

Entanglement Entropy and Holography

Ferran Rodríguez Mascaró

1 Introducció

1.1 Equació d'Einstein

L'equació d'Einstein del camp en dimensió D és

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R + \Lambda g_{ab} = 8\pi G T_{ab} , \quad (1)$$

on R_{ab} és el tensor de Richi¹, g_{ab} la mètrica², R l'escalar de Richi, Λ la constant cosmològica, G la constant de Newton i T_{ab} el tensor d'energia-moment. La podem representar utilitzant el tensor d'Einstein, G_{ab} :

$$G_{ab} + \Lambda g_{ab} = 8\pi G T_{ab} . \quad (2)$$

Descriu com la forma de l'espai-temps fa que es mogui la matèria i com aquesta deforma l'espai-temps.

Veiem que és una equació de segon ordre respecte el temps i l'espai, al ser relativista, ja que $R_{ab} \sim \{\partial\Gamma, \Gamma\} \sim \{\partial^2 g, \partial g, g\}$. A l'esquerra de l'igualtat tenim una equació dinàmica per la mètrica, que ens diu com actua la gravetat segons la distribució de matèria, representada pel tensor T_{ab} .

1.2 Solucions de Buit. Solucions Maximalment Simètriques

En les solucions de l'equació d'Einstein de buit, el tensor d'energia-moment és nul. El camp gravitatori no s'acbola a res, només a si mateix.

$$G_{ab} + \Lambda g_{ab} = 0 . \quad (3)$$

Les solucions maximalment simètriques són el subconjunt de solucions de buit en les que s'admeten el

¹Els índexs llatins es defineixen com $a, b, c, \dots = 0, 1, \dots, D-1$

²Utilitzem la signatura $(-, +, +, \dots, +)$

major nombre de vectors de Killing o isometries possibles ($\frac{D(D+1)}{2}$). Aquestes tenen un tensor de Riemann simètric amb la forma

$$R_{abcd} = k(g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc}) , \quad k \sim Rf(D) . \quad (4)$$

Dins d'aquestes solucions, tindrem espai-temps amb diferents propietats segons el valor de la constant cosmològica:

- $\Lambda = 0$: Espai-temps de Minkowski.
- $\Lambda > 0$: Espai-temps de de Sitter.
- $\Lambda < 0$: Espai-temps d'anti-de Sitter.

1.3 Espai-temps d'Anti-de Sitter

En l'espai-temps d'anti-de Sitter, la constant cosmològica és negativa, i definim el tensor de Riemann agafant $k = -\frac{1}{L^2}$. Per tant, aquest tindrà una forma tal que

$$R_{abcd} = -\frac{1}{L^2}(g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc}) . \quad (5)$$

Es troba que per a que aquest tipus d'espai-temps sigui solució de l'equació d'Einstein ??, la constant cosmològica ha de valer

$$\Lambda = -\frac{(D-1)(D-2)}{2L^2} . \quad (6)$$

En les coordenades del *patch* de Pointcaré, la mètrica d'anti-de Sitter de dimensió D es defineix com

$$ds_{AdS_D}^2 = \frac{L^2}{z^2}(-dt^2 + dz^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_{D-2}^2) , \quad (7)$$

amb $z \in (0, +\infty)$ i $t, x \in (-\infty, +\infty)$, que correspon a un espai-temps de Minkowski però amb un factor $\frac{L^2}{z^2}$.

Fixant la coordenada z , tenim superfícies d'espai-temps de Minkowski amb un factor de pes $\frac{L^2}{z^2}$, determinat per z , representat en la figura ??.

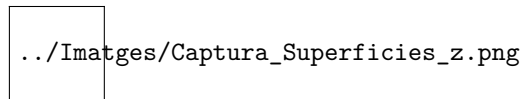


Figura 1: Representació de diferents superfícies d'espai-temps de Minkowski dins de l'espai-temps d'anti-de Sitter segons el valor de la coordenada z .

En coordenades esfèriques, la mètrica es pot expressar com

$$ds_{AdS_D}^2 = \left[- \left(1 + \frac{r^2}{L^2} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 + \frac{r^2}{L^2} \right)} + r^2 d\Omega_{D-2}^2 \right]. \quad (8)$$

La coordenada r es relaciona amb z segons $r \sim \frac{1}{z}$. Considerem que $z = \delta \ll 1$, però no nul, que llavors $ds^2 \rightarrow \infty$.