Probabilidade e estatística - Aula 1

Introdução à probabilidade

Dr. Giannini Italino Alves Vieira

Universidade Federal do Ceará - Campus de Crateús

Fevereiro, 2024

Revisão sobre conjuntos

Faremos, a seguir, uma breve revisão sobre alguns conceitos relacionados à teoria de conjuntos, que serão importantes para o bom entendimento dos conceitos que veremos no curso de probabilidade e estatística.

Definição (Conjunto): Um conjunto é uma coleção de elementos distintos, no qual os elementos são não-ordenados.

Uma maneira de se especificar um conjunto é listar seus elementos dentro de chaves. Por exemplo:

$$A = \{0, 1, 2, \ldots, 10\}.$$

Uma outra forma de se representar um conjunto é por meio de uma regra que determina os elementos do conjunto. Por exemplo:

$$B = \{x : x \text{ é natural par}\}$$

e

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y\}$$

Revisão sobre conjuntos

Faremos, a seguir, uma breve revisão sobre alguns conceitos relacionados à teoria de conjuntos, que serão importantes para o bom entendimento dos conceitos que veremos no curso de probabilidade e estatística.

> **Definição** (Conjunto): Um conjunto é uma coleção de elementos distintos, no qual os elementos são não-ordenados.

Uma maneira de se especificar um conjunto é listar seus elementos dentro de chaves. Por exemplo:

$$A = \{0, 1, 2, \ldots, 10\}.$$

Uma outra forma de se representar um conjunto é por meio de uma regra que determina os elementos do conjunto. Por exemplo:

$$B = \{x : x \text{ é natural par}\}$$

e

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y\}$$

Revisão sobre conjuntos

Faremos, a seguir, uma breve revisão sobre alguns conceitos relacionados à teoria de conjuntos, que serão importantes para o bom entendimento dos conceitos que veremos no curso de probabilidade e estatística.

> **Definição** (Conjunto): Um conjunto é uma coleção de elementos distintos, no qual os elementos são não-ordenados.

Uma maneira de se especificar um conjunto é listar seus elementos dentro de chaves. Por exemplo:

$$A = \{0, 1, 2, \ldots, 10\}.$$

Uma outra forma de se representar um conjunto é por meio de uma regra que determina os elementos do conjunto. Por exemplo:

$$B = \{x : x \text{ é natural par}\}$$

e

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y\}$$

Revisão sobre conjuntos

Faremos, a seguir, uma breve revisão sobre alguns conceitos relacionados à teoria de conjuntos, que serão importantes para o bom entendimento dos conceitos que veremos no curso de probabilidade e estatística.

> **Definição** (Conjunto): Um conjunto é uma coleção de elementos distintos, no qual os elementos são não-ordenados.

Uma maneira de se especificar um conjunto é listar seus elementos dentro de chaves. Por exemplo:

$$A = \{0, 1, 2, \ldots, 10\}.$$

Uma outra forma de se representar um conjunto é por meio de uma regra que determina os elementos do conjunto. Por exemplo:

$$B = \{x : x \text{ é natural par}\}$$

e

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y\}$$

Revisão sobre conjuntos

- Se um dado elemento x faz parte de um conjunto A, dizemos que x pertence a A e denotamos da forma $x \in A$. Caso contrário, dizemos que x não pertence a A e denotamos por $x \notin A$.
  - Por exemplo, no conjunto C acima, temos que $(3, 2) \in C$ enquanto que $(2, 3) \notin C$.
- O tamanho, ou cardinalidade de um conjunto A, é dado pela quantidade de elementos que esse conjunto possui. Denotamos a cardinalidade do conjunto A por $||A||$.
- A cardinalidade de um conjunto pode ser finita, infinita enumerável ou infinita não-enumerável.
- Dizemos que o conjunto A é infinito enumerável quando este tem exatamente a mesma cardinalidade do conjunto dos números naturais. Matematicamente, significa que, existe uma função bijetora cujo domínio é igual a A e a imagem é igual ao conjunto dos naturais.
- Um conjunto é enumerável se ele for finito ou infinito enumerável. Um conjunto é não-enumerável se ele não for enumerável.

Revisão sobre conjuntos

- Se um dado elemento x faz parte de um conjunto A, dizemos que x pertence a A e denotamos da forma $x \in A$. Caso contrário, dizemos que x não pertence a A e denotamos por $x \notin A$.
  - Por exemplo, no conjunto C acima, temos que $(3, 2) \in C$ enquanto que $(2, 3) \notin C$.
- O tamanho, ou cardinalidade de um conjunto A, é dado pela quantidade de elementos que esse conjunto possui. Denotamos a cardinalidade do conjunto A por $||A||$.
- A cardinalidade de um conjunto pode ser finita, infinita enumerável ou infinita não-enumerável.
- Dizemos que o conjunto A é infinito enumerável quando este tem exatamente a mesma cardinalidade do conjunto dos números naturais. Matematicamente, significa que, existe uma função bijetora cujo domínio é igual a A e a imagem é igual ao conjunto dos naturais.
- Um conjunto é enumerável se ele for finito ou infinito enumerável. Um conjunto é não-enumerável se ele não for enumerável.

Revisão sobre conjuntos

- Se um dado elemento x faz parte de um conjunto A, dizemos que x pertence a A e denotamos da forma $x \in A$. Caso contrário, dizemos que x não pertence a A e denotamos por $x \notin A$.
  - Por exemplo, no conjunto C acima, temos que $(3, 2) \in C$ enquanto que $(2, 3) \notin C$.
- O tamanho, ou cardinalidade de um conjunto A, é dado pela quantidade de elementos que esse conjunto possui. Denotamos a cardinalidade do conjunto A por $||A||$.
- A cardinalidade de um conjunto pode ser finita, infinita enumerável ou infinita não-enumerável.
- Dizemos que o conjunto A é infinito enumerável quando este tem exatamente a mesma cardinalidade do conjunto dos números naturais. Matematicamente, significa que, existe uma função bijetora cujo domínio é igual a A e a imagem é igual ao conjunto dos naturais.
- Um conjunto é enumerável se ele for finito ou infinito enumerável. Um conjunto é não-enumerável se ele não for enumerável.

Revisão sobre conjuntos

- Se um dado elemento x faz parte de um conjunto A, dizemos que x pertence a A e denotamos da forma $x \in A$. Caso contrário, dizemos que x não pertence a A e denotamos por $x \notin A$.
  - Por exemplo, no conjunto C acima, temos que $(3, 2) \in C$ enquanto que $(2, 3) \notin C$.
- O tamanho, ou cardinalidade de um conjunto A, é dado pela quantidade de elementos que esse conjunto possui. Denotamos a cardinalidade do conjunto A por $||A||$.
- A cardinalidade de um conjunto pode ser finita, infinita enumerável ou infinita não-enumerável.
- Dizemos que o conjunto A é infinito enumerável quando este tem exatamente a mesma cardinalidade do conjunto dos números naturais. Matematicamente, significa que, existe uma função bijetora cujo domínio é igual a A e a imagem é igual ao conjunto dos naturais.
- Um conjunto é enumerável se ele for finito ou infinito enumerável. Um conjunto é não-enumerável se ele não for enumerável.

Revisão sobre conjuntos

- Se um dado elemento x faz parte de um conjunto A, dizemos que x pertence a A e denotamos da forma $x \in A$. Caso contrário, dizemos que x não pertence a A e denotamos por $x \notin A$.
  - Por exemplo, no conjunto C acima, temos que $(3, 2) \in C$ enquanto que $(2, 3) \notin C$.
- O tamanho, ou cardinalidade de um conjunto A, é dado pela quantidade de elementos que esse conjunto possui. Denotamos a cardinalidade do conjunto A por $||A||$.
- A cardinalidade de um conjunto pode ser finita, infinita enumerável ou infinita não-enumerável.
- Dizemos que o conjunto A é infinito enumerável quando este tem exatamente a mesma cardinalidade do conjunto dos números naturais. Matematicamente, significa que, existe uma função bijetora cujo domínio é igual a A e a imagem é igual ao conjunto dos naturais.
- Um conjunto é enumerável se ele for finito ou infinito enumerável. Um conjunto é não-enumerável se ele não for enumerável.

Exemplos

- As cardinalidades dos conjuntos A e B definidos acima são $||A|| = 11$ e $||B|| = \infty$.
- Os conjuntos A e B definidos acima são enumeráveis.
- O conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ é outro exemplo de conjunto enumerável. Note que podemos definir uma bijeção f de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{N}$ da seguinte forma

$$f(n) = \begin{cases} 2n - 1, \text{ se } n \text{ for positivo;} \\ -2n, \text{ se } n \text{ for negativo ou zero.} \end{cases}$$

- O conjunto $\mathbb{R}$ é um exemplo de um conjunto infinito não enumerável. Mas ainda, é possível mostrar que nenhum intervalo real é enumerável.

Exemplos

- As cardinalidades dos conjuntos A e B definidos acima são $||A|| = 11$ e $||B|| = \infty$.
- Os conjuntos A e B definidos acima são enumeráveis.
- O conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ é outro exemplo de conjunto enumerável. Note que podemos definir uma bijeção f de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{N}$ da seguinte forma

$$f(n) = \begin{cases} 2n - 1, \text{ se } n \text{ for positivo;} \\ -2n, \text{ se } n \text{ for negativo ou zero.} \end{cases}$$

- O conjunto $\mathbb{R}$ é um exemplo de um conjunto infinito não enumerável. Mas ainda, é possível mostrar que nenhum intervalo real é enumerável.

Exemplos

- As cardinalidades dos conjuntos A e B definidos acima são $||A|| = 11$ e $||B|| = \infty$.
- Os conjuntos A e B definidos acima são enumeráveis.
- O conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ é outro exemplo de conjunto enumerável. Note que podemos definir uma bijeção f de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{N}$ da seguinte forma

$$f(n) = \begin{cases} 2n - 1, \text{ se } n \text{ for positivo;} \\ -2n, \text{ se } n \text{ for negativo ou zero.} \end{cases}$$

- O conjunto $\mathbb{R}$ é um exemplo de um conjunto infinito não enumerável. Mas ainda, é possível mostrar que nenhum intervalo real é enumerável.

Exemplos

- As cardinalidades dos conjuntos A e B definidos acima são $||A|| = 11$ e $||B|| = \infty$.
- Os conjuntos A e B definidos acima são enumeráveis.
- O conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ é outro exemplo de conjunto enumerável. Note que podemos definir uma bijeção f de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{N}$ da seguinte forma

$$f(n) = \begin{cases} 2n - 1, \text{ se } n \text{ for positivo;} \\ -2n, \text{ se } n \text{ for negativo ou zero.} \end{cases}$$

- O conjunto $\mathbb{R}$ é um exemplo de um conjunto infinito não enumerável. Mas ainda, é possível mostrar que nenhum intervalo real é enumerável.

Revisão sobre conjuntos

- Dois conjuntos, digamos A e B, podem ainda estarem relacionados por meio de uma relação de inclusão, denotada por $A \subseteq B$, que significa que o conjunto A está contido no conjunto B, ou seja, que todo e qualquer elemento de A é também um elemento de B.
  - Por exemplo, se $A = \{2, 4, 6\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, temos que $A \subseteq B$. Note que B não está contido em A, pois existem elementos de B que não estão em A .
- Dizemos que os conjuntos A e B são iguais se, e somente se, ocorrer de $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.

Revisão sobre conjuntos

- Dois conjuntos, digamos A e B, podem ainda estarem relacionados por meio de uma relação de inclusão, denotada por $A \subseteq B$, que significa que o conjunto A está contido no conjunto B, ou seja, que todo e qualquer elemento de A é também um elemento de B.
  - Por exemplo, se $A = \{2, 4, 6\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, temos que $A \subseteq B$. Note que B não está contido em A, pois existem elementos de B que não estão em A .
- Dizemos que os conjuntos A e B são iguais se, e somente se, ocorrer de $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.

No estudo de probabilidade estaremos interessados em um conjunto especial, denominado de conjunto universo, ou espaço amostral, que denotaremos por Ω. Tal conjunto será importante por conter todos os resultados possíveis de um experimento aleatório. Antes de apresentarmos a definição desse conjunto, é importante entendermos o que é um experimento aleatório.

Experimentos aleatórios

Experimentos aleatórios podem serem pensados como situações que envolvem incerteza. A busca por avaliar as probabilidades de ocorrência é um dos objetivos dos estudos desses experimentos. Por exemplo:

- Joga-se uma moeda honesta três vezes e observa-se o numero de caras obtidos;
- Um equipamento novo é ligado e conta-se o tempo até ele queimar;
- Cada uma de três peças selecionadas de um lote é classificada como acima ou abaixo da especificação padrão determinada para a peça.

No estudo de probabilidade estaremos interessados em um conjunto especial, denominado de conjunto universo, ou espaço amostral, que denotaremos por Ω. Tal conjunto será importante por conter todos os resultados possíveis de um experimento aleatório. Antes de apresentarmos a definição desse conjunto, é importante entendermos o que é um experimento aleatório.

Experimentos aleatórios

Experimentos aleatórios podem serem pensados como situações que envolvem incerteza. A busca por avaliar as probabilidades de ocorrência é um dos objetivos dos estudos desses experimentos. Por exemplo:

- Joga-se uma moeda honesta três vezes e observa-se o numero de caras obtidos;
- Um equipamento novo é ligado e conta-se o tempo até ele queimar;
- Cada uma de três peças selecionadas de um lote é classificada como acima ou abaixo da especificação padrão determinada para a peça.

No estudo de probabilidade estaremos interessados em um conjunto especial, denominado de conjunto universo, ou espaço amostral, que denotaremos por Ω. Tal conjunto será importante por conter todos os resultados possíveis de um experimento aleatório. Antes de apresentarmos a definição desse conjunto, é importante entendermos o que é um experimento aleatório.

Experimentos aleatórios

Experimentos aleatórios podem serem pensados como situações que envolvem incerteza. A busca por avaliar as probabilidades de ocorrência é um dos objetivos dos estudos desses experimentos. Por exemplo:

- Joga-se uma moeda honesta três vezes e observa-se o numero de caras obtidos;
- Um equipamento novo é ligado e conta-se o tempo até ele queimar;
- Cada uma de três peças selecionadas de um lote é classificada como acima ou abaixo da especificação padrão determinada para a peça.

No estudo de probabilidade estaremos interessados em um conjunto especial, denominado de conjunto universo, ou espaço amostral, que denotaremos por Ω. Tal conjunto será importante por conter todos os resultados possíveis de um experimento aleatório. Antes de apresentarmos a definição desse conjunto, é importante entendermos o que é um experimento aleatório.

Experimentos aleatórios

Experimentos aleatórios podem serem pensados como situações que envolvem incerteza. A busca por avaliar as probabilidades de ocorrência é um dos objetivos dos estudos desses experimentos. Por exemplo:

- Joga-se uma moeda honesta três vezes e observa-se o numero de caras obtidos;
- Um equipamento novo é ligado e conta-se o tempo até ele queimar;
- Cada uma de três peças selecionadas de um lote é classificada como acima ou abaixo da especificação padrão determinada para a peça.

Experimentos aleatórios

Um experimento aleatório é caracterizados pelas seguintes traços:

- Se for possível repetir o experimento aleatório nas mesmas condições, então o resultado do experimento, em diferentes repetições, pode ser diferente.
  - Por exemplo, lançar um dado honesto, com muito cuidado, para que os lançamentos sejam realizados da mesma forma. Em lançamentos diferentes os resultados podem ser diferentes.
- Embora não sejamos capazes de afirmar qual será o resultado do experimento aleatório, somos capazes de especificar todos os possíveis resultados do mesmo.
  - Por exemplo, lançar um dado honesto, temos que $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Experimentos aleatórios

Um experimento aleatório é caracterizados pelas seguintes traços:

- Se for possível repetir o experimento aleatório nas mesmas condições, então o resultado do experimento, em diferentes repetições, pode ser diferente.
  - Por exemplo, lançar um dado honesto, com muito cuidado, para que os lançamentos sejam realizados da mesma forma. Em lançamentos diferentes os resultados podem ser diferentes.
- Embora não sejamos capazes de afirmar qual será o resultado do experimento aleatório, somos capazes de especificar todos os possíveis resultados do mesmo.
  - Por exemplo, lançar um dado honesto, temos que $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Experimentos aleatórios

Um experimento aleatório é caracterizados pelas seguintes traços:

- Se for possível repetir o experimento aleatório nas mesmas condições, então o resultado do experimento, em diferentes repetições, pode ser diferente.
  - Por exemplo, lançar um dado honesto, com muito cuidado, para que os lançamentos sejam realizados da mesma forma. Em lançamentos diferentes os resultados podem ser diferentes.
- Embora não sejamos capazes de afirmar qual será o resultado do experimento aleatório, somos capazes de especificar todos os possíveis resultados do mesmo.
  - Por exemplo, lançar um dado honesto, temos que $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Experimentos aleatórios

Um experimento aleatório é caracterizados pelas seguintes traços:

- Se for possível repetir o experimento aleatório nas mesmas condições, então o resultado do experimento, em diferentes repetições, pode ser diferente.
  - Por exemplo, lançar um dado honesto, com muito cuidado, para que os lançamentos sejam realizados da mesma forma. Em lançamentos diferentes os resultados podem ser diferentes.
- Embora não sejamos capazes de afirmar qual será o resultado do experimento aleatório, somos capazes de especificar todos os possíveis resultados do mesmo.
  - Por exemplo, lançar um dado honesto, temos que $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Experimentos aleatórios

Um experimento aleatório é caracterizados pelas seguintes traços:

- Se for possível repetir o experimento aleatório nas mesmas condições, então o resultado do experimento, em diferentes repetições, pode ser diferente.
  - Por exemplo, lançar um dado honesto, com muito cuidado, para que os lançamentos sejam realizados da mesma forma. Em lançamentos diferentes os resultados podem ser diferentes.
- Embora não sejamos capazes de afirmar qual será o resultado do experimento aleatório, somos capazes de especificar todos os possíveis resultados do mesmo.
  - Por exemplo, lançar um dado honesto, temos que $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Experimentos aleatórios

- Quando o experimento aleatório for executado repetidamente, os resultados individuais parecerão ocorrer de uma forma acidental. Contudo, ao realizarmos o experimento um grande número de vezes, uma regularidade surgirá. É por meio desta regularidade que torna possível criarmos um modelo probabilístico.
  - Por exemplo, considere o experimento aleatório de se lançar uma moeda honesta repetidas vezes. Embora os resultados caras e coroas apareçam sucessivamente, de forma arbitrária, é fato empírico conhecido que, depois de um grande número de lançamentos, a proporção de caras e de coroas serão aproximadamente iguais.

A busca por analisar e avaliar as diversas probabilidades de ocorrências desses experimentos é um dos objetivos da teria de probabilidade.

Experimentos aleatórios

- Quando o experimento aleatório for executado repetidamente, os resultados individuais parecerão ocorrer de uma forma acidental. Contudo, ao realizarmos o experimento um grande número de vezes, uma regularidade surgirá. É por meio desta regularidade que torna possível criarmos um modelo probabilístico.
  - Por exemplo, considere o experimento aleatório de se lançar uma moeda honesta repetidas vezes. Embora os resultados caras e coroas apareçam sucessivamente, de forma arbitrária, é fato empírico conhecido que, depois de um grande número de lançamentos, a proporção de caras e de coroas serão aproximadamente iguais.

A busca por analisar e avaliar as diversas probabilidades de ocorrências desses experimentos é um dos objetivos da teria de probabilidade.

Espaço amostral e eventos

Definição: O conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório é chamado de espaço amostral e denotamos por Ω.

- Ω pode ser finito, infinito enumerável ou infinito não-enumerável.
- Um espaço amostral é dito ser discreto se ele consiste de um conjunto finito ou infinto enumerável de resultados.
- Um espaço amostral é dito ser contínuo se ele contém um intervalo (finito ou infinito) de números reais.
- Chamamos de evento um subconjunto do espaço amostral.

Espaço amostral e eventos

Definição: O conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório é chamado de espaço amostral e denotamos por Ω.

- Ω pode ser finito, infinito enumerável ou infinito não-enumerável.
- Um espaço amostral é dito ser discreto se ele consiste de um conjunto finito ou infinto enumerável de resultados.
- Um espaço amostral é dito ser contínuo se ele contém um intervalo (finito ou infinito) de números reais.
- Chamamos de evento um subconjunto do espaço amostral.

Espaço amostral e eventos

Definição: O conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório é chamado de espaço amostral e denotamos por Ω.

- Ω pode ser finito, infinito enumerável ou infinito não-enumerável.
- Um espaço amostral é dito ser discreto se ele consiste de um conjunto finito ou infinto enumerável de resultados.
- Um espaço amostral é dito ser contínuo se ele contém um intervalo (finito ou infinito) de números reais.
- Chamamos de evento um subconjunto do espaço amostral.

Espaço amostral e eventos

Definição: O conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório é chamado de espaço amostral e denotamos por Ω.

- Ω pode ser finito, infinito enumerável ou infinito não-enumerável.
- Um espaço amostral é dito ser discreto se ele consiste de um conjunto finito ou infinto enumerável de resultados.
- Um espaço amostral é dito ser contínuo se ele contém um intervalo (finito ou infinito) de números reais.
- Chamamos de evento um subconjunto do espaço amostral.

Espaço amostral e eventos

Definição: O conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório é chamado de espaço amostral e denotamos por Ω.

- Ω pode ser finito, infinito enumerável ou infinito não-enumerável.
- Um espaço amostral é dito ser discreto se ele consiste de um conjunto finito ou infinto enumerável de resultados.
- Um espaço amostral é dito ser contínuo se ele contém um intervalo (finito ou infinito) de números reais.
- Chamamos de evento um subconjunto do espaço amostral.

Exemplos

- Considere o experimento aleatório de se lançar um dado honesto e observar o resultado obtido. Temos que

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\};$$

Temos que $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{5\}$, $C = \{\Omega\}$ são exemplos de eventos de Ω.

- Uma fábrica produz determinado item. São retirados três itens da linha de produção e cada um deles recebe uma classificação (B) bom ou (D) defeituoso. Temos que

$$\Omega = \{BBB, BBD, BDB, DBB, DDB, DBD, BDD, DDD\};$$

Exemplos

- Considere o experimento aleatório de se lançar um dado honesto e observar o resultado obtido. Temos que
$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\};$$
Temos que $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{5\}$, $C = \{\Omega\}$ são exemplos de eventos de Ω.
- Uma fábrica produz determinado item. São retirados três itens da linha de produção e cada um deles recebe uma classificação (B) bom ou (D) defeituoso. Temos que
$$\Omega = \{BBB, BBD, BDB, DBB, DDB, DBD, BDD, DDD\};$$

Exemplos

- Uma urna contém duas bolas brancas (B) e três bolas vermelhas (V). Retira-se uma bola ao acaso da urna. Se for branca, lança-se uma moeda. Se for vermelha, ela é devolvida à urna e retira-se outra. Temos que

$$\Omega = \{Bc, Bk, VB, VV\};$$

- Uma lampada nova é ligada e conta-se o tempo gasto até ela queimar. Temos que

$$\Omega = \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$$

Exemplos

- Uma urna contém duas bolas brancas (B) e três bolas vermelhas (V). Retira-se uma bola ao acaso da urna. Se for branca, lança-se uma moeda. Se for vermelha, ela é devolvida à urna e retira-se outra. Temos que

$$\Omega = \{Bc, Bk, VB, VV\};$$

- Uma lampada nova é ligada e conta-se o tempo gasto até ela queimar. Temos que

$$\Omega = \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$$

Operações básicas entre eventos

- A^c é o complementar do evento A em Ω, isto é, A^c contém todos os elementos de Ω que não estão em A. Formalmente, temos que $A^c = \{w \in \Omega : w \notin A\}$.
  - Por exemplo, se $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $A = \{1, 2, 5\}$, então $A^c = \{3, 4, 6\}$.
- Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventos de Ω. Então $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ ou ainda $\cap_{i=i}^n A_i$ é a intersecção dos eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ e contém elementos de Ω que pertencem, simultaneamente, a todos os eventos A_i. Formalmente $\cap_{i=i}^n A_i = \{w \in \Omega : w \in A_i, \forall\, i = 1, \ldots, n\}$.
  - Por exemplo, se $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{1, 4\}$ e $C = \{4, 5\}$ então $A \cap B = \{1\}$, $B \cap C = \{4\}$ e $A \cap B \cap C = \emptyset$.

Operações básicas entre eventos

- A^c é o complementar do evento A em Ω, isto é, A^c contém todos os elementos de Ω que não estão em A. Formalmente, temos que $A^c = \{w \in \Omega : w \notin A\}$.
  - Por exemplo, se $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $A = \{1, 2, 5\}$, então $A^c = \{3, 4, 6\}$.
- Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventos de Ω. Então $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ ou ainda $\cap_{i=i}^{n} A_i$ é a intersecção dos eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ e contém elementos de Ω que pertencem, simultaneamente, a todos os eventos A_i. Formalmente $\cap_{i=i}^{n} A_i = \{w \in \Omega : w \in A_i, \forall\, i = 1, \ldots, n\}$.
  - Por exemplo, se $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{1, 4\}$ e $C = \{4, 5\}$ então $A \cap B = \{1\}$, $B \cap C = \{4\}$ e $A \cap B \cap C = \emptyset$.

Operações básicas entre eventos

- A^c é o complementar do evento A em Ω, isto é, A^c contém todos os elementos de Ω que não estão em A. Formalmente, temos que $A^c = \{w \in \Omega : w \notin A\}$.
  - Por exemplo, se $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $A = \{1, 2, 5\}$, então $A^c = \{3, 4, 6\}$.
- Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventos de Ω. Então $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ ou ainda $\cap_{i=i}^{n} A_i$ é a intersecção dos eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ e contém elementos de Ω que pertencem, simultaneamente, a todos os eventos A_i. Formalmente $\cap_{i=i}^{n} A_i = \{w \in \Omega : w \in A_i, \forall\, i = 1, \ldots, n\}$.
  - Por exemplo, se $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{1, 4\}$ e $C = \{4, 5\}$ então $A \cap B = \{1\}$, $B \cap C = \{4\}$ e $A \cap B \cap C = \emptyset$.

Operações básicas entre eventos

- Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventos de Ω. Então $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ ou ainda $\cup_{i=i}^{n} A_i$ é a união dos eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ e contém elementos de Ω que pertencem a pelo menos um dos eventos A_i. Formalmente $\cup_{i=i}^{n} A_i = \{w \in \Omega : w \in A_i, \text{ para algum } i = 1, \ldots, n\}$.
  - Por exemplo, se $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{1, 4\}$ e $C = \{4, 5\}$ então $A \cup B \cup C = \{1, 2, 4, 5\}$.
- Sejam A e B eventos de Ω. Então $A - B$ ou $A \cap B^c$ é a diferença dos eventos A e B e representa elementos de Ω que pertencem a A mas não pertencem a B. Formalmente $A - B = \{w \in \Omega : w \in A \text{ e } w \notin B\}$.
  - Por exemplo, se $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{1, 4\}$ então $A - B = \{2, 5\}$.

Operações básicas entre eventos

- Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventos de Ω. Então $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ ou ainda $\cup_{i=i}^{n} A_i$ é a união dos eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ e contém elementos de Ω que pertencem a pelo menos um dos eventos A_i. Formalmente $\cup_{i=i}^{n} A_i = \{w \in \Omega : w \in A_i, \text{ para algum } i = 1, \ldots, n\}$.
  - Por exemplo, se $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{1, 4\}$ e $C = \{4, 5\}$ então $A \cup B \cup C = \{1, 2, 4, 5\}$.
- Sejam A e B eventos de Ω. Então $A - B$ ou $A \cap B^c$ é a diferença dos eventos A e B e representa elementos de Ω que pertencem a A mas não pertencem a B. Formalmente $A - B = \{w \in \Omega : w \in A \text{ e } w \notin B\}$.
  - Por exemplo, se $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{1, 4\}$ então $A - B = \{2, 5\}$.

Operações básicas entre eventos

- Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventos de Ω. Então $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ ou ainda $\cup_{i=i}^{n} A_i$ é a união dos eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ e contém elementos de Ω que pertencem a pelo menos um dos eventos A_i. Formalmente $\cup_{i=i}^{n} A_i = \{w \in \Omega : w \in A_i, \text{ para algum } i = 1, \ldots, n\}$.
  - Por exemplo, se $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{1, 4\}$ e $C = \{4, 5\}$ então $A \cup B \cup C = \{1, 2, 4, 5\}$.
- Sejam A e B eventos de Ω. Então $A - B$ ou $A \cap B^c$ é a diferença dos eventos A e B e representa elementos de Ω que pertencem a A mas não pertencem a B. Formalmente $A - B = \{w \in \Omega : w \in A \text{ e } w \notin B\}$.
  - Por exemplo, se $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{1, 4\}$ então $A - B = \{2, 5\}$.

Operações básicas entre eventos

- Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventos de Ω. Então $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ ou ainda $\cup_{i=i}^{n} A_i$ é a união dos eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ e contém elementos de Ω que pertencem a pelo menos um dos eventos A_i. Formalmente $\cup_{i=i}^{n} A_i = \{w \in \Omega : w \in A_i, \text{ para algum } i = 1, \ldots, n\}$.
  - Por exemplo, se $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{1, 4\}$ e $C = \{4, 5\}$ então $A \cup B \cup C = \{1, 2, 4, 5\}$.
- Sejam A e B eventos de Ω. Então $A - B$ ou $A \cap B^c$ é a diferença dos eventos A e B e representa elementos de Ω que pertencem a A mas não pertencem a B. Formalmente $A - B = \{w \in \Omega : w \in A \text{ e } w \notin B\}$.
  - Por exemplo, se $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{1, 4\}$ então $A - B = \{2, 5\}$.

Eventos mutuamente excludentes

Apresentamos a seguir uma definição que trata de eventos que não podem ocorrer de forma simultânea, ou seja, se um deles ocorre o outro não ocorre.

Definição: Os eventos A e B são ditos serem mutuamente excludentes (ou disjuntos) se $A \cap B = \emptyset$.

- Por exemplo, se $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{4, 6\}$ e $C = \{3, 4, 6\}$ então temos que A e B são disjuntos uma vez que $A \cap B = \emptyset$. Note ainda que $A \cap C = \emptyset$, o que implica que A e C também são disjuntos (observe que $C = A^c$).

Eventos mutuamente excludentes

Apresentamos a seguir uma definição que trata de eventos que não podem ocorrer de forma simultânea, ou seja, se um deles ocorre o outro não ocorre.

> **Definição**: Os eventos A e B são ditos serem mutuamente excludentes (ou disjuntos) se $A \cap B = \emptyset$.

- Por exemplo, se $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{4, 6\}$ e $C = \{3, 4, 6\}$ então temos que A e B são disjuntos uma vez que $A \cap B = \emptyset$. Note ainda que $A \cap C = \emptyset$, o que implica que A e C também são disjuntos (observe que $C = A^c$).

As leis de Morgan são relações, entre conjuntos, que podem auxiliar nas resoluções de alguns problemas e na demonstração de alguns resultados.

(i) $(\cup_{i=1}^{n} A_i)^c = \cap_{i=1}^{n} A_i^c$;

(ii) $(\cap_{i=1}^{n} A_i)^c = \cup_{i=1}^{n} A_i^c$;

Prova da primeira lei

Primeiramente, recorde que para mostrarmos que dois conjuntos A e B são iguais é necessário verificar se um elemento arbitrário de A está em B e vice-versa.

- [$\Rightarrow$] Seja $w \in (\cup_{i=1}^{n} A_i)^c$, então $w \notin (\cup_{i=1}^{n} A_i)$, logo $w \notin A_i$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Dessa forma, $w \in A_i^c$, para todo $i = 1, \ldots, n$, o que implica que $w \in \cap_{i=1}^{n} A_i^c$.
- [$\Leftarrow$] Seja agora $w \in \cap_{i=1}^{n} A_i^c$, então $w \in A_i^c$, para todo $i = 1, \ldots, n$, logo $w \notin A_i$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Dessa forma $w \notin \cup_{i=1}^{n} A_i$ e, portanto, $w \in (\cup_{i=1}^{n} A_i)^c$.

A prova da segunda lei fica como exercício.

Leis de Morgan

As leis de Morgan são relações, entre conjuntos, que podem auxiliar nas resoluções de alguns problemas e na demonstração de alguns resultados.

(i) $(\cup_{i=1}^{n} A_i)^c = \cap_{i=1}^{n} A_i^c$;

(ii) $(\cap_{i=1}^{n} A_i)^c = \cup_{i=1}^{n} A_i^c$;

Prova da primeira lei

Primeiramente, recorde que para mostrarmos que dois conjuntos A e B são iguais é necessário verificar se um elemento arbitrário de A está em B e vice-versa.

- [$\Rightarrow$] Seja $w \in (\cup_{i=1}^{n} A_i)^c$, então $w \notin (\cup_{i=1}^{n} A_i)$, logo $w \notin A_i$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Dessa forma, $w \in A_i^c$, para todo $i = 1, \ldots, n$, o que implica que $w \in \cap_{i=1}^{n} A_i^c$.
- [$\Leftarrow$] Seja agora $w \in \cap_{i=1}^{n} A_i^c$, então $w \in A_i^c$, para todo $i = 1, \ldots, n$, logo $w \notin A_i$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Dessa forma $w \notin \cup_{i=1}^{n} A_i$ e, portanto, $w \in (\cup_{i=1}^{n} A_i)^c$.

A prova da segunda lei fica como exercício.

Leis de Morgan

As leis de Morgan são relações, entre conjuntos, que podem auxiliar nas resoluções de alguns problemas e na demonstração de alguns resultados.

(i) $(\cup_{i=1}^{n} A_i)^c = \cap_{i=1}^{n} A_i^c$;

(ii) $(\cap_{i=1}^{n} A_i)^c = \cup_{i=1}^{n} A_i^c$;

Prova da primeira lei

Primeiramente, recorde que para mostrarmos que dois conjuntos A e B são iguais é necessário verificar se um elemento arbitrário de A está em B e vice-versa.

- [$\Rightarrow$] Seja $w \in (\cup_{i=1}^{n} A_i)^c$, então $w \notin (\cup_{i=1}^{n} A_i)$, logo $w \notin A_i$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Dessa forma, $w \in A_i^c$, para todo $i = 1, \ldots, n$, o que implica que $w \in \cap_{i=1}^{n} A_i^c$.
- [$\Leftarrow$] Seja agora $w \in \cap_{i=1}^{n} A_i^c$, então $w \in A_i^c$, para todo $i = 1, \ldots, n$, logo $w \notin A_i$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Dessa forma $w \notin \cup_{i=1}^{n} A_i$ e, portanto, $w \in (\cup_{i=1}^{n} A_i)^c$.

A prova da segunda lei fica como exercício.

Leis de Morgan

As leis de Morgan são relações, entre conjuntos, que podem auxiliar nas resoluções de alguns problemas e na demonstração de alguns resultados.

(i) $(\cup_{i=1}^{n} A_i)^c = \cap_{i=1}^{n} A_i^c$;

(ii) $(\cap_{i=1}^{n} A_i)^c = \cup_{i=1}^{n} A_i^c$;

Prova da primeira lei

Primeiramente, recorde que para mostrarmos que dois conjuntos A e B são iguais é necessário verificar se um elemento arbitrário de A está em B e vice-versa.

- [$\Rightarrow$] Seja $w \in (\cup_{i=1}^{n} A_i)^c$, então $w \notin (\cup_{i=1}^{n} A_i)$, logo $w \notin A_i$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Dessa forma, $w \in A_i^c$, para todo $i = 1, \ldots, n$, o que implica que $w \in \cap_{i=1}^{n} A_i^c$.
- [$\Leftarrow$] Seja agora $w \in \cap_{i=1}^{n} A_i^c$, então $w \in A_i^c$, para todo $i = 1, \ldots, n$, logo $w \notin A_i$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Dessa forma $w \notin \cup_{i=1}^{n} A_i$ e, portanto, $w \in (\cup_{i=1}^{n} A_i)^c$.

A prova da segunda lei fica como exercício.

Leis de Morgan

As leis de Morgan são relações, entre conjuntos, que podem auxiliar nas resoluções de alguns problemas e na demonstração de alguns resultados.

(i) $(\cup_{i=1}^{n} A_i)^c = \cap_{i=1}^{n} A_i^c$;

(ii) $(\cap_{i=1}^{n} A_i)^c = \cup_{i=1}^{n} A_i^c$;

Prova da primeira lei

Primeiramente, recorde que para mostrarmos que dois conjuntos A e B são iguais é necessário verificar se um elemento arbitrário de A está em B e vice-versa.

- [$\Rightarrow$] Seja $w \in (\cup_{i=1}^{n} A_i)^c$, então $w \notin (\cup_{i=1}^{n} A_i)$, logo $w \notin A_i$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Dessa forma, $w \in A_i^c$, para todo $i = 1, \ldots, n$, o que implica que $w \in \cap_{i=1}^{n} A_i^c$.
- [$\Leftarrow$] Seja agora $w \in \cap_{i=1}^{n} A_i^c$, então $w \in A_i^c$, para todo $i = 1, \ldots, n$, logo $w \notin A_i$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Dessa forma $w \notin \cup_{i=1}^{n} A_i$ e, portanto, $w \in (\cup_{i=1}^{n} A_i)^c$.

A prova da segunda lei fica como exercício.