Probabilidade e estatística - Aula 15

Estimação pontual de parâmetros - Continuação

Dr. Giannini Italino Alves Vieira

Universidade Federal do Ceará - Campus de Crateús

2024

Estimação Pontual

Recordando

- Na aula passada vimos a ideia geral da estimação de parâmetros e vimos alguns conceitos iniciais importantes.
- Fizemos também um estudo sobre estimadores não viesados;
- Na aula de hoje vamos ver um outro importante conceito da estimação pontual, chamado de erro quadrático médio.
- Adicionalmente, veremos o primeiro método de obtenção de estimadores que iremos estudar, chamado de método de momentos.

Estimação Pontual

Recordando

- Na aula passada vimos a ideia geral da estimação de parâmetros e vimos alguns conceitos iniciais importantes.
- Fizemos também um estudo sobre estimadores não viesados;
- Na aula de hoje vamos ver um outro importante conceito da estimação pontual, chamado de erro quadrático médio.
- Adicionalmente, veremos o primeiro método de obtenção de estimadores que iremos estudar, chamado de método de momentos.

Estimação Pontual

Recordando

- Na aula passada vimos a ideia geral da estimação de parâmetros e vimos alguns conceitos iniciais importantes.
- Fizemos também um estudo sobre estimadores não viesados;
- Na aula de hoje vamos ver um outro importante conceito da estimação pontual, chamado de erro quadrático médio.
- Adicionalmente, veremos o primeiro método de obtenção de estimadores que iremos estudar, chamado de método de momentos.

Estimação Pontual

Recordando

- Na aula passada vimos a ideia geral da estimação de parâmetros e vimos alguns conceitos iniciais importantes.
- Fizemos também um estudo sobre estimadores não viesados;
- Na aula de hoje vamos ver um outro importante conceito da estimação pontual, chamado de erro quadrático médio.
- Adicionalmente, veremos o primeiro método de obtenção de estimadores que iremos estudar, chamado de método de momentos.

Erro quadrático médio

- Intuitivamente, o erro quadrático médio de um estimador pode ser pensado como sendo uma medida de qualidade do estimador, sendo composta por outras duas medidas, a saber: a variância e o viés do estimador.
- O erro quadrático médio pode ser um critério importante para comparar dois estimadores.
- Formalmente, erro quadrático médio de um estimador, denotado por EQM, é definido da seguinte forma:

Erro quadrático médio - EQM

Definição: Seja $\hat{\theta}$ um estimador do parâmetro θ. O erro quadrático médio de $\hat{\theta}$ é definido como

$$\mathrm{EQM}(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - \theta)^2]$$

Ou seja, o EQM do estimador $\hat{\theta}$ é o valor esperado do quadrado da diferença entre $\hat{\theta}$ e θ.

Erro quadrático médio

- Intuitivamente, o erro quadrático médio de um estimador pode ser pensado como sendo uma medida de qualidade do estimador, sendo composta por outras duas medidas, a saber: a variância e o viés do estimador.
- O erro quadrático médio pode ser um critério importante para comparar dois estimadores.
- Formalmente, erro quadrático médio de um estimador, denotado por EQM, é definido da seguinte forma:

Erro quadrático médio - EQM

Definição: Seja $\hat{\theta}$ um estimador do parâmetro θ. O erro quadrático médio de $\hat{\theta}$ é definido como

$$\text{EQM}(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - \theta)^2]$$

Ou seja, o EQM do estimador $\hat{\theta}$ é o valor esperado do quadrado da diferença entre $\hat{\theta}$ e θ.

Erro quadrático médio

- Intuitivamente, o erro quadrático médio de um estimador pode ser pensado como sendo uma medida de qualidade do estimador, sendo composta por outras duas medidas, a saber: a variância e o viés do estimador.
- O erro quadrático médio pode ser um critério importante para comparar dois estimadores.
- Formalmente, erro quadrático médio de um estimador, denotado por EQM, é definido da seguinte forma:

Erro quadrático médio - EQM

Definição: Seja $\hat{\theta}$ um estimador do parâmetro θ. O erro quadrático médio de $\hat{\theta}$ é definido como

$$\text{EQM}(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - \theta)^2]$$

Ou seja, o EQM do estimador $\hat{\theta}$ é o valor esperado do quadrado da diferença entre $\hat{\theta}$ e θ.

Erro quadrático médio

- Intuitivamente, o erro quadrático médio de um estimador pode ser pensado como sendo uma medida de qualidade do estimador, sendo composta por outras duas medidas, a saber: a variância e o viés do estimador.
- O erro quadrático médio pode ser um critério importante para comparar dois estimadores.
- Formalmente, erro quadrático médio de um estimador, denotado por EQM, é definido da seguinte forma:

Erro quadrático médio - EQM

Definição: Seja $\hat{\theta}$ um estimador do parâmetro θ. O erro quadrático médio de $\hat{\theta}$ é definido como

$$\text{EQM}(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - \theta)^2]$$

Ou seja, o EQM do estimador $\hat{\theta}$ é o valor esperado do quadrado da diferença entre $\hat{\theta}$ e θ.

Erro quadrático médio

- Intuitivamente, o erro quadrático médio de um estimador pode ser pensado como sendo uma medida de qualidade do estimador, sendo composta por outras duas medidas, a saber: a variância e o viés do estimador.
- O erro quadrático médio pode ser um critério importante para comparar dois estimadores.
- Formalmente, erro quadrático médio de um estimador, denotado por EQM, é definido da seguinte forma:

Erro quadrático médio - EQM

Definição: Seja $\hat{\theta}$ um estimador do parâmetro θ. O erro quadrático médio de $\hat{\theta}$ é definido como

$$\text{EQM}(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - \theta)^2]$$

Ou seja, o EQM do estimador $\hat{\theta}$ é o valor esperado do quadrado da diferença entre $\hat{\theta}$ e θ.

EQM

Note ainda que o EQM pode ser calculado da seguinte forma:

$$\text{EQM}(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - \theta)^2] = E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}) + E(\hat{\theta}) - \theta)^2].$$

Note ainda que

$$\text{EQM}(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2 + 2(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))(E(\hat{\theta}) - \theta) + (E(\hat{\theta}) - \theta)^2].$$

E ainda,

$$\text{EQM}(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2] + 2E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))(E(\hat{\theta}) - \theta)] + E[(E(\hat{\theta}) - \theta)^2].$$

Note que $E(\hat{\theta}) - \theta$ é uma constante, então a identidade acima se reduz a

$$\text{EQM}(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2] + 2(E(\hat{\theta}) - \theta)E(\hat{\theta} - E(\hat{\theta})) + (E(\hat{\theta}) - \theta)^2,$$

ou ainda

$$\text{EQM}(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2] + 2(E(\hat{\theta}) - \theta)(E(\hat{\theta}) - E(\hat{\theta})) + (E(\hat{\theta}) - \theta)^2,$$

ou seja,

$$\text{EQM}(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2] + (E(\hat{\theta}) - \theta)^2,$$

EQM

Note ainda que o EQM pode ser calculado da seguinte forma:

$$\text{EQM}(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - \theta)^2] = E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}) + E(\hat{\theta}) - \theta)^2].$$

Note ainda que

$$\text{EQM}(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2 + 2(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))(E(\hat{\theta}) - \theta) + (E(\hat{\theta}) - \theta)^2].$$

E ainda,

$$\text{EQM}(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2] + 2E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))(E(\hat{\theta}) - \theta)] + E[(E(\hat{\theta}) - \theta)^2].$$

Note que $E(\hat{\theta}) - \theta$ é uma constante, então a identidade acima se reduz a

$$\text{EQM}(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2] + 2(E(\hat{\theta}) - \theta)E(\hat{\theta} - E(\hat{\theta})) + (E(\hat{\theta}) - \theta)^2,$$

ou ainda

$$\text{EQM}(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2] + 2(E(\hat{\theta}) - \theta)(E(\hat{\theta}) - E(\hat{\theta})) + (E(\hat{\theta}) - \theta)^2,$$

ou seja,

$$\text{EQM}(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2] + (E(\hat{\theta}) - \theta)^2,$$

EQM

Note ainda que o EQM pode ser calculado da seguinte forma:

$$\text{EQM}(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - \theta)^2] = E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}) + E(\hat{\theta}) - \theta)^2].$$

Note ainda que

$$\text{EQM}(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2 + 2(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))(E(\hat{\theta}) - \theta) + (E(\hat{\theta}) - \theta)^2].$$

E ainda,

$$\text{EQM}(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2] + 2E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))(E(\hat{\theta}) - \theta)] + E[(E(\hat{\theta}) - \theta)^2].$$

Note que $E(\hat{\theta}) - \theta$ é uma constante, então a identidade acima se reduz a

$$\text{EQM}(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2] + 2(E(\hat{\theta}) - \theta)E(\hat{\theta} - E(\hat{\theta})) + (E(\hat{\theta}) - \theta)^2,$$

ou ainda

$$\text{EQM}(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2] + 2(E(\hat{\theta}) - \theta)(E(\hat{\theta}) - E(\hat{\theta})) + (E(\hat{\theta}) - \theta)^2,$$

ou seja,

$$\text{EQM}(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2] + (E(\hat{\theta}) - \theta)^2,$$

EQM

Note ainda que o EQM pode ser calculado da seguinte forma:

$$\text{EQM}(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - \theta)^2] = E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}) + E(\hat{\theta}) - \theta)^2].$$

Note ainda que

$$\text{EQM}(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2 + 2(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))(E(\hat{\theta}) - \theta) + (E(\hat{\theta}) - \theta)^2].$$

E ainda,

$$\text{EQM}(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2] + 2E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))(E(\hat{\theta}) - \theta)] + E[(E(\hat{\theta}) - \theta)^2].$$

Note que $E(\hat{\theta}) - \theta$ é uma constante, então a identidade acima se reduz a

$$\text{EQM}(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2] + 2(E(\hat{\theta}) - \theta)E(\hat{\theta} - E(\hat{\theta})) + (E(\hat{\theta}) - \theta)^2,$$

ou ainda

$$\text{EQM}(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2] + 2(E(\hat{\theta}) - \theta)(E(\hat{\theta}) - E(\hat{\theta})) + (E(\hat{\theta}) - \theta)^2,$$

ou seja,

$$\text{EQM}(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2] + (E(\hat{\theta}) - \theta)^2,$$

EQM

Note ainda que o EQM pode ser calculado da seguinte forma:

$$\mathrm{EQM}(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - \theta)^2] = E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}) + E(\hat{\theta}) - \theta)^2].$$

Note ainda que

$$\mathrm{EQM}(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2 + 2(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))(E(\hat{\theta}) - \theta) + (E(\hat{\theta}) - \theta)^2].$$

E ainda,

$$\mathrm{EQM}(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2] + 2E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))(E(\hat{\theta}) - \theta)] + E[(E(\hat{\theta}) - \theta)^2].$$

Note que $E(\hat{\theta}) - \theta$ é uma constante, então a identidade acima se reduz a

$$\mathrm{EQM}(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2] + 2(E(\hat{\theta}) - \theta)E(\hat{\theta} - E(\hat{\theta})) + (E(\hat{\theta}) - \theta)^2,$$

ou ainda

$$\mathrm{EQM}(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2] + 2(E(\hat{\theta}) - \theta)(E(\hat{\theta}) - E(\hat{\theta})) + (E(\hat{\theta}) - \theta)^2,$$

ou seja,

$$\mathrm{EQM}(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2] + (E(\hat{\theta}) - \theta)^2,$$

EQM

Note ainda que o EQM pode ser calculado da seguinte forma:

$$\text{EQM}(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - \theta)^2] = E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}) + E(\hat{\theta}) - \theta)^2].$$

Note ainda que

$$\text{EQM}(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2 + 2(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))(E(\hat{\theta}) - \theta) + (E(\hat{\theta}) - \theta)^2].$$

E ainda,

$$\text{EQM}(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2] + 2E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))(E(\hat{\theta}) - \theta)] + E[(E(\hat{\theta}) - \theta)^2].$$

Note que $E(\hat{\theta}) - \theta$ é uma constante, então a identidade acima se reduz a

$$\text{EQM}(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2] + 2(E(\hat{\theta}) - \theta)E(\hat{\theta} - E(\hat{\theta})) + (E(\hat{\theta}) - \theta)^2,$$

ou ainda

$$\text{EQM}(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2] + 2(E(\hat{\theta}) - \theta)(E(\hat{\theta}) - E(\hat{\theta})) + (E(\hat{\theta}) - \theta)^2,$$

ou seja,

$$\text{EQM}(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2] + (E(\hat{\theta}) - \theta)^2,$$

EQM

Note ainda que o EQM pode ser calculado da seguinte forma:

$$\text{EQM}(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - \theta)^2] = E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}) + E(\hat{\theta}) - \theta)^2].$$

Note ainda que

$$\text{EQM}(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2 + 2(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))(E(\hat{\theta}) - \theta) + (E(\hat{\theta}) - \theta)^2].$$

E ainda,

$$\text{EQM}(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2] + 2E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))(E(\hat{\theta}) - \theta)] + E[(E(\hat{\theta}) - \theta)^2].$$

Note que $E(\hat{\theta}) - \theta$ é uma constante, então a identidade acima se reduz a

$$\text{EQM}(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2] + 2(E(\hat{\theta}) - \theta)E(\hat{\theta} - E(\hat{\theta})) + (E(\hat{\theta}) - \theta)^2,$$

ou ainda

$$\text{EQM}(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2] + 2(E(\hat{\theta}) - \theta)(E(\hat{\theta}) - E(\hat{\theta})) + (E(\hat{\theta}) - \theta)^2,$$

ou seja,

$$\text{EQM}(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2] + (E(\hat{\theta}) - \theta)^2,$$

EQM

Note ainda que o EQM pode ser calculado da seguinte forma:

$$\text{EQM}(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - \theta)^2] = E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}) + E(\hat{\theta}) - \theta)^2].$$

Note ainda que

$$\text{EQM}(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2 + 2(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))(E(\hat{\theta}) - \theta) + (E(\hat{\theta}) - \theta)^2].$$

E ainda,

$$\text{EQM}(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2] + 2E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))(E(\hat{\theta}) - \theta)] + E[(E(\hat{\theta}) - \theta)^2].$$

Note que $E(\hat{\theta}) - \theta$ é uma constante, então a identidade acima se reduz a

$$\text{EQM}(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2] + 2(E(\hat{\theta}) - \theta)E(\hat{\theta} - E(\hat{\theta})) + (E(\hat{\theta}) - \theta)^2,$$

ou ainda

$$\text{EQM}(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2] + 2(E(\hat{\theta}) - \theta)(E(\hat{\theta}) - E(\hat{\theta})) + (E(\hat{\theta}) - \theta)^2,$$

ou seja,

$$\text{EQM}(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2] + (E(\hat{\theta}) - \theta)^2,$$

EQM

Note ainda que o EQM pode ser calculado da seguinte forma:

$$\text{EQM}(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - \theta)^2] = E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}) + E(\hat{\theta}) - \theta)^2].$$

Note ainda que

$$\text{EQM}(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2 + 2(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))(E(\hat{\theta}) - \theta) + (E(\hat{\theta}) - \theta)^2].$$

E ainda,

$$\text{EQM}(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2] + 2E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))(E(\hat{\theta}) - \theta)] + E[(E(\hat{\theta}) - \theta)^2].$$

Note que $E(\hat{\theta}) - \theta$ é uma constante, então a identidade acima se reduz a

$$\text{EQM}(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2] + 2(E(\hat{\theta}) - \theta)E(\hat{\theta} - E(\hat{\theta})) + (E(\hat{\theta}) - \theta)^2,$$

ou ainda

$$\text{EQM}(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2] + 2(E(\hat{\theta}) - \theta)(E(\hat{\theta}) - E(\hat{\theta})) + (E(\hat{\theta}) - \theta)^2,$$

ou seja,

$$\text{EQM}(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2] + (E(\hat{\theta}) - \theta)^2,$$

EQM

Ou seja, chegamos que o EQM do estimador $\hat{\theta}$ é dado por

$$\text{EQM}(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2] + (E(\hat{\theta}) - \theta)^2.$$

Recorde que $Var(X) = E(X - E(X))^2$ e que a diferença $E(\hat{\theta}) - \theta$ é o viés do estimador. Logo,

$$\text{EQM}(\hat{\theta}) = Var(\hat{\theta}) + B(\hat{\theta})^2.$$

em que $B(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta$ é o viés do estimador $\hat{\theta}$.

- Portanto, o EQM de um estimador $\hat{\theta}$ é pode ser calculado como sendo a soma da variância do estimador com o quadrado do viés do estimador.
- Note ainda que para estimadores não viesados o EQM é simplesmente a variância do estimador, ou seja, $\text{EQM}(\hat{\theta}) = Var(\hat{\theta})$.

EQM

Ou seja, chegamos que o EQM do estimador $\hat{\theta}$ é dado por

$$\text{EQM}(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2] + (E(\hat{\theta}) - \theta)^2.$$

Recorde que $Var(X) = E(X - E(X))^2$ e que a diferença $E(\hat{\theta}) - \theta$ é o viés do estimador. Logo,

$$\text{EQM}(\hat{\theta}) = Var(\hat{\theta}) + B(\hat{\theta})^2.$$

em que $B(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta$ é o viés do estimador $\hat{\theta}$.

- Portanto, o EQM de um estimador $\hat{\theta}$ é pode ser calculado como sendo a soma da variância do estimador com o quadrado do viés do estimador.
- Note ainda que para estimadores não viesados o EQM é simplesmente a variância do estimador, ou seja, $\text{EQM}(\hat{\theta}) = Var(\hat{\theta})$.

EQM

Ou seja, chegamos que o EQM do estimador $\hat{\theta}$ é dado por

$$\text{EQM}(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2] + (E(\hat{\theta}) - \theta)^2.$$

Recorde que $Var(X) = E(X - E(X))^2$ e que a diferença $E(\hat{\theta}) - \theta$ é o viés do estimador. Logo,

$$\text{EQM}(\hat{\theta}) = Var(\hat{\theta}) + B(\hat{\theta})^2.$$

em que $B(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta$ é o viés do estimador $\hat{\theta}$.

- Portanto, o EQM de um estimador $\hat{\theta}$ é pode ser calculado como sendo a soma da variância do estimador com o quadrado do viés do estimador.
- Note ainda que para estimadores não viesados o EQM é simplesmente a variância do estimador, ou seja, $\text{EQM}(\hat{\theta}) = Var(\hat{\theta})$.

EQM

Ou seja, chegamos que o EQM do estimador $\hat{\theta}$ é dado por

$$\text{EQM}(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2] + (E(\hat{\theta}) - \theta)^2.$$

Recorde que $Var(X) = E(X - E(X))^2$ e que a diferença $E(\hat{\theta}) - \theta$ é o viés do estimador. Logo,

$$\text{EQM}(\hat{\theta}) = Var(\hat{\theta}) + B(\hat{\theta})^2.$$

em que $B(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta$ é o viés do estimador $\hat{\theta}$.

- Portanto, o EQM de um estimador $\hat{\theta}$ é pode ser calculado como sendo a soma da variância do estimador com o quadrado do viés do estimador.
- Note ainda que para estimadores não viesados o EQM é simplesmente a variância do estimador, ou seja, $\text{EQM}(\hat{\theta}) = Var(\hat{\theta})$.

EQM

Ou seja, chegamos que o EQM do estimador $\hat{\theta}$ é dado por

$$\text{EQM}(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2] + (E(\hat{\theta}) - \theta)^2.$$

Recorde que $Var(X) = E(X - E(X))^2$ e que a diferença $E(\hat{\theta}) - \theta$ é o viés do estimador. Logo,

$$\text{EQM}(\hat{\theta}) = Var(\hat{\theta}) + B(\hat{\theta})^2.$$

em que $B(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta$ é o viés do estimador $\hat{\theta}$.

- Portanto, o EQM de um estimador $\hat{\theta}$ é pode ser calculado como sendo a soma da variância do estimador com o quadrado do viés do estimador.
- Note ainda que para estimadores não viesados o EQM é simplesmente a variância do estimador, ou seja, $\text{EQM}(\hat{\theta}) = Var(\hat{\theta})$.

EQM

Ou seja, chegamos que o EQM do estimador $\hat{\theta}$ é dado por

$$\text{EQM}(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2] + (E(\hat{\theta}) - \theta)^2.$$

Recorde que $Var(X) = E(X - E(X))^2$ e que a diferença $E(\hat{\theta}) - \theta$ é o viés do estimador. Logo,

$$\text{EQM}(\hat{\theta}) = Var(\hat{\theta}) + B(\hat{\theta})^2.$$

em que $B(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta$ é o viés do estimador $\hat{\theta}$.

- Portanto, o EQM de um estimador $\hat{\theta}$ é pode ser calculado como sendo a soma da variância do estimador com o quadrado do viés do estimador.
- Note ainda que para estimadores não viesados o EQM é simplesmente a variância do estimador, ou seja, $\text{EQM}(\hat{\theta}) = Var(\hat{\theta})$.

EQM

Ou seja, chegamos que o EQM do estimador $\hat{\theta}$ é dado por

$$\text{EQM}(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2] + (E(\hat{\theta}) - \theta)^2.$$

Recorde que $Var(X) = E(X - E(X))^2$ e que a diferença $E(\hat{\theta}) - \theta$ é o viés do estimador. Logo,

$$\text{EQM}(\hat{\theta}) = Var(\hat{\theta}) + B(\hat{\theta})^2.$$

em que $B(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta$ é o viés do estimador $\hat{\theta}$.

- Portanto, o EQM de um estimador $\hat{\theta}$ é pode ser calculado como sendo a soma da variância do estimador com o quadrado do viés do estimador.
- Note ainda que para estimadores não viesados o EQM é simplesmente a variância do estimador, ou seja, $\text{EQM}(\hat{\theta}) = Var(\hat{\theta})$.

Eficiência relativa

- Como dito anteriormente, o EQM é um critéio importante para comparar dois estimadores.

Eficiência relativa

Se $\hat{\theta}_1$ e $\hat{\theta}_2$ são dois estimadores não viesados para um parâmetro θ e sejam EQM($\hat{\theta}_1$) e EQM($\hat{\theta}_2$) os EQM's de $\hat{\theta}_1$ e $\hat{\theta}_2$, respectivamente. Então, a eficiência relativa de $\hat{\theta}_2$ em relação a $\hat{\theta}_1$ é definida como a razão

$$\frac{\text{EQM}(\hat{\theta}_1)}{\text{EQM}(\hat{\theta}_2)}$$

- Se essa eficiência relativa for menor que 1, então o estimador $\hat{\theta}_1$ é um estimador mais eficiente do que $\hat{\theta}_2$, caso contrário $\hat{\theta}_2$ é mais eficiente que $\hat{\theta}_1$.
- Em algumas situações, pode ser preferível trabalhar com um estimador viesado do que com um não viesado, pois o estimador viesado pode ter um menor EQM.

Eficiência relativa

- Como dito anteriormente, o EQM é um critéio importante para comparar dois estimadores.

Eficiência relativa

Se $\hat{\theta}_1$ e $\hat{\theta}_2$ são dois estimadores não viesados para um parâmetro θ e sejam $\text{EQM}(\hat{\theta}_1)$ e $\text{EQM}(\hat{\theta}_2)$ os EQM's de $\hat{\theta}_1$ e $\hat{\theta}_2$, respectivamente. Então, a eficiência relativa de $\hat{\theta}_2$ em relação a $\hat{\theta}_1$ é definida como a razão

$$\frac{\text{EQM}(\hat{\theta}_1)}{\text{EQM}(\hat{\theta}_2)}$$

- Se essa eficiência relativa for menor que 1, então o estimador $\hat{\theta}_1$ é um estimador mais eficiente do que $\hat{\theta}_2$, caso contrário $\hat{\theta}_2$ é mais eficiente que $\hat{\theta}_1$.
- Em algumas situações, pode ser preferível trabalhar com um estimador viesado do que com um não viesado, pois o estimador viesado pode ter um menor EQM.

Eficiência relativa

- Como dito anteriormente, o EQM é um critéio importante para comparar dois estimadores.

Eficiência relativa

Se $\hat{\theta}_1$ e $\hat{\theta}_2$ são dois estimadores não viesados para um parâmetro θ e sejam $\text{EQM}(\hat{\theta}_1)$ e $\text{EQM}(\hat{\theta}_2)$ os EQM's de $\hat{\theta}_1$ e $\hat{\theta}_2$, respectivamente. Então, a eficiência relativa de $\hat{\theta}_2$ em relação a $\hat{\theta}_1$ é definida como a razão

$$\frac{\text{EQM}(\hat{\theta}_1)}{\text{EQM}(\hat{\theta}_2)}$$

- Se essa eficiência relativa for menor que 1, então o estimador $\hat{\theta}_1$ é um estimador mais eficiente do que $\hat{\theta}_2$, caso contrário $\hat{\theta}_2$ é mais eficiente que $\hat{\theta}_1$.
- Em algumas situações, pode ser preferível trabalhar com um estimador viesado do que com um não viesado, pois o estimador viesado pode ter um menor EQM.

Eficiência relativa

- Como dito anteriormente, o EQM é um critéio importante para comparar dois estimadores.

Eficiência relativa

Se $\hat{\theta}_1$ e $\hat{\theta}_2$ são dois estimadores não viesados para um parâmetro θ e sejam $\text{EQM}(\hat{\theta}_1)$ e $\text{EQM}(\hat{\theta}_2)$ os EQM's de $\hat{\theta}_1$ e $\hat{\theta}_2$, respectivamente. Então, a eficiência relativa de $\hat{\theta}_2$ em relação a $\hat{\theta}_1$ é definida como a razão

$$\frac{\text{EQM}(\hat{\theta}_1)}{\text{EQM}(\hat{\theta}_2)}$$

- Se essa eficiência relativa for menor que 1, então o estimador $\hat{\theta}_1$ é um estimador mais eficiente do que $\hat{\theta}_2$, caso contrário $\hat{\theta}_2$ é mais eficiente que $\hat{\theta}_1$.
- Em algumas situações, pode ser preferível trabalhar com um estimador viesado do que com um não viesado, pois o estimador viesado pode ter um menor EQM.

Exemplo

Exemplo: Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_7$ uma amostra aleatória proveniente de uma população com média μ e variância σ^2. Considere os seguintes estimadores:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_7}{7} \quad \text{e} \quad \hat{\theta}_2 = \frac{2X_1 - X_6 + X_4}{2}$$

(a) Os dois estimadores são não viesados para μ?

(b) Qual o melhor estimador? Em qual sentido ele é melhor? Calcule a eficiência relativa dos dois estimadores.

- Sol.(a): $\hat{\theta}_1$ é não viesado para μ, uma vez que é a média da amostra. Note ainda que

$$E(\hat{\theta}_2) = E\left(\frac{2X_1 - X_6 + X_4}{2}\right) = \frac{1}{2}E(2X_1 - X_6 + X_4)$$

ou seja,

$$E(\hat{\theta}_2) = \frac{1}{2}(2E(X_1) - E(X_6) + E(X_4)) = \frac{1}{2}(2\mu - \mu + \mu) = \mu.$$

Portanto, $\hat{\theta}_1$ e $\hat{\theta}_2$ são não viesados para μ.

Exemplo

Exemplo: Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_7$ uma amostra aleatória proveniente de uma população com média μ e variância σ^2. Considere os seguintes estimadores:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_7}{7} \quad \text{e} \quad \hat{\theta}_2 = \frac{2X_1 - X_6 + X_4}{2}$$

(a) Os dois estimadores são não viesados para μ?

(b) Qual o melhor estimador? Em qual sentido ele é melhor? Calcule a eficiência relativa dos dois estimadores.

- Sol.(a): $\hat{\theta}_1$ é não viesado para μ, uma vez que é a média da amostra. Note ainda que

$$E(\hat{\theta}_2) = E\left(\frac{2X_1 - X_6 + X_4}{2}\right) = \frac{1}{2}E(2X_1 - X_6 + X_4)$$

ou seja,

$$E(\hat{\theta}_2) = \frac{1}{2}(2E(X_1) - E(X_6) + E(X_4)) = \frac{1}{2}(2\mu - \mu + \mu) = \mu.$$

Portanto, $\hat{\theta}_1$ e $\hat{\theta}_2$ são não viesados para μ.

Exemplo

Exemplo: Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_7$ uma amostra aleatória proveniente de uma população com média μ e variância σ^2. Considere os seguintes estimadores:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_7}{7} \quad \text{e} \quad \hat{\theta}_2 = \frac{2X_1 - X_6 + X_4}{2}$$

(a) Os dois estimadores são não viesados para μ?

(b) Qual o melhor estimador? Em qual sentido ele é melhor? Calcule a eficiência relativa dos dois estimadores.

- Sol.(a): $\hat{\theta}_1$ é não viesado para μ, uma vez que é a média da amostra. Note ainda que

$$E(\hat{\theta}_2) = E\left(\frac{2X_1 - X_6 + X_4}{2}\right) = \frac{1}{2}E(2X_1 - X_6 + X_4)$$

ou seja,

$$E(\hat{\theta}_2) = \frac{1}{2}(2E(X_1) - E(X_6) + E(X_4)) = \frac{1}{2}(2\mu - \mu + \mu) = \mu.$$

Portanto, $\hat{\theta}_1$ e $\hat{\theta}_2$ são não viesados para μ.

Exemplo

Exemplo: Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_7$ uma amostra aleatória proveniente de uma população com média μ e variância σ^2. Considere os seguintes estimadores:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_7}{7} \quad \text{e} \quad \hat{\theta}_2 = \frac{2X_1 - X_6 + X_4}{2}$$

(a) Os dois estimadores são não viesados para μ?

(b) Qual o melhor estimador? Em qual sentido ele é melhor? Calcule a eficiência relativa dos dois estimadores.

- Sol.(a): $\hat{\theta}_1$ é não viesado para μ, uma vez que é a média da amostra. Note ainda que

$$E(\hat{\theta}_2) = E\left(\frac{2X_1 - X_6 + X_4}{2}\right) = \frac{1}{2}E(2X_1 - X_6 + X_4)$$

ou seja,

$$E(\hat{\theta}_2) = \frac{1}{2}(2E(X_1) - E(X_6) + E(X_4)) = \frac{1}{2}(2\mu - \mu + \mu) = \mu.$$

Portanto, $\hat{\theta}_1$ e $\hat{\theta}_2$ são não viesados para μ.

Exemplo

Exemplo: Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_7$ uma amostra aleatória proveniente de uma população com média μ e variância σ^2. Considere os seguintes estimadores:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_7}{7} \quad \text{e} \quad \hat{\theta}_2 = \frac{2X_1 - X_6 + X_4}{2}$$

(a) Os dois estimadores são não viesados para μ?

(b) Qual o melhor estimador? Em qual sentido ele é melhor? Calcule a eficiência relativa dos dois estimadores.

- Sol.(a): $\hat{\theta}_1$ é não viesado para μ, uma vez que é a média da amostra. Note ainda que

$$E(\hat{\theta}_2) = E\left(\frac{2X_1 - X_6 + X_4}{2}\right) = \frac{1}{2}E(2X_1 - X_6 + X_4)$$

ou seja,

$$E(\hat{\theta}_2) = \frac{1}{2}(2E(X_1) - E(X_6) + E(X_4)) = \frac{1}{2}(2\mu - \mu + \mu) = \mu.$$

Portanto, $\hat{\theta}_1$ e $\hat{\theta}_2$ são não viesados para μ.

Exemplo

Exemplo: Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_7$ uma amostra aleatória proveniente de uma população com média μ e variância σ^2. Considere os seguintes estimadores:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_7}{7} \quad \text{e} \quad \hat{\theta}_2 = \frac{2X_1 - X_6 + X_4}{2}$$

(a) Os dois estimadores são não viesados para μ?

(b) Qual o melhor estimador? Em qual sentido ele é melhor? Calcule a eficiência relativa dos dois estimadores.

- Sol.(a): $\hat{\theta}_1$ é não viesado para μ, uma vez que é a média da amostra. Note ainda que

$$E(\hat{\theta}_2) = E\left(\frac{2X_1 - X_6 + X_4}{2}\right) = \frac{1}{2}E(2X_1 - X_6 + X_4)$$

ou seja,

$$E(\hat{\theta}_2) = \frac{1}{2}(2E(X_1) - E(X_6) + E(X_4)) = \frac{1}{2}(2\mu - \mu + \mu) = \mu.$$

Portanto, $\hat{\theta}_1$ e $\hat{\theta}_2$ são não viesados para μ.

Cont. do exercício

- Sol. (b): Vamos calcular agora o EQM dos dois estimadores. Note que como ambos são não viesados, então o EQM se reduz a variância dos estimadores. Ou seja,

$$\mathrm{EQM}(\hat{\theta}_1) = Var(\hat{\theta}_1) = Var\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_7}{7}\right),$$

isto é

$$\mathrm{EQM}(\hat{\theta}_1) = \frac{1}{49}(Var(X_1) + Var(X_2) + \ldots Var(X_7)) = \frac{1}{49}(\sigma^2 + \sigma^2 + \ldots + \sigma^2) = \frac{\sigma^2}{7}.$$

Portanto, o $\mathrm{EQM}(\hat{\theta}_1) = \frac{\sigma^2}{7}$.

Cont. do exercício

- Sol. (b): Vamos calcular agora o EQM dos dois estimadores. Note que como ambos são não viesados, então o EQM se reduz a variância dos estimadores. Ou seja,

$$EQM(\hat{\theta}_1) = Var(\hat{\theta}_1) = Var\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_7}{7}\right),$$

isto é

$$EQM(\hat{\theta}_1) = \frac{1}{49}(Var(X_1) + Var(X_2) + \ldots Var(X_7)) = \frac{1}{49}(\sigma^2 + \sigma^2 + \ldots + \sigma^2) = \frac{\sigma^2}{7}.$$

Portanto, o $EQM(\hat{\theta}_1) = \frac{\sigma^2}{7}$.

Cont. do exercício

- Sol. (b): Vamos calcular agora o EQM dos dois estimadores. Note que como ambos são não viesados, então o EQM se reduz a variância dos estimadores. Ou seja,

$$\text{EQM}(\hat{\theta}_1) = Var(\hat{\theta}_1) = Var\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_7}{7}\right),$$

isto é

$$\text{EQM}(\hat{\theta}_1) = \frac{1}{49}(Var(X_1) + Var(X_2) + \ldots Var(X_7)) = \frac{1}{49}(\sigma^2 + \sigma^2 + \ldots + \sigma^2) = \frac{\sigma^2}{7}.$$

Portanto, o $\text{EQM}(\hat{\theta}_1) = \frac{\sigma^2}{7}$.

Cont. do exercício

- Sol. (b): Vamos calcular agora o EQM dos dois estimadores. Note que como ambos são não viesados, então o EQM se reduz a variância dos estimadores. Ou seja,

$$\text{EQM}(\hat{\theta}_1) = Var(\hat{\theta}_1) = Var\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_7}{7}\right),$$

isto é

$$\text{EQM}(\hat{\theta}_1) = \frac{1}{49}(Var(X_1) + Var(X_2) + \ldots Var(X_7)) = \frac{1}{49}(\sigma^2 + \sigma^2 + \ldots + \sigma^2) = \frac{\sigma^2}{7}.$$

Portanto, o $\text{EQM}(\hat{\theta}_1) = \frac{\sigma^2}{7}$.

Cont. do exercício

- Sol. (b): Vamos calcular agora o EQM dos dois estimadores. Note que como ambos são não viesados, então o EQM se reduz a variância dos estimadores. Ou seja,

$$\text{EQM}(\hat{\theta}_1) = Var(\hat{\theta}_1) = Var\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_7}{7}\right),$$

isto é

$$\text{EQM}(\hat{\theta}_1) = \frac{1}{49}(Var(X_1) + Var(X_2) + \ldots Var(X_7)) = \frac{1}{49}(\sigma^2 + \sigma^2 + \ldots + \sigma^2) = \frac{\sigma^2}{7}.$$

Portanto, o $\text{EQM}(\hat{\theta}_1) = \frac{\sigma^2}{7}$.

Cont. do exercício

- Sol. (b): Vamos calcular agora o EQM dos dois estimadores. Note que como ambos são não viesados, então o EQM se reduz a variância dos estimadores. Ou seja,

$$\mathrm{EQM}(\hat{\theta}_1) = Var(\hat{\theta}_1) = Var\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_7}{7}\right),$$

isto é

$$\mathrm{EQM}(\hat{\theta}_1) = \frac{1}{49}(Var(X_1) + Var(X_2) + \ldots Var(X_7)) = \frac{1}{49}(\sigma^2 + \sigma^2 + \ldots + \sigma^2) = \frac{\sigma^2}{7}.$$

Portanto, o $\mathrm{EQM}(\hat{\theta}_1) = \frac{\sigma^2}{7}$.

Cont. do exercício

- Sol. (b): Vamos calcular agora o EQM dos dois estimadores. Note que como ambos são não viesados, então o EQM se reduz a variância dos estimadores. Ou seja,

$$\mathrm{EQM}(\hat{\theta}_1) = Var(\hat{\theta}_1) = Var\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_7}{7}\right),$$

isto é

$$\mathrm{EQM}(\hat{\theta}_1) = \frac{1}{49}(Var(X_1) + Var(X_2) + \ldots Var(X_7)) = \frac{1}{49}(\sigma^2 + \sigma^2 + \ldots + \sigma^2) = \frac{\sigma^2}{7}.$$

Portanto, o $\mathrm{EQM}(\hat{\theta}_1) = \frac{\sigma^2}{7}$.

Cont. do exercício

- Sol. (b): Note ainda que

$$EQM(\hat{\theta}_2) = Var(\hat{\theta}_2) = Var\left(\frac{2X_1 - X_6 + X_4}{2}\right) = \frac{1}{4}Var(2X_1 + (-X_6) + X_4)$$

isto é

$$EQM(\hat{\theta}_2) = \frac{1}{4}(Var(2X_1) + Var(-X_6) + Var(X_4))$$

ou seja,

$$EQM(\hat{\theta}_2) = \frac{1}{4}(4Var(X_1) + Var(X_6) + Var(X_4)) = \frac{1}{4}(4\sigma^2 + \sigma^2 + \sigma^2) = \frac{3\sigma^2}{2}.$$

Portanto, o $EQM(\hat{\theta}_2) = \frac{3\sigma^2}{2}$.

Cont. do exercício

- Sol. (b): Note ainda que

$$EQM(\hat{\theta}_2) = Var(\hat{\theta}_2) = Var\left(\frac{2X_1 - X_6 + X_4}{2}\right) = \frac{1}{4}Var(2X_1 + (-X_6) + X_4)$$

isto é

$$EQM(\hat{\theta}_2) = \frac{1}{4}(Var(2X_1) + Var(-X_6) + Var(X_4))$$

ou seja,

$$EQM(\hat{\theta}_2) = \frac{1}{4}(4Var(X_1) + Var(X_6) + Var(X_4)) = \frac{1}{4}(4\sigma^2 + \sigma^2 + \sigma^2) = \frac{3\sigma^2}{2}.$$

Portanto, o $EQM(\hat{\theta}_2) = \frac{3\sigma^2}{2}$.

Cont. do exercício

- Sol. (b): Note ainda que

$$EQM(\hat{\theta}_2) = Var(\hat{\theta}_2) = Var\left(\frac{2X_1 - X_6 + X_4}{2}\right) = \frac{1}{4}Var(2X_1 + (-X_6) + X_4)$$

isto é

$$EQM(\hat{\theta}_2) = \frac{1}{4}(Var(2X_1) + Var(-X_6) + Var(X_4))$$

ou seja,

$$EQM(\hat{\theta}_2) = \frac{1}{4}(4Var(X_1) + Var(X_6) + Var(X_4)) = \frac{1}{4}(4\sigma^2 + \sigma^2 + \sigma^2) = \frac{3\sigma^2}{2}.$$

Portanto, o $EQM(\hat{\theta}_2) = \frac{3\sigma^2}{2}$.

Cont. do exercício

- Sol. (b): Note ainda que

$$\text{EQM}(\hat{\theta}_2) = Var(\hat{\theta}_2) = Var\left(\frac{2X_1 - X_6 + X_4}{2}\right) = \frac{1}{4}Var(2X_1 + (-X_6) + X_4)$$

isto é

$$\text{EQM}(\hat{\theta}_2) = \frac{1}{4}(Var(2X_1) + Var(-X_6) + Var(X_4))$$

ou seja,

$$\text{EQM}(\hat{\theta}_2) = \frac{1}{4}(4Var(X_1) + Var(X_6) + Var(X_4)) = \frac{1}{4}(4\sigma^2 + \sigma^2 + \sigma^2) = \frac{3\sigma^2}{2}.$$

Portanto, o $\text{EQM}(\hat{\theta}_2) = \frac{3\sigma^2}{2}$.

Cont. do exercício

- Sol. (b): Note ainda que

$$\text{EQM}(\hat{\theta}_2) = Var(\hat{\theta}_2) = Var\left(\frac{2X_1 - X_6 + X_4}{2}\right) = \frac{1}{4}Var(2X_1 + (-X_6) + X_4)$$

isto é

$$\text{EQM}(\hat{\theta}_2) = \frac{1}{4}(Var(2X_1) + Var(-X_6) + Var(X_4))$$

ou seja,

$$\text{EQM}(\hat{\theta}_2) = \frac{1}{4}(4Var(X_1) + Var(X_6) + Var(X_4)) = \frac{1}{4}(4\sigma^2 + \sigma^2 + \sigma^2) = \frac{3\sigma^2}{2}.$$

Portanto, o $\text{EQM}(\hat{\theta}_2) = \frac{3\sigma^2}{2}$.

Cont. do exercício

- Sol. (b): Note ainda que

$$\text{EQM}(\hat{\theta}_2) = Var(\hat{\theta}_2) = Var\left(\frac{2X_1 - X_6 + X_4}{2}\right) = \frac{1}{4}Var(2X_1 + (-X_6) + X_4)$$

isto é

$$\text{EQM}(\hat{\theta}_2) = \frac{1}{4}(Var(2X_1) + Var(-X_6) + Var(X_4))$$

ou seja,

$$\text{EQM}(\hat{\theta}_2) = \frac{1}{4}(4Var(X_1) + Var(X_6) + Var(X_4)) = \frac{1}{4}(4\sigma^2 + \sigma^2 + \sigma^2) = \frac{3\sigma^2}{2}.$$

Portanto, o $\text{EQM}(\hat{\theta}_2) = \frac{3\sigma^2}{2}$.

Cont. do exercício

- Sol. (b): Note ainda que

$$\mathrm{EQM}(\hat{\theta}_2) = Var(\hat{\theta}_2) = Var\left(\frac{2X_1 - X_6 + X_4}{2}\right) = \frac{1}{4}Var(2X_1 + (-X_6) + X_4)$$

isto é

$$\mathrm{EQM}(\hat{\theta}_2) = \frac{1}{4}(Var(2X_1) + Var(-X_6) + Var(X_4))$$

ou seja,

$$\mathrm{EQM}(\hat{\theta}_2) = \frac{1}{4}(4Var(X_1) + Var(X_6) + Var(X_4)) = \frac{1}{4}(4\sigma^2 + \sigma^2 + \sigma^2) = \frac{3\sigma^2}{2}.$$

Portanto, o $\mathrm{EQM}(\hat{\theta}_2) = \frac{3\sigma^2}{2}$.

Cont. do exercício

- Sol. (b): Note ainda que

$$\mathrm{EQM}(\hat{\theta}_2) = Var(\hat{\theta}_2) = Var\left(\frac{2X_1 - X_6 + X_4}{2}\right) = \frac{1}{4}Var(2X_1 + (-X_6) + X_4)$$

isto é

$$\mathrm{EQM}(\hat{\theta}_2) = \frac{1}{4}(Var(2X_1) + Var(-X_6) + Var(X_4))$$

ou seja,

$$\mathrm{EQM}(\hat{\theta}_2) = \frac{1}{4}(4Var(X_1) + Var(X_6) + Var(X_4)) = \frac{1}{4}(4\sigma^2 + \sigma^2 + \sigma^2) = \frac{3\sigma^2}{2}.$$

Portanto, o $\mathrm{EQM}(\hat{\theta}_2) = \frac{3\sigma^2}{2}$.

Cont. do exercício

- Sol. (b): Note ainda que

$$\mathrm{EQM}(\hat{\theta}_2) = Var(\hat{\theta}_2) = Var\left(\frac{2X_1 - X_6 + X_4}{2}\right) = \frac{1}{4}Var(2X_1 + (-X_6) + X_4)$$

isto é

$$\mathrm{EQM}(\hat{\theta}_2) = \frac{1}{4}(Var(2X_1) + Var(-X_6) + Var(X_4))$$

ou seja,

$$\mathrm{EQM}(\hat{\theta}_2) = \frac{1}{4}(4Var(X_1) + Var(X_6) + Var(X_4)) = \frac{1}{4}(4\sigma^2 + \sigma^2 + \sigma^2) = \frac{3\sigma^2}{2}.$$

Portanto, o $\mathrm{EQM}(\hat{\theta}_2) = \frac{3\sigma^2}{2}$.

Cont. do exercício

- Sol. (b): Note ainda que

$$\mathrm{EQM}(\hat{\theta}_2) = Var(\hat{\theta}_2) = Var\left(\frac{2X_1 - X_6 + X_4}{2}\right) = \frac{1}{4}Var(2X_1 + (-X_6) + X_4)$$

isto é

$$\mathrm{EQM}(\hat{\theta}_2) = \frac{1}{4}(Var(2X_1) + Var(-X_6) + Var(X_4))$$

ou seja,

$$\mathrm{EQM}(\hat{\theta}_2) = \frac{1}{4}(4Var(X_1) + Var(X_6) + Var(X_4)) = \frac{1}{4}(4\sigma^2 + \sigma^2 + \sigma^2) = \frac{3\sigma^2}{2}.$$

Portanto, o $\mathrm{EQM}(\hat{\theta}_2) = \frac{3\sigma^2}{2}$.

Cont. do exercício

- Sol. (b): Dessa forma, note que obtivemos que:
  - $\text{EQM}(\hat{\theta}_1) = Var(\hat{\theta}_1) = \frac{\sigma^2}{7}$,
  - $\text{EQM}(\hat{\theta}_2) = Var(\hat{\theta}_2) = \frac{3\sigma^2}{2}$.

  Logo, como $Var(\hat{\theta}_1) < Var(\hat{\theta}_2)$ temos que $\hat{\theta}_1$ é preferível a $\hat{\theta}_2$ na estimação de μ.
- Note ainda que a eficiência relativa de $\hat{\theta}_2$ em relação a $\hat{\theta}_1$ é dada por

$$\frac{\text{EQM}(\hat{\theta}_1)}{\text{EQM}(\hat{\theta}_2)} = \frac{\frac{\sigma^2}{7}}{\frac{3\sigma^2}{2}} = \frac{2}{21} < 1.$$

Portanto, $\hat{\theta}_1$ é mais eficiente do que $\hat{\theta}_2$.

Cont. do exercício

- Sol. (b): Dessa forma, note que obtivemos que:
  - $\text{EQM}(\hat{\theta}_1) = Var(\hat{\theta}_1) = \frac{\sigma^2}{7}$,
  - $\text{EQM}(\hat{\theta}_2) = Var(\hat{\theta}_2) = \frac{3\sigma^2}{2}$.

  Logo, como $Var(\hat{\theta}_1) < Var(\hat{\theta}_2)$ temos que $\hat{\theta}_1$ é preferível a $\hat{\theta}_2$ na estimação de μ.
- Note ainda que a eficiência relativa de $\hat{\theta}_2$ em relação a $\hat{\theta}_1$ é dada por

$$\frac{\text{EQM}(\hat{\theta}_1)}{\text{EQM}(\hat{\theta}_2)} = \frac{\frac{\sigma^2}{7}}{\frac{3\sigma^2}{2}} = \frac{2}{21} < 1.$$

Portanto, $\hat{\theta}_1$ é mais eficiente do que $\hat{\theta}_2$.

Cont. do exercício

- Sol. (b): Dessa forma, note que obtivemos que:
  - $\text{EQM}(\hat{\theta}_1) = Var(\hat{\theta}_1) = \frac{\sigma^2}{7}$,
  - $\text{EQM}(\hat{\theta}_2) = Var(\hat{\theta}_2) = \frac{3\sigma^2}{2}$.

  Logo, como $Var(\hat{\theta}_1) < Var(\hat{\theta}_2)$ temos que $\hat{\theta}_1$ é preferível a $\hat{\theta}_2$ na estimação de μ.
- Note ainda que a eficiência relativa de $\hat{\theta}_2$ em relação a $\hat{\theta}_1$ é dada por

$$\frac{\text{EQM}(\hat{\theta}_1)}{\text{EQM}(\hat{\theta}_2)} = \frac{\frac{\sigma^2}{7}}{\frac{3\sigma^2}{2}} = \frac{2}{21} < 1.$$

  Portanto, $\hat{\theta}_1$ é mais eficiente do que $\hat{\theta}_2$.

Cont. do exercício

- Sol. (b): Dessa forma, note que obtivemos que:
  - $\text{EQM}(\hat{\theta}_1) = Var(\hat{\theta}_1) = \frac{\sigma^2}{7}$,
  - $\text{EQM}(\hat{\theta}_2) = Var(\hat{\theta}_2) = \frac{3\sigma^2}{2}$.

  Logo, como $Var(\hat{\theta}_1) < Var(\hat{\theta}_2)$ temos que $\hat{\theta}_1$ é preferível a $\hat{\theta}_2$ na estimação de μ.
- Note ainda que a eficiência relativa de $\hat{\theta}_2$ em relação a $\hat{\theta}_1$ é dada por

$$\frac{\text{EQM}(\hat{\theta}_1)}{\text{EQM}(\hat{\theta}_2)} = \frac{\frac{\sigma^2}{7}}{\frac{3\sigma^2}{2}} = \frac{2}{21} < 1.$$

  Portanto, $\hat{\theta}_1$ é mais eficiente do que $\hat{\theta}_2$.

Cont. do exercício

- Sol. (b): Dessa forma, note que obtivemos que:
  - $\text{EQM}(\hat{\theta}_1) = Var(\hat{\theta}_1) = \frac{\sigma^2}{7}$,
  - $\text{EQM}(\hat{\theta}_2) = Var(\hat{\theta}_2) = \frac{3\sigma^2}{2}$.

  Logo, como $Var(\hat{\theta}_1) < Var(\hat{\theta}_2)$ temos que $\hat{\theta}_1$ é preferível a $\hat{\theta}_2$ na estimação de μ.
- Note ainda que a eficiência relativa de $\hat{\theta}_2$ em relação a $\hat{\theta}_1$ é dada por

$$\frac{\text{EQM}(\hat{\theta}_1)}{\text{EQM}(\hat{\theta}_2)} = \frac{\frac{\sigma^2}{7}}{\frac{3\sigma^2}{2}} = \frac{2}{21} < 1.$$

  Portanto, $\hat{\theta}_1$ é mais eficiente do que $\hat{\theta}_2$.

Métodos de estimação - Método de momentos

- Até agora vimos alguns critérios de avaliação de estimadores.
- Veremos, neste curso, alguns métodos para obter estimadores pontuais, a saber: método de momentos e o método de máxima verossimilhança.
- O método que veremos agora (método de momentos) fornece estimadores que, na maioria dos casos, são bem simples de serem obtidos.
- Veremos, que a ideia da obtenção de estimadores por meio do método de momentos é bem simples e intuitiva, consistindo em obter estimadores igualando-se momentos populacionais aos seus respectivos momentos amostrais.

Métodos de estimação - Método de momentos

- Até agora vimos alguns critérios de avaliação de estimadores.
- Veremos, neste curso, alguns métodos para obter estimadores pontuais, a saber: método de momentos e o método de máxima verossimilhança.
- O método que veremos agora (método de momentos) fornece estimadores que, na maioria dos casos, são bem simples de serem obtidos.
- Veremos, que a ideia da obtenção de estimadores por meio do método de momentos é bem simples e intuitiva, consistindo em obter estimadores igualando-se momentos populacionais aos seus respectivos momentos amostrais.

Métodos de estimação - Método de momentos

- Até agora vimos alguns critérios de avaliação de estimadores.
- Veremos, neste curso, alguns métodos para obter estimadores pontuais, a saber: método de momentos e o método de máxima verossimilhança.
- O método que veremos agora (método de momentos) fornece estimadores que, na maioria dos casos, são bem simples de serem obtidos.
- Veremos, que a ideia da obtenção de estimadores por meio do método de momentos é bem simples e intuitiva, consistindo em obter estimadores igualando-se momentos populacionais aos seus respectivos momentos amostrais.

Métodos de estimação - Método de momentos

- Até agora vimos alguns critérios de avaliação de estimadores.
- Veremos, neste curso, alguns métodos para obter estimadores pontuais, a saber: método de momentos e o método de máxima verossimilhança.
- O método que veremos agora (método de momentos) fornece estimadores que, na maioria dos casos, são bem simples de serem obtidos.
- Veremos, que a ideia da obtenção de estimadores por meio do método de momentos é bem simples e intuitiva, consistindo em obter estimadores igualando-se momentos populacionais aos seus respectivos momentos amostrais.

Método de momentos

- Antes de estudarmos o método de momentos é importante ter em mente os conceitos a seguir:

Momentos

Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória proveniente de uma população com função de probabilidade (ou densidade) $f(x)$. O k-ésimo momento populacional é definido como

$$E(X^k), \quad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

O correspondente k-ésimo momento amostral é definido como

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k, \quad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

- Por exemplo, o primeiro momento da população é $E(X)$ (média da população), enquanto que o primeiro momento da amostra é $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}$ (média da amostra).

Método de momentos

- Antes de estudarmos o método de momentos é importante ter em mente os conceitos a seguir:

Momentos

Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória proveniente de uma população com função de probabilidade (ou densidade) $f(x)$. O k-ésimo momento populacional é definido como

$$E(X^k), \quad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

O correspondente k-ésimo momento amostral é definido como

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k, \quad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

- Por exemplo, o primeiro momento da população é $E(X)$ (média da população), enquanto que o primeiro momento da amostra é $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}$ (média da amostra).

Método de momentos

- Antes de estudarmos o método de momentos é importante ter em mente os conceitos a seguir:

Momentos

Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória proveniente de uma população com função de probabilidade (ou densidade) $f(x)$. O k-ésimo momento populacional é definido como

$$E(X^k), \quad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

O correspondente k-ésimo momento amostral é definido como

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k, \quad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

- Por exemplo, o primeiro momento da população é $E(X)$ (média da população), enquanto que o primeiro momento da amostra é $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}$ (média da amostra).

Método de momentos

- Antes de estudarmos o método de momentos é importante ter em mente os conceitos a seguir:

Momentos

Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória proveniente de uma população com função de probabilidade (ou densidade) $f(x)$. O k-ésimo momento populacional é definido como

$$E(X^k), \quad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

O correspondente k-ésimo momento amostral é definido como

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k, \quad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

- Por exemplo, o primeiro momento da população é $E(X)$ (média da população), enquanto que o primeiro momento da amostra é $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}$ (média da amostra).

Método de momentos

- Antes de estudarmos o método de momentos é importante ter em mente os conceitos a seguir:

Momentos

Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória proveniente de uma população com função de probabilidade (ou densidade) $f(x)$. O k-ésimo momento populacional é definido como

$$E(X^k), \quad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

O correspondente k-ésimo momento amostral é definido como

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k, \quad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

- Por exemplo, o primeiro momento da população é $E(X)$ (média da população), enquanto que o primeiro momento da amostra é $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}$ (média da amostra).

Método de momentos

- Antes de estudarmos o método de momentos é importante ter em mente os conceitos a seguir:

Momentos

Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória proveniente de uma população com função de probabilidade (ou densidade) $f(x)$. O k-ésimo momento populacional é definido como

$$E(X^k), \quad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

O correspondente k-ésimo momento amostral é definido como

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k, \quad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

- Por exemplo, o primeiro momento da população é $E(X)$ (média da população), enquanto que o primeiro momento da amostra é $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}$ (média da amostra).

Método de momentos

- Antes de estudarmos o método de momentos é importante ter em mente os conceitos a seguir:

Momentos

Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória proveniente de uma população com função de probabilidade (ou densidade) $f(x)$. O k-ésimo momento populacional é definido como

$$E(X^k), \quad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

O correspondente k-ésimo momento amostral é definido como

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k, \quad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

- Por exemplo, o primeiro momento da população é $E(X)$ (média da população), enquanto que o primeiro momento da amostra é $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}$ (média da amostra).

Método de momentos

Os estimadores de momentos são obtidos da seguinte forma:

Método de momentos

Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória proveniente de uma população com função de probabilidade (ou densidade) $f(x)$ dependendo de m parâmetros desconhecidos, digamas $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$. Os estimadores de momentos, denotados por $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_m$, são obtidos igualando os m primeiros momentos populacionais aos seus respectivos m primeiros momentos amostrais e resolvendo as equações resultantes em termos dos parâmetros desconhecidos.

Método de momentos

Os estimadores de momentos são obtidos da seguinte forma:

Método de momentos

Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória proveniente de uma população com função de probabilidade (ou densidade) $f(x)$ dependendo de m parâmetros desconhecidos, digamas $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$. Os estimadores de momentos, denotados por $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_m$, são obtidos igualando os m primeiros momentos populacionais aos seus respectivos m primeiros momentos amostrais e resolvendo as equações resultantes em termos dos parâmetros desconhecidos.

Exemplo

Exemplo: Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória proveniente de uma população X com distribuição exponencial de parâmetro λ. Vamos obter o estimador de momentos do parâmetro desconhecido λ.

- Note que nesse caso, como só temos um único parâmetro (λ), então o estimador de momentos de λ é obtido resolvendo a equação

$$E(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Recorde que se X é exponencial de parâmetro λ então sua média é $E(X) = \frac{1}{\lambda}$. Logo, substituindo na equação acima temos que

$$E(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} = \bar{X},$$

ou seja,

$$\hat{\lambda} = \bar{X}^{-1}.$$

Portanto, temos que $\hat{\lambda} = \bar{X}^{-1}$ é o estimador de momentos do parâmetro λ da exponencial.

Exemplo

Exemplo: Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória proveniente de uma população X com distribuição exponencial de parâmetro λ. Vamos obter o estimador de momentos do parâmetro desconhecido λ.

- Note que nesse caso, como só temos um único parâmetro (λ), então o estimador de momentos de λ é obtido resolvendo a equação

$$E(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Recorde que se X é exponencial de parâmetro λ então sua média é $E(X) = \frac{1}{\lambda}$. Logo, substituindo na equação acima temos que

$$E(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} = \bar{X},$$

ou seja,

$$\hat{\lambda} = \bar{X}^{-1}.$$

Portanto, temos que $\hat{\lambda} = \bar{X}^{-1}$ é o estimador de momentos do parâmetro λ da exponencial.

Exemplo

Exemplo: Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória proveniente de uma população X com distribuição exponencial de parâmetro λ. Vamos obter o estimador de momentos do parâmetro desconhecido λ.

- Note que nesse caso, como só temos um único parâmetro (λ), então o estimador de momentos de λ é obtido resolvendo a equação

$$E(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Recorde que se X é exponencial de parâmetro λ então sua média é $E(X) = \frac{1}{\lambda}$. Logo, substituindo na equação acima temos que

$$E(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} = \bar{X},$$

ou seja,

$$\hat{\lambda} = \bar{X}^{-1}.$$

Portanto, temos que $\hat{\lambda} = \bar{X}^{-1}$ é o estimador de momentos do parâmetro λ da exponencial.

Exemplo

Exemplo: Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória proveniente de uma população X com distribuição exponencial de parâmetro λ. Vamos obter o estimador de momentos do parâmetro desconhecido λ.

- Note que nesse caso, como só temos um único parâmetro (λ), então o estimador de momentos de λ é obtido resolvendo a equação

$$E(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Recorde que se X é exponencial de parâmetro λ então sua média é $E(X) = \frac{1}{\lambda}$.
Logo, substituindo na equação acima temos que

$$E(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} = \bar{X},$$

ou seja,

$$\hat{\lambda} = \bar{X}^{-1}.$$

Portanto, temos que $\hat{\lambda} = \bar{X}^{-1}$ é o estimador de momentos do parâmetro λ da exponencial.

Exemplo

Exemplo: Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória proveniente de uma população X com distribuição exponencial de parâmetro λ. Vamos obter o estimador de momentos do parâmetro desconhecido λ.

- Note que nesse caso, como só temos um único parâmetro (λ), então o estimador de momentos de λ é obtido resolvendo a equação

$$E(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Recorde que se X é exponencial de parâmetro λ então sua média é $E(X) = \frac{1}{\lambda}$. Logo, substituindo na equação acima temos que

$$E(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} = \bar{X},$$

ou seja,

$$\hat{\lambda} = \bar{X}^{-1}.$$

Portanto, temos que $\hat{\lambda} = \bar{X}^{-1}$ é o estimador de momentos do parâmetro λ da exponencial.

Exemplo

Exemplo: Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória proveniente de uma população X com distribuição exponencial de parâmetro λ. Vamos obter o estimador de momentos do parâmetro desconhecido λ.

- Note que nesse caso, como só temos um único parâmetro (λ), então o estimador de momentos de λ é obtido resolvendo a equação

$$E(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Recorde que se X é exponencial de parâmetro λ então sua média é $E(X) = \frac{1}{\lambda}$. Logo, substituindo na equação acima temos que

$$E(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} = \bar{X},$$

ou seja,

$$\hat{\lambda} = \bar{X}^{-1}.$$

Portanto, temos que $\hat{\lambda} = \bar{X}^{-1}$ é o estimador de momentos do parâmetro λ da exponencial.

Outro exemplo

Exemplo: Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória proveniente de uma população X com distribuição normal de média μ e variância σ^2.

- Note que nesse caso, como temos dois parâmetros, então os estimadores de momentos de μ e σ^2 são obtidos resolvendo as equações

$$\begin{cases} E(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \\ E(X^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \end{cases}$$

Note que da primeira equação, como $E(X) = \mu$, resulta que

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}.$$

Observe ainda que $E(X^2) = Var(X) + E(X)^2 = \sigma^2 + \mu^2$. Logo, substituindo na segunda equação temos que

$$\sigma^2 + \mu^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \Leftrightarrow \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \mu^2$$

Outro exemplo

Exemplo: Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória proveniente de uma população X com distribuição normal de média μ e variância σ^2.

- Note que nesse caso, como temos dois parâmetros, então os estimadores de momentos de μ e σ^2 são obtidos resolvendo as equações

$$\begin{cases} E(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \\ E(X^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \end{cases}$$

Note que da primeira equação, como $E(X) = \mu$, resulta que

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}.$$

Observe ainda que $E(X^2) = Var(X) + E(X)^2 = \sigma^2 + \mu^2$. Logo, substituindo na segunda equação temos que

$$\sigma^2 + \mu^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \Leftrightarrow \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \mu^2$$

Outro exemplo

Exemplo: Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória proveniente de uma população X com distribuição normal de média μ e variância σ^2.

- Note que nesse caso, como temos dois parâmetros, então os estimadores de momentos de μ e σ^2 são obtidos resolvendo as equações

$$\begin{cases} E(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \\ E(X^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \end{cases}$$

Note que da primeira equação, como $E(X) = \mu$, resulta que

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}.$$

Observe ainda que $E(X^2) = Var(X) + E(X)^2 = \sigma^2 + \mu^2$. Logo, substituindo na segunda equação temos que

$$\sigma^2 + \mu^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \Leftrightarrow \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \mu^2$$

Outro exemplo

Exemplo: Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória proveniente de uma população X com distribuição normal de média μ e variância σ^2.

- Note que nesse caso, como temos dois parâmetros, então os estimadores de momentos de μ e σ^2 são obtidos resolvendo as equações

$$\begin{cases} E(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \\ E(X^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \end{cases}$$

Note que da primeira equação, como $E(X) = \mu$, resulta que

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}.$$

Observe ainda que $E(X^2) = Var(X) + E(X)^2 = \sigma^2 + \mu^2$. Logo, substituindo na segunda equação temos que

$$\sigma^2 + \mu^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \Leftrightarrow \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \mu^2$$

Cont. do exemplo

- Como temos que

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \mu^2,$$

então

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \hat{\mu}^2,$$

ou seja,

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X}^2 = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2.$$

- Portanto, temos que $\hat{\mu} = \bar{X}$ e $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ são estimadores de momentos dos parâmetros μ e σ^2, respectivamente.
- Note que o estimador de momentos de σ^2 é viesado.

Cont. do exemplo

- Como temos que

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \mu^2,$$

então

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \hat{\mu}^2,$$

ou seja,

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X}^2 = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2.$$

- Portanto, temos que $\hat{\mu} = \bar{X}$ e $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ são estimadores de momentos dos parâmetros μ e σ^2, respectivamente.
- Note que o estimador de momentos de σ^2 é viesado.

Cont. do exemplo

- Como temos que

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \mu^2,$$

então

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \hat{\mu}^2,$$

ou seja,

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X}^2 = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2.$$

- Portanto, temos que $\hat{\mu} = \bar{X}$ e $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ são estimadores de momentos dos parâmetros μ e σ^2, respectivamente.
- Note que o estimador de momentos de σ^2 é viesado.

Cont. do exemplo

- Como temos que
$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \mu^2,$$
então
$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \hat{\mu}^2,$$
ou seja,
$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X}^2 = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2.$$
- Portanto, temos que $\hat{\mu} = \bar{X}$ e $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ são estimadores de momentos dos parâmetros μ e σ^2, respectivamente.
- Note que o estimador de momentos de σ^2 é viesado.

Cont. do exemplo

- Como temos que
$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \mu^2,$$
então
$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \hat{\mu}^2,$$
ou seja,
$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X}^2 = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2.$$
- Portanto, temos que $\hat{\mu} = \bar{X}$ e $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ são estimadores de momentos dos parâmetros μ e σ^2, respectivamente.
- Note que o estimador de momentos de σ^2 é viesado.

Cont. do exemplo

- Como temos que
$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \mu^2,$$
então
$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \hat{\mu}^2,$$
ou seja,
$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X}^2 = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2.$$
- Portanto, temos que $\hat{\mu} = \bar{X}$ e $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ são estimadores de momentos dos parâmetros μ e σ^2, respectivamente.
- Note que o estimador de momentos de σ^2 é viesado.

Cont. do exemplo

- Como temos que
$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \mu^2,$$
então
$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \hat{\mu}^2,$$
ou seja,
$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X}^2 = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2.$$
- Portanto, temos que $\hat{\mu} = \bar{X}$ e $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ são estimadores de momentos dos parâmetros μ e σ^2, respectivamente.
- Note que o estimador de momentos de σ^2 é viesado.

Cont. do exemplo

- Como temos que
$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \mu^2,$$
então
$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \hat{\mu}^2,$$
ou seja,
$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X}^2 = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2.$$
- Portanto, temos que $\hat{\mu} = \bar{X}$ e $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ são estimadores de momentos dos parâmetros μ e σ^2, respectivamente.
- Note que o estimador de momentos de σ^2 é viesado.