Lista de Exercícios - Manipulação de Somatórios

Oficina de AEDs2 - Prof. Matheus Pereira

Instruções

Esta lista contém exercícios para praticar as regras básicas de transformação e propriedades de somatórios vistas na unidade. Resolva cada exercício justificando suas respostas com as propriedades adequadas (Distributividade, Associatividade, Comutatividade, Combinação de Conjuntos e Perturbação).

Propriedades Básicas de Somatórios

1. Distributividade

$$\sum_{i \in I} c \cdot a_i = c \cdot \sum_{i \in I} a_i$$

2. Associatividade

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i$$

3. Comutatividade

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{p(i)=1}^{n} a_{p(i)}$$

onde $p(i)$ é qualquer permutação dos índices.

4. Combinação de Conjuntos (P1)

Para quaisquer conjuntos de índices I e J:

$$\sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \in J} a_i = \sum_{i \in I \cup J} a_i + \sum_{i \in I \cap J} a_i$$

5. Perturbação (P2)

Para $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$:

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} = a_0 + \sum_{k=0}^{n} a_{k+1}$$

Fórmulas de Somatórios Notáveis

1. Soma de Constantes

$$\sum_{i=1}^{n} c = n \cdot c$$

2. Soma dos Primeiros n Números Naturais

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

3. Soma dos Quadrados dos Primeiros n Números Naturais

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

4. Soma dos Cubos dos Primeiros n Números Naturais

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

5. Soma de Progressão Aritmética

$$\sum_{k=0}^{n}(a + kd) = \frac{(n+1)(2a + nd)}{2}$$

6. Soma de Progressão Geométrica ($r \neq 1$)

$$\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

7. Soma de Produtos $k \cdot r^k$ ($r \neq 1$)

$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot r^k = \frac{r(1 - r^{n+1})}{(1 - r)^2} - \frac{(n+1)r^{n+1}}{1 - r}$$

8. Soma Telescópica

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0$$

Técnicas de Manipulação de Somatórios

1. Mudança de Índice

$$\sum_{i=a}^{b} f(i) = \sum_{j=a+c}^{b+c} f(j - c)$$

2. Separação de Termos

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

3. Fatoração de Constantes

$$\sum_{i=1}^{n} c \cdot a_i = c \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i$$

1 Distributividade e Associatividade

1. Simplifique a expressão: $\sum_{k=1}^{n} 5 \cdot k$
2. Simplifique a expressão: $\sum_{i=0}^{m} \frac{1}{2} a_i$
3. Mostre que: $\sum_{j=1}^{p} c(x_j + y_j) = c \sum_{j=1}^{p} x_j + c \sum_{j=1}^{p} y_j$
4. Escreva a constante fora do somatório: $\sum_{k=3}^{N} \pi \cdot r_k^2$
5. Simplifique: $\sum_{i=1}^{10} (3i + 2)$
6. Aplique a distributividade em: $\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{4}$
7. Mostre que $\sum_{i=1}^{m} 7(i^2 - i) = 7 \sum_{i=1}^{m} i^2 - 7 \sum_{i=1}^{m} i$
8. Simplifique: $\sum_{j=0}^{t} -3 \cdot j$
9. Escreva a constante dentro do somatório: $b \sum_{k=5}^{M} k^3$
10. Verifique se a igualdade é verdadeira: $\sum_{i=1}^{n} (c \cdot d_i) = c \cdot \sum_{i=1}^{n} d_i$
11. **Prove que para qualquer constante c e qualquer função $f(i)$, vale:**

$$\sum_{i=a}^{b} c \cdot f(i) = c \cdot \sum_{i=a}^{b} f(i)$$

12. **Mostre que a propriedade distributiva também se aplica a somatórios duplos:**

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c \cdot a_{ij} = c \cdot \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}$$

13. **Verifique se a seguinte igualdade é verdadeira, justificando:**

$$\sum_{i=1}^{n} (c_i \cdot d_i) = \left(\sum_{i=1}^{n} c_i \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} d_i \right)$$

14. **Utilize a propriedade distributiva para calcular:**

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2i}{n(n+1)} \right)$$

15. Combine os somatórios: $\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$
16. Separe o somatório: $\sum_{k=0}^{m} (x_k - y_k)$
17. Mostre que: $\sum_{j=1}^{p} (2j + 3j^2) = 2 \sum_{j=1}^{p} j + 3 \sum_{j=1}^{p} j^2$
18. Combine os somatórios: $\sum_{i=0}^{5} i^2 + \sum_{i=0}^{5} 2i$
19. Separe o somatório: $\sum_{k=1}^{N} (5 - 3k + k^3)$
20. Verifique se a igualdade é verdadeira: $\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i + c_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i + \sum_{i=1}^{n} c_i$

21. Combine: $\sum_{t=1}^{T}(t+1)+\sum_{t=1}^{T}(t-1)$
22. Separe: $\sum_{j=10}^{20}(j^2+3j-4)$
23. Mostre que: $\sum_{k=0}^{m}(c-d_k)=\sum_{k=0}^{m}c-\sum_{k=0}^{m}d_k$
24. Combine: $\sum_{i=1}^{n}i+\sum_{i=1}^{n}i^2+\sum_{i=1}^{n}i^3$
25. **Prove que:**
$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)=\sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i=1}^{n}b_i$$
26. **Mostre que a associatividade vale para três sequências:**
$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i+c_i)=\sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i=1}^{n}b_i+\sum_{i=1}^{n}c_i$$
27. **Demonstre que:**
$$\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)=\sum_{i=1}^{n}a_i-\sum_{i=1}^{n}b_i$$
28. **Calcule:**
$$\sum_{i=1}^{2n}i-\sum_{i=1}^{n}(2i)$$

2 Comutatividade

1. Reescreva o somatório invertendo a ordem dos termos: $\sum_{i=0}^{4}f(i)$
2. Mostre que $\sum_{k=1}^{n}k=\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)$
3. Escreva o somatório começando do índice máximo até o mínimo: $\sum_{j=5}^{9}g(j)$
4. Prove que: $\sum_{i=0}^{m}h(i)=\sum_{j=0}^{m}h(m-j)$
5. Reescreva $\sum_{t=2}^{8}p(t)$ de trás para frente.
6. Mostre que a soma dos elementos de um vetor é a mesma, independente da ordem de acesso.
7. Verifique se $\sum_{k=0}^{L}(2k+1)=\sum_{k=0}^{L}(2(L-k)+1)$
8. Prove que $\sum_{i=1}^{10}i^2=\sum_{j=0}^{9}(10-j)^2$
9. **Prove que a soma dos elementos de um conjunto finito não depende da ordem:**
$$\sum_{i=1}^{n}a_i=\sum_{j=1}^{n}a_{\sigma(j)}$$
10. **Mostre que:**
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}$$
11. **Utilize a comutatividade para calcular:**
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}j$$

3 Combinação de Conjuntos (Propriedade P1)

1. Combine os somatórios: $\sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i$ (assumindo $1 \leq m < n$)
2. Separe $\sum_{i=1}^{n} a_i$ em $\sum_{i=1}^{k} a_i e \sum_{i=k+1}^{n} a_i$
3. Dado $\sum_{i \in A} x_i + \sum_{i \in B} x_i$, escreva usando união e interseção de conjuntos.
4. Se $A = \{1, 3, 5\}$ e $B = \{2, 3, 4\}$, escreva $\sum_{i \in A} i + \sum_{i \in B} i$ como um único somatório junto com a interseção e calcule o resultado.
5. Combine: $\sum_{k=0}^{r} k^2 + \sum_{k=r+1}^{s} k^2$ (assumindo $0 \leq r < s$)
6. Separe $\sum_{j=0}^{T} j^3$ em dois somatórios com metade dos valores de T cada (assuma T par).
7. Combine $\sum_{t=1}^{10} t + \sum_{t=5}^{20} t$
8. Mostre que $\sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=m}^{n} a_i = (\sum_{i=1}^{n} a_i) + a_m$ (para $1 \leq m \leq n$)
9. **Prove que para quaisquer conjuntos de índices I e J:**

$$\sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \in J} a_i = \sum_{i \in I \cup J} a_i + \sum_{i \in I \cap J} a_i$$

10. **Mostre que se I e J são disjuntos, então:**

$$\sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \in J} a_i = \sum_{i \in I \cup J} a_i$$

11. **Demonstre que:**

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{k} a_i + \sum_{i=k+1}^{n} a_i$$

4 Perturbação (Propriedade P2)

1. Para $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, mostre que $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$.
2. Para $S_n = \sum_{k=0}^{n} r^k$, use o método da perturbação para encontrar a fórmula fechada (assuma $r \neq 1$).
3. Aplique a perturbação em $S_n = \sum_{k=0}^{n} k \cdot r^k$.
4. Para $S_n = \sum_{i=0}^{n} i^2$, escreva S_{n+1} de duas formas diferentes.
5. Use perturbação para encontrar a soma dos primeiros n números ímpares: $\sum_{k=0}^{n}(2k+1)$.
6. Mostre, usando perturbação, que $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$.
7. Aplique a técnica de perturbação na soma $S_n = \sum_{k=0}^{n}(a + kd)$ (Progressão Aritmética).
8. **Use o método da perturbação para encontrar a fórmula fechada de:**

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k^2$$

9. **Utilize perturbação para resolver:**

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} r^k, \quad r \neq 1$$

10. **Aplique perturbação para encontrar:**

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (2k+1) r^k, \quad r \neq 1$$

5 Exercícios Gerais / Mistos

1. Simplifique $\sum_{i=1}^{n}(4i^3 - 6i^2 + 3i - 9)$.
2. Mostre que $\sum_{j=0}^{m}(2j+1) = (m+1)^2$.
3. Encontre a fórmula fechada para $\sum_{k=1}^{n}(3k-1)$.
4. Calcule $\sum_{t=0}^{n}(t^2+t)$ usando as propriedades de somatório.
5. Verifique se $\sum_{i=5}^{10} i = \sum_{j=0}^{5}(j+5)$.
6. Para qual valor de c a igualdade $\sum_{i=1}^{n} c = n \cdot c$ é verdadeira?
7. Mostre que $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$.
8. Use as propriedades para calcular $\sum_{i=1}^{100}(2i+5)$.
9. Encontre o erro na passagem: $\sum_{i=1}^{n}(i+1)^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} 1 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + n$.
10. **Calcule:**

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} (i+j)$$

11. **Prove que:**

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (i-j)^2 = \frac{n^2(n^2-1)}{6}$$

Exercícios de Indução Matemática

1. Prove por indução matemática que a fórmula para a soma dos primeiros n números naturais é verdadeira:
$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

2. Prove por indução matemática que a fórmula para a soma dos quadrados dos primeiros n números naturais é válida:
$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

3. Prove por indução matemática que a fórmula para a soma dos cubos dos primeiros n números naturais é correta:
$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

4. Prove por indução matemática que a seguinte fórmula é verdadeira para todo $n \geq 0$:
$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$$

5. Prove por indução matemática que a seguinte identidade é válida para todo $n \geq 1$:
$$\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2$$

6. Prove por indução matemática que a seguinte fórmula é verdadeira para todo $n \geq 0$:
$$\sum_{i=0}^{n} i \cdot 2^i = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$$

7. Prove por indução matemática que a seguinte fórmula é verdadeira para todo $n \geq 0$:
$$\sum_{i=0}^{n} (3i+1) = \frac{(n+1)(3n+2)}{2}$$

8. Prove por indução matemática que a seguinte identidade é válida para todo $n \geq 1$:
$$\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Exercícios de Análise de Complexidade de Algoritmos

1. **Análise do Algoritmo de Seleção**
   Analise o seguinte algoritmo de ordenação por seleção e determine sua complexidade assintótica em termos do número de comparações:

```
    void selectionSort(int[] arr) {
        int n = arr.length;
        for (int i = 0; i < n-1; i++) {
            int minIndex = i;
            for (int j = i+1; j < n; j++) {
                if (arr[j] < arr[minIndex]) {
                    minIndex = j;
                }
            }
            int temp = arr[minIndex];
            arr[minIndex] = arr[i];
            arr[i] = temp;
        }
    }
```

2. **Análise de Algoritmo com Loop Duplo**
   Analise o seguinte algoritmo e determine sua complexidade assintótica:

```
    void complexAlgorithm(int n) {
        int count = 0;
        for (int i = 1; i <= n; i *= 2) {
            for (int j = 1; j <= i; j++) {
                count++;
            }
        }
    }
```

3. **Análise de Algoritmo com Três Loops Aninhados**
   Analise o seguinte algoritmo e determine sua complexidade assintótica:

```
    void tripleLoop(int n) {
        int count = 0;
        for (int i = 1; i <= n; i++) {
            for (int j = 1; j <= i; j++) {
                for (int k = 1; k <= j; k++) {
                    count++;
                }
            }
        }
    }
```

4. **Análise de Algoritmo com Loop Externo Logarítmico**
   Analise o seguinte algoritmo e determine sua complexidade assintótica:

```
    void logAlgorithm(int n) {
        int count = 0;
        for (int i = n; i > 0; i /= 2) {
            for (int j = 1; j <= n; j++) {
                count++;
            }
        }
```

```
    }

```

5. **Análise de Algoritmo com Loop Dependente de Valor Externo**
   Analise o seguinte algoritmo e determine sua complexidade assintótica:

```
    void complexDependentLoop(int n) {
        int count = 0;
        for (int i = 1; i <= n; i++) {
            for (int j = 1; j <= i*i; j++) {
                if (j % i == 0) {
                    for (int k = 1; k <= j; k++) {
                        count++;
                    }
                }
            }
        }
    }

```