

Projeto 4

Álgebra Linear e Matrizes Aleatórias

para 21 de Junho de 2025

Instruções: Justifique seu raciocínio e escreva respostas completas. Os resultados de questões anteriores podem ser usados nas questões seguintes.

Explique seu código e comente os gráficos: um gráfico sem referência no texto está “perdido”.

Questão 1. Matrizes Gaussianas. Uma matriz gaussiana tem todas as entradas A_{ij} independentes e distribuídas segundo uma normal padrão, ou seja, $A_{ij} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

a) **Distribuição das normas.** Faça um histograma da norma-2 das colunas de uma matriz gaussiana A , $m \times n$. Use vários valores de m , e comente o que você observa.

b) **Produtos internos.** Agora, fixe $m = 100$ e faça o histograma do produto interno $\langle A_i, A_j \rangle$ entre colunas de uma matriz gaussiana A . Exclua os casos $i = j$, e use $n = 100, 200, 500$ e 1000 . O que acontece? Qual parece ser a distribuição para $n \rightarrow \infty$?

c) **A distribuição do máximo.** Queremos ver quão “não ortogonal” é a matriz A . Para isto, vamos estudar o máximo de $\frac{|\langle A_i, A_j \rangle|}{\|A_i\| \|A_j\|}$ entre colunas distintas de uma matriz gaussiana A . Para isto, gere $K = 1000$ matrizes gaussianas A_k de ordem 100×300 , calcule o máximo indicado acima, e faça um histograma dos K valores obtidos.

d) **Complexidade computacional.** Qual a complexidade de calcular o máximo acima? Qual valor de K você acha que seria bom para ter uma boa estimativa do máximo esperado?

e) **A distribuição do máximo, parte 2.** Escolha valores de K correspondentes e faça histogramas e comente os resultados para os seguintes pares de (m, n) : $(100, 100)$, $(100, 300)$, $(200, 200)$, $(200, 600)$, $(500, 500)$, $(500, 1500)$, $(1000, 1000)$, $(1000, 3000)$.