Probabilidade e estatística - Aula 10

Alguns modelos contínuos

Dr. Giannini Italino Alves Vieira

Universidade Federal do Ceará - Campus de Crateús

2024

Alguns modelos contínuos

- De maneira similar ao que estudamos nos modelos discretos, veremos agora, nessa aula e na próxima, alguns dos principais modelos contínuos.
- Mais especificamente na aula de hoje, veremos o modelo uniforme contínuo e o modelo exponencial e, na próxima aula estudaremos um dos mais importantes modelos contínuos, que é o modelo normal.
- Em intervalos de confiança e testes de hipóteses veremos mais duas importantes distribuições contínuas, que são a distribuição t-Student e qui-quadrado.

Alguns modelos contínuos

- De maneira similar ao que estudamos nos modelos discretos, veremos agora, nessa aula e na próxima, alguns dos principais modelos contínuos.
- Mais especificamente na aula de hoje, veremos o modelo uniforme contínuo e o modelo exponencial e, na próxima aula estudaremos um dos mais importantes modelos contínuos, que é o modelo normal.
- Em intervalos de confiança e testes de hipóteses veremos mais duas importantes distribuições contínuas, que são a distribuição t-Student e qui-quadrado.

Alguns modelos contínuos

- De maneira similar ao que estudamos nos modelos discretos, veremos agora, nessa aula e na próxima, alguns dos principais modelos contínuos.
- Mais especificamente na aula de hoje, veremos o modelo uniforme contínuo e o modelo exponencial e, na próxima aula estudaremos um dos mais importantes modelos contínuos, que é o modelo normal.
- Em intervalos de confiança e testes de hipóteses veremos mais duas importantes distribuições contínuas, que são a distribuição t-Student e qui-quadrado.

Distribuição uniforme contínua

- A distribuição uniforme contínua é, sem dúvidas, a mais simples dos modelos contínuos, sendo está análoga à sua correspondente discreta.
- Intuitivamente, uma variável aleatória X tem distribuição uniforme contínua sobre o intervalo $[a, b]$ se a probabilidade da variável assumir valores em subintervalos, de $[a, b]$, de mesmo comprimento é a mesma.

Distribuição uniforme contínua

Uma variável aleatória X é dita ter distribuição uniforme contínua sobre o intervalo $[a, b]$ se sua função densidade de probabilidade for

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{se } \; a < x < b, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{1}$$

Distribuição uniforme contínua

- A distribuição uniforme contínua é, sem dúvidas, a mais simples dos modelos contínuos, sendo está análoga à sua correspondente discreta.
- Intuitivamente, uma variável aleatória X tem distribuição uniforme contínua sobre o intervalo $[a, b]$ se a probabilidade da variável assumir valores em subintervalos, de $[a, b]$, de mesmo comprimento é a mesma.

Distribuição uniforme contínua

Uma variável aleatória X é dita ter distribuição uniforme contínua sobre o intervalo $[a, b]$ se sua função densidade de probabilidade for

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{se } \; a < x < b, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{1}$$

Distribuição uniforme contínua

- A distribuição uniforme contínua é, sem dúvidas, a mais simples dos modelos contínuos, sendo está análoga à sua correspondente discreta.
- Intuitivamente, uma variável aleatória X tem distribuição uniforme contínua sobre o intervalo $[a, b]$ se a probabilidade da variável assumir valores em subintervalos, de $[a, b]$, de mesmo comprimento é a mesma.

Distribuição uniforme contínua

Uma variável aleatória X é dita ter distribuição uniforme contínua sobre o intervalo $[a, b]$ se sua função densidade de probabilidade for

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{se} \quad a < x < b, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{1}$$

Distribuição uniforme contínua

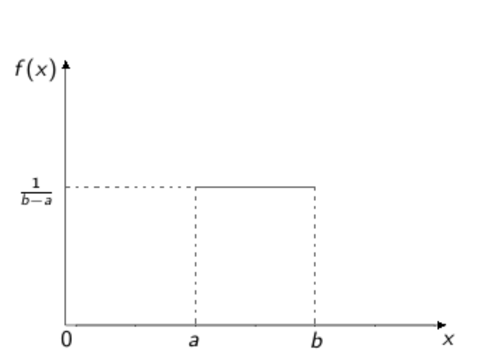
- A distribuição uniforme contínua é, sem dúvidas, a mais simples dos modelos contínuos, sendo está análoga à sua correspondente discreta.
- Intuitivamente, uma variável aleatória X tem distribuição uniforme contínua sobre o intervalo $[a, b]$ se a probabilidade da variável assumir valores em subintervalos, de $[a, b]$, de mesmo comprimento é a mesma.

Distribuição uniforme contínua

Uma variável aleatória X é dita ter distribuição uniforme contínua sobre o intervalo $[a, b]$ se sua função densidade de probabilidade for

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{se} \quad a < x < b, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{1}$$

Gráfico da densidade de uma uniforme sobre $[a, b]$



Exemplo

A espessura de um flange em um componente eletrônico de espaçonave é uniformemente distribuída entre 0.95 e 1.05 milímetros. Determine a proporção de flanges que excedem 1.02 milímetros.

- Sol.: Temos que se X é a espessura de um flange em um componente eletrônico de espaçonave, então essa variável tem distribuição uniforme contínua sobre o intervalo $[0.95, 1.05]$, ou seja, sua densidade é

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1.05-0.95}, & \text{se } \ 0.95 < x < 1.05, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

ou seja

$$f(x) = \begin{cases} 10, & \text{se } \ 0.95 < x < 1.05, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- Queremos calcular $P(X > 1.02)$, ou seja,

$$P(X > 1.02) = \int_{1.02}^{1.05} f(x)dx = \int_{1.02}^{1.05} 10dx = 0.3 = 30\%.$$

Exemplo

A espessura de um flange em um componente eletrônico de espaçonave é uniformemente distribuída entre 0.95 e 1.05 milímetros. Determine a proporção de flanges que excedem 1.02 milímetros.

- Sol.: Temos que se X é a espessura de um flange em um componente eletrônico de espaçonave, então essa variável tem distribuição uniforme contínua sobre o intervalo $[0.95, 1.05]$, ou seja, sua densidade é

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1.05-0.95}, & \text{se } \; 0.95 < x < 1.05, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

ou seja

$$f(x) = \begin{cases} 10, & \text{se } \; 0.95 < x < 1.05, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- Queremos calcular $P(X > 1.02)$, ou seja,

$$P(X > 1.02) = \int_{1.02}^{1.05} f(x)dx = \int_{1.02}^{1.05} 10dx = 0.3 = 30\%.$$

Exemplo

A espessura de um flange em um componente eletrônico de espaçonave é uniformemente distribuída entre 0.95 e 1.05 milímetros. Determine a proporção de flanges que excedem 1.02 milímetros.

- Sol.: Temos que se X é a espessura de um flange em um componente eletrônico de espaçonave, então essa variável tem distribuição uniforme contínua sobre o intervalo $[0.95, 1.05]$, ou seja, sua densidade é

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1.05-0.95}, & \text{se } \ 0.95 < x < 1.05, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

ou seja

$$f(x) = \begin{cases} 10, & \text{se } \ 0.95 < x < 1.05, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- Queremos calcular $P(X > 1.02)$, ou seja,

$$P(X > 1.02) = \int_{1.02}^{1.05} f(x)dx = \int_{1.02}^{1.05} 10dx = 0.3 = 30\%.$$

Exemplo

A espessura de um flange em um componente eletrônico de espaçonave é uniformemente distribuída entre 0.95 e 1.05 milímetros. Determine a proporção de flanges que excedem 1.02 milímetros.

- Sol.: Temos que se X é a espessura de um flange em um componente eletrônico de espaçonave, então essa variável tem distribuição uniforme contínua sobre o intervalo $[0.95, 1.05]$, ou seja, sua densidade é

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1.05-0.95}, & \text{se } \ 0.95 < x < 1.05, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

ou seja

$$f(x) = \begin{cases} 10, & \text{se } \ 0.95 < x < 1.05, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- Queremos calcular $P(X > 1.02)$, ou seja,

$$P(X > 1.02) = \int_{1.02}^{1.05} f(x)dx = \int_{1.02}^{1.05} 10dx = 0.3 = 30\%.$$

Média e variância da distribuição uniforme contínua

Média e Variância

Se X é variável aleatória com distribuição uniforme contínua sobre $[a, b]$, então

- $\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_a^b x\left(\frac{1}{b-a}\right)dx = \frac{(a+b)}{2}$.
- $Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx = \int_a^b \left(x - \left(\frac{(a+b)}{2}\right)\right)^2 \left(\frac{1}{b-a}\right)dx = \frac{(b-a)^2}{12}$.

Considere, por exemplo, que no exemplo anterior estivéssemos interessados em calcular a espessura média e a variância do flange usado no componente eletrônico.

Ou seja, nosso interesse seria em calcular $E(X)$ e $Var(X)$. Como X é uniforme discreta sobre $[0.95, 1.05]$, então temos que

$$E(X) = \frac{(a+b)}{2} = \frac{0.95+1.05}{2} = 1 \quad \text{e} \quad Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(1.05-0.95)^2}{12} \approx 0.00083.$$

Média e Variância

Se X é variável aleatória com distribuição uniforme contínua sobre $[a, b]$, então

- $\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_a^b x\left(\frac{1}{b-a}\right)dx = \frac{(a+b)}{2}$.
- $Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)dx = \int_a^b \left(x - \left(\frac{(a+b)}{2}\right)\right)^2 \left(\frac{1}{b-a}\right)dx = \frac{(b-a)^2}{12}$.

Considere, por exemplo, que no exemplo anterior estivéssemos interessados em calcular a espessura média e a variância do flange usado no componente eletrônico.

Ou seja, nosso interesse seria em calcular $E(X)$ e $Var(X)$. Como X é uniforme discreta sobre $[0.95, 1.05]$, então temos que

$$E(X) = \frac{(a+b)}{2} = \frac{0.95+1.05}{2} = 1 \quad \text{e} \quad Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(1.05-0.95)^2}{12} \approx 0.00083.$$

Média e variância da distribuição uniforme contínua

Média e Variância

Se X é variável aleatória com distribuição uniforme contínua sobre $[a, b]$, então

- $\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_a^b x\left(\frac{1}{b-a}\right)dx = \frac{(a+b)}{2}$.
- $Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)dx = \int_a^b \left(x - \left(\frac{(a+b)}{2}\right)\right)^2 \left(\frac{1}{b-a}\right)dx = \frac{(b-a)^2}{12}$.

Considere, por exemplo, que no exemplo anterior estivéssemos interessados em calcular a espessura média e a variância do flange usado no componente eletrônico.

Ou seja, nosso interesse seria em calcular $E(X)$ e $Var(X)$. Como X é uniforme discreta sobre $[0.95, 1.05]$, então temos que

$$E(X) = \frac{(a+b)}{2} = \frac{0.95+1.05}{2} = 1 \quad \text{e} \quad Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(1.05-0.95)^2}{12} \approx 0.00083.$$

Função de distribuição acumulada da uniforme contínua

Função de distribuição acumulada

Se X é uma uniforme contínua sobre $[a, b]$ então sabemos que sua densidade é dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{se} \quad a < x < b, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Logo, a acumulada de X é dada por:

- Se $x < a$, então $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0 = 0$.
- Se $a \leq x < b$, então $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{a}^{x} \left(\frac{1}{b-a}\right) dt = \frac{(x-a)}{b-a}$.
- Se $x \geq b$, então $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{a}^{b} \left(\frac{1}{b-a}\right) dt = 1$. Ou seja,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x < a, \\ \frac{(x-a)}{b-a}, & \text{se} \quad a \leq x < b, \\ 1, & \text{se} \quad x \geq b. \end{cases}$$

Função de distribuição acumulada

Se X é uma uniforme contínua sobre $[a, b]$ então sabemos que sua densidade é dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{se} \quad a < x < b, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Logo, a acumulada de X é dada por:

- Se $x < a$, então $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0 = 0$.
- Se $a \leq x < b$, então $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{a}^{x} \left(\frac{1}{b-a}\right) dt = \frac{(x-a)}{b-a}$.
- Se $x \geq b$, então $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{a}^{b} \left(\frac{1}{b-a}\right) dt = 1$. Ou seja,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x < a, \\ \frac{(x-a)}{b-a}, & \text{se} \quad a \leq x < b, \\ 1, & \text{se} \quad x \geq b. \end{cases}$$

Função de distribuição acumulada da uniforme contínua

Função de distribuição acumulada

Se X é uma uniforme contínua sobre $[a, b]$ então sabemos que sua densidade é dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{se} \quad a < x < b, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Logo, a acumulada de X é dada por:

- Se $x < a$, então $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0 = 0$.
- Se $a \leq x < b$, então $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{a}^{x} \left(\frac{1}{b-a}\right) dt = \frac{(x-a)}{b-a}$.
- Se $x \geq b$, então $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{a}^{b} \left(\frac{1}{b-a}\right) dt = 1$. Ou seja,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x < a, \\ \frac{(x-a)}{b-a}, & \text{se} \quad a \leq x < b, \\ 1, & \text{se} \quad x \geq b. \end{cases}$$

Função de distribuição acumulada da uniforme contínua

Função de distribuição acumulada

Se X é uma uniforme contínua sobre $[a, b]$ então sabemos que sua densidade é dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{se} \quad a < x < b, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Logo, a acumulada de X é dada por:

- Se $x < a$, então $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0 = 0$.
- Se $a \leq x < b$, então $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{a}^{x} \left(\frac{1}{b-a}\right) dt = \frac{(x-a)}{b-a}$.
- Se $x \geq b$, então $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{a}^{b} \left(\frac{1}{b-a}\right) dt = 1$. Ou seja,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x < a, \\ \frac{(x-a)}{b-a}, & \text{se} \quad a \leq x < b, \\ 1, & \text{se} \quad x \geq b. \end{cases}$$

Função de distribuição acumulada da uniforme contínua

Função de distribuição acumulada

Se X é uma uniforme contínua sobre $[a, b]$ então sabemos que sua densidade é dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{se} \quad a < x < b, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Logo, a acumulada de X é dada por:

- Se $x < a$, então $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0 = 0$.
- Se $a \leq x < b$, então $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{a}^{x} \left(\frac{1}{b-a}\right) dt = \frac{(x-a)}{b-a}$.
- Se $x \geq b$, então $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{a}^{b} \left(\frac{1}{b-a}\right) dt = 1$. Ou seja,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x < a, \\ \frac{(x-a)}{b-a}, & \text{se} \quad a \leq x < b, \\ 1, & \text{se} \quad x \geq b. \end{cases}$$

Função de distribuição acumulada da uniforme contínua

Função de distribuição acumulada

Se X é uma uniforme contínua sobre $[a, b]$ então sabemos que sua densidade é dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{se} \quad a < x < b, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Logo, a acumulada de X é dada por:

- Se $x < a$, então $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0 = 0$.
- Se $a \leq x < b$, então $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{a}^{x} \left(\frac{1}{b-a}\right) dt = \frac{(x-a)}{b-a}$.
- Se $x \geq b$, então $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{a}^{b} \left(\frac{1}{b-a}\right) dt = 1$. Ou seja,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x < a, \\ \frac{(x-a)}{b-a}, & \text{se} \quad a \leq x < b, \\ 1, & \text{se} \quad x \geq b. \end{cases}$$

Função de distribuição acumulada da uniforme contínua

Função de distribuição acumulada

Se X é uma uniforme contínua sobre $[a, b]$ então sabemos que sua densidade é dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{se} \quad a < x < b, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Logo, a acumulada de X é dada por:

- Se $x < a$, então $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0 = 0$.
- Se $a \leq x < b$, então $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{a}^{x} \left(\frac{1}{b-a}\right) dt = \frac{(x-a)}{b-a}$.
- Se $x \geq b$, então $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{a}^{b} \left(\frac{1}{b-a}\right) dt = 1$. Ou seja,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x < a, \\ \frac{(x-a)}{b-a}, & \text{se} \quad a \leq x < b, \\ 1, & \text{se} \quad x \geq b. \end{cases}$$

Exemplo

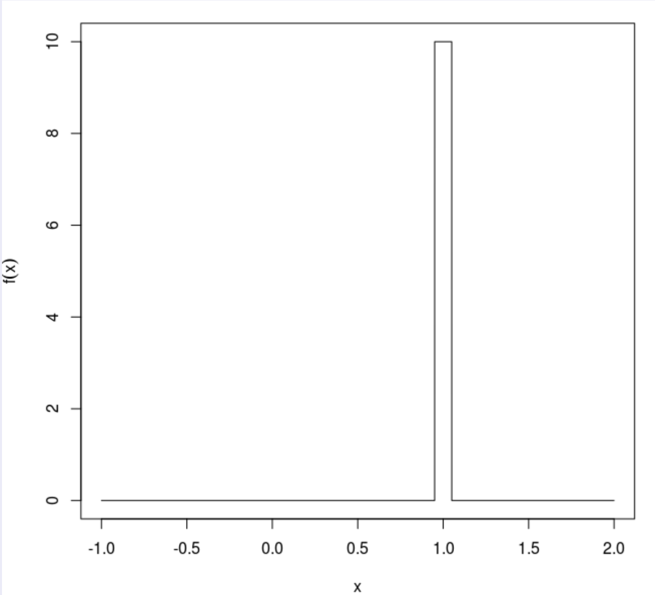
Por exemplo, se estivéssemos querendo obter a função de distribuição acumulada da variável aleatória do exemplo anterior, então como X é uniforme sobre o intervalo $[0.95, 1.05]$, temos que

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } \ x < 0.95, \\ \frac{(x-0.95)}{1.05-0.95}, & \text{se } \ 0.95 \leq x < 1.05, \\ 1, & \text{se } \ x \geq 1.05. \end{cases}$$

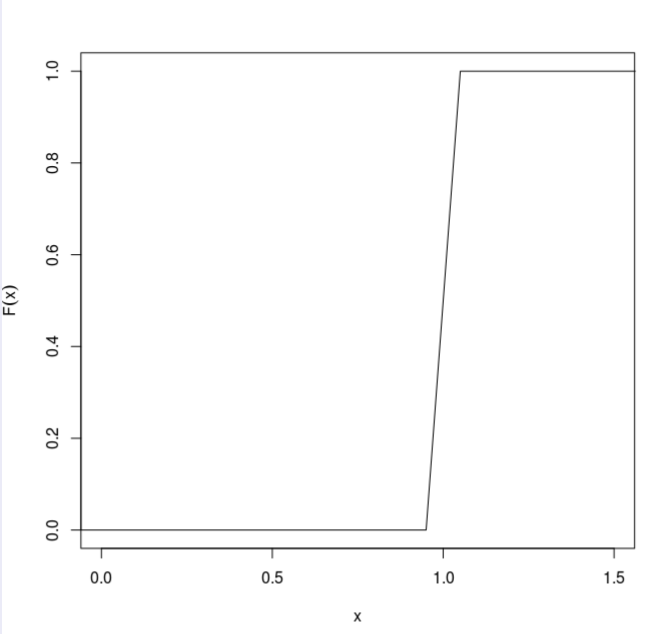
ou seja,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } \ x < 0.95, \\ (10x - 9.5), & \text{se } \ 0.95 \leq x < 1.05, \\ 1, & \text{se } \ x \geq 1.05. \end{cases}$$

Gráficos da densidade da variável do exercício anterior



Gráficos da acumulada da variável do exercício anterior



Distribuição exponencial

- A distribuição exponencial é um modelo contínuo com aplicações nas diversas áreas da engenharia e da matemática. A densidade exponencial pode ser utilizada para modelar, por exemplo:
  - Tempo de vida de equipamentos;
  - Intervalos entre chegadas de mensagens eletrônicas ou chamadas em uma central;
  - Tempo de espera entre sucessivas chegadas de fótons, entre outros.

Distribuição exponencial

Uma variável X é dita ter distribuição exponencial de parâmetro λ, $\lambda > 0$, se sua função de densidade for dada por

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{se} \quad x \geq 0 \\ 0, & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

O parâmetro λ indica a taxa de ocorrência por unidade de medida, que pode ser, por exemplo, tempo, distância, volume, entre outras.

Distribuição exponencial

- A distribuição exponencial é um modelo contínuo com aplicações nas diversas áreas da engenharia e da matemática. A densidade exponencial pode ser utilizada para modelar, por exemplo:
  - Tempo de vida de equipamentos;
  - Intervalos entre chegadas de mensagens eletrônicas ou chamadas em uma central;
  - Tempo de espera entre sucessivas chegadas de fótons, entre outros.

Distribuição exponencial

Uma variável X é dita ter distribuição exponencial de parâmetro λ, $\lambda > 0$, se sua função de densidade for dada por

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{se} \quad x \geq 0 \\ 0, & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

O parâmetro λ indica a taxa de ocorrência por unidade de medida, que pode ser, por exemplo, tempo, distância, volume, entre outras.

Distribuição exponencial

- A distribuição exponencial é um modelo contínuo com aplicações nas diversas áreas da engenharia e da matemática. A densidade exponencial pode ser utilizada para modelar, por exemplo:
  - Tempo de vida de equipamentos;
  - Intervalos entre chegadas de mensagens eletrônicas ou chamadas em uma central;
  - Tempo de espera entre sucessivas chegadas de fótons, entre outros.

Distribuição exponencial

Uma variável X é dita ter distribuição exponencial de parâmetro λ, $\lambda > 0$, se sua função de densidade for dada por

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{se} \quad x \geq 0 \\ 0, & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

O parâmetro λ indica a taxa de ocorrência por unidade de medida, que pode ser, por exemplo, tempo, distância, volume, entre outras.

Distribuição exponencial

- A distribuição exponencial é um modelo contínuo com aplicações nas diversas áreas da engenharia e da matemática. A densidade exponencial pode ser utilizada para modelar, por exemplo:
  - Tempo de vida de equipamentos;
  - Intervalos entre chegadas de mensagens eletrônicas ou chamadas em uma central;
  - Tempo de espera entre sucessivas chegadas de fótons, entre outros.

Distribuição exponencial

Uma variável X é dita ter distribuição exponencial de parâmetro λ, $\lambda > 0$, se sua função de densidade for dada por

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{se } \; x \geq 0 \\ 0, & \text{se } \; x < 0 \end{cases}$$

O parâmetro λ indica a taxa de ocorrência por unidade de medida, que pode ser, por exemplo, tempo, distância, volume, entre outras.

Distribuição exponencial

- A distribuição exponencial é um modelo contínuo com aplicações nas diversas áreas da engenharia e da matemática. A densidade exponencial pode ser utilizada para modelar, por exemplo:
  - Tempo de vida de equipamentos;
  - Intervalos entre chegadas de mensagens eletrônicas ou chamadas em uma central;
  - Tempo de espera entre sucessivas chegadas de fótons, entre outros.

Distribuição exponencial

Uma variável X é dita ter distribuição exponencial de parâmetro λ, $\lambda > 0$, se sua função de densidade for dada por

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{se} \quad x \geq 0 \\ 0, & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

O parâmetro λ indica a taxa de ocorrência por unidade de medida, que pode ser, por exemplo, tempo, distância, volume, entre outras.

Distribuição exponencial

- A distribuição exponencial é um modelo contínuo com aplicações nas diversas áreas da engenharia e da matemática. A densidade exponencial pode ser utilizada para modelar, por exemplo:
  - Tempo de vida de equipamentos;
  - Intervalos entre chegadas de mensagens eletrônicas ou chamadas em uma central;
  - Tempo de espera entre sucessivas chegadas de fótons, entre outros.

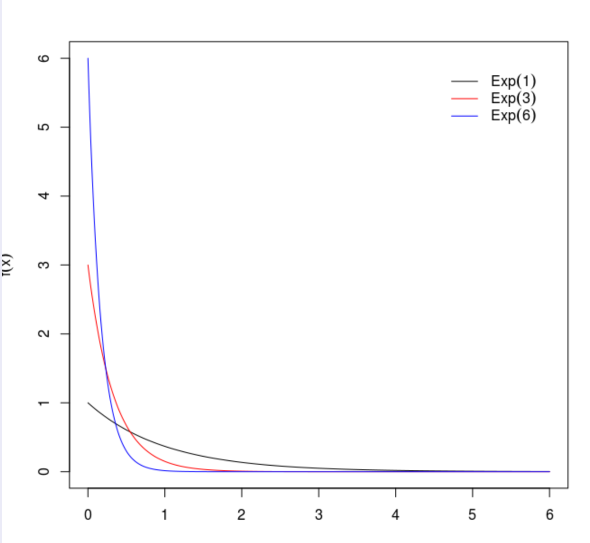
Distribuição exponencial

Uma variável X é dita ter distribuição exponencial de parâmetro λ, $\lambda > 0$, se sua função de densidade for dada por

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{se} \quad x \geq 0 \\ 0, & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

O parâmetro λ indica a taxa de ocorrência por unidade de medida, que pode ser, por exemplo, tempo, distância, volume, entre outras.

Gráfico da densidade de uma exponencial para diferentes valores de λ



Média e variância de uma exponencial

Se X é uma variável aleatória com distribuição exponencial de parâmetro λ então não é difícil mostrar que sua média e variância são dadas por

- $E(X) = \frac{1}{\lambda}$;
- $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

Exemplo

O tempo de vida, em horas, de um transistor pode ser considerado uma variável aleatória com distribuição exponencial. Sabe-se que a vida média do transistor é de 500 horas.

(a) Qual a probabilidade do tempo de vida do transistor ser superior a 500 horas?

(b) Obtenha a função de distribuição acumulada de T, em que T é a variável que representa o tempo de duração, em horas, do transistor.

Média e variância de uma exponencial

Se X é uma variável aleatória com distribuição exponencial de parâmetro λ então não é difícil mostrar que sua média e variância são dadas por

- $E(X) = \frac{1}{\lambda}$;
- $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

Exemplo

O tempo de vida, em horas, de um transistor pode ser considerado uma variável aleatória com distribuição exponencial. Sabe-se que a vida média do transistor é de 500 horas.

(a) Qual a probabilidade do tempo de vida do transistor ser superior a 500 horas?

(b) Obtenha a função de distribuição acumulada de T, em que T é a variável que representa o tempo de duração, em horas, do transistor.

Média e variância de uma exponencial

Se X é uma variável aleatória com distribuição exponencial de parâmetro λ então não é difícil mostrar que sua média e variância são dadas por

- $E(X) = \frac{1}{\lambda}$;
- $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

Exemplo

O tempo de vida, em horas, de um transistor pode ser considerado uma variável aleatória com distribuição exponencial. Sabe-se que a vida média do transistor é de 500 horas.

(a) Qual a probabilidade do tempo de vida do transistor ser superior a 500 horas?

(b) Obtenha a função de distribuição acumulada de T, em que T é a variável que representa o tempo de duração, em horas, do transistor.

Média e variância de uma exponencial

Se X é uma variável aleatória com distribuição exponencial de parâmetro λ então não é difícil mostrar que sua média e variância são dadas por

- $E(X) = \frac{1}{\lambda}$;
- $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

Exemplo

O tempo de vida, em horas, de um transistor pode ser considerado uma variável aleatória com distribuição exponencial. Sabe-se que a vida média do transistor é de 500 horas.

(a) Qual a probabilidade do tempo de vida do transistor ser superior a 500 horas?

(b) Obtenha a função de distribuição acumulada de T, em que T é a variável que representa o tempo de duração, em horas, do transistor.

Média e variância de uma exponencial

Se X é uma variável aleatória com distribuição exponencial de parâmetro λ então não é difícil mostrar que sua média e variância são dadas por

- $E(X) = \frac{1}{\lambda}$;
- $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

Exemplo

O tempo de vida, em horas, de um transistor pode ser considerado uma variável aleatória com distribuição exponencial. Sabe-se que a vida média do transistor é de 500 horas.

(a) Qual a probabilidade do tempo de vida do transistor ser superior a 500 horas?

(b) Obtenha a função de distribuição acumulada de T, em que T é a variável que representa o tempo de duração, em horas, do transistor.

Média e variância de uma exponencial

Se X é uma variável aleatória com distribuição exponencial de parâmetro λ então não é difícil mostrar que sua média e variância são dadas por

- $E(X) = \frac{1}{\lambda}$;
- $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

Exemplo

O tempo de vida, em horas, de um transistor pode ser considerado uma variável aleatória com distribuição exponencial. Sabe-se que a vida média do transistor é de 500 horas.

(a) Qual a probabilidade do tempo de vida do transistor ser superior a 500 horas?

(b) Obtenha a função de distribuição acumulada de T, em que T é a variável que representa o tempo de duração, em horas, do transistor.

Sol. do exemplo anterior

Note que se T é a variável que representa o tempo de duração, em horas, do transistor, então T é uma exponencial com $E(T) = 500$, ou seja, $\lambda = \frac{1}{500}$. Logo, a densidade de T é

$$f(t) = \begin{cases} \left(\frac{1}{500}\right) e^{-\left(\frac{t}{500}\right)}, & \text{se} \quad t \geq 0 \\ 0, & \text{se} \quad t < 0 \end{cases}$$

Logo, no item (a) queremos obter $P(T > 500)$, ou seja,

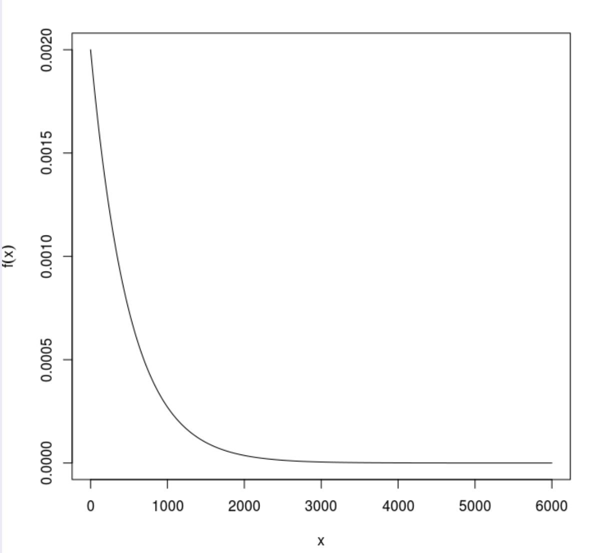
$$P(T > 500) = \int_{500}^{\infty} f(t)dt = \int_{500}^{\infty} \left(\frac{1}{500}\right) e^{-\left(\frac{t}{500}\right)} dt$$

ou seja,

$$P(T > 500) = \left(\frac{1}{500}\right) \left(\left(-500\right) e^{-\left(\frac{t}{500}\right)}\right)\Big|_{500}^{\infty} = e^{-1} \approx 0.3678$$

Portanto, a probabilidade do tempo de duração ser maior que 500 horas é aproximadamente 0.3678.

Gráfico da densidade da variável T do exemplo acima



Cont. do exemplo anterior

Note que no item (b) queremos determinar a função de distribuição acumulada de T. Recorde que

$$f(t) = \begin{cases} \left(\frac{1}{500}\right) e^{-\left(\frac{t}{500}\right)}, & \text{se} \quad t \geq 0 \\ 0, & \text{se} \quad t < 0 \end{cases}$$

Note que como f tem uma expressão para $t > 0$ e outra para $t \leq 0$, então vamos considerar dois casos:

- Se $t < 0$, então

$$F(t) = P(T \leq t) = \int_{-\infty}^{t} 0 dt = 0.$$

- Seja agora $t \geq 0$, então temos que

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(t) dt = \int_{0}^{t} \left(\frac{1}{500}\right) e^{-\left(\frac{t}{500}\right)} dt = 1 - e^{-\left(\frac{t}{500}\right)}.$$

Cont. do exemplo anterior

Note que no item (b) queremos determinar a função de distribuição acumulada de T. Recorde que

$$f(t) = \begin{cases} \left(\frac{1}{500}\right) e^{-\left(\frac{t}{500}\right)}, & \text{se} \quad t \geq 0 \\ 0, & \text{se} \quad t < 0 \end{cases}$$

Note que como f tem uma expressão para $t > 0$ e outra para $t \leq 0$, então vamos considerar dois casos:

- Se $t < 0$, então

$$F(t) = P(T \leq t) = \int_{-\infty}^{t} 0dt = 0.$$

- Seja agora $t \geq 0$, então temos que

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(t)dt = \int_{0}^{t} \left(\frac{1}{500}\right) e^{-\left(\frac{t}{500}\right)} dt = 1 - e^{-\left(\frac{t}{500}\right)}.$$

Cont. do exemplo anterior

Logo, a acumulada de T é

$$F(t) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad t < 0, \\ 1 - e^{-\left(\frac{t}{500}\right)}, & \text{se} \quad t \geq 0. \end{cases}$$

Gráfico da acumulada da variável T do exemplo acima