Probabilidade e estatística - Aula 11

Continuação sobre os modelos contínuos - Distribuição normal

Dr. Giannini Italino Alves Vieira

Universidade Federal do Ceará - Campus de Crateús

2024

1. Distribuição Normal

Distribuição normal

- A distribuição normal é, sem dúvidas, o mais importante dos modelos contínuos. Tal modelo pode ser aplicado tanto em problemas práticos com teóricos.
- Algumas das aplicações praticas desse modelo incluem, por exemplo:
  - ruído térmico em resistores e em outros sistemas físicos que possuem um componente dissipativo.
  - quantidades envolvendo medidas populacionais tais como peso, altura, dosagem de substâncias no sangue, entre outras.

Distribuição normal

- A distribuição normal é, sem dúvidas, o mais importante dos modelos contínuos. Tal modelo pode ser aplicado tanto em problemas práticos com teóricos.
- Algumas das aplicações praticas desse modelo incluem, por exemplo:
  - ruído térmico em resistores e em outros sistemas físicos que possuem um componente dissipativo.
  - quantidades envolvendo medidas populacionais tais como peso, altura, dosagem de substâncias no sangue, entre outras.

Distribuição normal

- A distribuição normal é, sem dúvidas, o mais importante dos modelos contínuos. Tal modelo pode ser aplicado tanto em problemas práticos com teóricos.
- Algumas das aplicações praticas desse modelo incluem, por exemplo:
  - ruído térmico em resistores e em outros sistemas físicos que possuem um componente dissipativo.
  - quantidades envolvendo medidas populacionais tais como peso, altura, dosagem de substâncias no sangue, entre outras.

Distribuição normal

- A distribuição normal é, sem dúvidas, o mais importante dos modelos contínuos. Tal modelo pode ser aplicado tanto em problemas práticos com teóricos.
- Algumas das aplicações praticas desse modelo incluem, por exemplo:
  - ruído térmico em resistores e em outros sistemas físicos que possuem um componente dissipativo.
  - quantidades envolvendo medidas populacionais tais como peso, altura, dosagem de substâncias no sangue, entre outras.

Distribuição normal

- Uma outra grande importância dessa distribuição se deve ao teorema central do limite, que veremos mais na frente.
  - Intuitivamente, toda vez que um experimento aleatório for replicado, então a variável aleatória que for igual ao número médio das réplicas tenderá a uma normal, a medida que o número de replicas aumenta.
  - Por exemplo, suponha que um engenheiro está fazendo um estudo sobre a média das medidas de força de remoção de vários conectores. Se admitirmos que cada medida seja proveniente de uma réplica de um experimento, a distribuição normal poderá ser usada para tirar conclusões aproximadas em torno da média das medidas de força de remoção dos conectores.

Distribuição normal

- Uma outra grande importância dessa distribuição se deve ao teorema central do limite, que veremos mais na frente.
  - Intuitivamente, toda vez que um experimento aleatório for replicado, então a variável aleatória que for igual ao número médio das réplicas tenderá a uma normal, a medida que o número de replicas aumenta.
  - Por exemplo, suponha que um engenheiro está fazendo um estudo sobre a média das medidas de força de remoção de vários conectores. Se admitirmos que cada medida seja proveniente de uma réplica de um experimento, a distribuição normal poderá ser usada para tirar conclusões aproximadas em torno da média das medidas de força de remoção dos conectores.

Distribuição normal

- Uma outra grande importância dessa distribuição se deve ao teorema central do limite, que veremos mais na frente.
    - Intuitivamente, toda vez que um experimento aleatório for replicado, então a variável aleatória que for igual ao número médio das réplicas tenderá a uma normal, a medida que o número de replicas aumenta.
    - Por exemplo, suponha que um engenheiro está fazendo um estudo sobre a média das medidas de força de remoção de vários conectores. Se admitirmos que cada medida seja proveniente de uma réplica de um experimento, a distribuição normal poderá ser usada para tirar conclusões aproximadas em torno da média das medidas de força de remoção dos conectores.

Distribuição normal

Formalmente, a distribuição normal é definida da seguinte maneira.

Distribuição normal

Uma variável aleatória X é dita ter distribuição normal de parâmetros, μ e σ, em que $-\infty < \mu < \infty$ e $\sigma > 0$, se sua função densidade de probabilidade for dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty < x < \infty \tag{1}$$

- É possível mostrar que se X tem distribuição normal de parâmetros μ e σ, então $E(X) = \mu$ e $Var(X) = \sigma^2$.
- Usamos a notação $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ para denotar a distribuição de uma normal de média μ e variância σ^2.
- A figura abaixo ilustra a forma da função de densidade de uma distribuição normal para diferentes valores de μ e σ.

Distribuição normal

Formalmente, a distribuição normal é definida da seguinte maneira.

Distribuição normal

Uma variável aleatória X é dita ter distribuição normal de parâmetros, μ e σ, em que $-\infty < \mu < \infty$ e $\sigma > 0$, se sua função densidade de probabilidade for dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty < x < \infty \tag{1}$$

- É possível mostrar que se X tem distribuição normal de parâmetros μ e σ, então $E(X) = \mu$ e $Var(X) = \sigma^2$.
- Usamos a notação $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ para denotar a distribuição de uma normal de média μ e variância σ^2.
- A figura abaixo ilustra a forma da função de densidade de uma distribuição normal para diferentes valores de μ e σ.

Formalmente, a distribuição normal é definida da seguinte maneira.

Distribuição normal

Uma variável aleatória X é dita ter distribuição normal de parâmetros, μ e σ, em que $-\infty < \mu < \infty$ e $\sigma > 0$, se sua função densidade de probabilidade for dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty < x < \infty \tag{1}$$

- É possível mostrar que se X tem distribuição normal de parâmetros μ e σ, então $E(X) = \mu$ e $Var(X) = \sigma^2$.
- Usamos a notação $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ para denotar a distribuição de uma normal de média μ e variância σ^2.
- A figura abaixo ilustra a forma da função de densidade de uma distribuição normal para diferentes valores de μ e σ.

Distribuição normal

Formalmente, a distribuição normal é definida da seguinte maneira.

Distribuição normal

Uma variável aleatória X é dita ter distribuição normal de parâmetros, μ e σ, em que $-\infty < \mu < \infty$ e $\sigma > 0$, se sua função densidade de probabilidade for dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty < x < \infty \tag{1}$$

- É possível mostrar que se X tem distribuição normal de parâmetros μ e σ, então $E(X) = \mu$ e $Var(X) = \sigma^2$.
- Usamos a notação $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ para denotar a distribuição de uma normal de média μ e variância σ^2.
- A figura abaixo ilustra a forma da função de densidade de uma distribuição normal para diferentes valores de μ e σ.

Distribuição normal

Formalmente, a distribuição normal é definida da seguinte maneira.

Distribuição normal

Uma variável aleatória X é dita ter distribuição normal de parâmetros, μ e σ, em que $-\infty < \mu < \infty$ e $\sigma > 0$, se sua função densidade de probabilidade for dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty < x < \infty \tag{1}$$

- É possível mostrar que se X tem distribuição normal de parâmetros μ e σ, então $E(X) = \mu$ e $Var(X) = \sigma^2$.
- Usamos a notação $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ para denotar a distribuição de uma normal de média μ e variância σ^2.
- A figura abaixo ilustra a forma da função de densidade de uma distribuição normal para diferentes valores de μ e σ.

Distribuição normal

Formalmente, a distribuição normal é definida da seguinte maneira.

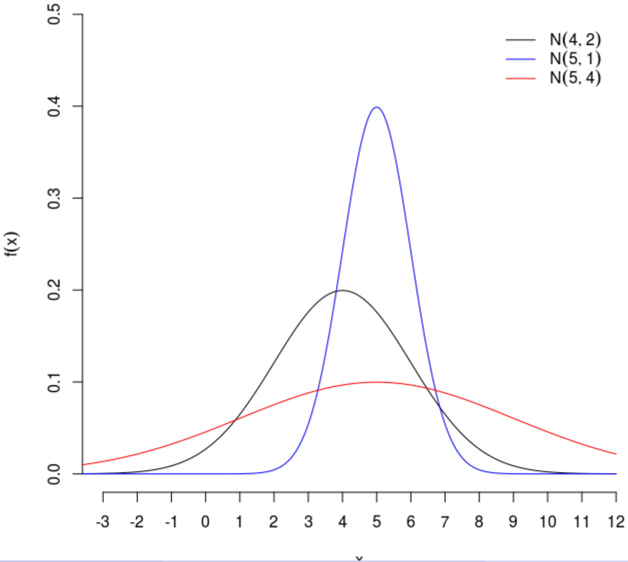
Distribuição normal

Uma variável aleatória X é dita ter distribuição normal de parâmetros, μ e σ, em que $-\infty < \mu < \infty$ e $\sigma > 0$, se sua função densidade de probabilidade for dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad -\infty < x < \infty \tag{1}$$

- É possível mostrar que se X tem distribuição normal de parâmetros μ e σ, então $E(X) = \mu$ e $Var(X) = \sigma^2$.
- Usamos a notação $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ para denotar a distribuição de uma normal de média μ e variância σ^2.
- A figura abaixo ilustra a forma da função de densidade de uma distribuição normal para diferentes valores de μ e σ.

Densidade de uma normal para diferentes valores de μ e σ



Propriedades da distribuição normal

Se X é variável aleatória $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, então ela possui algumas propriedade, como por exemplo:

- Sua densidade, isto é $f(x)$, é simétrica em relação à média μ;
- Quando $x \to -\infty$ ou $x \to \infty$, então $f(x) \to 0$;
- $f(x)$ atinge seu máximo em $x = \mu$;
- Os pontos $\mu - \sigma$ e $\mu + \sigma$ são os pontos de inflexão do gráfico de f. Intuitivamente, se σ for grande, o gráfico de f tende a ser "achatado", enquanto que se σ for pequeno então o gráfico de f tende a ser bastante "pontiagudo".

Propriedades da distribuição normal

Se X é variável aleatória $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, então ela possui algumas propriedade, como por exemplo:

- Sua densidade, isto é $f(x)$, é simétrica em relação à média μ;
- Quando $x \to -\infty$ ou $x \to \infty$, então $f(x) \to 0$;
- $f(x)$ atinge seu máximo em $x = \mu$;
- Os pontos $\mu - \sigma$ e $\mu + \sigma$ são os pontos de inflexão do gráfico de f. Intuitivamente, se σ for grande, o gráfico de f tende a ser "achatado", enquanto que se σ for pequeno então o gráfico de f tende a ser bastante "pontiagudo".

Propriedades da distribuição normal

Se X é variável aleatória $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, então ela possui algumas propriedade, como por exemplo:

- Sua densidade, isto é $f(x)$, é simétrica em relação à média μ;
- Quando $x \to -\infty$ ou $x \to \infty$, então $f(x) \to 0$;
- $f(x)$ atinge seu máximo em $x = \mu$;
- Os pontos $\mu - \sigma$ e $\mu + \sigma$ são os pontos de inflexão do gráfico de f. Intuitivamente, se σ for grande, o gráfico de f tende a ser "achatado", enquanto que se σ for pequeno então o gráfico de f tende a ser bastante "pontiagudo".

Propriedades da distribuição normal

Se X é variável aleatória $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, então ela possui algumas propriedade, como por exemplo:

- Sua densidade, isto é $f(x)$, é simétrica em relação à média μ;
- Quando $x \to -\infty$ ou $x \to \infty$, então $f(x) \to 0$;
- $f(x)$ atinge seu máximo em $x = \mu$;
- Os pontos $\mu - \sigma$ e $\mu + \sigma$ são os pontos de inflexão do gráfico de f. Intuitivamente, se σ for grande, o gráfico de f tende a ser "achatado", enquanto que se σ for pequeno então o gráfico de f tende a ser bastante "pontiagudo".

Propriedades da distribuição normal

Se X é variável aleatória $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, então ela possui algumas propriedade, como por exemplo:

- Sua densidade, isto é $f(x)$, é simétrica em relação à média μ;
- Quando $x \to -\infty$ ou $x \to \infty$, então $f(x) \to 0$;
- $f(x)$ atinge seu máximo em $x = \mu$;
- Os pontos $\mu - \sigma$ e $\mu + \sigma$ são os pontos de inflexão do gráfico de f. Intuitivamente, se σ for grande, o gráfico de f tende a ser "achatado", enquanto que se σ for pequeno então o gráfico de f tende a ser bastante "pontiagudo".

Propriedades da distribuição normal

Se X é variável aleatória $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, então ela possui algumas propriedade, como por exemplo:

- Sua densidade, isto é $f(x)$, é simétrica em relação à média μ;
- Quando $x \to -\infty$ ou $x \to \infty$, então $f(x) \to 0$;
- $f(x)$ atinge seu máximo em $x = \mu$;
- Os pontos $\mu - \sigma$ e $\mu + \sigma$ são os pontos de inflexão do gráfico de f. Intuitivamente, se σ for grande, o gráfico de f tende a ser "achatado", enquanto que se σ for pequeno então o gráfico de f tende a ser bastante "pontiagudo".

Exemplo

Considere o exemplo a seguir

Exemplo: Suponha que as medidas da corrente elétrica em uma parte de um fio seguem a distribuição normal com média de 10 miliamperes e uma variância de 4 (miliamperes)^2. Considere que queremos obter a probabilidade da medida da corrente exceder 13 miliamperes.

- Ou seja, se X é a variável aleatória que representa a corrente elétrica no fio, então o exercício estabelece que X é uma $N(10, 4)$
- O que queremos calcular é $P(X > 13)$.

Infelizmente não há uma expressão exata para a integral de uma função densidade de uma normal.

Essas probabilidade são, geralmente, obtidas numericamente ou por meio de uma tabela que veremos mais na frente.

Exemplo

Considere o exemplo a seguir

Exemplo: Suponha que as medidas da corrente elétrica em uma parte de um fio seguem a distribuição normal com média de 10 miliamperes e uma variância de 4 $(\text{miliamperes})^2$. Considere que queremos obter a probabilidade da medida da corrente exceder 13 miliamperes.

- Ou seja, se X é a variável aleatória que representa a corrente elétrica no fio, então o exercício estabelece que X é uma $N(10, 4)$
- O que queremos calcular é $P(X > 13)$.

Infelizmente não há uma expressão exata para a integral de uma função densidade de uma normal.

Essas probabilidade são, geralmente, obtidas numericamente ou por meio de uma tabela que veremos mais na frente.

Exemplo

Considere o exemplo a seguir

Exemplo: Suponha que as medidas da corrente elétrica em uma parte de um fio seguem a distribuição normal com média de 10 miliamperes e uma variância de 4 $(\text{miliamperes})^2$. Considere que queremos obter a probabilidade da medida da corrente exceder 13 miliamperes.

- Ou seja, se X é a variável aleatória que representa a corrente elétrica no fio, então o exercício estabelece que X é uma $N(10, 4)$
- O que queremos calcular é $P(X > 13)$.

Infelizmente não há uma expressão exata para a integral de uma função densidade de uma normal.

Essas probabilidade são, geralmente, obtidas numericamente ou por meio de uma tabela que veremos mais na frente.

Considere o exemplo a seguir

Exemplo: Suponha que as medidas da corrente elétrica em uma parte de um fio seguem a distribuição normal com média de 10 miliamperes e uma variância de 4 $(\text{miliamperes})^2$. Considere que queremos obter a probabilidade da medida da corrente exceder 13 miliamperes.

- Ou seja, se X é a variável aleatória que representa a corrente elétrica no fio, então o exercício estabelece que X é uma $N(10, 4)$
- O que queremos calcular é $P(X > 13)$.

Infelizmente não há uma expressão exata para a integral de uma função densidade de uma normal.

Essas probabilidade são, geralmente, obtidas numericamente ou por meio de uma tabela que veremos mais na frente.

Exemplo

Considere o exemplo a seguir

Exemplo: Suponha que as medidas da corrente elétrica em uma parte de um fio seguem a distribuição normal com média de 10 miliamperes e uma variância de 4 $(\text{miliamperes})^2$. Considere que queremos obter a probabilidade da medida da corrente exceder 13 miliamperes.

- Ou seja, se X é a variável aleatória que representa a corrente elétrica no fio, então o exercício estabelece que X é uma $N(10, 4)$
- O que queremos calcular é $P(X > 13)$.

Infelizmente não há uma expressão exata para a integral de uma função densidade de uma normal.

Essas probabilidade são, geralmente, obtidas numericamente ou por meio de uma tabela que veremos mais na frente.

Variável aleatória normal padrão

Ao trabalharmos com distribuições normais, uma particular normal será de interesse.

Normal padrão

Uma variável aleatória normal com

$$\mu = 0 \ \text{ e } \ \sigma^2 = 1 \ \ \text{(ou sejá, média zero e variância 1)}$$

é chamada de normal padrão e é denotada por Z.

- Se Z é uma normal padrão, então probabilidades do tipo $P(Z \leq z)$ estão computadas em uma tabela. Veremos que a partir dessa tabela podemos também calcular probabilidades para variáveis normais arbitrárias, usando o fato de distribuições normais estarem algebricamente relacionadas.
- A função de distribuição acumulada de uma normal padrão é denotada por $\Phi(z)$, ou seja $\Phi(z) = P(Z \leq z)$.

Variável aleatória normal padrão

Ao trabalharmos com distribuições normais, uma particular normal será de interesse.

Normal padrão

Uma variável aleatória normal com

$$\mu = 0 \ \text{ e } \ \sigma^2 = 1 \ \text{ (ou sejá, média zero e variância 1)}$$

é chamada de normal padrão e é denotada por Z.

- Se Z é uma normal padrão, então probabilidades do tipo $P(Z \leq z)$ estão computadas em uma tabela. Veremos que a partir dessa tabela podemos também calcular probabilidades para variáveis normais arbitrárias, usando o fato de distribuições normais estarem algebricamente relacionadas.
- A função de distribuição acumulada de uma normal padrão é denotada por $\Phi(z)$, ou seja $\Phi(z) = P(Z \leq z)$.

Variável aleatória normal padrão

Ao trabalharmos com distribuições normais, uma particular normal será de interesse.

Normal padrão

Uma variável aleatória normal com

$$\mu = 0 \;\text{ e }\; \sigma^2 = 1 \;\; \text{(ou sejá, média zero e variância 1)}$$

é chamada de normal padrão e é denotada por Z.

- Se Z é uma normal padrão, então probabilidades do tipo $P(Z \leq z)$ estão computadas em uma tabela. Veremos que a partir dessa tabela podemos também calcular probabilidades para variáveis normais arbitrárias, usando o fato de distribuições normais estarem algebricamente relacionadas.
- A função de distribuição acumulada de uma normal padrão é denotada por $\Phi(z)$, ou seja $\Phi(z) = P(Z \leq z)$.

Variável aleatória normal padrão

Ao trabalharmos com distribuições normais, uma particular normal será de interesse.

Normal padrão

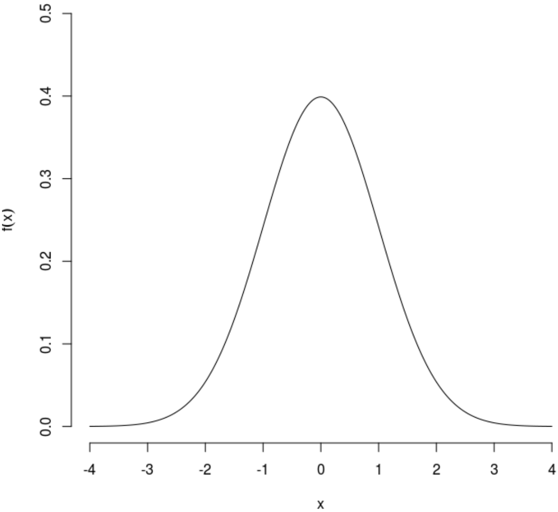
Uma variável aleatória normal com

$$\mu = 0 \;\text{ e }\; \sigma^2 = 1 \;\; \text{(ou sejá, média zero e variância 1)}$$

é chamada de normal padrão e é denotada por Z.

- Se Z é uma normal padrão, então probabilidades do tipo $P(Z \leq z)$ estão computadas em uma tabela. Veremos que a partir dessa tabela podemos também calcular probabilidades para variáveis normais arbitrárias, usando o fato de distribuições normais estarem algebricamente relacionadas.
- A função de distribuição acumulada de uma normal padrão é denotada por $\Phi(z)$, ou seja $\Phi(z) = P(Z \leq z)$.

Densidade de uma normal padrão



Exemplo

Para entender como usar a tabela da normal padrão, considere que Z é $\mathrm{N}(0,1)$ (uma normal padrão) e queremos calcular, por exemplo, as probabilidades:

(a) $P(Z > 1.5)$

(b) $P(Z < 1.96)$

- Sol.:(a) Temos que a tabela nos fornece probabilidades do tipo $P(Z \leq z)$. Logo,

$$P(Z > 1.5) = 1 - P(Z \leq 1.5) = 1 - 0.9332 = 0.0668.$$

- Sol.:(b) Temos que, pela tabela da norma padrão,

$$P(Z < 1.96) = 0.9750.$$

Entendendo a tabela da normal padrão

Exemplo

Para entender como usar a tabela da normal padrão, considere que Z é $\mathrm{N}(0,1)$ (uma normal padrão) e queremos calcular, por exemplo, as probabilidades:

(a) $P(Z > 1.5)$

(b) $P(Z < 1.96)$

- Sol.:(a) Temos que a tabela nos fornece probabilidades do tipo $P(Z \leq z)$. Logo,

$$P(Z > 1.5) = 1 - P(Z \leq 1.5) = 1 - 0.9332 = 0.0668.$$

- Sol.:(b) Temos que, pela tabela da norma padrão,

$$P(Z < 1.96) = 0.9750.$$

Entendendo a tabela da normal padrão

Exemplo

Para entender como usar a tabela da normal padrão, considere que Z é $N(0, 1)$ (uma normal padrão) e queremos calcular, por exemplo, as probabilidades:

(a) $P(Z > 1.5)$

(b) $P(Z < 1.96)$

- Sol.:(a) Temos que a tabela nos fornece probabilidades do tipo $P(Z \leq z)$. Logo,

$$P(Z > 1.5) = 1 - P(Z \leq 1.5) = 1 - 0.9332 = 0.0668.$$

- Sol.:(b) Temos que, pela tabela da norma padrão,

$$P(Z < 1.96) = 0.9750.$$

Entendendo a tabela da normal padrão

Exemplo

Para entender como usar a tabela da normal padrão, considere que Z é $\mathrm{N}(0,1)$ (uma normal padrão) e queremos calcular, por exemplo, as probabilidades:

(a) $P(Z > 1.5)$

(b) $P(Z < 1.96)$

- Sol.:(a) Temos que a tabela nos fornece probabilidades do tipo $P(Z \leq z)$. Logo,

$$P(Z > 1.5) = 1 - P(Z \leq 1.5) = 1 - 0.9332 = 0.0668.$$

- Sol.:(b) Temos que, pela tabela da norma padrão,

$$P(Z < 1.96) = 0.9750.$$

Entendendo a tabela da normal padrão

Exemplo

Para entender como usar a tabela da normal padrão, considere que Z é $\mathrm{N}(0,1)$ (uma normal padrão) e queremos calcular, por exemplo, as probabilidades:

(a) $P(Z > 1.5)$

(b) $P(Z < 1.96)$

- Sol.:(a) Temos que a tabela nos fornece probabilidades do tipo $P(Z \leq z)$. Logo,

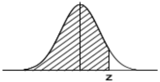
$$P(Z > 1.5) = 1 - P(Z \leq 1.5) = 1 - 0.9332 = 0.0668.$$

- Sol.:(b) Temos que, pela tabela da norma padrão,

$$P(Z < 1.96) = 0.9750.$$

Tabela da normal padrão

$$\Phi(z) = P(Z < z)$$



z	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993

Padronizando uma variável aleatória normal

Se X é uma variável aleatória normal com média μ e variância σ^2, a variável

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

é uma variável normal com $E(X) = 0$ e $Var(X) = 1$, ou seja, Z é uma normal padrão.

Note que a partir desse resultado, podemos calcular probabilidades de normais arbitrárias por meio da distribuição normal padrão, uma vez que, se X é $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ então

$$P(X \leq x) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right) = P(Z \leq z),$$

em que Z é uma normal padrão (pelo que vimos acima) e $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$.

Padronizando uma variável aleatória normal

Se X é uma variável aleatória normal com média μ e variância σ^2, a variável

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

é uma variável normal com $E(X) = 0$ e $Var(X) = 1$, ou seja, Z é uma normal padrão.

Note que a partir desse resultado, podemos calcular probabilidades de normais arbitrárias por meio da distribuição normal padrão, uma vez que, se X é $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ então

$$P(X \leq x) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right) = P(Z \leq z),$$

em que Z é uma normal padrão (pelo que vimos acima) e $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$.

Padronizando uma variável aleatória normal

Se X é uma variável aleatória normal com média μ e variância σ^2, a variável

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

é uma variável normal com $E(X) = 0$ e $Var(X) = 1$, ou seja, Z é uma normal padrão.

Note que a partir desse resultado, podemos calcular probabilidades de normais arbitrárias por meio da distribuição normal padrão, uma vez que, se X é $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ então

$$P(X \leq x) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right) = P(Z \leq z),$$

em que Z é uma normal padrão (pelo que vimos acima) e $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$.

Padronizando uma variável aleatória normal

Se X é uma variável aleatória normal com média μ e variância σ^2, a variável

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

é uma variável normal com $E(X) = 0$ e $Var(X) = 1$, ou seja, Z é uma normal padrão.

Note que a partir desse resultado, podemos calcular probabilidades de normais arbitrárias por meio da distribuição normal padrão, uma vez que, se X é $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ então

$$P(X \leq x) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right) = P(Z \leq z),$$

em que Z é uma normal padrão (pelo que vimos acima) e $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$.

Padronizando uma variável aleatória normal

Se X é uma variável aleatória normal com média μ e variância σ^2, a variável

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

é uma variável normal com $E(X) = 0$ e $Var(X) = 1$, ou seja, Z é uma normal padrão.

Note que a partir desse resultado, podemos calcular probabilidades de normais arbitrárias por meio da distribuição normal padrão, uma vez que, se X é $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ então

$$P(X \leq x) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right) = P(Z \leq z),$$

em que Z é uma normal padrão (pelo que vimos acima) e $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$.

Padronizando uma variável aleatória normal

Se X é uma variável aleatória normal com média μ e variância σ^2, a variável

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

é uma variável normal com $E(X) = 0$ e $Var(X) = 1$, ou seja, Z é uma normal padrão.

Note que a partir desse resultado, podemos calcular probabilidades de normais arbitrárias por meio da distribuição normal padrão, uma vez que, se X é $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ então

$$P(X \leq x) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right) = P(Z \leq z),$$

em que Z é uma normal padrão (pelo que vimos acima) e $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$.

Exemplo

Por exemplo, se voltarmos ao primeiro exemplo dessa aula, o que queremos calcular é $P(X > 13)$. Então, podemos usar a ideia da padronização para obter essa probabilidade a partir de uma normal padrão. Ou seja,

- O que queremos calcular é $P(X > 13)$. Note que

$$P(X > 13) = P\left(\frac{X - 10}{2} > \frac{13 - 10}{2}\right) = P(Z > 1.5)$$

Logo, vimos que $P(X > 1.5) = 0.0668$. Portanto, $P(X > 13) = 0.0668$.

Exemplo

Por exemplo, se voltarmos ao primeiro exemplo dessa aula, o que queremos calcular é $P(X > 13)$. Então, podemos usar a ideia da padronização para obter essa probabilidade a partir de uma normal padrão. Ou seja,

- O que queremos calcular é $P(X > 13)$. Note que

$$P(X > 13) = P\left(\frac{X - 10}{2} > \frac{13 - 10}{2}\right) = P(Z > 1.5)$$

Logo, vimos que $P(X > 1.5) = 0.0668$. Portanto, $P(X > 13) = 0.0668$.

Exemplo

Por exemplo, se voltarmos ao primeiro exemplo dessa aula, o que queremos calcular é $P(X > 13)$. Então, podemos usar a ideia da padronização para obter essa probabilidade a partir de uma normal padrão. Ou seja,

- O que queremos calcular é $P(X > 13)$. Note que

$$P(X > 13) = P\left(\frac{X - 10}{2} > \frac{13 - 10}{2}\right) = P(Z > 1.5)$$

Logo, vimos que $P(X > 1.5) = 0.0668$. Portanto, $P(X > 13) = 0.0668$.

Exemplo

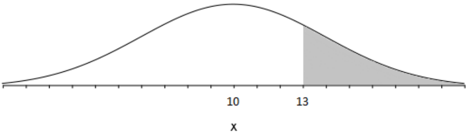
Por exemplo, se voltarmos ao primeiro exemplo dessa aula, o que queremos calcular é $P(X > 13)$. Então, podemos usar a ideia da padronização para obter essa probabilidade a partir de uma normal padrão. Ou seja,

- O que queremos calcular é $P(X > 13)$. Note que

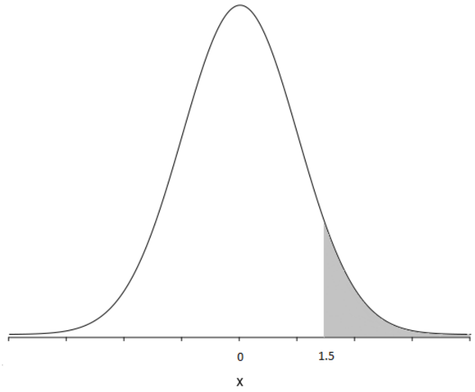
$$P(X > 13) = P\left(\frac{X - 10}{2} > \frac{13 - 10}{2}\right) = P(Z > 1.5)$$

Logo, vimos que $P(X > 1.5) = 0.0668$. Portanto, $P(X > 13) = 0.0668$.

$P(X > 13)$, X é uma N$(10, 4)$



$P(Z > 1.5)$, Z é uma $\mathrm{N}(0,1)$



Exemplo

Exemplo: A resistência à compressão de amostras de cimento pode ser modelada por uma distribuição normal com uma média de 6000 kg/cm^2 e um desvio padrão de 100 kg/cm^2.

(a) Qual a probabilidade de a resistência da amostra ser menor do que 6250 kg/cm^2.

(b) Qual a probabilidade de a resistência da amostra estar entre 5800 e 5900 kg/cm^2.

- Sol. (a): Se X é a variável aleatória que representa a resistência à compressão de amostras de cimento, então o exercício estabelece que X é uma $N(6000, 100^2)$. O que queremos calcular é $P(X < 6250)$. Note que

$$P(X < 6250) = P\left(\frac{X - 6000}{100} < \frac{6250 - 6000}{100}\right) = P(Z < 2.5)$$

em que Z é uma N(0, 1). Pela tabela da normal padrão temos que $P(Z \leq 2.5) = 0.9938$. Logo,

$$P(X < 6250) = 0.9938.$$

Exemplo

Exemplo: A resistência à compressão de amostras de cimento pode ser modelada por uma distribuição normal com uma média de 6000 kg/cm^2 e um desvio padrão de 100 kg/cm^2.

(a) Qual a probabilidade de a resistência da amostra ser menor do que 6250 kg/cm^2.

(b) Qual a probabilidade de a resistência da amostra estar entre 5800 e 5900 kg/cm^2.

- Sol. (a): Se X é a variável aleatória que representa a resistência à compressão de amostras de cimento, então o exercício estabelece que X é uma $N(6000, 100^2)$. O que queremos calcular é $P(X < 6250)$. Note que

$$P(X < 6250) = P\left(\frac{X - 6000}{100} < \frac{6250 - 6000}{100}\right) = P(Z < 2.5)$$

em que Z é uma N(0,1). Pela tabela da normal padrão temos que $P(Z \leq 2.5) = 0.9938$. Logo,

$$P(X < 6250) = 0.9938.$$

Exemplo

Exemplo: A resistência à compressão de amostras de cimento pode ser modelada por uma distribuição normal com uma média de 6000 kg/cm^2 e um desvio padrão de 100 kg/cm^2.

(a) Qual a probabilidade de a resistência da amostra ser menor do que 6250 kg/cm^2.

(b) Qual a probabilidade de a resistência da amostra estar entre 5800 e 5900 kg/cm^2.

- Sol. (a): Se X é a variável aleatória que representa a resistência à compressão de amostras de cimento, então o exercício estabelece que X é uma $N(6000, 100^2)$. O que queremos calcular é $P(X < 6250)$. Note que

$$P(X < 6250) = P\left(\frac{X - 6000}{100} < \frac{6250 - 6000}{100}\right) = P(Z < 2.5)$$

em que Z é uma N(0,1). Pela tabela da normal padrão temos que $P(Z \leq 2.5) = 0.9938$. Logo,

$$P(X < 6250) = 0.9938.$$

Exemplo

Exemplo: A resistência à compressão de amostras de cimento pode ser modelada por uma distribuição normal com uma média de 6000 kg/cm^2 e um desvio padrão de 100 kg/cm^2.

(a) Qual a probabilidade de a resistência da amostra ser menor do que 6250 kg/cm^2.

(b) Qual a probabilidade de a resistência da amostra estar entre 5800 e 5900 kg/cm^2.

- Sol. (a): Se X é a variável aleatória que representa a resistência à compressão de amostras de cimento, então o exercício estabelece que X é uma $N(6000, 100^2)$. O que queremos calcular é $P(X < 6250)$. Note que

$$P(X < 6250) = P\left(\frac{X - 6000}{100} < \frac{6250 - 6000}{100}\right) = P(Z < 2.5)$$

em que Z é uma N$(0, 1)$. Pela tabela da normal padrão temos que $P(Z \leq 2.5) = 0.9938$. Logo,

$$P(X < 6250) = 0.9938.$$

Exemplo

Exemplo: A resistência à compressão de amostras de cimento pode ser modelada por uma distribuição normal com uma média de 6000 kg/cm^2 e um desvio padrão de 100 kg/cm^2.

(a) Qual a probabilidade de a resistência da amostra ser menor do que 6250 kg/cm^2.

(b) Qual a probabilidade de a resistência da amostra estar entre 5800 e 5900 kg/cm^2.

- Sol. (a): Se X é a variável aleatória que representa a resistência à compressão de amostras de cimento, então o exercício estabelece que X é uma $N(6000, 100^2)$. O que queremos calcular é $P(X < 6250)$. Note que

$$P(X < 6250) = P\left(\frac{X - 6000}{100} < \frac{6250 - 6000}{100}\right) = P(Z < 2.5)$$

em que Z é uma N$(0, 1)$. Pela tabela da normal padrão temos que $P(Z \leq 2.5) = 0.9938$. Logo,

$$P(X < 6250) = 0.9938.$$

Exemplo

Exemplo: A resistência à compressão de amostras de cimento pode ser modelada por uma distribuição normal com uma média de 6000 kg/cm^2 e um desvio padrão de 100 kg/cm^2.

(a) Qual a probabilidade de a resistência da amostra ser menor do que 6250 kg/cm^2.

(b) Qual a probabilidade de a resistência da amostra estar entre 5800 e 5900 kg/cm^2.

- Sol. (a): Se X é a variável aleatória que representa a resistência à compressão de amostras de cimento, então o exercício estabelece que X é uma $N(6000, 100^2)$. O que queremos calcular é $P(X < 6250)$. Note que

$$P(X < 6250) = P\left(\frac{X - 6000}{100} < \frac{6250 - 6000}{100}\right) = P(Z < 2.5)$$

em que Z é uma $\mathrm{N}(0, 1)$. Pela tabela da normal padrão temos que $P(Z \leq 2.5) = 0.9938$. Logo,

$$P(X < 6250) = 0.9938.$$

Cont. do exemplo

(b) No item (b) queremos a probabilidade de a resistência da amostra estar entre 5800 e 5900 kg/cm^2. Ou seja, $P(5800 < X < 5900)$.

- Sol. (b): Primeiro note que

$$P(5800 < X < 5900) = P(X < 5900) - P(X < 5800).$$

Logo, padronizando temos que

- $P(X < 5900) = P\left(\frac{X-6000}{100} < \frac{5900-6000}{100}\right) = P(Z < -1).$
- $P(X < 5800) = P\left(\frac{X-6000}{100} < \frac{5800-6000}{100}\right) = P(Z < -2).$

Ou seja,

$$P(5800 < X < 5900) = P(Z < -1) - P(Z < -2),$$

em que Z é uma normal padrão.

Cont. do exemplo

(b) No item (b) queremos a probabilidade de a resistência da amostra estar entre 5800 e 5900 kg/cm^2. Ou seja, $P(5800 < X < 5900)$.

- Sol. (b): Primeiro note que

$$P(5800 < X < 5900) = P(X < 5900) - P(X < 5800).$$

Logo, padronizando temos que

- $P(X < 5900) = P\left(\frac{X-6000}{100} < \frac{5900-6000}{100}\right) = P(Z < -1)$.
- $P(X < 5800) = P\left(\frac{X-6000}{100} < \frac{5800-6000}{100}\right) = P(Z < -2)$.

Ou seja,

$$P(5800 < X < 5900) = P(Z < -1) - P(Z < -2),$$

em que Z é uma normal padrão.

Cont. do exemplo

(b) No item (b) queremos a probabilidade de a resistência da amostra estar entre 5800 e 5900 kg/cm^2. Ou seja, $P(5800 < X < 5900)$.

- Sol. (b): Primeiro note que

$$P(5800 < X < 5900) = P(X < 5900) - P(X < 5800).$$

Logo, padronizando temos que

- ⋆ $P(X < 5900) = P\left(\frac{X-6000}{100} < \frac{5900-6000}{100}\right) = P(Z < -1).$
- ⋆ $P(X < 5800) = P\left(\frac{X-6000}{100} < \frac{5800-6000}{100}\right) = P(Z < -2).$

Ou seja,

$$P(5800 < X < 5900) = P(Z < -1) - P(Z < -2),$$

em que Z é uma normal padrão.

Cont. do exemplo

(b) No item (b) queremos a probabilidade de a resistência da amostra estar entre 5800 e 5900 kg/cm^2. Ou seja, $P(5800 < X < 5900)$.

- Sol. (b): Primeiro note que

$$P(5800 < X < 5900) = P(X < 5900) - P(X < 5800).$$

Logo, padronizando temos que

- $P(X < 5900) = P\left(\frac{X-6000}{100} < \frac{5900-6000}{100}\right) = P(Z < -1)$.
- $P(X < 5800) = P\left(\frac{X-6000}{100} < \frac{5800-6000}{100}\right) = P(Z < -2)$.

Ou seja,

$$P(5800 < X < 5900) = P(Z < -1) - P(Z < -2),$$

em que Z é uma normal padrão.

Cont. do exemplo

(b) No item (b) queremos a probabilidade de a resistência da amostra estar entre 5800 e 5900 kg/cm^2. Ou seja, $P(5800 < X < 5900)$.

- Sol. (b): Primeiro note que

$$P(5800 < X < 5900) = P(X < 5900) - P(X < 5800).$$

Logo, padronizando temos que

- $P(X < 5900) = P\left(\frac{X-6000}{100} < \frac{5900-6000}{100}\right) = P(Z < -1)$.
- $P(X < 5800) = P\left(\frac{X-6000}{100} < \frac{5800-6000}{100}\right) = P(Z < -2)$.

Ou seja,

$$P(5800 < X < 5900) = P(Z < -1) - P(Z < -2),$$

em que Z é uma normal padrão.

Cont. do exercício

- Uma possível maneira de se obter as probabilidades $P(Z < -1)$ e $P(Z < -2)$, em que Z é uma normal padrão é usando a simetria da normal e propriedades de probabilidade.
- Note que

$$P(Z < -1) = P(Z > 1) = 1 - P(Z \leq 1) = 1 - 0.8413 = 0,1587.$$

- De maneira análoga, temos que

$$P(Z < -2) = P(Z > 2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0.9772 = 0,0228.$$

- Logo, temos que

$$P(5800 < X < 5900) = P(Z < -1) - P(Z < -2) = 0,1587 - 0,0228 = 0,1359.$$

Cont. do exercício

- Uma possível maneira de se obter as probabilidades $P(Z < -1)$ e $P(Z < -2)$, em que Z é uma normal padrão é usando a simetria da normal e propriedades de probabilidade.
- Note que

$$P(Z < -1) = P(Z > 1) = 1 - P(Z \leq 1) = 1 - 0.8413 = 0,1587.$$

- De maneira análoga, temos que

$$P(Z < -2) = P(Z > 2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0.9772 = 0,0228.$$

- Logo, temos que

$$P(5800 < X < 5900) = P(Z < -1) - P(Z < -2) = 0,1587 - 0,0228 = 0,1359.$$

Cont. do exercício

- Uma possível maneira de se obter as probabilidades $P(Z < -1)$ e $P(Z < -2)$, em que Z é uma normal padrão é usando a simetria da normal e propriedades de probabilidade.
- Note que

$$P(Z < -1) = P(Z > 1) = 1 - P(Z \leq 1) = 1 - 0.8413 = 0,1587.$$

- De maneira análoga, temos que

$$P(Z < -2) = P(Z > 2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0.9772 = 0,0228.$$

- Logo, temos que

$$P(5800 < X < 5900) = P(Z < -1) - P(Z < -2) = 0,1587 - 0,0228 = 0,1359.$$

Cont. do exercício

- Uma possível maneira de se obter as probabilidades $P(Z < -1)$ e $P(Z < -2)$, em que Z é uma normal padrão é usando a simetria da normal e propriedades de probabilidade.
- Note que

$$P(Z < -1) = P(Z > 1) = 1 - P(Z \leq 1) = 1 - 0.8413 = 0,1587.$$

- De maneira análoga, temos que

$$P(Z < -2) = P(Z > 2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0.9772 = 0,0228.$$

- Logo, temos que

$$P(5800 < X < 5900) = P(Z < -1) - P(Z < -2) = 0,1587 - 0,0228 = 0,1359.$$

Cont. do exercício

- Uma possível maneira de se obter as probabilidades $P(Z < -1)$ e $P(Z < -2)$, em que Z é uma normal padrão é usando a simetria da normal e propriedades de probabilidade.
- Note que

$$P(Z < -1) = P(Z > 1) = 1 - P(Z \leq 1) = 1 - 0.8413 = 0,1587.$$

- De maneira análoga, temos que

$$P(Z < -2) = P(Z > 2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0.9772 = 0,0228.$$

- Logo, temos que

$$P(5800 < X < 5900) = P(Z < -1) - P(Z < -2) = 0,1587 - 0,0228 = 0,1359.$$

Cont. do exercício

- Uma possível maneira de se obter as probabilidades $P(Z < -1)$ e $P(Z < -2)$, em que Z é uma normal padrão é usando a simetria da normal e propriedades de probabilidade.
- Note que

$$P(Z < -1) = P(Z > 1) = 1 - P(Z \leq 1) = 1 - 0.8413 = 0,1587.$$

- De maneira análoga, temos que

$$P(Z < -2) = P(Z > 2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0.9772 = 0,0228.$$

- Logo, temos que

$$P(5800 < X < 5900) = P(Z < -1) - P(Z < -2) = 0,1587 - 0,0228 = 0,1359.$$