DM Outils mathématiques pour l'IA

FERRADJ AHMED TAHAR

Grenoble école de Management
MS Big data

1 Simulation d'une loi normale avec un estimateur sans biais

Pour estimer la variance σ^2 d'une distribution normale, un estimateur sans biais couramment utilisé est l'estimateur de la variance corrigée, également appelé l'estimateur sans biais de la variance ajustée pour les degrés de liberté (Bessel's correction). Cet estimateur est basé sur la somme des carrés des écarts par rapport à la moyenne, ajustée pour les degrés de liberté. L'estimateur de la variance corrigée s^2 pour une échantillon aléatoire de nn observations d'une distribution normale est donnée par la formule suivante :

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}\right)^2$$

1. s^2 est l'estimateur de la variance corrigée
2. n est le nombre d'observations dans l'échantillon
3. X_i est chaque observation dans l'échantillon,
4. $\overline{X}$ est la moyenne des observations.

La démonstration du fait que s2s2 est un estimateur sans biais de la variance () d'une distribution normale repose sur les propriétés des moments et de l'espérance.Voici une démonstration simplifiée :

Soit $X_1, X_2, ..., X_n$ une échantillon aléatoire de taille nn provenant d'une distribution normale avec une variance σ^2.

1. Calcul de l'estimateur de la variance corrigée s^2 :

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}\right)^2$$

2. Calcul de l'espérance de s^2 :

$$\mathbf{E}(s^2) = \mathbf{E}\left(\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}\right)^2\right)$$

3. Simplification de l'expression en utilisant des propriétés de l'espérance :

$$\mathbf{E}(s^2) = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}\left(\left(X_i - \overline{X}\right)^2\right)$$

4. Utilisation de la relation $\mathbf{Var}(X) = \mathbf{E}(X2) - [\mathbf{E}(X)]^2$:

$$\mathbf{E}(s^2) = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left[\mathbf{Var}(X_i) + \left[\mathbf{E}(\overline{X})\right]^2\right]$$

5. Pour une distribution normale :

$$\mathbf{E}(s^2) = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left[\sigma^2 + \mu\right]$$

6. Simplification de l'expression :

$$\mathbf{E}(s^2) = \sigma^2$$

Cela montre que l'estimateur de la variance corrigée s^2 est sans biais pour la variance σ^2 de la distribution normale d'où provient l'échantillon.
Cette démonstration utilise des propriétés des moments et de l'espérance pour montrer que, en moyenne, l'estimateur σ^2 est égal à la vraie variance σ^2, ce qui justifie son utilisation comme estimateur sans biais.