

Projet PINN pour résoudre l'équation de Helmholtz (travail personnel)

FERRADJ AHMED TAHAR, *Étudiant*
infoferradj@gmail.com

Grenoble-INP, Grenoble, France

The Helmholtz equation plays a fundamental role in modeling wave propagation phenomena in physics and engineering, particularly in acoustics, electromagnetism, and quantum mechanics. Traditional numerical methods, such as the Finite Element Method (FEM) or Finite Difference Method (FDM), often require fine discretizations, leading to very high computational costs, especially for high-frequency problems. In this work, we explore the Physics-Informed Neural Networks (PINN) approach, which directly incorporates the differential equation and boundary conditions into the loss function of a deep neural network. The obtained results show that this approach achieves good accuracy while reducing the mesh-related complexity, and offers better generalizability in irregular domains. This study highlights the potential of PINNs as a flexible and efficient alternative for solving wave propagation problems in complex geometries.

0 Introduction

La résolution numérique des équations aux dérivées partielles (EDP) constitue un enjeu central dans de nombreux domaines scientifiques et industriels. Parmi ces équations, l'équation de Helmholtz occupe une place essentielle car elle décrit les phénomènes d'ondes stationnaires tels que la propagation acoustique, électromagnétique et optique. Cependant, sa résolution numérique demeure difficile, en particulier pour les hautes fréquences où les méthodes classiques souffrent de pollution numérique et de coûts de calcul élevés [6, 7].

Au cours de la dernière décennie, l'essor de l'intelligence artificielle et de l'apprentissage profond a ouvert de nouvelles perspectives en simulation scientifique. Les Physics-Informed Neural Networks (PINN), introduits par Raissi *et al.* [8], offrent une approche innovante : intégrer les équations physiques directement dans la fonction de coût d'un réseau de neurones. Cette méthode permet d'éviter la génération de maillage tout en garantissant le respect des lois physiques.

L'objectif de ce projet est d'appliquer les PINN à la résolution de l'équation de Helmholtz et d'évaluer leurs performances par rapport aux méthodes numériques traditionnelles, en termes de précision, de robustesse et de coût de calcul.

1 L'équation de Helmholtz : notions fondamentales et définitions

L'équation de Helmholtz est une EDP elliptique fondamentale en physique mathématique, introduite dans les travaux de Hermann von Helmholtz au XIX^e siècle. Elle est obtenue comme une reformulation de l'équation des ondes sous hypothèse d'ondes harmoniques en temps.

1.1 Définition mathématique

Dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, l'équation de Helmholtz s'écrit :

$$\nabla^2 u(\mathbf{x}) + k^2 u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \quad (1)$$

où :

- $u(\mathbf{x})$ est la fonction inconnue (champ de pression, champ électrique, etc.),
- ∇^2 est l'opérateur Laplacien,
- $k = \frac{\omega}{c}$ est le nombre d'onde, avec ω la pulsation et c la vitesse de propagation,
- $f(\mathbf{x})$ est une source externe.

1.2 Origine

À partir de l'équation des ondes classique :

$$\nabla^2 u(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (2)$$

et en supposant une solution harmonique en temps :

$$u(\mathbf{x}, t) = \Re\{U(\mathbf{x})e^{-i\omega t}\}, \quad (3)$$

on obtient l'équation stationnaire :

$$\nabla^2 U(\mathbf{x}) + k^2 U(\mathbf{x}) = 0, \quad (4)$$

qui correspond à l'équation de Helmholtz homogène.

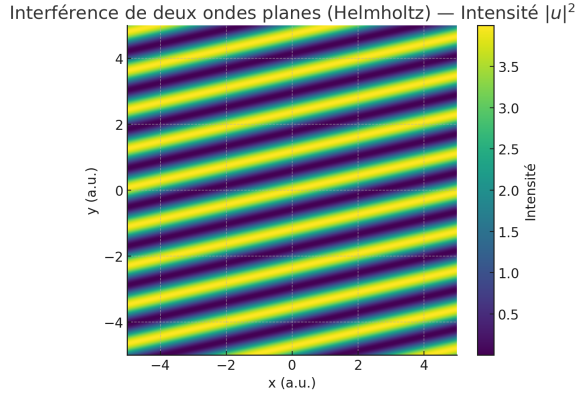


Fig. 1. Illustration d'un champ photonique obtenu comme solution de l'équation de Helmholtz. L'image représente le motif d'interférences produit par la superposition de deux ondes planes.

1.3 Cas particuliers

En 1D :

$$\frac{d^2 U(x)}{dx^2} + k^2 U(x) = 0, \quad (5)$$

dont la solution est :

$$U(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx). \quad (6)$$

En 2D :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + k^2 U(x, y) = 0, \quad (7)$$

En 3D :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + k^2 U(x, y, z) = 0. \quad (8)$$

1.4 Problème ondulatoire stationnaire

Un problème ondulatoire stationnaire consiste à étudier la propagation d'une onde harmonique, où la dépendance temporelle est factorisée sous la forme :

$$u(\mathbf{r}, t) = U(\mathbf{r})e^{-i\omega t}. \quad (9)$$

La partie spatiale $U(\mathbf{r})$ vérifie alors l'équation de Helmholtz. En insérant cette hypothèse dans l'équation d'onde générale :

$$\nabla^2 U(\mathbf{r}) + k^2 U(\mathbf{r}) = 0 \quad (10)$$

on obtient l'équation de Helmholtz :

$$\nabla^2 U(\mathbf{r}) + k^2 U(\mathbf{r}) = 0 \quad (11)$$

où $k = \frac{\omega}{c}$ le nombre d'ondes.

1.5 Pollution numérique dans l'équation de Helmholtz

Lors de la résolution numérique de l'équation de Helmholtz à haute fréquence, un phénomène bien connu appelé **pollution numérique** apparaît. Il s'agit d'une erreur supplémentaire qui persiste même si le schéma numérique est consistant et stable. Ce phénomène se manifeste particulièrement lorsque le nombre d'onde k est élevé.

L'équation de Helmholtz s'écrit sous la forme :

$$\nabla^2 u(\mathbf{r}) + k^2 u(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}), \quad (12)$$

où $u(\mathbf{r})$ représente le champ d'onde, k est le nombre d'onde, et $f(\mathbf{r})$ une source.

En pratique, la solution numérique \tilde{u}_h obtenue par des méthodes de discrétisation (éléments finis, différences finies, etc.) satisfait :

$$\|u - \tilde{u}_h\| \leq C(kh)^p + \varepsilon_{\text{pollution}}, \quad (13)$$

où :

- h est la taille du maillage,
- p est l'ordre de la méthode numérique,
- $\varepsilon_{\text{pollution}}$ désigne l'erreur de pollution.

Même si l'on respecte la condition classique de résolution (par exemple 10 points par longueur d'onde), l'erreur de pollution croît avec la fréquence ($k \rightarrow \infty$), entraînant une distorsion progressive de l'onde numérique. Ce phénomène est une limitation majeure des méthodes classiques appliquées à l'équation de Helmholtz.

1.6 Dualité onde-corpuscule du photon et approche helmholtzienne

Le photon, en tant que quantum du champ électromagnétique, se caractérise par une dualité fondamentale : il possède à la fois une nature corpusculaire et une nature ondulatoire [9, 10]. L'aspect corpusculaire se manifeste lors des interactions localisées avec la matière, où il transfère une énergie quantifiée

$$E = h\nu, \quad (14)$$

avec h la constante de Planck et ν la fréquence du rayonnement. L'aspect ondulatoire, en revanche, est mis en évidence par les phénomènes d'interférence et de diffraction, qui révèlent la structure spatiale et temporelle des champs lumineux [11].

Pour décrire mathématiquement ce comportement ondulatoire, on recourt à l'équation de Helmholtz, qui découle directement des équations de Maxwell dans le cas stationnaire harmonique. Si l'on considère un champ électrique harmonique de pulsation ω , la forme générale de l'équation de Helmholtz s'écrit :

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{r}) + k^2 \psi(\mathbf{r}) = 0, \quad (15)$$

où $\psi(\mathbf{r})$ représente le champ électromagnétique stationnaire et

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c} \quad (16)$$

est le nombre d'onde associé à la longueur d'onde λ et à la vitesse de la lumière c .

Cette formulation permet de modéliser la propagation stationnaire des ondes électromagnétiques et d'analyser la distribution spatiale des photons dans des milieux complexes, tels que les guides d'ondes, les cavités optiques ou les structures nanophotoniques [12, 18]. Ainsi, l'approche helmholtzienne constitue un pont entre la vision ondulatoire du photon et ses manifestations corpusculaires, en offrant une description analytique et numérique adaptée à l'étude de systèmes photoniques avancés. La figure suivante illustre bien la nature ondulatoire-corpusculaire de l'entité physique nommée photon.

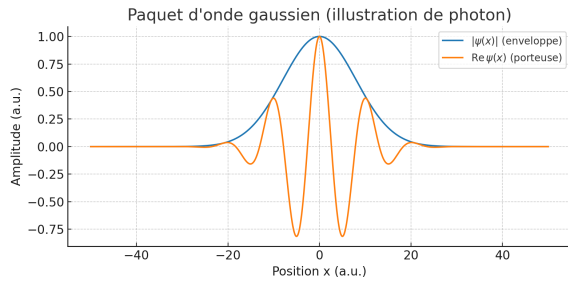


Fig. 2. Paquet d'onde gaussien 1D (amplitude et porteuse)

1.7 Motivation pour l'étude du comportement photonique dans l'industrie numérique et optique

L'étude du comportement photonique dans l'industrie numérique et optique repose sur la nécessité de dépasser les limites inhérentes aux technologies électroniques classiques. Les systèmes électroniques, basés sur le transport de charges (électrons), présentent en effet des contraintes liées à la résistance électrique, aux pertes thermiques (effet Joule), ainsi qu'à une limite fondamentale de miniaturisation imposée par la loi de Moore [14].

À l'inverse, l'utilisation des photons comme vecteurs d'information offre plusieurs avantages stratégiques. Tout d'abord, les photons se déplacent à la vitesse de la lumière dans les milieux optiques, ce qui permet une transmission d'information beaucoup plus rapide que celle des électrons dans les conducteurs [15]. De plus, la propagation photonique ne génère pas de pertes ohmiques, ce qui améliore l'efficacité énergétique des dispositifs.

Ces caractéristiques font de la photonique une technologie clé dans de nombreux domaines :

- **Télécommunications optiques** : les fibres optiques permettent une transmission à haut débit et

longue distance, surpassant largement les câbles en cuivre [16].

- **Traitement de l'information** : les circuits intégrés photoniques (PIC) offrent la possibilité de concevoir des processeurs hybrides photonique-électronique, ouvrant la voie au calcul ultra-rapide [17].
- **Stockage et capteurs** : la photonique est utilisée dans le développement de mémoires optiques haute densité et de capteurs sensibles dans la médecine et l'imagerie avancée [18].

La comparaison entre les deux paradigmes (électronique vs photonique) se résume ainsi : l'électronique demeure plus mature et plus simple à intégrer, mais limitée par des phénomènes résistifs et thermiques, tandis que la photonique apporte une vitesse, une bande passante et une efficacité énergétique inégalées. Cette complémentarité explique l'émergence de systèmes hybrides *optoélectroniques*, qui exploitent simultanément les avantages des électrons et des photons pour surmonter les limitations des technologies actuelles [19].

2 Les PINN : Notions fondamentales et clarification des termes appropriés

Les **Physics-Informed Neural Networks (PINNs)** représentent une approche récente en apprentissage automatique où les réseaux de neurones profonds sont contraints par les lois physiques sous forme d'équations différentielles partielles (EDP) ou ordinaires (EDO). Introduits par Raissi, Perdikaris et Karniadakis [20], les PINNs exploitent le fait que la solution d'un problème physique doit satisfaire à la fois les données expérimentales disponibles et les équations régissant le système.

2.1 Définitions des termes clés

- **Fonction d'approximation** : le réseau de neurones $u_\theta(x, t)$ est utilisé pour approximer la solution inconnue $u(x, t)$ d'une équation différentielle donnée.
- **Fonction de coût physique** : contrairement aux approches classiques d'apprentissage supervisé, la fonction de perte intègre un terme basé sur les *résidus de l'équation différentielle*. Par exemple, pour une équation différentielle $\mathcal{N}[u](x, t) = 0$, le résidu est :

$$\mathcal{L}_{physique} = \frac{1}{N_r} \sum_{i=1}^{N_r} |\mathcal{N}[u_\theta(x_i, t_i)]|^2.$$

- **Conditions initiales et aux limites** : elles sont incluses dans la fonction de perte afin de garantir

que la solution respecte la physique complète du problème :

$$\mathcal{L}_{totale} = \mathcal{L}_{données} + \mathcal{L}_{physique} + \mathcal{L}_{C.I/C.L}.$$

- **Collocation points** : ensemble de points $\{x_i, t_i\}$ sélectionnés dans le domaine de définition, sur lesquels les équations physiques sont imposées.
- **Avantage principal** : les PINNs permettent de résoudre des problèmes d'EDP où les données expérimentales sont rares ou bruitées, car la physique agit comme une régularisation [21].

2.2 Architecture des PINNs

L'architecture d'un PINN (*Physics-Informed Neural Network*) repose sur une combinaison de réseaux de neurones profonds et de contraintes physiques sous forme d'équations différentielles. L'idée principale est que la structure du réseau est similaire à celle d'un réseau de neurones classique, mais la fonction de coût intègre les lois physiques gouvernant le problème [20, 21].

2.3 Composants principaux de l'architecture

- **Couche d'entrée** : elle encode les variables indépendantes du problème, par exemple l'espace et le temps (x, t) .
- **Couches cachées** : composées de neurones avec des fonctions d'activation non linéaires (tanh, ReLU, etc.). Ces couches apprennent une représentation approchée de la solution de l'équation différentielle.
- **Couche de sortie** : fournit l'approximation $u_\theta(x, t)$ de la solution physique recherchée.
- **Fonction de perte hybride** : la nouveauté majeure des PINNs réside dans la définition de la fonction de perte.
- **Points de collocation** : ensemble de points choisis dans le domaine où la physique est imposée pour contraindre le réseau.
- **Rétropropagation et autodifférentiation** : l'optimisation repose sur l'algorithme de rétropropagation, combinée à l'*automatic differentiation*, afin de calculer avec précision les dérivées nécessaires pour les résidus d'équations différentielles [?].

2.4 Illustration conceptuelle

L'architecture peut se résumer ainsi :

$$(x, t) \longrightarrow [\text{couches cachées non-linéaires}] \longrightarrow u_\theta(x, t),$$

avec une boucle d'entraînement où la physique intervient directement dans la fonction de coût.

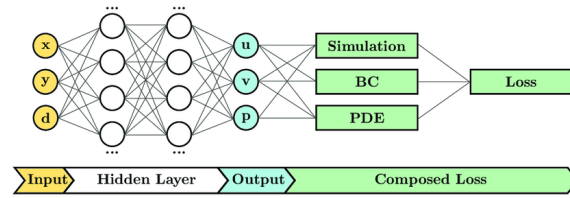


Fig. 3. Une figure qui illustre l'architecture des réseaux neurones informés par la physique)

3 Application des PINN pour l'observation des phénomènes ondulatoires en se basant sur l'équation de Helmholtz

Les Physics-Informed Neural Networks (PINNs) se sont révélés particulièrement adaptés à l'étude des phénomènes ondulatoires en physique et en ingénierie, en raison de leur capacité à résoudre numériquement des équations aux dérivées partielles (EDP) complexes sans nécessiter de maillage explicite [20, 21].

Un exemple fondamental est l'équation de Helmholtz, qui décrit les ondes stationnaires dans de nombreux contextes (acoustique, photonique, électromagnétisme, nanophotonique) :

$$\nabla^2 u(x) + k^2 u(x) = 0, \quad (17)$$

où $u(x)$ représente le champ d'onde et k est le nombre d'onde lié à la fréquence et au milieu de propagation.

L'implémentation d'un PINN pour ce problème consiste à :

1. définir une architecture de réseau de neurones $u_\theta(x)$ qui approxime la solution,
2. introduire dans la fonction de perte le **résidu de Helmholtz** :

$$\mathcal{L}_{Helmholtz} = \frac{1}{N_c} \sum_{i=1}^{N_c} \left| \nabla^2 u_\theta(x_i) + k^2 u_\theta(x_i) \right|^2,$$

où $\{x_i\}_{i=1}^{N_c}$ sont les points de collocation choisis dans le domaine,

3. ajouter les termes de pertes associés aux conditions aux limites et, si disponibles, aux données expérimentales.

Cette approche permet de traiter des géométries complexes et des régimes fréquentiels élevés, où les méthodes numériques classiques (éléments finis, différences finies) deviennent coûteuses en mémoire et en calcul [4, 5].

Ainsi, les PINNs constituent une alternative prometteuse pour modéliser les phénomènes ondulatoires dans des applications telles que la nanophotonique, les guides d'onde optiques, ou encore la propagation acoustique en milieux hétérogènes.

Les deux bibliothèques de deep learning les plus utilisées dans la recherche académique et scientifique

sont **TensorFlow** (développée par Google Brain en 2015) et **PyTorch** (développée par Facebook AI Research en 2016). Bien que les deux frameworks permettent l'implémentation efficace de réseaux de neurones profonds et la parallélisation sur GPU, leurs approches diffèrent [1, 2].

TensorFlow a été initialement conçu pour le déploiement industriel à grande échelle. Il repose sur un *graph statique*, ce qui permet des optimisations de performance mais rend parfois le développement moins flexible. TensorFlow est largement utilisé dans les environnements de production, notamment en raison de son intégration avec *TensorFlow Serving* et *TensorFlow Lite* pour les applications embarquées [1].

En revanche, PyTorch adopte une approche *eager execution*, avec un *graph dynamique* qui rend le prototypage et le débogage plus intuitifs. Cette flexibilité explique sa popularité croissante dans le milieu académique et la recherche fondamentale, en particulier pour les modèles exploratoires, les architectures non standards et l'intégration avec des solveurs de physique ou des bibliothèques scientifiques [2].

Dans le domaine scientifique, PyTorch est souvent préféré pour les travaux nécessitant des approches innovantes, comme les **Physics-Informed Neural Networks (PINNs)**, la modélisation en photonique ou encore l'apprentissage de représentations dans les systèmes complexes. TensorFlow reste dominant dans les environnements de production et dans les projets nécessitant une optimisation à grande échelle.

Ainsi, le choix entre TensorFlow et PyTorch dépend largement du contexte :

- PyTorch : recherche académique, prototypage rapide, modèles complexes et innovants.
- TensorFlow : production industrielle, déploiement distribué, applications embarquées.

4 Analyse des résultats après l'exécution du code PINN à l'aide de Pytorch

Les résultats obtenus par l'entraînement du *Physics-Informed Neural Network* (PINN) appliqué à l'équation de Helmholtz mettent en évidence la capacité du modèle à reproduire correctement la dynamique du champ électrique dans un milieu présentant des variations d'indice de réfraction.

4.1 Champ électrique et profil d'indice

La Figure 5 illustre la comparaison entre le champ électrique prédit $E(x)$ et le profil d'indice de réfraction $n(x)$. On observe que le champ suit un comportement oscillatoire typique des solutions de l'équation de Helmholtz, avec une modulation en amplitude et en phase induite par la discontinuité du profil d'indice. Cette cohérence entre les variations de $n(x)$ et la réponse du champ témoigne de la capacité du PINN à

Critère	TensorFlow	PyTorch
Type de graph	Graph statique (optimisation avant exécution)	Graph dynamique (exécution immédiate, plus intuitif)
Facilité de prototypage	Moins flexible, courbe d'apprentissage plus longue	Très flexible, adapté au prototypage rapide
Débogage	Plus complexe (graph compilé)	Plus simple (exécution ligne par ligne en Python)
Production et déploiement	Fortement optimisé pour le déploiement industriel (TensorFlow Serving, Lite, TPU)	Moins orienté production, nécessite souvent ONNX pour exporter
Adoption académique	Plus utilisé dans les projets appliqués et industriels	Très populaire dans la recherche fondamentale et académique
Communauté et support	Large communauté, support Google, riche écosystème	Forte communauté académique, support Meta AI, intégration avec NumPy et SciPy

Fig. 4. Comparaison entre TensorFlow et PyTorch dans le domaine académique et scientifique.

intégrer correctement les conditions physiques locales et à s'adapter aux hétérogénéités du milieu.

4.2 Source excitatrice

La Figure 6 représente la source excitatrice $S(x)$, modélisée par une gaussienne centrée en $x = 0$. Ce choix est pertinent dans un contexte photonique puisqu'il reproduit l'effet d'un faisceau localisé injecté dans la structure. Le champ prédit présente une amplification à proximité de la zone d'excitation et une atténuation progressive ailleurs, confirmant que le réseau neuronal a correctement appris la propagation induite par cette condition initiale.

4.3 Convergence de la fonction de coût

La Figure 7 retrace l'évolution des différentes composantes de la fonction de coût au cours de l'entraînement. La perte totale diminue progressivement pour atteindre un ordre de grandeur de 10^{-2} , ce qui indique une convergence satisfaisante. Plus spécifiquement :

- le terme associé à l'équation aux dérivées partielles (PDE loss) décroît de manière significative, ce qui atteste que le réseau parvient à satisfaire les contraintes physiques imposées par l'équation de Helmholtz ;
- la perte liée aux conditions aux limites (BC loss) présente des fluctuations, mais tend globalement vers de faibles valeurs, suggérant une intégration correcte de ces contraintes ;
- la composante de régularisation demeure quasi constante, ce qui traduit un rôle stabilisateur sans impact majeur sur la dynamique de convergence.

4.4 Interprétation générale

Dans l'ensemble, les résultats démontrent que le PINN est capable d'apprendre une solution cohérente avec la physique du problème étudié. Le champ électrique obtenu reproduit les effets attendus de la discontinuité d'indice et de l'excitation localisée, tandis que l'analyse des pertes confirme une bonne convergence numérique. Toutefois, les oscillations résiduelles observées dans la perte associée aux conditions aux limites pourraient être réduites en ajustant les pondérations relatives des différents termes de la fonction de coût ou en explorant des fonctions d'activation plus adaptées aux phénomènes oscillatoires, telles que \tanh ou \sin .

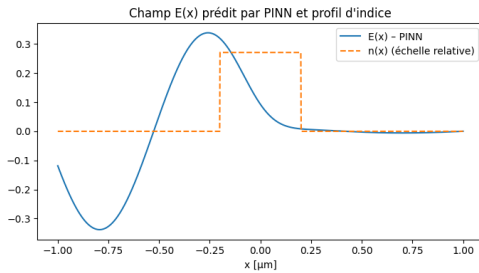


Fig. 5. Champ électrique prédit $E(x)$ comparé au profil d'indice de réfraction $n(x)$.

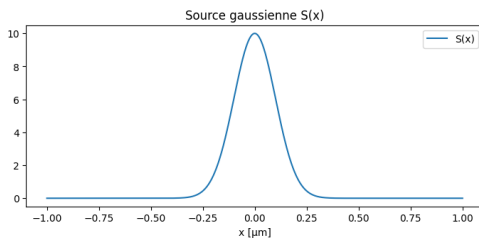


Fig. 6. Source excitatrice $S(x)$ modélisée par une gaussienne centrée en $x = 0$.

5 Conclusion générale

Dans ce travail, nous avons appliqué l'approche des *Physics-Informed Neural Networks* (PINNs) à la résolution de l'équation de Helmholtz dans un mi-

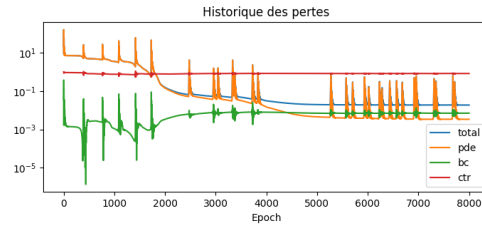


Fig. 7. Évolution de la fonction de coût au cours de l'entraînement (PDE loss, BC loss et régularisation).

lieu hétérogène en indice de réfraction. Les résultats obtenus confirment la capacité des PINNs à intégrer à la fois les données d'excitation et les contraintes physiques issues des équations aux dérivées partielles.

L'analyse des solutions prédites montre que le champ électrique $E(x)$ reproduit correctement les phénomènes attendus, en particulier la modulation induite par la discontinuité de l'indice de réfraction et l'amplification localisée due à la source gaussienne. Par ailleurs, la convergence de la fonction de coût et la diminution significative de la composante liée aux équations physiques attestent de la pertinence de l'entraînement réalisé.

Ces résultats mettent en évidence le potentiel des PINNs pour traiter des problèmes complexes en nanophotonique et en optique numérique, où les méthodes numériques classiques peuvent s'avérer coûteuses ou limitées par la dimensionnalité. Toutefois, certaines fluctuations résiduelles dans la satisfaction des conditions aux limites suggèrent que des améliorations sont possibles, notamment en affinant la stratégie de pondération des différentes pertes ou en explorant des architectures neuronales plus adaptées aux comportements oscillatoires.

En perspective, l'extension de cette approche à des configurations multidimensionnelles, ainsi que son couplage avec des méthodes de simulation numériques telles que la FDTD ou la FEM, pourrait constituer une piste prometteuse pour développer des outils hybrides alliant rigueur physique et efficacité computationnelle.

6 Perspectives

Ce travail ouvre la voie à plusieurs perspectives de recherche. Tout d'abord, l'extension des *Physics-Informed Neural Networks* (PINNs) à des problèmes multidimensionnels basés sur l'équation de Helmholtz constituerait une avancée significative, notamment pour l'étude des phénomènes de propagation dans des milieux complexes tels que les guides d'ondes, les structures photoniques périodiques ou encore les matériaux métastucturés.

Ensuite, l'optimisation de l'architecture des réseaux neuronaux et des fonctions de perte représente un axe majeur d'amélioration. En particulier, l'intégration de méthodes de rééchantillonnage adaptatif ou de stratégies de pondération dynamique des résidus

physiques pourrait améliorer la convergence et la précision des solutions dans des zones fortement oscillatoires.

Par ailleurs, le couplage des PINNs avec des méthodes numériques établies comme la méthode des différences finies dans le domaine temporel (FDTD) ou la méthode des éléments finis (FEM) offrirait un cadre hybride, combinant robustesse physique et efficacité computationnelle.

Enfin, au-delà des aspects théoriques, une application concrète des PINNs à l'industrie optique et numérique — par exemple pour la conception de dispositifs photoniques, la modélisation de capteurs ou l'optimisation de systèmes de communication optique — permettrait de consolider leur rôle comme outil de simulation et de conception de nouvelle génération.

7 REFERENCES

- [1] Abadi, M., Agarwal, A., Barham, P., Brevdo, E., Chen, Z., Citro, C., ... & Zheng, X. *TensorFlow: Large-scale machine learning on heterogeneous distributed systems*, arXiv preprint arXiv:1603.04467 (2016).
- [2] Paszke, A., Gross, S., Massa, F., Lerer, A., Bradbury, J., Chanan, G., ... & Chintala, S. *PyTorch: An imperative style, high-performance deep learning library*, Advances in Neural Information Processing Systems (NeurIPS), 32 (2019).
- [3] G. E. Karniadakis, I. G. Kevrekidis, L. Lu, P. Perdikaris, S. Wang, L. Yang, *Physics-informed machine learning*, Nature Reviews Physics, 3, 422–440 (2021).
- [4] Z. Fang, X. Zeng, Y. Wang, *Physics-informed neural networks for Helmholtz equation with high wave numbers*, Journal of Computational Physics, 427, 110086 (2021).
- [5] X. Jin, Y. Cai, H. Karimi, G. E. Karniadakis, *NSFnets (Navier-Stokes flow nets): Physics-informed neural networks for the incompressible Navier-Stokes equations*, Journal of Computational Physics, 426, 109951 (2022).
- [6] F. Ihlenburg, *Finite Element Analysis of Acoustic Scattering*, Springer, 1998.
- [7] I. Harari, "Recent developments in finite element methods for the Helmholtz equation", *Archives of Computational Methods in Engineering*, 13(3), 2006.
- [8] M. Raissi, P. Perdikaris, G. E. Karniadakis, "Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations", *Journal of Computational Physics*, 378, pp. 686–707, 2019.
- [9] A. Einstein, *Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt*, Annalen der Physik, 17, 132–148 (1905).
- [10] P. A. M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, Oxford University Press (1930).
- [11] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, Addison-Wesley (1965).
- [12] J. D. Joannopoulos, S. G. Johnson, J. N. Winn, R. D. Meade, *Photonic Crystals: Molding the Flow of Light*, Princeton University Press (2008).
- [13] L. Novotny, B. Hecht, *Principles of Nano-Optics*, Cambridge University Press (2012).
- [14] International Technology Roadmap for Semiconductors (ITRS), 2015 Edition.
- [15] B. E. A. Saleh, M. C. Teich, *Fundamentals of Photonics*, Wiley (1991).
- [16] G. P. Agrawal, *Fiber-Optic Communication Systems*, Wiley (2012).
- [17] C. Sun et al., *Single-chip microprocessor that communicates directly using light*, Nature, 528, 534–538 (2015).
- [18] L. Novotny, B. Hecht, *Principles of Nano-Optics*, Cambridge University Press (2012).
- [19] D. A. B. Miller, *Attojoule Optoelectronics for Low-Energy Information Processing and Communications*, J. Lightwave Technol. 35, 3 (2017).
- [20] M. Raissi, P. Perdikaris, G. E. Karniadakis, *Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations*, Journal of Computational Physics, 378, 686–707 (2019).
- [21] G. E. Karniadakis, I. G. Kevrekidis, L. Lu, P. Perdikaris, S. Wang, L. Yang, *Physics-informed machine learning*, Nature Reviews Physics, 3, 422–440 (2021).
- [22] S. Cuomo, V. Di Cola, F. Giampaolo, G. Rozza, M. Raissi, F. Piccialli, *Scientific Machine Learning through Physics-Informed Neural Networks: Where we are and What's Next*, Journal of Scientific Computing, 92, 88 (2022).

THE AUTHORS
