Entanglement Entropy and Holography

Ferran Rodríguez Mascaró

1 Introducció

1.1 Equació d'Einstein

L'equació d'Einstein del camp en dimensió D és

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R + \Lambda g_{ab} = 8\pi G T_{ab} \ , \tag{1}$$

on R_{ab} és el tensor de Richi[1], g_{ab} la mètrica[2], R l'escalar de Richi, Λ la constant cosmològica, G la constant de Newton i T_{ab} el tensor d'energia-moment. La podem representar utilitzant el tensor d'Einstein, G_{ab}:

$$G_{ab} + \Lambda g_{ab} = 8\pi G T_{ab} \ . \tag{2}$$

Descriu com la forma de l'espaitemps fa que es mogui la matèria i com aquesta deforma l'espaitemps.

Veiem que és una equació de segon ordre respecte el temps i l'espai, al ser relativista, ja que $R_{ab} \sim \{\partial\Gamma, \Gamma\} \sim \{\partial^2 g, \partial g, g\}$. A l'esquerra de l'igualtat tenim una equació dinàmica per la mètrica, que ens diu com actua la gravetat segons la distribució de matèria, representada pel tensor T_{ab}.

1.2 Solucions de Buit. Solucions Maximalment Simètriques

En les solucions de l'equació d'Einstein de buit, el tensor d'energia-moment és nul. El camp gravitatori no s'acbola a res, només a si mateix.

$$G_{ab} + \Lambda g_{ab} = 0 \ . \tag{3}$$

Les solucions maximalment simètrics son el subconjunt de solucions de buit en les que s'admeten el major nombre de vectors de Killing o isometries possibles ($\frac{D(D+1)}{2}$). Aquestes tenen un tensor de Riemann simètric amb la forma

$$R_{abcd} = k(g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc}) \ , \ k \sim Rf(D) \ . \tag{4}$$

Dins d'aquestes solucions, tindrem espaitemps amb diferents propietats segons el valor de la constant cosmològica:

- $\Lambda = 0$: Espaitemps de Minkowski.
- $\Lambda > 0$: Espaitemps de de Sitter.
- $\Lambda < 0$: Espaitemps d'anti-de Sitter.

1.3 Espaitemps d'Anti-de Sitter

En l'espaitemps d'anti-de Sitter, la constant cosmològica és negativa, i definim el tensor de Riemann agafant $k = -\frac{1}{L^2}$. Per tant, aquest tindrà una forma tal que

$$R_{abcd} = -\frac{1}{L^2}(g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc}) \ . \tag{5}$$

Es troba que per a que aquest tipus d'espaitemps sigui solució de l'equació d'Einstein **??**, la constant cosmològica ha de valer

$$\Lambda = -\frac{(D-1)(D-2)}{2L^2} \ . \tag{6}$$

En les coordenades del *patch* de Pointcaré, la mètrica d'anti-de Sitter de dimensió D es defineix com

$$ds^2_{AdS_D} = \frac{L^2}{z^2}(-dt^2 + dz^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + ... + dx_{D-2}^2) \ , \tag{7}$$

amb $z \in (0, +\infty)$ i $t, x \in (-\infty, +\infty)$, que correspon a un espaitemps de Minkowski però amb un factor $\frac{L^2}{z^2}$.

[1] Els índexs llatins es defineixen com $a, b, c... = 0, 1, ..., D-1$

[2] Utilitzem la signatura $(-, +, +, ..., +)$

Fixant la coordenada z, tenim superfícies d'espaitemps de Minkowski amb un factor de pes $\frac{L^2}{z^2}$, determinat per z, representat en la figura **??**.

`../Imatges/Captura_Superficies_z.png`

Figura 1: Representació de diferents superfícies d'espaitemps de Minkowski dins de l'espaitemps d'anti-de Sitter segons el valor de la coordenada z.

En coordenades esfèriques, la mètrica es pot expressar com

$$ds^2_{AdS_D} = \left[-\left(1 + \frac{r^2}{L^2}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 + \frac{r^2}{L^2}\right)} + r^2 d\Omega^2_{D-2} \right] . \tag{8}$$

La coordenada r es relaciona amb z segons $r \sim \frac{1}{z}$. Considerem que $z = \delta \ll 1$, però no nul, que llavors $ds^2 \to \infty$.