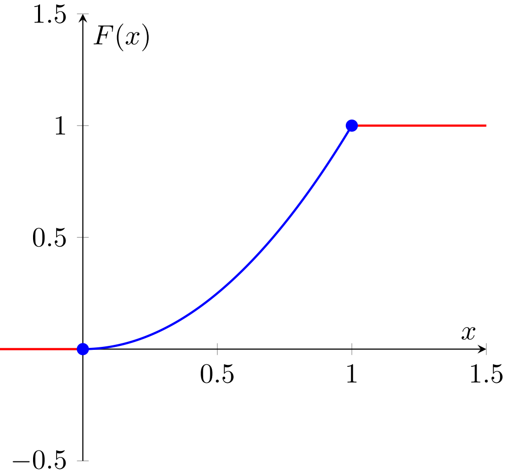
Grafica ambas funciones

a) Función de probabilidad:



b) Función de distribución:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} 2u du = 2 \int_{-\infty}^{x} u du = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$



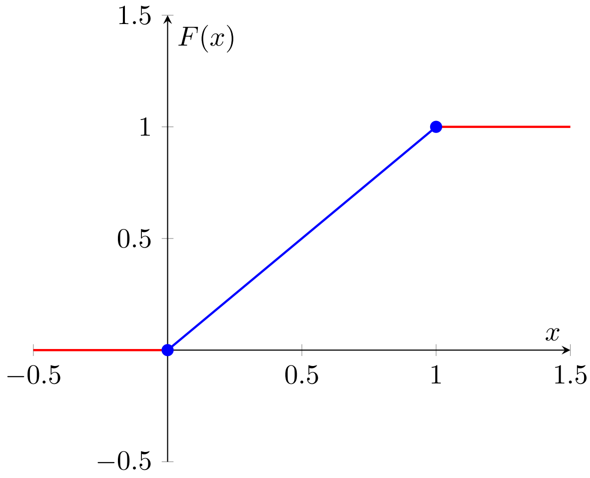
3. Sea la función de distribución

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

Determinar si se trata de la función de distribución de una variable aleatoria discreta o continua. Encontrar además la correspondiente función de probabilidad o densidad y graficarlas.

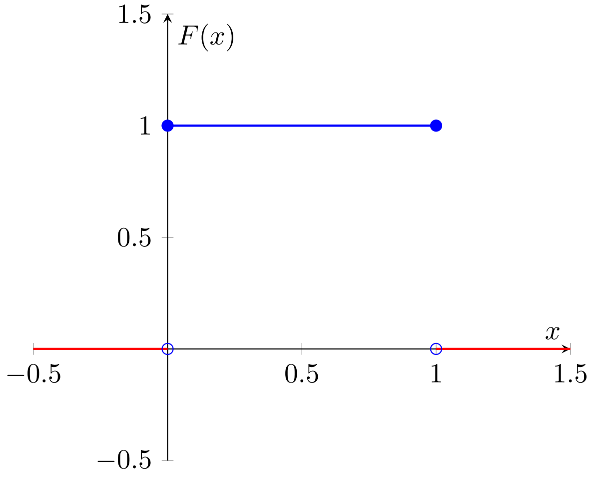
Se trata de una variable continua.

a) Función de distribución:



b) Función de densidad:

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{Otro caso} \end{cases}$$



Tarea 10

1. Encontrar el valor esperado y la desviación estándar de la función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & \text{Otro caso} \end{cases}$$

   a) Valor esperado:

$$E[X] = \int_0^\infty xe^{-x}dx = -xe^{-x} + \int_0^\infty e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x}\Big|_0^\infty = -\frac{x+1}{e^x}\Big|_0^\infty = 1$$

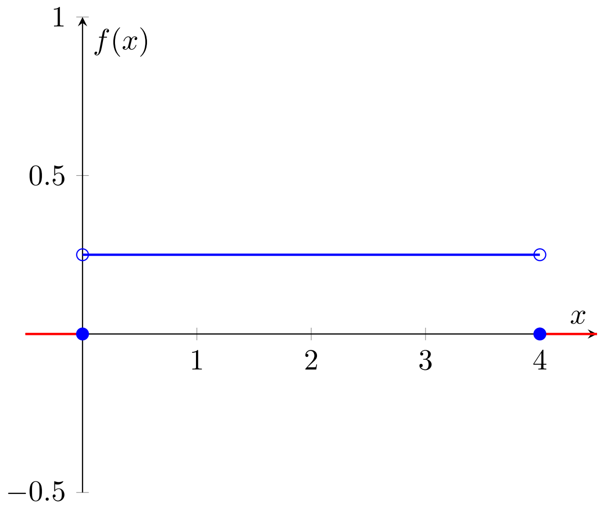
   b) Varianza:

$$\text{Var}[X] = \int_0^\infty x^2e^{-x}dx - \int_0^\infty (x-1)^2e^{-x}dx = 2 - 1 = 1$$

2. Encontrar la función de densidad y distribución con $U \sim U(0,4)$. Graficas ambas funciones y encontrar el valor esperado y la desviación estándar.

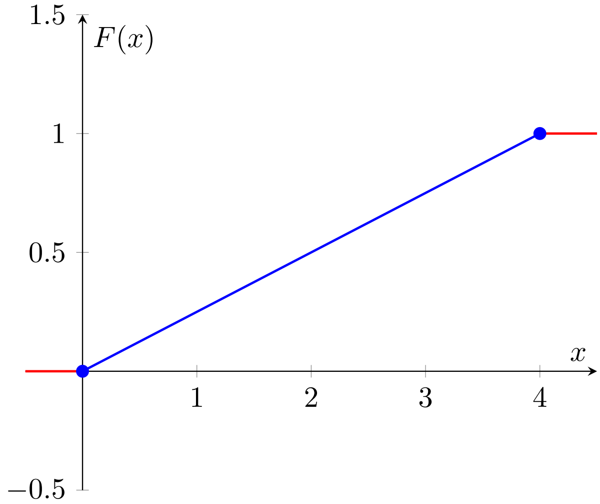
   a) Función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & 0 < x < 4 \\ 0 & \text{Otro caso} \end{cases}$$



b) Función de distribución:

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{4} du = \frac{1}{4}\int_0^x du = \frac{u}{4}\Big|_0^x = \frac{u}{4} = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{x}{4} & 0 < x < 4 \\ 1 & x \geq 4 \end{cases}$$



c) Valor esperado:

$$E[X] = \frac{1}{4}\int_0^4 x dx = \frac{x^2}{8}\Big|_0^4 = 2$$

d) Varianza:

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{1}{4}\int_0^4 x^2 dx - 2^2 = \frac{16}{3} - 4 = \frac{4}{3}$$

e) Deviación estándar:

$$\sigma = \sqrt{\frac{4}{3}}$$

3. Sea X una variable aleatoria con distribución uniforme entre -1 y 1. Demuestre lo siguiente

$$E[X^n] = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es impar} \\ \frac{1}{n+1} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{Otro caso} \end{cases}$$

Valor esperado de X^n

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^n dx = \frac{x^{n+1}}{2(n+1)}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1^{n+1}}{2(n+1)} - \frac{(-1)^{n+1}}{2(n+1)} = \frac{1-(-1)^n(-1)}{2(n+1)} = \frac{1+(-1)^n}{2(n+1)}$$

Queremos comprobar que cuando n es impar la función vale 0 y cuando es par vale $\frac{1}{n+1}$, para esto vamos a reescribir a n como $2k$ para valores pares, como $2k+1$ para valores impares y evaluamos por partes.

- Cuando n es par:

- Reemplazamos n por $2k$ en la función obtenida para el valor esperado de X^n.

$$\frac{1+(-1)^{2k}}{2(2k+1)}$$

- Desarrollamos la funcíon.

$$\frac{1+((-1)^2)^k}{2(2k+1)} = \frac{1+(1)^k}{2(2k+1)} = \frac{1+1}{2(2k+1)} = \frac{2}{2(2k+1)} = \frac{1}{2k+1}$$

- Reemplazamos $2k$ por n.

$$\frac{1}{n+1}$$

Hemos demostrado que para valores pares de n la función tiene un valor de $\frac{1}{n+1}$.

- Cuando n es impar:

- Reemplazamos n por $2k+1$.

$$\frac{1+(-1)^{2k+1}}{2(2k+1+1)} = \frac{1+(-1)^{2k+1}}{2(2k+2)}$$

- Desarrollamos la funcíon.

$$\frac{1+((-1)^2)^k(-1)}{2(2k+2)} = \frac{1+(1)(-1)}{2(2k+2)} = \frac{1-1}{2(2k+2)} = \frac{0}{2(2k+2)} = 0$$

Hemos demostrado que para valores impares de n la función tiene un valor de 0.

Por lo tanto

$$E[X^n] = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es impar} \\ \frac{1}{n+1} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

QED

4. Usted no conoce el tiempo de respuesta a una solicitud, pero sabe que el mínimo posible es de 5 minutos y el máximo es de 25 minutos.

   a) ¿Qué distribución recomendaría utilizar?
   Uniforme

   b) ¿Cuál es la probabilidad de recibir una respuesta entre 5 y 7 minutos?

$$F(7) = \int_5^7 \frac{1}{25-5}dx = \frac{1}{20}\int_5^7 dx = \frac{1}{20}\left[x\Big|_5^7\right] = \frac{1}{20}[7-5] = \frac{1}{20}[2] = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

   c) ¿Cuánto tiempo debe esperar en promedio?
   $\frac{5+25}{2} = \frac{30}{2} = 15$

Tarea 11

1. El tiempo medido en horas para reparar una máquina es una variable aleatoria exponencial de parámetro $\lambda = \frac{1}{2}$

   a) ¿Cuál es la función de distribución?

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 - e^{-x/2} & x > 0 \end{cases}$$

   b) ¿Cuál es la probabilidad de que un tiempo de reparación tome más de 2 horas?
   $P[X > 2] = 1 - P[X \leq 2] = 1 - (1 - e^{-1}) = \frac{1}{e} = 0.3679$

   c) ¿Cuál es la probabilidad de que un tiempo de reparación tome a lo más 4 horas dado que no se ha logrado la reparación en las primeras 2 horas?
   $P[X \leq 4|X > 2] = P[X \leq 2] = 1 - e^{-1} = 0.6321$

   d) ¿Cuál es la probabilidad de que un tiempo de reparación tome más de 4 horas dado que no se ha logrado la reparación en las primeras 2 horas?
   $P[X > 4|X > 2] = P[X > 2] = 1 - P[X \leq 2] = 1 - (1 - e^{-1}) = \frac{1}{e} = 0.3679$

   e) ¿Cuál es la varianza?
   $Var[X] = \frac{1}{\lambda^2} = 1/(\frac{1}{2})^2 = 1/\frac{1}{4} = 4$

2. Sea X una variable aleatoria con distribución $exp(\lambda)$. Demostrar que $E[X^3] = 6/\lambda^3$.

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x^3 f(x)dx = \lambda \int_{0}^{\infty} x^3 e^{-\lambda x} dx$$

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{D} & \mathbf{I} \\ + & x^3 & e^{-\lambda x} \\ - & 3x^2 & -\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \\ + & 6x & \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda^2} \\ - & 6 & -\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda^3} \\ + & 0 & \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda^4} \end{array}$$

$$\lambda \left[-x^3 \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} - 3x^2 \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda^2} - 6x \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda^3} - 6 \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda^4} \right] \Big|_0^{\infty}$$

$$\left[-x^3 e^{-\lambda x} - 3x^2 \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} - 6x \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda^2} - 6 \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda^3} \right] \Big|_0^{\infty}$$

$$\lim_{x \to \infty} \left[-x^3 e^{-\lambda x} - 3x^2 \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} - 6x \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda^2} - 6 \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda^3} \right] - \left[-0^3 e^{-\lambda 0} - 3 \cdot 0^2 \frac{e^{-\lambda 0}}{\lambda} - 6 \cdot 0 \frac{e^{-\lambda 0}}{\lambda^2} - 6 \frac{e^{-\lambda 0}}{\lambda^3} \right]$$

$$0 + \frac{6}{\lambda^3} = \frac{6}{\lambda^3}$$

3. Genere números aleatorios de una variable aleatoria exponencial con parámetro λ en cualquier lenguaje de programación. Para ello, siga estos pasos:
   - Genere un número aleatorio a partir de una distribución uniforme en (0, 1).
   - Utilice la inversa de la función de distribución de la variable aleatoria exponencial para determinar el valor generado.

   Inversa de la función de distribución:

$$u = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$u - 1 = -e^{-\lambda x}$$

$$e^{-\lambda x} = 1 - u$$

$$-\lambda x = ln(1 - u)$$

$$x = -\frac{ln(1 - u)}{\lambda}$$

Código en C++:

```cpp
#include <iostream>
#include <cmath>
#include <ctime>

int main()
{
    srand(time(0));
    double lambda = 0.5, u;

    for(int i = 0; i < 5; ++i)
    {
        u = std::rand() / (RAND_MAX + 1.0);
        std::cout << "\nLambda = " << lambda;
        std::cout << "\nu = " << u;
        std::cout << "\nx = " << -1/lambda * log(1 - u);
        std::cout << "\n------------\n";
    }

    return 0;
}
```

Output ejemplo del programa:

```
Lambda = 0.5
u = 0.0915631
x = 0.19206
------------

Lambda = 0.5
u = 0.075186
x = 0.156325
------------

Lambda = 0.5
u = 0.381069
x = 0.959522
------------

Lambda = 0.5
u = 0.00367992
x = 0.00737342
------------

Lambda = 0.5
u = 0.555175
x = 1.62015
------------
```

Tarea 12

1. Sea $X \sim N(7, 2^2)$ y Z con distribución normal estándar. Calcular lo siguiente:

   a) $P[X \leq 5]$

   $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{5-7}{2} = -\frac{2}{2} = -1$

   $P[Z \leq -1] = 0.1587$

   b) $P[X \geq 8]$

   $P[X \geq 8] = 1 - P[X < 8]$

   $Z = \frac{8-7}{2} = \frac{1}{2}$

   $P[X > 8] = 1 - P\left[Z \leq \frac{1}{2}\right] = 1 - 0.6915 = 0.3085$

   c) $P[4 \leq X \leq 6]$

   $P[4 \leq X \leq 6] = P[X \leq 6] - P[X \leq 4]$

   $Z = \frac{6-7}{2} = -\frac{1}{2}$

   $Z = \frac{4-7}{2} = -\frac{3}{2}$

   $P[Z \leq -\frac{1}{2}] - P[Z \leq -\frac{3}{2}] = 0.3085 - 0.0668 = 0.2417$

   d) $P[-1 \leq Z \leq 1]$

   $P[Z \leq 1] - P[Z \leq -1] = 0.8413 - 0.1587 = 0.6826$

   e) $P[-2 \leq Z \leq 2]$

   $P[Z \leq 2] - P[Z \leq -2] = 0.9772 - 0.0228 = 0.9544$

   f) $P[-3 \leq Z \leq 3]$

   $P[Z \leq 3] - P[Z \leq -3] = 0.99865 - 0.00135 = 0.9973$