Probabilidade e estatística - Aula 4

Teorema de Bayes

Dr. Giannini Italino Alves Vieira

Universidade Federal do Ceará - Campus de Crateús

Março, 2024

Motivação

A fim de motivar o teorema de Bayes, considere o seguinte exemplo visto na aula passada:

- Exemplo: Considere que uma fabrica produz chips que estão sujeito a um dos seguintes níveis de contaminação: baixo, médio ou alto. Suponha que em um lote particular da produção, 50% dos chips estão sujeitos a níveis de contaminação baixo, 30% a níveis de contaminação médio e 20% a níveis de contaminação alto. Considere que se um produto usar chip produzido por essa fábrica, então ele tem chance de falhar igual a 0.001 se o chip tiver nível de contaminação baixo, 0.01 se o chip tiver nível de contaminação médio e 0.1 se o chip tiver nível de contaminação alto.
- Na aula passada calculamos a probabilidade de um produto falhar ao usar um desses chips.
- Contudo, suponha agora que um produto que usa um desses chips falhou, se estivermos interessados em calcular, por exemplo, a probabilidade do chip ter nível alto de contaminação, dado que o produto que usa chip falhou. Podemos determinar essa probabilidade por meio do teorema de Bayes.

Motivação

A fim de motivar o teorema de Bayes, considere o seguinte exemplo visto na aula passada:

- Exemplo: Considere que uma fabrica produz chips que estão sujeito a um dos seguintes níveis de contaminação: baixo, médio ou alto. Suponha que em um lote particular da produção, 50% dos chips estão sujeitos a níveis de contaminação baixo, 30% a níveis de contaminação médio e 20% a níveis de contaminação alto. Considere que se um produto usar chip produzido por essa fábrica, então ele tem chance de falhar igual a 0.001 se o chip tiver nível de contaminação baixo, 0.01 se o chip tiver nível de contaminação médio e 0.1 se o chip tiver nível de contaminação alto.
- Na aula passada calculamos a probabilidade de um produto falhar ao usar um desses chips.
- Contudo, suponha agora que um produto que usa um desses chips falhou, se estivermos interessados em calcular, por exemplo, a probabilidade do chip ter nível alto de contaminação, dado que o produto que usa chip falhou. Podemos determinar essa probabilidade por meio do teorema de Bayes.

Motivação

A fim de motivar o teorema de Bayes, considere o seguinte exemplo visto na aula passada:

- Exemplo: Considere que uma fabrica produz chips que estão sujeito a um dos seguintes níveis de contaminação: baixo, médio ou alto. Suponha que em um lote particular da produção, 50% dos chips estão sujeitos a níveis de contaminação baixo, 30% a níveis de contaminação médio e 20% a níveis de contaminação alto. Considere que se um produto usar chip produzido por essa fábrica, então ele tem chance de falhar igual a 0.001 se o chip tiver nível de contaminação baixo, 0.01 se o chip tiver nível de contaminação médio e 0.1 se o chip tiver nível de contaminação alto.
- Na aula passada calculamos a probabilidade de um produto falhar ao usar um desses chips.
- Contudo, suponha agora que um produto que usa um desses chips falhou, se estivermos interessados em calcular, por exemplo, a probabilidade do chip ter nível alto de contaminação, dado que o produto que usa chip falhou. Podemos determinar essa probabilidade por meio do teorema de Bayes.

Teorema de Bayes

Motivação

A fim de motivar o teorema de Bayes, considere o seguinte exemplo visto na aula passada:

- Exemplo: Considere que uma fabrica produz chips que estão sujeito a um dos seguintes níveis de contaminação: baixo, médio ou alto. Suponha que em um lote particular da produção, 50% dos chips estão sujeitos a níveis de contaminação baixo, 30% a níveis de contaminação médio e 20% a níveis de contaminação alto. Considere que se um produto usar chip produzido por essa fábrica, então ele tem chance de falhar igual a 0.001 se o chip tiver nível de contaminação baixo, 0.01 se o chip tiver nível de contaminação médio e 0.1 se o chip tiver nível de contaminação alto.
- Na aula passada calculamos a probabilidade de um produto falhar ao usar um desses chips.
- Contudo, suponha agora que um produto que usa um desses chips falhou, se estivermos interessados em calcular, por exemplo, a probabilidade do chip ter nível alto de contaminação, dado que o produto que usa chip falhou. Podemos determinar essa probabilidade por meio do teorema de Bayes.

Motivação

- Note que depois do experimento aleatório gerar um determinado resultado, podemos estar naturalmente interessados na probabilidade de uma condição estar presente, dado um resultado. Como no exemplo acima, do chip ter nível baixo, médio ou alto de contaminação dado que produto que usa chip falhou.
- A simplicidade matemática desse teorema, com veremos, não deve diminuir ou ocultar sua importância. Em diversas situações práticas existem interesse em calcular tais probabilidades.

Motivação

- Note que depois do experimento aleatório gerar um determinado resultado, podemos estar naturalmente interessados na probabilidade de uma condição estar presente, dado um resultado. Como no exemplo acima, do chip ter nível baixo, médio ou alto de contaminação dado que produto que usa chip falhou.
- A simplicidade matemática desse teorema, com veremos, não deve diminuir ou ocultar sua importância. Em diversas situações práticas existem interesse em calcular tais probabilidades.

Teorema de Bayes

Teorema: Suponha que $C_1, C_2, \ldots, C_n$ formam uma partição de Ω e todos têm probabilidade positiva. Seja A um evento qualquer com $P(A) > 0$. Então, para todo $j = 1, 2, \ldots n$, temos que

$$P(C_j|A) = \frac{P(A|C_j)P(C_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|C_i)P(C_i)}$$

- Prova: Primeiro note que $P(C_j|A) = \frac{P(C_j \cap A)}{P(A)}$;
- Observe agora que $P(A|C_j) = \frac{P(A \cap C_j)}{P(C_j)}$, ou seja, $P(A \cap C_j) = P(A|C_j)P(C_j)$;
- Note também que como $C_1, C_2, \ldots, C_n$ formam uma partição de Ω e A é um evento qualquer de Ω, então pelo teorema da probabilidade total temos que $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|C_i)P(C_i)$;
- Logo, juntando as informações acima, temos que

$$P(C_j|A) = \frac{P(C_j \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|C_j)P(C_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|C_i)P(C_i)}.$$

Teorema de Bayes

Teorema: Suponha que $C_1, C_2, \ldots, C_n$ formam uma partição de Ω e todos têm probabilidade positiva. Seja A um evento qualquer com $P(A) > 0$. Então, para todo $j = 1, 2, \ldots n$, temos que

$$P(C_j|A) = \frac{P(A|C_j)P(C_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|C_i)P(C_i)}$$

- Prova: Primeiro note que $P(C_j|A) = \frac{P(C_j \cap A)}{P(A)}$;
- Observe agora que $P(A|C_j) = \frac{P(A \cap C_j)}{P(C_j)}$, ou seja, $P(A \cap C_j) = P(A|C_j)P(C_j)$;
- Note também que como $C_1, C_2, \ldots, C_n$ formam uma partição de Ω e A é um evento qualquer de Ω, então pelo teorema da probabilidade total temos que $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|C_i)P(C_i)$;
- Logo, juntando as informações acima, temos que

$$P(C_j|A) = \frac{P(C_j \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|C_j)P(C_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|C_i)P(C_i)}.$$

Teorema de Bayes

Teorema: Suponha que $C_1, C_2, \ldots, C_n$ formam uma partição de Ω e todos têm probabilidade positiva. Seja A um evento qualquer com $P(A) > 0$. Então, para todo $j = 1, 2, \ldots n$, temos que

$$P(C_j|A) = \frac{P(A|C_j)P(C_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|C_i)P(C_i)}$$

- Prova: Primeiro note que $P(C_j|A) = \frac{P(C_j \cap A)}{P(A)}$;
- Observe agora que $P(A|C_j) = \frac{P(A \cap C_j)}{P(C_j)}$, ou seja, $P(A \cap C_j) = P(A|C_j)P(C_j)$;
- Note também que como $C_1, C_2, \ldots, C_n$ formam uma partição de Ω e A é um evento qualquer de Ω, então pelo teorema da probabilidade total temos que $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|C_i)P(C_i)$;
- Logo, juntando as informações acima, temos que

$$P(C_j|A) = \frac{P(C_j \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|C_j)P(C_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|C_i)P(C_i)}.$$

Teorema de Bayes

Teorema: Suponha que $C_1, C_2, \ldots, C_n$ formam uma partição de Ω e todos têm probabilidade positiva. Seja A um evento qualquer com $P(A) > 0$. Então, para todo $j = 1, 2, \ldots n$, temos que

$$P(C_j|A) = \frac{P(A|C_j)P(C_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|C_i)P(C_i)}$$

- Prova: Primeiro note que $P(C_j|A) = \frac{P(C_j \cap A)}{P(A)}$;
- Observe agora que $P(A|C_j) = \frac{P(A \cap C_j)}{P(C_j)}$, ou seja, $P(A \cap C_j) = P(A|C_j)P(C_j)$;
- Note também que como $C_1, C_2, \ldots, C_n$ formam uma partição de Ω e A é um evento qualquer de Ω, então pelo teorema da probabilidade total temos que $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|C_i)P(C_i)$;
- Logo, juntando as informações acima, temos que

$$P(C_j|A) = \frac{P(C_j \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|C_j)P(C_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|C_i)P(C_i)}.$$

Teorema de Bayes

Teorema: Suponha que $C_1, C_2, \ldots, C_n$ formam uma partição de Ω e todos têm probabilidade positiva. Seja A um evento qualquer com $P(A) > 0$. Então, para todo $j = 1, 2, \ldots n$, temos que

$$P(C_j|A) = \frac{P(A|C_j)P(C_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|C_i)P(C_i)}$$

- Prova: Primeiro note que $P(C_j|A) = \frac{P(C_j \cap A)}{P(A)}$;
- Observe agora que $P(A|C_j) = \frac{P(A \cap C_j)}{P(C_j)}$, ou seja, $P(A \cap C_j) = P(A|C_j)P(C_j)$;
- Note também que como $C_1, C_2, \ldots, C_n$ formam uma partição de Ω e A é um evento qualquer de Ω, então pelo teorema da probabilidade total temos que $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|C_i)P(C_i)$;
- Logo, juntando as informações acima, temos que

$$P(C_j|A) = \frac{P(C_j \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|C_j)P(C_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|C_i)P(C_i)}.$$

Exemplos

A fim de ilustrar o teorema acima, considere novamente o seguinte exemplo, visto na aula anterior.

- Exemplo: Considere que uma fabrica produz chips que estão sujeito a um dos seguintes níveis de contaminação: baixo, médio ou alto. Suponha que em um lote particular da produção, 50% dos chips estão sujeitos a níveis de contaminação baixo, 30% a níveis de contaminação médio e 20% a níveis de contaminação alto. Considere que se um produto usar chip produzido por essa fábrica, então ele tem chance de falhar igual a 0.001 se o chip tiver nível de contaminação baixo, 0.01 se o chip tiver nível de contaminação médio e 0.1 se o chip tiver nível de contaminação alto. Se um produto falhou ao usar um desses chips, qual a probabilidade do chip ter nível alto de contaminação?
  - Sol.: Considere A o evento em que um produto que usa um dos chips falha. Considere ainda os eventos:
    - C_1 o evento em que um chip tem nível baixo de contaminação;
    - C_2 o evento em que um chip tem nível médio de contaminação;
    - C_3 o evento em que um chip tem nível alto de contaminação;

Exemplos

A fim de ilustrar o teorema acima, considere novamente o seguinte exemplo, visto na aula anterior.

- Exemplo: Considere que uma fabrica produz chips que estão sujeito a um dos seguintes níveis de contaminação: baixo, médio ou alto. Suponha que em um lote particular da produção, 50% dos chips estão sujeitos a níveis de contaminação baixo, 30% a níveis de contaminação médio e 20% a níveis de contaminação alto. Considere que se um produto usar chip produzido por essa fábrica, então ele tem chance de falhar igual a 0.001 se o chip tiver nível de contaminação baixo, 0.01 se o chip tiver nível de contaminação médio e 0.1 se o chip tiver nível de contaminação alto. Se um produto falhou ao usar um desses chips, qual a probabilidade do chip ter nível alto de contaminação?
  - Sol.: Considere A o evento em que um produto que usa um dos chips falha. Considere ainda os eventos:
    - C_1 o evento em que um chip tem nível baixo de contaminação;
    - C_2 o evento em que um chip tem nível médio de contaminação;
    - C_3 o evento em que um chip tem nível alto de contaminação;

Exemplos

A fim de ilustrar o teorema acima, considere novamente o seguinte exemplo, visto na aula anterior.

- Exemplo: Considere que uma fabrica produz chips que estão sujeito a um dos seguintes níveis de contaminação: baixo, médio ou alto. Suponha que em um lote particular da produção, 50% dos chips estão sujeitos a níveis de contaminação baixo, 30% a níveis de contaminação médio e 20% a níveis de contaminação alto. Considere que se um produto usar chip produzido por essa fábrica, então ele tem chance de falhar igual a 0.001 se o chip tiver nível de contaminação baixo, 0.01 se o chip tiver nível de contaminação médio e 0.1 se o chip tiver nível de contaminação alto. Se um produto falhou ao usar um desses chips, qual a probabilidade do chip ter nível alto de contaminação?
  - Sol.: Considere A o evento em que um produto que usa um dos chips falha. Considere ainda os eventos:
    - C_1 o evento em que um chip tem nível baixo de contaminação;
    - C_2 o evento em que um chip tem nível médio de contaminação;
    - C_3 o evento em que um chip tem nível alto de contaminação;

Exemplos

A fim de ilustrar o teorema acima, considere novamente o seguinte exemplo, visto na aula anterior.

- Exemplo: Considere que uma fabrica produz chips que estão sujeito a um dos seguintes níveis de contaminação: baixo, médio ou alto. Suponha que em um lote particular da produção, 50% dos chips estão sujeitos a níveis de contaminação baixo, 30% a níveis de contaminação médio e 20% a níveis de contaminação alto. Considere que se um produto usar chip produzido por essa fábrica, então ele tem chance de falhar igual a 0.001 se o chip tiver nível de contaminação baixo, 0.01 se o chip tiver nível de contaminação médio e 0.1 se o chip tiver nível de contaminação alto. Se um produto falhou ao usar um desses chips, qual a probabilidade do chip ter nível alto de contaminação?
  - Sol.: Considere A o evento em que um produto que usa um dos chips falha. Considere ainda os eventos:
    - C_1 o evento em que um chip tem nível baixo de contaminação;
    - C_2 o evento em que um chip tem nível médio de contaminação;
    - C_3 o evento em que um chip tem nível alto de contaminação;

Exemplos

A fim de ilustrar o teorema acima, considere novamente o seguinte exemplo, visto na aula anterior.

- Exemplo: Considere que uma fabrica produz chips que estão sujeito a um dos seguintes níveis de contaminação: baixo, médio ou alto. Suponha que em um lote particular da produção, 50% dos chips estão sujeitos a níveis de contaminação baixo, 30% a níveis de contaminação médio e 20% a níveis de contaminação alto. Considere que se um produto usar chip produzido por essa fábrica, então ele tem chance de falhar igual a 0.001 se o chip tiver nível de contaminação baixo, 0.01 se o chip tiver nível de contaminação médio e 0.1 se o chip tiver nível de contaminação alto. Se um produto falhou ao usar um desses chips, qual a probabilidade do chip ter nível alto de contaminação?
  - Sol.: Considere A o evento em que um produto que usa um dos chips falha. Considere ainda os eventos:
    - C_1 o evento em que um chip tem nível baixo de contaminação;
    - C_2 o evento em que um chip tem nível médio de contaminação;
    - C_3 o evento em que um chip tem nível alto de contaminação;

Cont. do exemplo

- Já vimos que os eventos A_1, A_2 e A_3 formam uma partição do espaço amostral.
- Observe que queremos calcular agora $P(C_3|A)$, ou seja, a probabilidade do chip ter nível alto de contaminação dado que o produto que usa um desses chips falhou.
- Para calcular essa probabilidade, podemos usar o teorema de Bayes, ou seja,

$$P(C_3|A) = \frac{P(A|C_3)P(C_3)}{\sum_{i=1}^{3} P(A|C_i)P(C_i)},$$

ou seja,

$$P(C_3|A) = \frac{P(A|C_3)P(C_3)}{P(A|C_1)P(C_1) + P(A|C_2)P(C_2) + P(A|C_3)P(C_3)}.$$

Temos que $P(C_1) = 0.5$, $P(C_2) = 0.3$, $P(C_3) = 0.2$, $P(A|C_1) = 0.001$, $P(A|C_2) = 0.01$ e $P(A|C_3) = 0.1$. Logo,

$$P(C_3|A) = \frac{(0.1)(0.2)}{(0.001)(0.5) + (0.01)(0.3) + (0.1)(0.2)} = \frac{0.02}{0.0235} = 0.851063.$$

Cont. do exemplo

- Já vimos que os eventos A_1, A_2 e A_3 formam uma partição do espaço amostral.
- Observe que queremos calcular agora $P(C_3|A)$, ou seja, a probabilidade do chip ter nível alto de contaminação dado que o produto que usa um desses chips falhou.
- Para calcular essa probabilidade, podemos usar o teorema de Bayes, ou seja,

$$P(C_3|A) = \frac{P(A|C_3)P(C_3)}{\sum_{i=1}^{3} P(A|C_i)P(C_i)},$$

ou seja,

$$P(C_3|A) = \frac{P(A|C_3)P(C_3)}{P(A|C_1)P(C_1) + P(A|C_2)P(C_2) + P(A|C_3)P(C_3)}.$$

Temos que $P(C_1) = 0.5$, $P(C_2) = 0.3$, $P(C_3) = 0.2$, $P(A|C_1) = 0.001$, $P(A|C_2) = 0.01$ e $P(A|C_3) = 0.1$. Logo,

$$P(C_3|A) = \frac{(0.1)(0.2)}{(0.001)(0.5) + (0.01)(0.3) + (0.1)(0.2)} = \frac{0.02}{0.0235} = 0.851063.$$

Cont. do exemplo

- Já vimos que os eventos A_1, A_2 e A_3 formam uma partição do espaço amostral.
- Observe que queremos calcular agora $P(C_3|A)$, ou seja, a probabilidade do chip ter nível alto de contaminação dado que o produto que usa um desses chips falhou.
- Para calcular essa probabilidade, podemos usar o teorema de Bayes, ou seja,

$$P(C_3|A) = \frac{P(A|C_3)P(C_3)}{\sum_{i=1}^{3} P(A|C_i)P(C_i)},$$

ou seja,

$$P(C_3|A) = \frac{P(A|C_3)P(C_3)}{P(A|C_1)P(C_1) + P(A|C_2)P(C_2) + P(A|C_3)P(C_3)}.$$

Temos que $P(C_1) = 0.5$, $P(C_2) = 0.3$, $P(C_3) = 0.2$, $P(A|C_1) = 0.001$, $P(A|C_2) = 0.01$ e $P(A|C_3) = 0.1$. Logo,

$$P(C_3|A) = \frac{(0.1)(0.2)}{(0.001)(0.5) + (0.01)(0.3) + (0.1)(0.2)} = \frac{0.02}{0.0235} = 0.851063.$$

Outro exemplo

Exemplo: Uma das maneiras de avaliar a eficiência de um teste para detectar uma certa doença é quantificar a probabilidade de erro que pode ocorrer ao realizar o teste. De modo geral, testes sofisticados envolvem vários procedimentos laboratoriais e diversos equipamentos. Denomina-se de falso-positivo o erro que o teste indica positivo para um paciente não doente e, denomina-se de falso-negativa o erro em que o teste não acusa a doença em um paciente que está doente. Essas probabilidades dos erros podem ser calculadas condicionalmente à situação do paciente.

Considere que um determinado teste resulta positivo para não doentes com probabilidade 0.1 e também com probabilidade 0.1 resulta negativo para um paciente doente. Estas informações se referem as probabilidades dos erros que podem serem cometidos ao se realizar um teste. Suponha que a incidência da doença na população seja de 1 para cada 10 mil habitantes. Calcule as probabilidades a seguir:

(a) Do teste dar positivo;

(b) De uma pessoa estar realmente doente se o teste deu positivo.

Outro exemplo

Exemplo: Uma das maneiras de avaliar a eficiência de um teste para detectar uma certa doença é quantificar a probabilidade de erro que pode ocorrer ao realizar o teste. De modo geral, testes sofisticados envolvem vários procedimentos laboratoriais e diversos equipamentos. Denomina-se de falso-positivo o erro que o teste indica positivo para um paciente não doente e, denomina-se de falso-negativa o erro em que o teste não acusa a doença em um paciente que está doente. Essas probabilidades dos erros podem ser calculadas condicionalmente à situação do paciente.
Considere que um determinado teste resulta positivo para não doentes com probabilidade 0.1 e também com probabilidade 0.1 resulta negativo para um paciente doente. Estas informações se referem as probabilidades dos erros que podem serem cometidos ao se realizar um teste. Suponha que a incidência da doença na população seja de 1 para cada 10 mil habitantes. Calcule as probabilidades a seguir:

(a) Do teste dar positivo;

(b) De uma pessoa estar realmente doente se o teste deu positivo.

Outro exemplo

Exemplo: Uma das maneiras de avaliar a eficiência de um teste para detectar uma certa doença é quantificar a probabilidade de erro que pode ocorrer ao realizar o teste. De modo geral, testes sofisticados envolvem vários procedimentos laboratoriais e diversos equipamentos. Denomina-se de falso-positivo o erro que o teste indica positivo para um paciente não doente e, denomina-se de falso-negativa o erro em que o teste não acusa a doença em um paciente que está doente. Essas probabilidades dos erros podem ser calculadas condicionalmente à situação do paciente.
Considere que um determinado teste resulta positivo para não doentes com probabilidade 0.1 e também com probabilidade 0.1 resulta negativo para um paciente doente. Estas informações se referem as probabilidades dos erros que podem serem cometidos ao se realizar um teste. Suponha que a incidência da doença na população seja de 1 para cada 10 mil habitantes. Calcule as probabilidades a seguir:

(a) Do teste dar positivo;

(b) De uma pessoa estar realmente doente se o teste deu positivo.

Cont. do exemplo

- Vamos definir alguns eventos: seja D: a pessoa está doente e A: o teste é positivo.
- Note que no item (a) queremos calcular $P(A)$ e no item (b) nosso interesse é calcular $P(D|A)$.
  - Sol.: (a) Note que uma partição natural do espaço amostral associado ao experimento desse exercício é D: a pessoa está doente e D^c: a pessoa não está doente.
  - Logo, pelo teorema da probabilidade total, podemos calcular $P(A)$ da forma:

$$P(A) = P(A|D)P(D) + P(A|D^c)P(D^c).$$

Observe que foi dado $P(D) = 0,0001$, $P(A|D^c) = 0.1$ e $P(A^c|D) = 0.1$. Logo, podemos obter $P(A|D) = 1 - P(A^c|D) = 0.9$ e $P(D^c) = 1 - P(D) = 0.9999$.

  - Dessa forma, temos que

$$P(A) = (0.9)(0.0001) + (0.1)(0.9999) = 0,10008.$$

Cont. do exemplo

- Vamos definir alguns eventos: seja D: a pessoa está doente e A: o teste é positivo.
- Note que no item (a) queremos calcular $P(A)$ e no item (b) nosso interesse é calcular $P(D|A)$.
  - Sol.: (a) Note que uma partição natural do espaço amostral associado ao experimento desse exercício é D: a pessoa está doente e D^c: a pessoa não está doente.
  - Logo, pelo teorema da probabilidade total, podemos calcular $P(A)$ da forma:

$$P(A) = P(A|D)P(D) + P(A|D^c)P(D^c).$$

Observe que foi dado $P(D) = 0,0001$, $P(A|D^c) = 0.1$ e $P(A^c|D) = 0.1$. Logo, podemos obter $P(A|D) = 1 - P(A^c|D) = 0.9$ e $P(D^c) = 1 - P(D) = 0.9999$.

  - Dessa forma, temos que

$$P(A) = (0.9)(0.0001) + (0.1)(0.9999) = 0,10008.$$

Cont. do exemplo

- Vamos definir alguns eventos: seja D: a pessoa está doente e A: o teste é positivo.
- Note que no item (a) queremos calcular $P(A)$ e no item (b) nosso interesse é calcular $P(D|A)$.
  - Sol.: (a) Note que uma partição natural do espaço amostral associado ao experimento desse exercício é D: a pessoa está doente e D^c: a pessoa não está doente.
  - Logo, pelo teorema da probabilidade total, podemos calcular $P(A)$ da forma:

$$P(A) = P(A|D)P(D) + P(A|D^c)P(D^c).$$

Observe que foi dado $P(D) = 0,0001$, $P(A|D^c) = 0.1$ e $P(A^c|D) = 0.1$. Logo, podemos obter $P(A|D) = 1 - P(A^c|D) = 0.9$ e $P(D^c) = 1 - P(D) = 0.9999$.

  - Dessa forma, temos que

$$P(A) = (0.9)(0.0001) + (0.1)(0.9999) = 0,10008.$$

Cont. do exemplo

- Vamos definir alguns eventos: seja D: a pessoa está doente e A: o teste é positivo.
- Note que no item (a) queremos calcular $P(A)$ e no item (b) nosso interesse é calcular $P(D|A)$.
  - Sol.: (a) Note que uma partição natural do espaço amostral associado ao experimento desse exercício é D: a pessoa está doente e D^c: a pessoa não está doente.
  - Logo, pelo teorema da probabilidade total, podemos calcular $P(A)$ da forma:

$$P(A) = P(A|D)P(D) + P(A|D^c)P(D^c).$$

    Observe que foi dado $P(D) = 0,0001$, $P(A|D^c) = 0.1$ e $P(A^c|D) = 0.1$. Logo, podemos obter $P(A|D) = 1 - P(A^c|D) = 0.9$ e $P(D^c) = 1 - P(D) = 0.9999$.
  - Dessa forma, temos que

$$P(A) = (0.9)(0.0001) + (0.1)(0.9999) = 0,10008.$$

Continuação

- Sol.: (b) Nesse item queremos calcular $P(D|A)$. Mas, pelo teorema de Bayes, essa probabilidade pode ser calculada da seguinte forma:

$$P(D|A) = \frac{P(A|D)P(D)}{P(A|D)P(D) + P(A|D^c)P(D^c)}.$$

- Dessa forma, substituindo as probabilidades mencionadas no item (a) temos que

$$P(D|A) = \frac{(0.9)(0.0001)}{(0.9)(0.0001) + (0.1)(0.9999)} = 0.0009.$$