

# Onde elettromagnetiche

github.com/asdrubalini

October 4, 2021

## 1 Onda elettromagnetica

Come suggerisce il nome, un'onda elettro-magnetica è una combinazione di un'onda elettrica ed un'onda magnetica che si propaga all'interno dello spazio e che è in grado di trasportare energia da un punto di partenza ad un punto di arrivo.

## 2 Definizione del campo elettrico

Il campo elettrico si rappresenta con la lettera E e viene definito come:

$$\bar{E}^+(x, t) = E_M^+ \cdot e^{j\omega(t - \frac{x}{u})} \quad (1)$$

Con  $k$  si indica la costante di fase che è definita con seguente rapporto

$$k = \frac{\omega}{u} \quad (2)$$

quindi

$$\bar{E}^+(x, t) = E_M^+ \cdot e^{j(\omega t - kx)} \quad (3)$$

## 3 Definizione del campo magnetico

Il campo magnetico si rappresenta con la lettera H e viene definito come:

$$\bar{H}^+(x, t) = \frac{\bar{E}^+(x, t)}{Z} \quad (4)$$

dove  $Z$  è l'impedenza caratteristica misurata in ohm  $[\Omega]$

## 4 Velocità di onde elettromagnetiche

La velocità di un'onda elettromagnetica è costante e si può calcolare con

$$u = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \quad [m/s] \quad (5)$$

dove  $\mu$  è la permeabilità magnetica e  $\varepsilon$  è la permittività elettrica. Nel vuoto, la formula diventa

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = 299792458 \quad [m/s] \quad (6)$$

La permeabilità magnetica si può esprimere come il prodotto

$$\mu = \mu_0\mu_r \quad (7)$$

dove  $\mu_0$  è la permeabilità magnetica del vuoto e  $\mu_r$  è la permeabilità magnetica relativa del materiale.

Allo stesso modo, la permittività elettrica si può esprimere come il prodotto

$$\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r \quad (8)$$

dove  $\varepsilon_0$  è la permittività elettrica del vuoto e  $\varepsilon_r$  è la permittività elettrica relativa del materiale.

## 5 Impedenza caratteristica

L'impedenza caratteristica del vuoto è costante e si può calcolare con

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = c_0\mu_0 \approx 377 \quad [\Omega] \quad (9)$$

In generale, l'impedenza caratteristica di un mezzo diverso dal vuoto si calcola con

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = c\mu = Z_0 \frac{u}{c} \quad [\Omega] \quad (10)$$

$$Z = Z_0 \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} \quad [\Omega] \quad (11)$$

## 6 Lunghezza d'onda, frequenza e altre caratteristiche di un'onda

Con la lettera greca lambda si rappresenta la lunghezza d'onda che si misura in metri.

$$\lambda = uT = \frac{u}{f} \text{ [m]} \quad (12)$$

$$\lambda = \frac{\omega}{kf} \quad (13)$$

Da cui ricaviamo che la costante di fase ( $k$ ) si può calcolare, sapendo la lunghezza d'onda, con:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (14)$$

## 7 Riflessione di un'onda

### 7.1 Coefficiente di riflessione

Quando un'onda elettro-magnetica passa da un dielettrico ad un altro, una parte dell'onda procede per la sua strada trapassando il dielettrico, mentre un'altra parte viene riflessa indietro con un angolo variabile.

Il coefficiente di riflessione, misurato con la lettera  $K$ , indica la percentuale dell'onda che viene riflessa, in relazione a quella che invece trapassa il dielettrico.

Se con  $E_1^+$  indichiamo l'onda originale prima di trapassare il dielettrico e con  $E_1^-$  indichiamo l'onda riflessa, è possibile calcolare il coefficiente di riflessione con:

$$K = \frac{E_1^-(x, t)}{E_1^+(x, t)} \quad (15)$$

Nel caso in cui  $K = 1$ , possiamo dire che l'onda viene riflessa completamente. Inversamente, se  $K = 0$ , l'onda non viene riflessa neanche in minima parte.

### 7.2 Indice di rifrazione

Con rifrazione si intende la parte di onda elettro-magnetica che non viene riflessa ma riesce ad incidere il materiale passando dall'altra parte. L'angolo dell'onda rifratta rispetto alla normale varia in base alle caratteristiche dei due materiali. Ogni materiale ha un indice di rifrazione caratteristico indicato con la lettera  $n$  e definito come:

$$n = \frac{c}{u} \quad (16)$$

dove  $c$  è la velocità della luce e  $u$  è la velocità di propagazione nel materiale. L'indice di rifrazione è un valore  $n = 1$  per il vuoto ed  $n < 1$  per tutti gli altri materiali. L'indice di rifrazione, inoltre, non ha unità di misura.

### 7.3 Angolo di riflessione



La legge di Snell definisce il seguente rapporto tra angolo di incidenza, rifrazione e indici di rifrazione dei mezzi:

$$\frac{\sin(\phi_i)}{\sin(\phi_R)} = \frac{n_2}{n_1} \quad (17)$$

Se indichiamo con  $\phi_i$  l'angolo con cui l'onda incide la superficie di separazione, con  $\phi_r$  l'angolo con cui l'onda viene riflessa e con  $\phi_R$  l'angolo con cui l'onda viene rifratta, le seguenti uguaglianze sono verificate:

$$\phi_i = \phi_r \quad (18)$$

$$\phi_R = \arcsin\left(\frac{n_1 \sin(\phi_i)}{n_2}\right) \quad (19)$$

### 7.4 Angolo limite

Aumentando l'angolo di incidenza, aumenta conseguentemente anche l'angolo dell'onda rifratta. L'angolo di incidenza che consente all'onda rifratta di raggiungere i 90 gradi si definisce angolo limite. Applicando la legge di Snell, è possibile calcolare l'angolo limite con:

$$\phi_L = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) \quad (20)$$

una volta raggiunto l'angolo limite, avremo un caso di riflessione totale, ovvero l'onda non viene rifratta ma soltanto riflessa. Si tratta dello stesso principio utilizzato dalla fibra ottica per trasmettere la luce a grandi distanze.

## 8 Densità di potenza

Il campo elettromagnetico, essendo composto da una part di campo elettrico (E) ed una parte di campo magnetico (H), ha associata una potenza S che rappresenta l'energia che nell'unità di tempo attraversa una sueprficie.

$$S = \frac{1}{2} E_M H_M \quad (21)$$

Dove  $H_M = \frac{E_M}{\zeta}$ , quindi:

$$S = \frac{1}{2} \frac{E_M^2}{\zeta} \left[ \frac{W}{m^2} \right] \quad (22)$$

## 9 Linee di trasmissione

Una linea di trasmissione non è altro che una linea realizzata con due fili conduttori. Ogni linea può essere descritta con 4 costanti, chiamate costanti primarie.

- R: tiene conto della resistenza
- L: tiene conto dei campi magnetici
- G: tiene conto delle perdite
- C: tiene conto dei campi elettrici

### 9.1 Impedenza caratteristica

Con  $\bar{Z}_0$  si definisce l'impedenza caratteristica della linea, calcolabile con la seguente formula:

$$\bar{Z}_0 = \frac{\sqrt{R + j\omega L}}{\sqrt{G + j\omega C}} \quad [\Omega] \quad (23)$$

### 9.2 Costante di propagazione

$$\bar{\varphi} = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \quad (24)$$

Che può anche essere definita come la somma complessa di:

$$\bar{\varphi} = \alpha + j\beta \quad (25)$$

dove  $\alpha$  è la costante di attenuazione (che indica l'attenuazione del segnale) e  $\beta$  è la costante di fase (che indica lo sfasamento del segnale).

### 9.3 Coefficiente di riflessione

La linea si trova in regime stazionario quando ci sono sia onde progressive che onde regressive. Si definisce  $\bar{K}_L$  il coefficiente di riflessione sul carico, che indica in che percentuale l'onda viene riflessa.

$$\bar{K}_L = \frac{\bar{Z}_L - \bar{Z}_0}{\bar{Z}_L + \bar{Z}_0} \quad (26)$$

dove  $\bar{Z}_L$  è l'impedenza sul carico.

### 9.4 Indice di riflessione relativo alla distanza dal carico

$$\bar{K}(d) = \bar{K}_L \cdot e^{-j\beta d} \quad (27)$$

dove  $\beta$  si calcola con

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (28)$$

## 9.5 Impedenza relativa alla distanza dal carico

L'impedenza varia in base alla distanza a cui ci troviamo dal carico. Per calcolare l'impedenza ad una distanza nota, si usa la seguente formula:

$$\bar{Z}(d) = \bar{Z}_0 \frac{\bar{Z}_L + j\bar{Z}_0 \tan(\beta d)}{\bar{Z}_0 + j\bar{Z}_L \tan(\beta d)} \quad (29)$$

oppure

$$\bar{Z}(d) = \bar{Z}_0 \frac{1 + \bar{K}(d)}{1 - \bar{K}(d)} \quad (30)$$

## 9.6 Rapporto onda stazionaria

Il ROS è una misura del disadattamento di impedenza tra la linea di trasmissione ed il suo carico. Il suo valore minimo è 1 e corrisponde alla condizione di perfetto adattamento. I valori maggiori indicano un disadattamento dovuti ad una riflessione parziale del carico.

$$ROS = \frac{V_{max}}{V_{min}} = \frac{I_{max}}{I_{min}} = \frac{1 + |\bar{K}_L|}{1 - |\bar{K}_L|} \quad (31)$$

## 9.7 Linea ideale

Una linea ideale è una linea con perdite nulle, in cui si verificano le seguenti condizioni:

$$\alpha = 0 \quad (32)$$

$$\beta = \omega \sqrt{LC} \quad (33)$$

## 9.8 Linea adattata

Una linea adattata è una linea senza riflessioni, paragonabile ad una linea di lunghezza infinita. Nelle linee adattate si verifica che l'impedenza del carico è uguale all'impedenza caratteristica.

$$\bar{Z}_L = \bar{Z}_0 \quad (34)$$

Pertanto, il coefficiente di riflessione è zero:

$$\bar{K}_L = \frac{\bar{Z}_L - \bar{Z}_0}{\bar{Z}_L + \bar{Z}_0} = 0 \quad (35)$$

E il ROS (rapporto onda stazionaria) è 1

$$ROS = \frac{1 + |\bar{K}_L|}{1 - |\bar{K}_L|} = 1 \quad (36)$$

### 9.9 Linea in corto circuito

Una linea di trasmissione in corto circuito (ovvero senza carico, o con carico pari a zero) subisce una riflessione totale ed uno sfasamento di 180 gradi, come possiamo verificare da  $\bar{K}_L = -1$ .

$$\bar{Z}_L = 0 \quad (37)$$

$$\bar{K}_L = \frac{\bar{Z}_L - \bar{Z}_0}{\bar{Z}_L + \bar{Z}_0} = -1 \quad (38)$$

Inoltre il ROS tende ad infinito, ulteriore dimostrazione che si tratta di una riflessione totale.

### 9.10 Linea aperta

Una linea di trasmissione aperta subisce una riflessione totale ma nessun sfasamento.

$$\bar{Z}_L = \infty \quad (39)$$

$$\bar{K}_L = \frac{\bar{Z}_L - \bar{Z}_0}{\bar{Z}_L + \bar{Z}_0} = 1 \quad (40)$$

Anche in questo caso, il ROS tende ad infinito.

### 9.11 Trasformatori in quarto d'onda

Una linea si considera adattata quando  $\bar{Z}_L = \bar{Z}_0$ . Una linea adattata è ottimale perchè ha una riflessione nulla ed il trasferimento di potenza è massimo. Raramente una linea è adattata, per questo motivo si utilizza un trucco che consiste nell'aggiungere alla linea un ulteriore segmento di lunghezza pari a  $\frac{\lambda}{4}$  con un'impedenza nota. Questa impedenza, che varia in base all'impedenza della linea e del carico, si calcola con la seguente formula:

$$\bar{Z}'_0 = \sqrt{\bar{Z}_L \cdot \bar{Z}_0} \quad (41)$$

### 9.12 Trasformazione da forma cartesiana a polare

$$Z = 10 + j20 \quad (42)$$

$$|Z| = \sqrt{10^2 + 20^2} = 500 \quad (43)$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{20}{10}\right) = -2.18^\circ \quad (44)$$



### 9.13 Trasformazione da forma polare a cartesiana

$$Z = 500 \angle -2.18^\circ \quad (45)$$

$$Z = 500 \cdot \cos(-2.18^\circ) + j500 \cdot \sin(-2.18^\circ) \quad (46)$$

## 10 Esercizi comuni

### 10.1 Calcolo dell'impedenza in ingresso

L'impedenza in ingresso non è altro che l'impedenza alla distanza  $l$  dove  $l$  corrisponde alla lunghezza della linea. Avendo quindi  $Z_0$ ,  $Z_L$  e  $\lambda$  possiamo calcolare  $\bar{Z}(l)$ .

$$\bar{Z}_0 = 100 \ \Omega$$

$$\bar{Z}_L = 150 \ \Omega$$

$$l = 50 \text{ cm}$$

$$\lambda = 150 \text{ cm}$$

Prima calcoliamo  $\beta$

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = 0.0418$$

E poi con i dati che abbiamo possiamo calcolare  $\bar{Z}(50\text{cm})$

$$\bar{Z}(50\text{cm}) = \bar{Z}_0 \frac{\bar{Z}_L + j\bar{Z}_0 \cdot \tan(\beta \cdot 50\text{cm})}{\bar{Z}_0 + j\bar{Z}_L \cdot \tan(\beta \cdot 50\text{cm})} = 100 \frac{150 + j100 \tan(0.0418 \cdot 50)}{100 + j150 \tan(0.0418 \cdot 50)}$$

$$\bar{Z}(50\text{cm}) = 77.4 + j27.9$$

### 10.2 Differenza tra coefficiente di riflessione nel caso di carico puramente resistivo e non

Abbiamo una linea con un'impedenza  $\bar{Z}_0 = 50 \ \Omega$  e vogliamo vedere la Differenza del coefficiente di riflessione che abbiamo tra un carico puramente resistivo ed un carico con una componente immaginaria.

$$\bar{Z}_{L1} = 100 \ \Omega$$

$$\bar{Z}_{L2} = 50 + j70 \ \Omega$$

Nel primo caso, calcoliamo il coefficiente di riflessione con:

$$\bar{K}_{L1} = \frac{\bar{Z}_L - \bar{Z}_0}{\bar{Z}_L + \bar{Z}_0} = \frac{100 - 50}{100 + 50} = 0.3$$

Il che significa che il 33% del segnale viene riflesso, mentre nel secondo caso abbiamo un coefficiente pari a:

$$\bar{K}_{L1} = \frac{\bar{Z}_L - \bar{Z}_0}{\bar{Z}_L + \bar{Z}_0} = \frac{50 + j70 - 50}{50 + j70 + 50} = 0.57 \angle 55^\circ$$

che indica che il 55% del segnale viene riflesso ed ha uno sfasamento di 55 gradi.