Entropia d'Entrellaçament i Holografia

Ferran Rodríguez Mascaró

I. Introducció

A. *Espaitemps d'Anti-de Sitter*

Un espaitemps d'anti-de Sitter (AdS) és un espaitemps maximalment simètric amb curvatura negatica, solució de les equacions d'Einstein amb constant cosmològica negativa.

Es pot obtenir la mètrica del 'mig-espai' d'un espaitemps d'AdS de $D = d + 1$ dimensions utilitzant les coordenades del 'Pointcaré patch' com

$$ds^2_{AdS_D} = \frac{1}{z^2}\left(-dt^2 + dz^2 + \sum_{i=1}^{d-1} dx_i^2\right) \ , \qquad (1)$$

amb les dimensions relacionades amb el temps i l'espai $t, x_i \in (-\infty, +\infty)$ i una dimensió extra $z \in (0, +\infty)$ [1].

Fixant la coordenada z, es creen espaitemps de Minkowski d-dimensionals amb un factor de pes $\frac{1}{z^2}$.

A temps constant, [**empty citation**] aquesta mètrica forma spais hiperbòlics de curvatura negativa, conformalment equivalents a espaitemps de Minkowski per $z \to 0$. L'inifinit conforme d'AdS és de tipus temps, fent que es necessitin condicions de frontera per determinar l'evolució temporal unívocament.

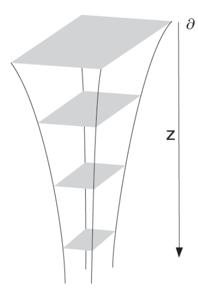

Figura 1. Representation of the different Minkowski space-time layers along the z coordinate inside an AdS space-time.

Utilitzant coordenades hiperpolars s'obté una altre expressió per a la mètrica que cobreix tot l'espai:

$$ds^2_{AdS_D} = \left[-\left(1 + \frac{r^2}{L^2}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 + \frac{r^2}{L^2}\right)} + r^2 d\Omega^2_{D-2}\right] \ , \qquad (2)$$

sent L ($k^2 = 1/L^2$) l'anomenat radi d'anti-de Sitter.

A la figura 2 s'hi representa la mètrica de l'Equació 2. El cilíndre sencer correspón a un espaitemps d'AdS, sent la superfície lateral la frontera conforme (on $z \to 0$, o $r \to \infty$). La regió remarcada correspon a la que cobreixen les coordenades del 'mig-espai', envoltades per la forntera conforme i dos hiperplans geodèsics de tipus llum [**empty citation**].

Figura 2. Representació de la regió de 'mig-espai' d'un espaitemps d'AdS i la seva frontera.

B. *Teories de Camps Conforme*

Una teoria de camps conforme (CFT) és una teoria quàntica de camps que és invariant sota transformacions que preserven localment els angles.

C. *El Principi Hologràfic*

El límit de l'entropia covariant [2] és conjectura com a representació de la llei universal en la que, en un espaitemps de quatre dimensions en el què es satisfan les equacions d'Einstein, l'entropia d'un sistema està limitat per la seva àrea.

Aquest límit impica que els graus de llibertat dins una regió creix segons l'àrea de la frontera i no segons el volum de la regió. Aquest comportament porta al *principi hologràfic*, que diu que en una teoria de gravitació quàntica tots els fenòmens físics dins d'un volum es poden descriure en termes d'una teoria a la frontera de l'àrea del volum, el qual té menys d'un grau de llibertat per àrea de Planck [3].

D. *Correspondència AdS/CFT*

Un tipus de teoria de camps conforme és descriu equivalentment en certs límits en termes d'un espaitemps d'anti-de Sitter [4].

La *correspondència AdS/CFT*, anomenada simplement *holografia* a física d'altes energies, és una equivalència o dualitat entre teories de gravetat quàntica (certes teories de cordes) asimptòticament a espaitemps d'anti-de Sitter D-dimensionals i teories de camps conformes no gravitacionals de $D-1$ dimensions [5]. Permet estudiar diferents aspectes de cada teoria a través de l'altre. L'anomenat *diccionari hologràfic* relaciona quantitats (observables) entre les teories d'AdS i les CFT.

E. *Entropia d'Entrellaçament*

Quan dos sistemes quàntics entren temporalment en interacció física, deixen de poder-se descriure de la mateixa manera després d'un cert temps d'influència mútua [6]. No es podran descriure cap dels dos sistemes per separat sense perdre informació global, ja que l'estat de cada sistema ara està influit i correlacionat per l'altre sistema. Aquest és l'anomenat *entrellaçament quàntic*.

Being two quantum systems represented by the corresponding Hillberg spaces $\mathcal{H}_A$ and $\mathcal{H}_B$, and an state

$|\Psi\rangle \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, this would be an entangled state if

$$|\Psi\rangle \neq |\Psi_A\rangle \otimes |\Psi_B\rangle \;\longrightarrow\; |\Psi\rangle = \sum_{i,j} c_{ij} \,|i\rangle_A \otimes |j\rangle_B \;\;, \quad (3)$$

being $|\Psi_{A,B}\rangle$ the possible different substates in which one could separate $|\Psi\rangle$ if it was separable, substates expressed in each orthonormal bases $\{|k\rangle_{A,B}\}$ of $\mathcal{H}_{A,B}$ [**empty citation**].

The *entanglement entropy* is a measure of the degree of quantum entanglement between the two subsystems composing a full quantum system [7]. It is defined by the von Neumann entropy of the reduced density matrix ρ_A of one of the subsystems as

$$S_{EE}(A) = -\,\mathrm{tr}_A(\rho_A \log \rho_A) \;, \quad (4)$$

being $\rho_A = \mathrm{tr}_B \,|\Psi\rangle\langle\Psi|$. If ρ_A is diagonalized ($\rho_A = \sum_i \lambda_i \,|i\rangle\langle i|$), then the entanglement entropy would take the simplified form $S_{EE} = -\sum_i \lambda_i \log \lambda_i$.

If there is no entanglement between both subsystems, the entanglement entropy is null ($S_{EE} = 0$).

F. Entanglement entropy in AdS/CFT

In a quantum field placed in a Minkowski space-time, at a given time, every point on space is entangled with the points surrounding it [7]. Therefore, the entanglement entropy between a subsytem and the rest of the space will be dominated by the correlations between both sides of the boundary that isolates the subsystem.

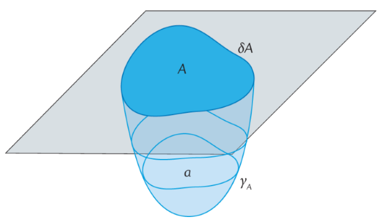

Figura 3. Region $\mathcal{A}$ (dark blue) and its boundary $\partial\mathcal{A}$ inside a $z = \delta$ AdS slide (grey) and its respective $\gamma_\mathcal{A}$ (light blue) inside the AdS space-time.

In an $(d+1)$-dimensional AdS space-time, being $\mathcal{A}$ a region of a d-dimensional Minkowski space-time slice formed from fixing z as $z = \delta \ll 1$, the entanglement entropy of a d-dimensional CFT on this Minkowski space-time will be expressed by the so called Ryu-Takayanagi formula

$$S_\mathcal{A} = \frac{\mathrm{Area}(\gamma_\mathcal{A})}{4G_{d+1}} \;, \quad (5)$$

[8] where $\gamma_\mathcal{A}$ is the surface of minimal area on the whole AdS space-time connected to the $(d-1)$-dimensional boundary $\partial\mathcal{A}$ of the region $\mathcal{A}$, and G_{d+1} is the $(d+1)$-dimensional Newton constant (represented in Figure 3).

The area of $\gamma_\mathcal{A}$ is obtained by

$$\mathrm{Area}(\gamma_\mathcal{A}) = \int_{\gamma_\mathcal{A}} \sqrt{h}\; d^d y \;, \quad (6)$$

where y are the d coordinates that represent surface $\gamma_\mathcal{A}$ and h is the determinant of the metric $h_{ij} = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^i}\frac{\partial x^\nu}{\partial y^j} g_{\mu\nu}$ induced on the surface by the surrounding space-time.

The Ryu-Takayanagi formula is valid for generic systems, and gives a flavour of how the geometry of space-time can emerge from mere quantum information. As a curiosity, the Ryu-Takayanagi formula in the case of a thermalized system of particles in an AdS space-time derives to the Bekenstein-Hawking formula [9] for the entropy a black hole:

$$S_{BH} = \frac{A_H}{4G} \;, \quad (7)$$

that says that the entropy related to a black hole only depends on the area A_H of its event horizon.

Solving the Ryu-Takayanagi formula for a $(d+1)$-dimensional anti-de Sitter space-time one obtains the expected general expression of the entanglement entropy for a d-dimensional quantum field theory:

$$S_{QFT_d} = \sum_{i=0}^{d/2-1} c_i \left(\frac{R}{\delta}\right)^{d-2(i+1)} + a \log\left(\frac{R}{\delta}\right) - F \;, \quad (8)$$

[7] in which R is the characteristic length of the region studied, c_i are coefficients that can be dependent on δ, the logarithmic component only appears for even d, and F is a function related to the aspect of the region $\mathcal{A}$.

Referències

[1] J. Kaplan, “Lectures on AdS/CFT from the bottom up”,

[2] R. Bousso, “A Covariant Entropy Conjecture”, Journal of High Energy Physics **1999**, 004 - 004 (1999).

[3] G. 't Hooft, *Dimensional Reduction in Quantum Gravity*, 20 de març de 2009.

[4] M. Rangamani i T. Takayanagi, *Holographic entanglement entropy*, vol. 931 (2017).

[5] J. M. Maldacena, “The Large N Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity”, International Journal of Theoretical Physics **38**, 1113 - 1133 (1999).

[6] E. Schrödinger, “Discussion of probability relations between separated systems”, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **31**, 555 - 563 (1935).

[7] T. Nishioka, “Entanglement entropy: holography and renormalization group”, Reviews of Modern Physics **90**, 035007 (2018).

[8] S. Ryu i T. Takayanagi, “Holographic Derivation of Entanglement Entropy from AdS/CFT”, Physical Review Letters **96**, 181602 (2008).

[9] J. D. Bekenstein, “Black holes and entropy”, Physical Review D **7**, 2333 - 2346 (1973).