

Treball voluntari cambra combustió Vulcain

Ferran de Miguel

30 de juny de 2022

Índex

1	Definició del problema	3
2	Equacions de discretització	3
2.1	Cambra de combustió	3
2.2	Tub 2	4
2.3	Fluid zona 3	4
2.4	Aire exterior 5	6
3	Algorisme de càlcul	7
4	Validacions dels resultats	8
5	Resultats numèrics	9
5.1	Densitat de malla	9
6	Resultats físics	14
6.1	Dades	14
6.2	Resultats	14
6.3	Estudi dels diferents paràmetres	15
6.3.1	Temperatura entrada de 3 diferent	15
6.3.2	Canvi proporció hidrogen-oxigen	17
6.3.3	Canvis en la geometria	18

1 Definició del problema

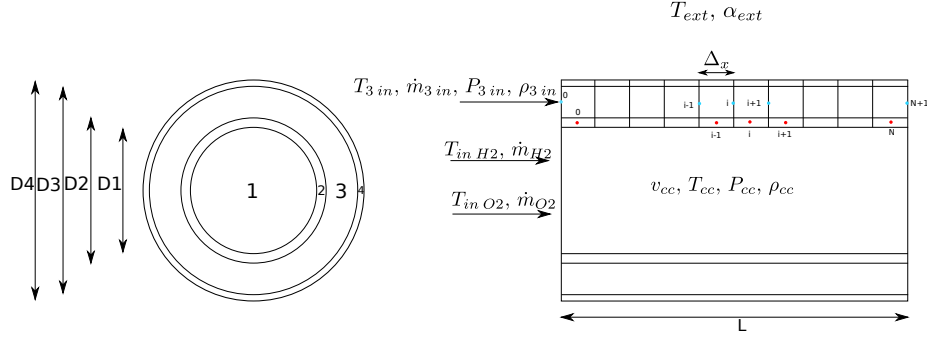


Figura 1: Representació del problema

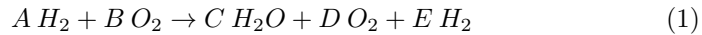
En un conducte circular de diàmetre $D1$ entra una mescla de H_2 i O_2 que reaccionen per formar aigua i H_2 o O_2 en excés en la zona 1. La paret 2 d'espessor $(D2 - D1)/2$, i feta d'un cert material, conté la reacció i transmet la calor de la cambra de combustió cap al fluid de la zona 3 que circula per un conducte anular. Aquest fluid és H_2 gasos amb un cabal \dot{m}_{3in} i una temperatura T_{3in} . Finalment, el fluid 3 és contingut per la paret 4 que es troba en contacte amb l'aire exterior. Les dades d'aquest problema intenten copiar les del motor *Vulcain* del coet Arianne 5 [5], [1].

L'objectiu és calcular la temperatura a les parets per veure quin material és capaç de resistir aquestes condicions, així com avaluar les calors intercanviades entre les diferents zones del problema.

2 Equacions de discretització

2.1 Cambra de combustió

Utilitzarem [3] per aquest apartat. L'equació química que tenim a la cambra de combustió és:



On A , B , C , D i E són els coeficients estequiomètrics, que dependran del cabal molar $A = \widehat{m}_{H_2}$ i $B = \widehat{m}_2$.

$$C, D \text{ i } E = \begin{cases} C = 1, D = 0, E = 0 & \text{si } B/2 = A, \\ C = A, D = B - C/2, E = 0 & \text{si } B/2 > A, \\ C = B/2, D = 0, E = A - C & \text{si } B/2 < A, \end{cases} \quad (2)$$

Nosaltres ens trobarem en el cas 3, on hi ha més fuel que oxidant, és a dir *fuel rich*. Per calcular la temperatura en la cambra de combustió utilitzarem la

següent equació:

$$T_{cc} = T^\circ + \frac{\sum_R v_k \hat{h}_k - \sum_P v_k \hat{h}_{fk}^\circ - W_F \dot{Q}_{lost} / \dot{m}_F}{\sum_P v_k \hat{c}_{pk}} \quad (3)$$

On $v_k = \frac{X_k}{A}$, $\hat{h}_k = \hat{h}_{fk}^\circ + \overline{\hat{c}_{pk}}(T_{cc} - T^\circ)$ i $\overline{\hat{c}_{pk}} = \frac{1}{T_{cc} - T^\circ} \int_{T^\circ}^{T_{cc}} \hat{c}_{pk} dT$
Aquesta equació pel nostre cas on $\hat{h}_{fH2}^\circ = \hat{h}_{fO2}^\circ = 0$, $v_{H2} = 1$ i considerant que $v_{O2\ excess} = 0$

$$T_{cc} = T^\circ + \frac{\int_{T^\circ}^{T_{inH2}} \hat{c}_{pH2} dT + v_{O2} \int_{T^\circ}^{T_{inO2}} \hat{c}_{pO2} dT - v_{H2O} \hat{h}_{fH2O}^\circ - \frac{W_F \dot{Q}_{lost}}{\dot{m}_F}}{v_{H2O} \frac{1}{T_{cc} - T^\circ} \int_{T^\circ}^{T_{cc}} \hat{c}_{pk} dT + v_{H2\ excess} \frac{1}{T_{cc} - T^\circ} \int_{T^\circ}^{T_{cc}} \hat{c}_{pk} dT} \quad (4)$$

2.2 Tub 2

L'equació de discretització sobre un volum de control i serà:

$$\begin{aligned} & -\lambda_w \frac{T_2[i] - T_2[i-1]}{\Delta x} S_w + \lambda_e \frac{T_2[i+1] - T_2[i]}{\Delta x} S_e + \\ & + \alpha_{cc}(T_{cc} - T_2[i]) S_{2int} - \alpha_3[i](T_2[i] - T_{3i}) S_{2ext} = 0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow T_2[i] \left(\frac{\lambda_w S_w}{\Delta x} + \frac{\lambda_e S_e}{\Delta x} + \alpha_{cc} S_{2int} + \alpha_3[i] S_{2ext} \right) = \\ & = T_2[i-1] \frac{\lambda_w S_w}{\Delta x} + T_2[i+1] \frac{\lambda_e S_e}{\Delta x} + T_{cc} \alpha_{cc} S_{2int} + \alpha_3[i] T_{3i} S_{2ext} \end{aligned} \quad (5)$$

Que es pot fàcilment reescriure com a una equació del tipus:

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + b_P \quad (6)$$

on: $a_E = \frac{\lambda_e S_e}{\Delta x}$, $a_W = \frac{\lambda_w S_w}{\Delta x}$, $a_P = a_E + a_W + \alpha_{cc} S_{2int} + \alpha_3[i] S_{2ext}$ i

$$b_P = T_{cc} \alpha_{cc} S_{2int} + T_{3i} \alpha_3[i] S_{2ext}, \quad S_{2int} = \pi D_2 \Delta x, \quad S_{2ext} = \pi D_3 \Delta x$$

Per al tub 4 la discretització és la mateixa, modificant els paràmetres geomètrics, S , i els coeficients de transferència de calor α .

Per als nodes $i=0$, i $i=N$ assumirem condició de contorn adiabàtica i els coeficients seran $a_W = 0$ per al node 0, i $a_E = 0$ per al node N.

2.3 Fluid zona 3

Massa:

$$\rho_3[i] S_3 v_3[i] = \rho_3[i+1] S_3 v_3[i+1] = \dot{m}_{in} \quad (7)$$

Aillem $v_3[i+1]$

$$\frac{\rho_3[i] v_3[i]}{\rho_3[i+1]} = v_3[i+1] \quad (8)$$

Moment:

$$\begin{aligned} v_3[i+1]^2 \rho_3[i+1] S_3 - v_3[i]^2 \rho_3[i] S_3 &= p_3[i] S_3 - p_3[i+1] S_3 - \tau_w S_l \\ &= \dot{m}(v_3[i+1] - v_3[i]) = S_3(p_3[i] - p_3[i+1]) - f_i \frac{1}{2} \rho_i v_{3i}^2 (S_{2ext} + S_{4int}) \end{aligned} \quad (9)$$

Aillem $p_3[i+1]$

$$p_3[i+1] = \frac{-\dot{m}(v_3[i+1] - v_3[i]) + S_3 p_3[i] - f_i \frac{1}{2} \rho_i v_{3i}^2 (S_{2ext} + S_{4int})}{S_3} \quad (10)$$

Energia:

$$\begin{aligned} \dot{m} \left(h[i+1] - h[i] + \frac{v_3[i+1]^2 - v_3[i]^2}{2} \right) &= \dot{Q} \\ \dot{m} c_p (T_3[i+1] - T_3[i]) + \dot{m} \left(\frac{v_3[i+1]^2 - v_3[i]^2}{2} \right) \\ &= \alpha_3[i] (T_2[i] - T_{3i}[i]) S_{2ext} - \alpha_3[i] (T_{3i} - T_4[i]) S_{4int} \end{aligned} \quad (11)$$

Aillem $T_3[i+1]$ tenint en compte que $A = \dot{m} \frac{v_3^2[i+1] - v_3^2[i]}{2}$

$$\begin{aligned} T_3[i+1] &= \frac{T_3[i] (\dot{m} \overline{c_{pi}} - \frac{\alpha_{3i}}{2} (S_{2ext} + S_{4int}))}{\dot{m} \overline{c_{pi}} + \frac{\alpha_{3i}}{2} (S_{2ext} + S_{4int})} + \\ &+ \frac{-\dot{m} \frac{v_3^2[i+1] - v_3^2[i]}{2} + \alpha_{3i} (T_2[i] S_{2ext} + T_4[i] S_{4int})}{\dot{m} \overline{c_{pi}} + \frac{\alpha_{3i}}{2} (S_{2ext} + S_{4int})} \end{aligned} \quad (12)$$

Equació d'estat:

$$\rho R T = p \quad (13)$$

On:

$$\begin{aligned} S_3 &= \frac{D_3^2 - D_2^2}{4} \pi, \quad S_{2ext} = D_2 \pi \Delta x, \quad S_{4int} = D_3 \pi \Delta x, \quad v_{3i} = \frac{v_3[i+1] + v_3[i]}{2}, \quad T_{3i} = \\ &= \frac{T_3[i+1] + T_3[i]}{2}, \quad \rho_{3i} = \frac{\rho_3[i+1] + \rho_3[i]}{2}, \quad \overline{c_{pi}} = \frac{1}{T[i+1] - T[i]} \int_{T[i]}^{T[i+1]} c_p dT \end{aligned}$$

Els coeficients de transferència de calor α i de fregament f els calcularem de la següent manera:

$$\mu, \lambda, \overline{c_P} \text{ i } \rho = f(T, P, R_{gas}) \quad (14)$$

Les funcions d'aquestes propietats les extraurem de [4], així com les entalpies de formació. Ara que tenim les propietats del fluid de [2] taula B2 obtenim α i de la taula B7, el factor de fricció.

El diàmetre hidràulic és $D_h = D_3 - D_2$.

$$Re = \frac{v_{3i} \rho_{i3} D_h}{\mu} \quad (15)$$

$$Pr = \frac{\mu c_p}{\lambda} \quad (16)$$

$$f = 2 \left[\left(\frac{8}{Re} \right)^{12} + \frac{1}{(A+B)^{3/2}} \right]^{1/12} \quad (17)$$

on $A = \left\{ 2.457 \ln \left[\frac{1}{(7/Re)^{0.9} + 0.027\epsilon_r} \right] \right\}^{16}$, i $B = (37530/Re)^{16}$ De la taula B2, num. 1, tercera expressió,

$$Nu = 0.023 Re^{0.8} Pr^{0.4} = \frac{\alpha D_h}{\lambda} \Rightarrow \alpha = \frac{Nu \lambda}{D_h} \quad (18)$$

2.4 Aire exterior 5

Utilitzarem la taula B1 de [2]. Per a cada volum de control avaluem $T_m[i] = \frac{T_4[i] + T_{ext}}{2}$, després calculem les propietats termo físiques següents segons l'annex D0 de [2]:

$$\mu, \lambda, \overline{c_p}, \beta \text{ i } \rho = f(T_m, P, R_{gas}) \quad (19)$$

Amb les propietats podem calcular en aquest ordre:

$$Pr = \frac{\mu c_p}{\lambda} \quad (20)$$

$$Gr = \frac{g \beta \rho^2 |T_w - T_f| D_4^3}{\mu^2} \quad (21)$$

$$Ra = Gr Pr \quad (22)$$

Comprovem si $10^3 < Ra < 10^9$ (laminar) o $Ra \geq 10^9$ (turbulent)

$$Nu = C Ra^n K = \frac{\alpha D_4}{\lambda} \Rightarrow \alpha_5 = \frac{Nu \lambda}{D_4} \quad (23)$$

en cas laminar $C=0.47$, $n=1/4$ i $K=1$, si és turbulent $C=0.1$, $n=1/3$ i $K=1$.

3 Algorisme de càlcul

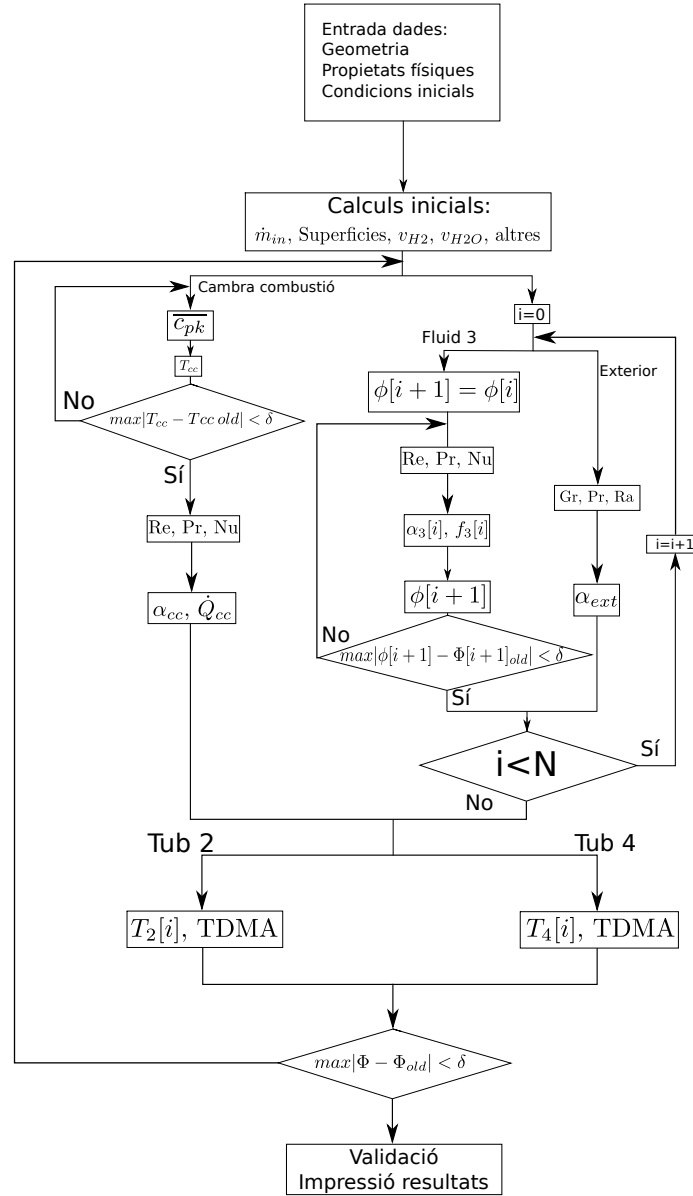


Figura 2: Diagrama de flux

L'algorisme que seguirem és el descrit en la figura 2. On $\phi = \{v_3, p_3, T_3 \text{ i } \rho_3\}$. Calcularem en el següent ordre aquestes magnituds: Primer de l'equació

del moment 10 obtenim la pressió, després amb l'equació 12 la temperatura. A continuació amb una equació d'estat com 13 aconseguim la densitat i per últim amb la conservació de la massa 8 obtenim la velocitat.

Φ són totes les magnituds calculades, és a dir $\Phi = \{ v_3, p_3, T_3, \rho_3, T_2 \text{ i } T_4 \}$

4 Validacions dels resultats

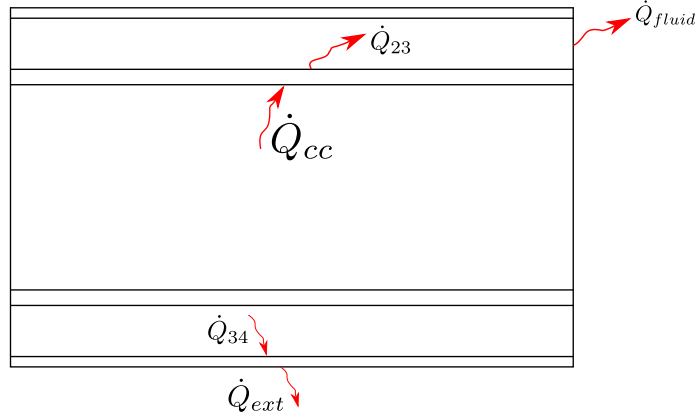


Figura 3: Esquema del flux de calor en el problema

Per validar els tubs 2 i 4 farem un balanç d'energia global on $\dot{Q}_{in} = \dot{Q}_{out}$. Per al tub 2 això és:

$$\sum_0^{n-1} \left\{ \alpha_{cc}(T_{cc} - T_2[i])S_{2int} - \alpha_3[i](T_2[i] - \frac{T_3[i] + T_3[i+1]}{2})S_{2ext} \right\} = 0 \quad (24)$$

Per al tub 4 varia lleugerament:

$$\sum_0^{n-1} \left\{ \alpha_3[i](\frac{T_3[i] + T_3[i+1]}{2} - T_4[i])S_{4int} - \alpha_5[i](T_4[i] - T_{ext})S_{4ext} \right\} = 0 \quad (25)$$

Per al tub 3 farem un balanç global per a totes les equacions, moment, massa i energia.

$$\dot{m}_3 in = \dot{m}_3 out \Rightarrow v_3[0]\rho[0] - v_3[n]\rho[n] = 0 \quad (26)$$

Per al moment primer calcularem les pèrdues per fricció totals:

$$F = \sum_0^{n-1} \frac{1}{2} f_3[i](S_{2ext} + S_{4int}) \left(\frac{\rho[i] + \rho[i+1]}{2} \right) \left(\frac{v_3[i] + v_3[i+1]}{2} \right)^2 \quad (27)$$

La conservació del moment la expressarem com a:

$$p_3[0]S_3 - p_3[n]S_3 - F - \dot{m}_3(v_3[n] - v_3[0]) = 0 \quad (28)$$

Per a la conservació de l'energia en el fluid necessitem $\dot{Q}_{23} = \dot{Q}_{cc}$, que ja ho tenim, \dot{Q}_{34} que val:

$$\dot{Q}_{34} = \sum_0^{n-1} \alpha_3[i] \left(\frac{T_3[i] + T_3[i+1]}{2} - T_4[i] \right) S_{4int} \quad (29)$$

i $\bar{c}_p = \frac{\int_{T_3[0]}^{T_3[n]} c_p dT}{T_3[n] - T_3[0]}$ La conservació de l'energia s'expressarà com a:

$$\dot{m}_3 \bar{c}_p (T_3[n] - T_3[0]) + \dot{m} \left(\frac{v_3[n]^2 - v_3[0]^2}{2} \right) - \dot{Q}_{23} + \dot{Q}_{34} = 0 \quad (30)$$

Per al nostre programa efectivament totes les magnituds es conserven i el valor més gran és de l'ordre de 10^{-8}

5 Resultats numèrics

El programa s'ha escrit en C++, compilat amb gcc versió 9.4.0 i opcions de compilador -O3. S'ha executat en un ordinador amb un sistema operatiu Linux i processador AMD Ryzen 3600X. Els temps de càlcul variaran si es modifica algun d'aquests paràmetres.

5.1 Densitat de malla

Per a la densitat de malla i la precisió mirarem els resultats i el temps que tarden per una n i δ determinades. Quan els resultats no variïn a l'incrementar la malla triarem la malla que tardi menys temps.

A continuació estan les figures per a una densitat de malla i precisió determinades. Per al gràfic de calors extrems i temperatura cambra combustió, les calors extrems estan en blau i d'esquerra a dreta són: \dot{Q}_{cc} , \dot{Q}_{fluid} i \dot{Q}_{ext} i en vermell està T_{cc} .

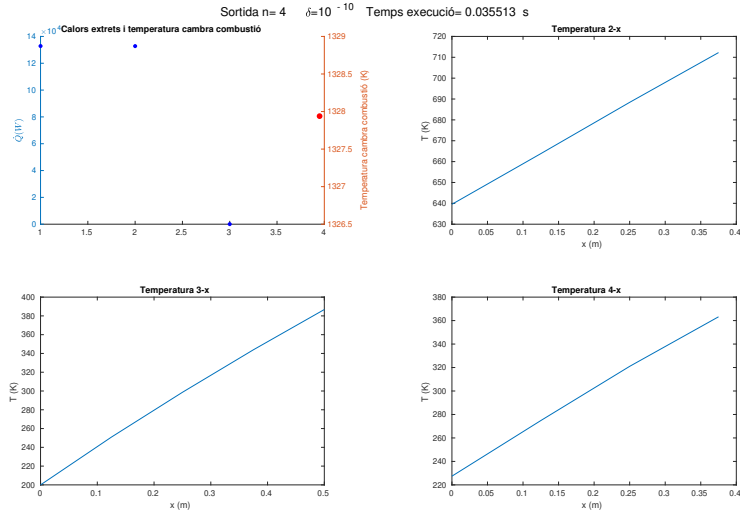


Figura 4: Resultats per a $n=4, \delta = 10^{-10}$

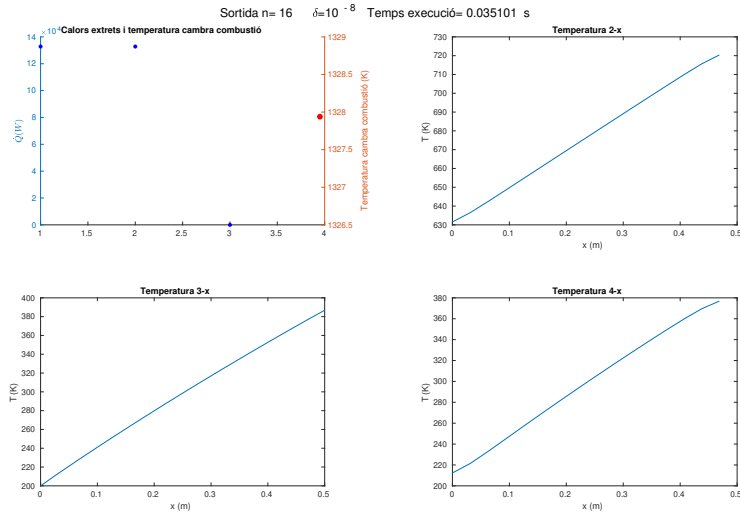


Figura 5: Resultats per a $n=16, \delta = 10^{-8}$

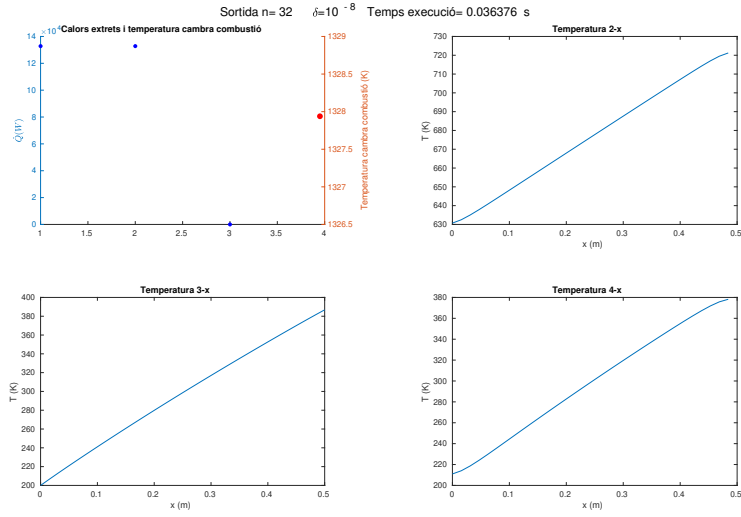


Figura 6: Resultats per a $n=32, \delta = 10^{-8}$

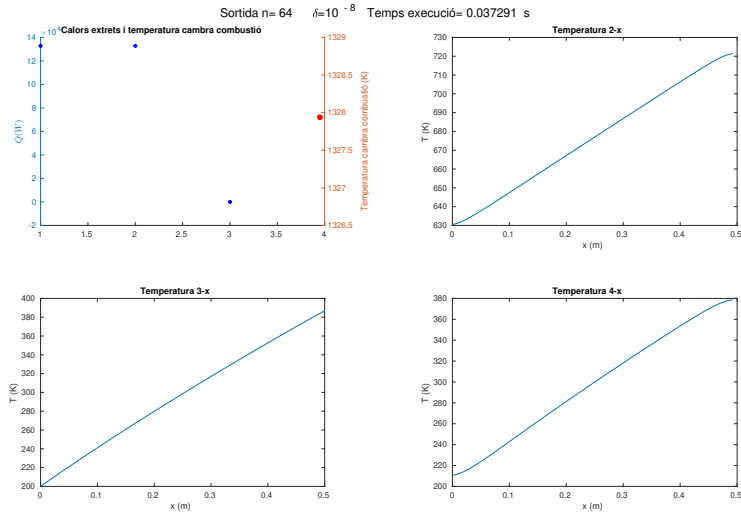


Figura 7: Resultats per a $n=64, \delta = 10^{-8}$

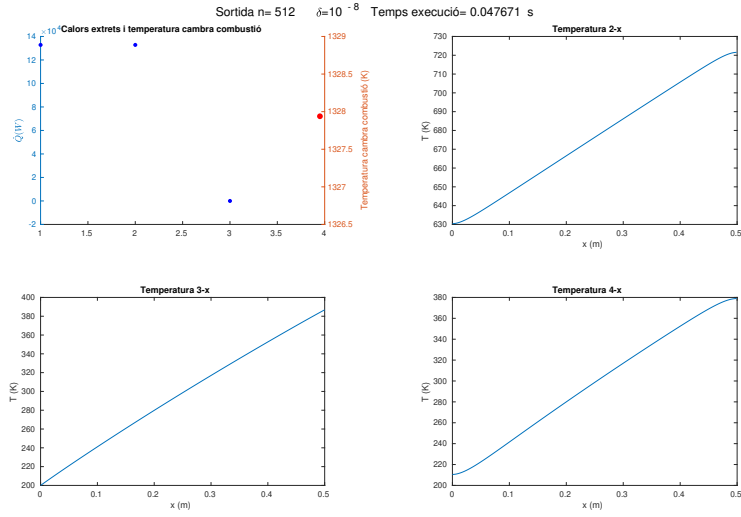


Figura 8: Resultats per a $n=512, \delta = 10^{-8}$

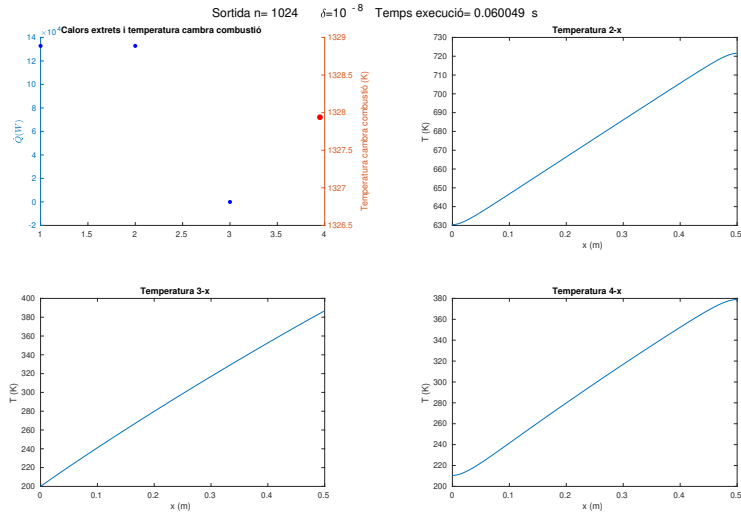


Figura 9: Resultats per a $n=1024, \delta = 10^{-8}$

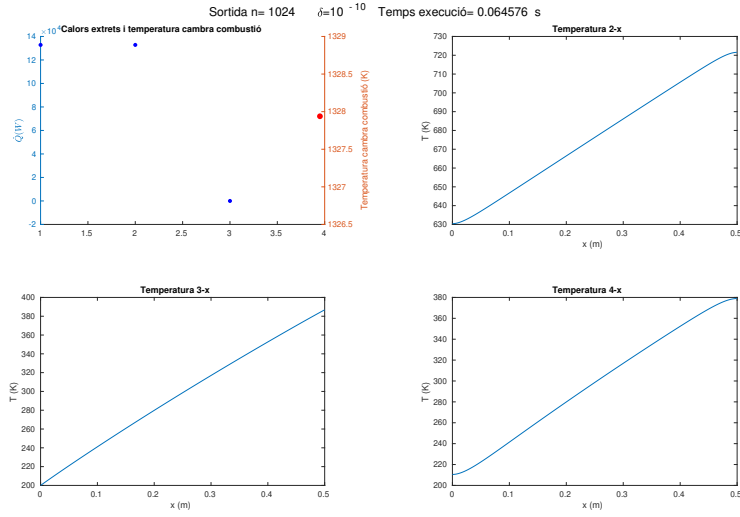


Figura 10: Resultats per a $n=1024, \delta = 10^{-10}$

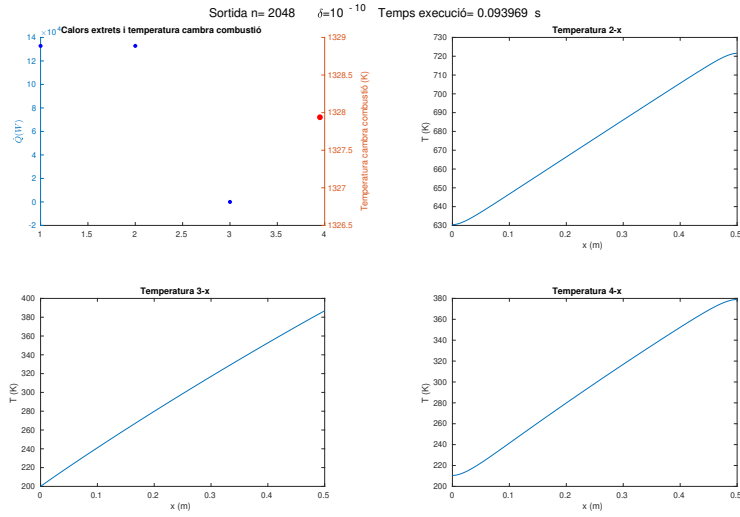


Figura 11: Resultats per a $n=2048, \delta = 10^{-10}$

Veiem com el temps de càlcul en tots els casos és molt petit de manera que utilitzarem $n=2048$ i $\delta = 10^{-10}$

6 Resultats físics

6.1 Dades

Les dades considerades per fer el problema són:

Constants físiques:

R universal gasos=8.3144621 J/(mol K), Raire=287 J/(Kg K)

$W_{H_2} = 0.002016$ $W_{O_2} = 0.032$ $W_{H_2O} = 0.18$ Kg/mol

Geometria: L=0.5, D1=0.2, D2=0.203, D3=0.25, D4=0.253 m

Cambra combustió: $P_{cc} = 100e + 5$ Pa, $\dot{m}_{H_2 cc} = 41.2$ kg/s, $\dot{m}_{O_2 cc} = 193.8$ Kg/s $T_{inH_2 cc} = 200$ K, $T_{inO_2 cc} = 200$ K¹ $\rho_{cc} = 70.85$ Kg/m³²

Tub 3: $T_{in3} = 200$ K, $\dot{m}_{in3} = 0.05$ Kg/s, $P_{in3} = 150e + 5$ Pa, $\varepsilon_{r 2ext} = 0.0003$, $\varepsilon_{r 4int} = 0.0004$

Condicions exteriors: $T_{ext} = 300$ K, $P_{ext} = 101325$ K

Material tub 2: Coure

Material tub 4: Coure

La conductivitat del coure la podem obtenir de [2], taula D1, on apareix en forma de taula. A continuació obtenim una expressió per a la conductivitat que serà la que utilitzarem:

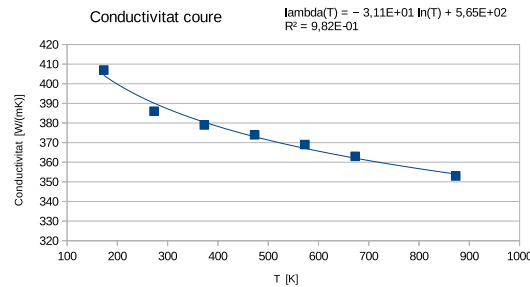


Figura 12: Conductivitat del coure en funció de la temperatura i una expressió logarítmica per calcular-la

6.2 Resultats

Els resultats obtinguts per a aquestes dades per a les temperatures els podem veure en 11. La temperatura de la cambra de combustió és de $T_{cc} = 1054.78^\circ\text{C}$, la temperatura màxima del tub 2 és de 721K, i la del tub 4 és de 379K. En qualsevol dels dos casos estan per sota de la temperatura de fusió del coure, $T_f = 1357\text{K}$ i lluny de perdre propietats mecàniques. La calor que perd la cambra de combustió és $Q_{cc} = 132.80$ KW, la calor que el fluid extreu és

¹La temperatura d'entrada no és la temperatura real, però si és inferior a 200K, el rang de cp extret de [4] ja no és vàlid.

²Primer assumirem la de l'hidrogen líquid, després la modificarem amb la dels gasos després de la combustió segons la llei dels gasos ideals

$Q_{fluid} = 132.81KW$ i la temperatura intercanviada amb l'aire és de $\dot{Q}_{ext} = 9W$. És negativa perquè la temperatura de l'hidrogen és 200K, 100K per sota de la temperatura ambient.

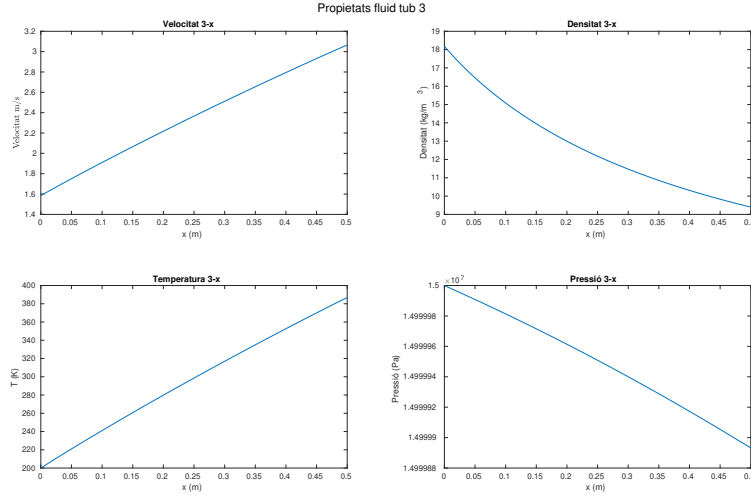


Figura 13: Propietats del fluid 3 en funció de la posició en el tub. S'observa que puja la velocitat al guanyar energia, augmenta la temperatura i per tant cau la densitat i la pressió roman gairebé igual

6.3 Estudi dels diferents paràmetres

6.3.1 Temperatura entrada de 3 diferent

Primer canviarem la temperatura d'entrada del hidrogen a $T_{in3} = 400 K$. En aquest cas la temperatura de la cambra de combustió és de $T_{cc} = 1054.85^\circ C$, quasi idèntica al cas original. La temperatura màxima del tub 2 és de 820K, i la del tub 4 és de 546K. Són valors notablement més elevats que en el cas anterior. La calor que perd la cambra de combustió és $Q_{cc} = 111.92 KW$, la calor que el fluid extreu és $Q_{fluid} = 111.5KW$ i la temperatura intercanviada amb l'aire és de $\dot{Q}_{ext} = 415W$. En aquest cas ja és positiva com ens esperàvem. Figures amb els resultats:

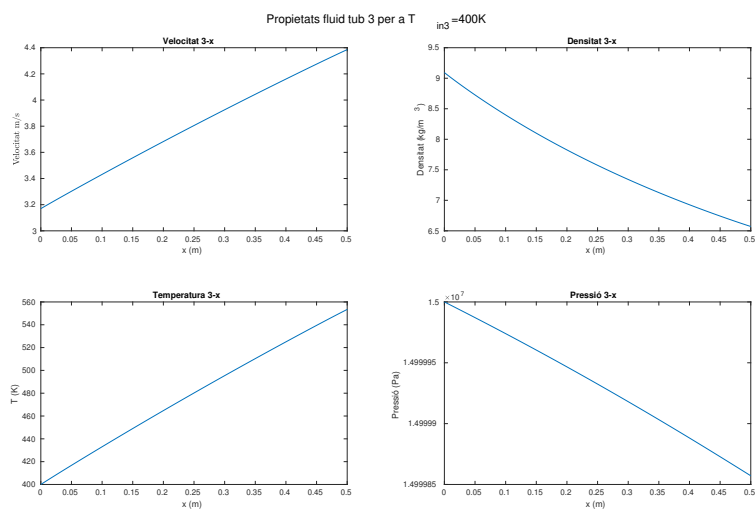


Figura 14: Propietats del fluid 3 en funció de la posició en el tub.

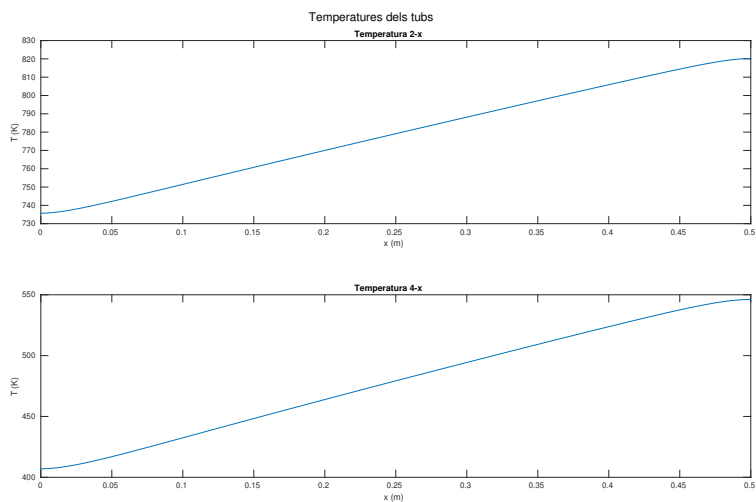


Figura 15: Temperatures en els tubs 2 i 4.

6.3.2 Canvi proporció hidrogen-oxigen

Ara canviarem el cabal entrant d'oxigen per apropar-nos més a la proporció estequiomètrica. $\dot{m}_{O_2 cc} = 250 \text{ kg/s}$. Els altres paràmetres estaran com en el cas original.

El canvi més notable és en la $T_{cc} = 1333^\circ\text{C}$. La resta de temperatures i la calor de la cambra de combustió també creix notablement. Les altres propietats són:

T_{cc}	1606 K
$T_{2 max}$	846.36 K
$T_{4 max}$	422.85 K
Q_{cc}	166.19 KW
Q_{fluid}	166.15 KW
Q_{ext}	41.49 W

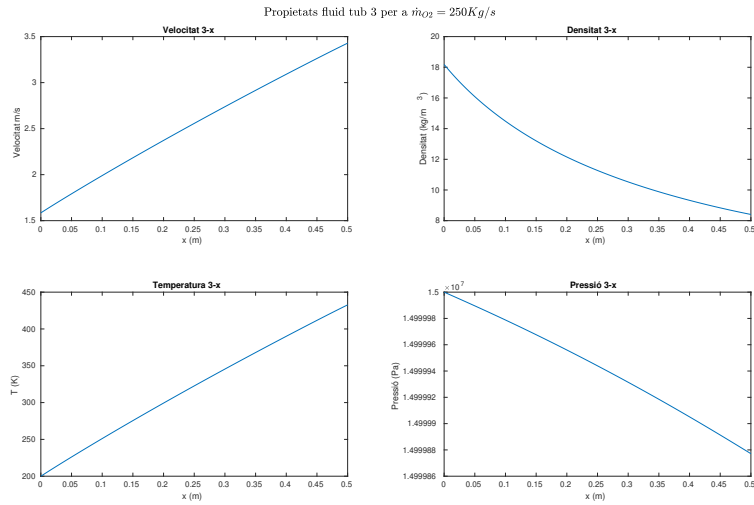


Figura 16: Propietats del fluid 3 en funció de la posició en el tub.

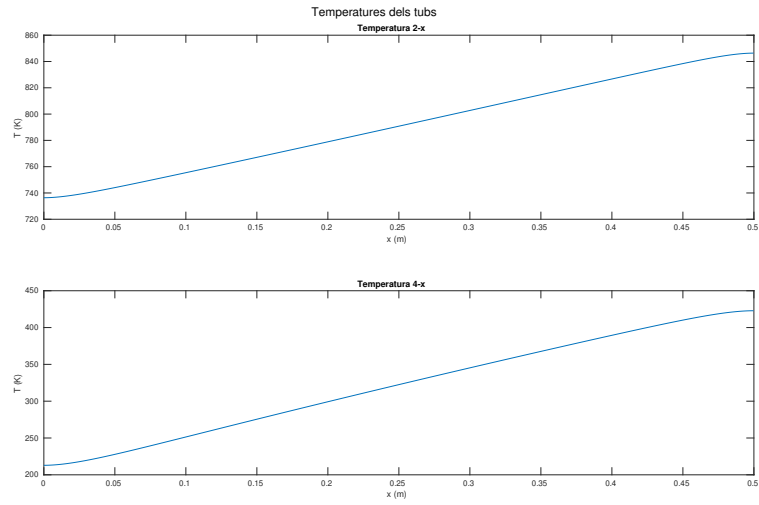


Figura 17: Temperatures en els tubs 2 i 4.

6.3.3 Canvis en la geometria

Ara els paràmetres geomètrics seran: $L=1$, $D1=0.4$, $D2=0.406$, $D3=0.5$, $D4=0.506$ m. Els resultats obtinguts són:

T_{cc}	1327.9 K
$T_{2\ max}$	705 K
$T_{4\ max}$	379.46 K
\dot{Q}_{cc}	135.91 KW
\dot{Q}_{fluid}	135.94 KW
\dot{Q}_{ext}	-32.79 W

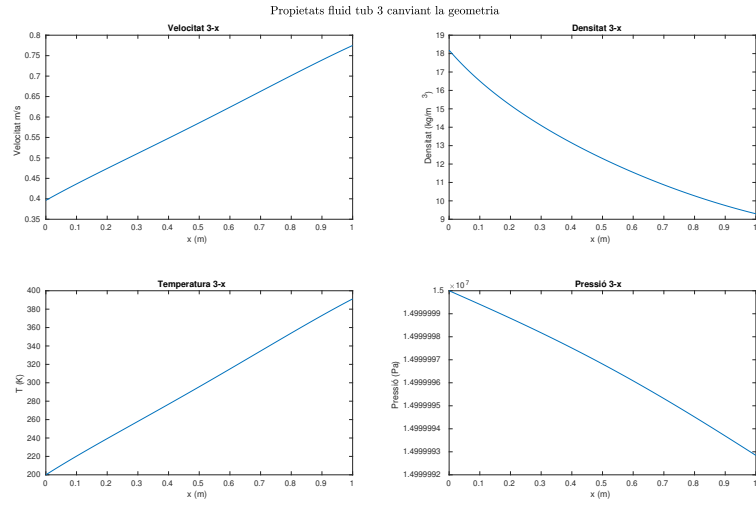


Figura 18: Propietats del fluid 3 en funció de la posició en el tub.

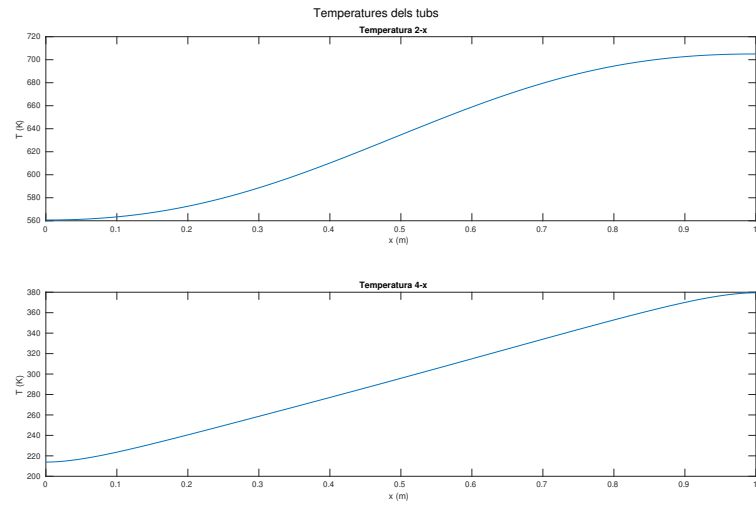


Figura 19: Temperatures en els tubs 2 i 4.

Referències

- [1] Agència espacial europea. *Vulcain engine*. (Anglès). [Online; Accedit 15-Maig-2022]. 2022. URL: https://www.esa.int/Enabling_Support/Space_Transportation/Launch_vehicles/Vulcain_engine.
- [2] Heat and Mass Transfer Technological Center (CTTC). *Formulae for the resolution of fluid dynamics and heat and mass transfer problems*. (Anglès). URL: https://atenea.upc.edu/pluginfile.php/4602606/mod_resource/content/8/Formulae-v3.2a.pdf.
- [3] Heat and Mass Transfer Technological Center (CTTC). *Furnaces and boilers. Review of combustion..* (Anglès).
- [4] Heat and Mass Transfer Technological Center (CTTC). *Thermodynamic and transport properties*. (Anglès).
- [5] Wikipedia contributors. *Vulcain (rocket engine)*. (Anglès). [Online; Accedit 15-Maig-2022]. 2022. URL: [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Vulcain_\(rocket_engine\)&oldid=1094225302](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Vulcain_(rocket_engine)&oldid=1094225302).