Probabilidade e estatística - Aula 16 Estimação pontual de parâmetros - Continuação

Dr. Giannini Italino Alves Vieira

Universidade Federal do Ceará - Campus de Crateús

2 Exemplos

Dr. Giannini Italino Probabilidade e estatística 2024 2/15

- Na aula passada vimos um método de obtenção de estimadores, chamado de método de momentos.
- Vimos que a ideia da obtenção de estimadores por meio do método de momentos é
- Na aula de hoje iremos estudar um outro método de obtenção de estimadores,
- Estimadores obtidos pelo método de máxima verossimilhanca são geralmente

- Na aula passada vimos um método de obtenção de estimadores, chamado de método de momentos.
- Vimos que a ideia da obtenção de estimadores por meio do método de momentos é bem simples e intuitiva, consistindo em obter estimadores igualando-se momentos populacionais aos seus respectivos momentos amostrais.
- Na aula de hoje iremos estudar um outro método de obtenção de estimadores,
- Estimadores obtidos pelo método de máxima verossimilhanca são geralmente

- Na aula passada vimos um método de obtenção de estimadores, chamado de método de momentos.
- Vimos que a ideia da obtenção de estimadores por meio do método de momentos é bem simples e intuitiva, consistindo em obter estimadores igualando-se momentos populacionais aos seus respectivos momentos amostrais.
- Na aula de hoje iremos estudar um outro método de obtenção de estimadores, chamado de método de máxima verossimilhança.
- Estimadores obtidos pelo método de máxima verossimilhanca são geralmente

- Na aula passada vimos um método de obtenção de estimadores, chamado de método de momentos.
- Vimos que a ideia da obtenção de estimadores por meio do método de momentos é bem simples e intuitiva, consistindo em obter estimadores igualando-se momentos populacionais aos seus respectivos momentos amostrais.
- Na aula de hoje iremos estudar um outro método de obtenção de estimadores. chamado de método de máxima verossimilhança.
- Estimadores obtidos pelo método de máxima verossimilhança são geralmente preferíveis em relação a estimadores obtidos por meio do método de momentos. pois possuem melhores propriedades de eficiência.

 Veremos que o estimador de máxima verossimilhança será o valor do parâmetro que maximiza a função de verossimilhança. Dessa forma, é fundamental entender o que é a função de verossimilhança.

Função de verossimilhança

Definição: Sejam X_1, X_2, \ldots, X_n uma amostra aleatória de tamanho n da variável aleatória X com função de probabilidade (ou densidade) $f(x,\theta)$, em que θ seja um único parâmetro desconhecido. Seja x_1, x_2, \ldots, x_n os valores observados da amostra aleatória. Então a função de verossimilhança é definida como

$$L(\theta) = f(x_1, \theta) \cdot f(x_2, \theta) \cdot \ldots \cdot f(x_n, \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta)$$

ullet Note que a função de verossimilhança é uma função do parâmetro desconhecido heta.

Estimador de máxima verossimilhança - EMV

 Veremos que o estimador de máxima verossimilhança será o valor do parâmetro que maximiza a função de verossimilhança. Dessa forma, é fundamental entender o que é a função de verossimilhança.

Função de verossimilhança

Definição: Sejam X_1, X_2, \ldots, X_n uma amostra aleatória de tamanho n da variável aleatória X com função de probabilidade (ou densidade) $f(x,\theta)$, em que θ seja um único parâmetro desconhecido. Seja x_1, x_2, \ldots, x_n os valores observados da amostra aleatória. Então a função de verossimilhança é definida como

$$L(\theta) = f(x_1, \theta) \cdot f(x_2, \theta) \cdot \ldots \cdot f(x_n, \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta)$$

ullet Note que a função de verossimilhança é uma função do parâmetro desconhecido heta.

Estimador de máxima verossimilhança - EMV

 Veremos que o estimador de máxima verossimilhança será o valor do parâmetro que maximiza a função de verossimilhança. Dessa forma, é fundamental entender o que é a função de verossimilhança.

Função de verossimilhança

Definição: Sejam X_1, X_2, \ldots, X_n uma amostra aleatória de tamanho n da variável aleatória X com função de probabilidade (ou densidade) $f(x,\theta)$, em que θ seja um único parâmetro desconhecido. Seja x_1, x_2, \ldots, x_n os valores observados da amostra aleatória. Então a função de verossimilhanca é definida como

$$L(\theta) = f(x_1, \theta) \cdot f(x_2, \theta) \cdot \ldots \cdot f(x_n, \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta)$$

ullet Note que a função de verossimilhança é uma função do parâmetro desconhecido heta.

Estimador de máxima verossimilhança - EMV

 Veremos que o estimador de máxima verossimilhança será o valor do parâmetro que maximiza a função de verossimilhança. Dessa forma, é fundamental entender o que é a função de verossimilhança.

Função de verossimilhança

Definição: Sejam X_1, X_2, \ldots, X_n uma amostra aleatória de tamanho n da variável aleatória X com função de probabilidade (ou densidade) $f(x,\theta)$, em que θ seja um único parâmetro desconhecido. Seja x_1, x_2, \ldots, x_n os valores observados da amostra aleatória. Então a função de verossimilhança é definida como

$$L(\theta) = f(x_1, \theta) \cdot f(x_2, \theta) \cdot \ldots \cdot f(x_n, \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta)$$

ullet Note que a função de verossimilhança é uma função do parâmetro desconhecido heta.

Estimador de máxima verossimilhança - EMV

Definição: O estimador de máxima verossimilhança de θ é o valor $\hat{\theta}$ que maximiza a função de verossimilhança $L(\theta)$.

 Veremos que o estimador de máxima verossimilhança será o valor do parâmetro que maximiza a função de verossimilhança. Dessa forma, é fundamental entender o que é a função de verossimilhança.

Função de verossimilhança

Definição: Sejam X_1, X_2, \ldots, X_n uma amostra aleatória de tamanho n da variável aleatória X com função de probabilidade (ou densidade) $f(x,\theta)$, em que θ seja um único parâmetro desconhecido. Seja x_1, x_2, \ldots, x_n os valores observados da amostra aleatória. Então a função de verossimilhança é definida como

$$L(\theta) = f(x_1, \theta) \cdot f(x_2, \theta) \cdot \ldots \cdot f(x_n, \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta)$$

ullet Note que a função de verossimilhança é uma função do parâmetro desconhecido heta.

Estimador de máxima verossimilhança - EMV

 Veremos que o estimador de máxima verossimilhança será o valor do parâmetro que maximiza a função de verossimilhança. Dessa forma, é fundamental entender o que é a função de verossimilhança.

Função de verossimilhança

Definição: Sejam X_1, X_2, \ldots, X_n uma amostra aleatória de tamanho n da variável aleatória X com função de probabilidade (ou densidade) $f(x,\theta)$, em que θ seja um único parâmetro desconhecido. Seja x_1, x_2, \ldots, x_n os valores observados da amostra aleatória. Então a função de verossimilhança é definida como

$$L(\theta) = f(x_1, \theta) \cdot f(x_2, \theta) \cdot \ldots \cdot f(x_n, \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta)$$

ullet Note que a função de verossimilhança é uma função do parâmetro desconhecido heta.

Estimador de máxima verossimilhança - EMV

- A fim de interpretar a função de verossimilhança, considere que X é uma variável aleatória discreta.
- Note que a função de verossimilhança é

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta) = P(X_1 = x_1) \cdot P(X_2 = x_2) \cdot \ldots \cdot P(X_n = x_n)$$

- A fim de interpretar a função de verossimilhança, considere que X é uma variável aleatória discreta.
- Note que a função de verossimilhança é

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta) = P(X_1 = x_1) \cdot P(X_2 = x_2) \cdot \ldots \cdot P(X_n = x_n)$$

- A fim de interpretar a função de verossimilhança, considere que X é uma variável aleatória discreta.
- Note que a função de verossimilhança é

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta) = P(X_1 = x_1) \cdot P(X_2 = x_2) \cdot \ldots \cdot P(X_n = x_n)$$

- A fim de interpretar a função de verossimilhança, considere que X é uma variável aleatória discreta.
- Note que a função de verossimilhança é

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta) = P(X_1 = x_1) \cdot P(X_2 = x_2) \cdot \ldots \cdot P(X_n = x_n)$$

- Em outras palavras, $L(\theta)$ é simplesmente a probabilidade de se obter os valores amostrais x_1, x_2, \ldots, x_n

- A fim de interpretar a função de verossimilhança, considere que X é uma variável aleatória discreta.
- Note que a função de verossimilhança é

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta) = P(X_1 = x_1) \cdot P(X_2 = x_2) \cdot \ldots \cdot P(X_n = x_n)$$

- Em outras palavras, $L(\theta)$ é simplesmente a probabilidade de se obter os valores amostrais x_1, x_2, \ldots, x_n
- Logo, no caso de X ser discreta, o EMV é simplesmente um valor que maximiza a probabilidade de ocorrência dos valores da amostra.

Função de log-verossimilhança

O logaritmo natural da função de verossimilhança $L(\theta)$ é chamado de função de log-verossimilhança, isto é

$$I(\theta) = \ln L(\theta)$$

• Não é difícil argumentar que o valor $\hat{\theta}$ que maximiza $L(\theta)$ é o mesmo que maximiza $I(\theta)$, ou seja, o EMV pode ser obtido maximizando a função de log-verossimilhança. De fato, note que se $\hat{\theta}$ é EMV então como a função logaritmo natural é monótona crescente, decorre que

$$L(\hat{ heta}) > L(heta) \Leftrightarrow \ln L(\hat{ heta}) > \ln L(heta)$$

para todo heta no espaço paramétrico.

Função de log-verossimilhança

O logaritmo natural da função de verossimilhança $L(\theta)$ é chamado de função de log-verossimilhança, isto é

$$I(\theta) = \ln L(\theta)$$

• Não é difícil argumentar que o valor $\hat{\theta}$ que maximiza $L(\theta)$ é o mesmo que maximiza $I(\theta)$, ou seja, o EMV pode ser obtido maximizando a função de log-verossimilhança. De fato, note que se $\hat{\theta}$ é EMV então como a função logaritmo natural é monótona crescente, decorre que

$$L(\hat{ heta}) > L(heta) \Leftrightarrow \ln L(\hat{ heta}) > \ln L(heta)$$

para todo heta no espaço paramétrico.

Função de log-verossimilhanca

O logaritmo natural da função de verossimilhança $L(\theta)$ é chamado de função de log-verossimilhança, isto é

$$I(\theta) = \ln L(\theta)$$

• Não é difícil argumentar que o valor $\hat{\theta}$ que maximiza $L(\theta)$ é o mesmo que maximiza $I(\theta)$, ou seja, o EMV pode ser obtido maximizando a função de log-verossimilhança. De fato, note que se $\hat{ heta}$ é EMV então como a função logaritmo natural é monótona crescente, decorre que

$$L(\hat{ heta}) > L(heta) \Leftrightarrow \ln L(\hat{ heta}) > \ln L(heta)$$

Função de log-verossimilhanca

O logaritmo natural da função de verossimilhança $L(\theta)$ é chamado de função de log-verossimilhança, isto é

$$I(\theta) = \ln L(\theta)$$

• Não é difícil argumentar que o valor $\hat{\theta}$ que maximiza $L(\theta)$ é o mesmo que maximiza $I(\theta)$, ou seja, o EMV pode ser obtido maximizando a função de log-verossimilhança. De fato, note que se $\hat{ heta}$ é EMV então como a função logaritmo natural é monótona crescente, decorre que

$$L(\hat{\theta}) > L(\theta) \Leftrightarrow \ln L(\hat{\theta}) > \ln L(\theta)$$

Função de log-verossimilhanca

O logaritmo natural da função de verossimilhança $L(\theta)$ é chamado de função de log-verossimilhança, isto é

$$I(\theta) = \ln L(\theta)$$

• Não é difícil argumentar que o valor $\hat{\theta}$ que maximiza $L(\theta)$ é o mesmo que maximiza $I(\theta)$, ou seja, o EMV pode ser obtido maximizando a função de log-verossimilhança. De fato, note que se $\hat{ heta}$ é EMV então como a função logaritmo natural é monótona crescente, decorre que

$$L(\hat{\theta}) > L(\theta) \Leftrightarrow \ln L(\hat{\theta}) > \ln L(\theta)$$

para todo θ no espaço paramétrico.

Portanto, o EMV pode ser obtido como raiz da equação

$$\frac{dI(\theta)}{d\theta} = 0 \tag{1}$$

 Para se concluir que a solução da equação (1) é um ponto de máximo, é necessário verificar se

- A equação (1) estabelece que o ponto obtido, $\hat{\theta}$, é um ponto critico e a inequação (2) garante que o ponto obtido em (1) é um ponto de máximo.
- Em algumas situações, a solução de (1) pode ser obtida explicitamente. Em situações mais complexas, a solução de (1) será em geral obtida po meio de procedimentos numéricos.

Dr. Giannini Italino

Portanto, o EMV pode ser obtido como raiz da equação

$$\frac{dI(\theta)}{d\theta} = 0 \tag{1}$$

 Para se concluir que a solução da equação (1) é um ponto de máximo, é necessário verificar se

$$\left. \frac{d^2 I(\theta)}{d\theta^2} \right|_{\theta = \hat{\theta}} < 0 \tag{2}$$

- A equação (1) estabelece que o ponto obtido, $\hat{\theta}$, é um ponto critico e a inequação
- Em algumas situações, a solução de (1) pode ser obtida explicitamente. Em

Dr. Giannini Italino Probabilidade e estatística

Portanto, o EMV pode ser obtido como raiz da equação

$$\frac{dI(\theta)}{d\theta} = 0 \tag{1}$$

 Para se concluir que a solução da equação (1) é um ponto de máximo, é necessário verificar se

$$\left. \frac{d^2 I(\theta)}{d\theta^2} \right|_{\theta = \hat{\theta}} < 0 \tag{2}$$

- A equação (1) estabelece que o ponto obtido, $\hat{\theta}$, é um ponto critico e a inequação (2) garante que o ponto obtido em (1) é um ponto de máximo.
- Em algumas situações, a solução de (1) pode ser obtida explicitamente. Em situações mais complexas, a solução de (1) será em geral obtida po meio de procedimentos numéricos.



7 / 15

Portanto, o EMV pode ser obtido como raiz da equação

$$\frac{dI(\theta)}{d\theta} = 0 \tag{1}$$

 Para se concluir que a solução da equação (1) é um ponto de máximo, é necessário verificar se

$$\left. \frac{d^2 I(\theta)}{d\theta^2} \right|_{\theta = \hat{\theta}} < 0 \tag{2}$$

- A equação (1) estabelece que o ponto obtido, $\hat{\theta}$, é um ponto critico e a inequação (2) garante que o ponto obtido em (1) é um ponto de máximo.
- Em algumas situações, a solução de (1) pode ser obtida explicitamente. Em situações mais complexas, a solução de (1) será em geral obtida po meio de procedimentos numéricos.

◆ロト ◆個ト ◆見ト ◆見ト ■ めのの

Portanto, o EMV pode ser obtido como raiz da equação

$$\frac{dI(\theta)}{d\theta} = 0 \tag{1}$$

 Para se concluir que a solução da equação (1) é um ponto de máximo, é necessário verificar se

$$\left. \frac{d^2 I(\theta)}{d\theta^2} \right|_{\theta = \hat{\theta}} < 0 \tag{2}$$

- A equação (1) estabelece que o ponto obtido, $\hat{\theta}$, é um ponto critico e a inequação (2) garante que o ponto obtido em (1) é um ponto de máximo.
- Em algumas situações, a solução de (1) pode ser obtida explicitamente. Em situações mais complexas, a solução de (1) será em geral obtida po meio de procedimentos numéricos.

Exemplo 1: Sejam X_1, X_2, \ldots, X_n uma amostra aleatória de uma população normal com média μ e variância 1. Vamos obter o estimador de máxima verossimilhança do

• Sol.: Primeiro note que se X_1, X_2, \ldots, X_n é uma amostra aleatória proveniente de

$$f(x_i, \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i - \mu)^2}{2}}$$

Logo, a função de verossimilhança é

$$L(\mu) = f(x_1, \mu) \cdot f(x_2, \mu) \cdot \ldots \cdot f(x_n, \mu)$$

$$L(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_1 - \mu)^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_2 - \mu)^2}{2}} \cdot \dots \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_n - \mu)^2}{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}$$

4 D > 4 A > 4 B > 4 B >

Exemplo 1: Sejam X_1, X_2, \ldots, X_n uma amostra aleatória de uma população normal com média μ e variância 1. Vamos obter o estimador de máxima verossimilhança do parâmetro μ .

• Sol.: Primeiro note que se X_1, X_2, \ldots, X_n é uma amostra aleatória proveniente de $X \sim \mathcal{N}(\mu, 1)$, então suas densidades são da forma

$$f(x_i, \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i - \mu)^2}{2}}$$

Logo, a função de verossimilhança é

$$L(\mu) = f(x_1, \mu) \cdot f(x_2, \mu) \cdot \ldots \cdot f(x_n, \mu)$$

ou seja,

$$L(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_1-\mu)^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_2-\mu)^2}{2}} \cdot \dots \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_n-\mu)^2}{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2}$$

Exemplo 1: Sejam X_1, X_2, \ldots, X_n uma amostra aleatória de uma população normal com média μ e variância 1. Vamos obter o estimador de máxima verossimilhança do parâmetro μ .

• Sol.: Primeiro note que se X_1, X_2, \ldots, X_n é uma amostra aleatória proveniente de $X \sim N(\mu, 1)$, então suas densidades são da forma

$$f(x_i, \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i - \mu)^2}{2}}$$

Logo, a função de verossimilhança é

$$L(\mu) = f(x_1, \mu) \cdot f(x_2, \mu) \cdot \ldots \cdot f(x_n, \mu)$$

ou seja,

$$L(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_1-\mu)^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_2-\mu)^2}{2}} \cdot \dots \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_n-\mu)^2}{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (x_i-k)^2}$$

◆ロト ◆御 ト ◆注 ト ◆注 ト 注 ・ 夕 ♀

Dr. Giannini Italino Probabilidade e estatística 2024 8/15

Exemplo 1: Sejam X_1, X_2, \ldots, X_n uma amostra aleatória de uma população normal com média μ e variância 1. Vamos obter o estimador de máxima verossimilhança do parâmetro μ .

• Sol.: Primeiro note que se X_1, X_2, \ldots, X_n é uma amostra aleatória proveniente de $X \sim N(\mu, 1)$, então suas densidades são da forma

$$f(x_i,\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2}}$$

Logo, a função de verossimilhança é

$$L(\mu) = f(x_1, \mu) \cdot f(x_2, \mu) \cdot \ldots \cdot f(x_n, \mu)$$

$$L(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_1-\mu)^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_2-\mu)^2}{2}} \cdot \dots \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_n-\mu)^2}{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2}$$

Exemplo 1: Sejam X_1, X_2, \ldots, X_n uma amostra aleatória de uma população normal com média μ e variância 1. Vamos obter o estimador de máxima verossimilhança do parâmetro μ .

• Sol.: Primeiro note que se X_1, X_2, \ldots, X_n é uma amostra aleatória proveniente de $X \sim N(\mu, 1)$, então suas densidades são da forma

$$f(x_i, \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i - \mu)^2}{2}}$$

Logo, a função de verossimilhança é

$$L(\mu) = f(x_1, \mu) \cdot f(x_2, \mu) \cdot \ldots \cdot f(x_n, \mu)$$

$$L(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_1-\mu)^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_2-\mu)^2}{2}} \cdot \dots \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_n-\mu)^2}{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2}$$

Exemplo 1: Sejam X_1, X_2, \ldots, X_n uma amostra aleatória de uma população normal com média μ e variância 1. Vamos obter o estimador de máxima verossimilhança do parâmetro μ .

• Sol.: Primeiro note que se X_1, X_2, \ldots, X_n é uma amostra aleatória proveniente de $X \sim N(\mu, 1)$, então suas densidades são da forma

$$f(x_i, \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i - \mu)^2}{2}}$$

Logo, a função de verossimilhança é

$$L(\mu) = f(x_1, \mu) \cdot f(x_2, \mu) \cdot \ldots \cdot f(x_n, \mu)$$

ou seja,

$$L(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_1 - \mu)^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_2 - \mu)^2}{2}} \cdot \dots \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_n - \mu)^2}{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}$$

Exemplo 1: Sejam X_1, X_2, \ldots, X_n uma amostra aleatória de uma população normal com média μ e variância 1. Vamos obter o estimador de máxima verossimilhança do parâmetro μ .

• Sol.: Primeiro note que se X_1, X_2, \ldots, X_n é uma amostra aleatória proveniente de $X \sim N(\mu, 1)$, então suas densidades são da forma

$$f(x_i, \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i - \mu)^2}{2}}$$

Logo, a função de verossimilhança é

$$L(\mu) = f(x_1, \mu) \cdot f(x_2, \mu) \cdot \ldots \cdot f(x_n, \mu)$$

ou seja.

$$L(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_1 - \mu)^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_2 - \mu)^2}{2}} \cdot \dots \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_n - \mu)^2}{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}$$

Exemplo 1: Sejam X_1, X_2, \ldots, X_n uma amostra aleatória de uma população normal com média μ e variância 1. Vamos obter o estimador de máxima verossimilhança do parâmetro μ .

• Sol.: Primeiro note que se X_1, X_2, \ldots, X_n é uma amostra aleatória proveniente de $X \sim \mathcal{N}(\mu, 1)$, então suas densidades são da forma

$$f(x_i, \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i - \mu)^2}{2}}$$

Logo, a função de verossimilhança é

$$L(\mu) = f(x_1, \mu) \cdot f(x_2, \mu) \cdot \ldots \cdot f(x_n, \mu)$$

ou seja,

$$L(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_1-\mu)^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_2-\mu)^2}{2}} \cdot \dots \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_n-\mu)^2}{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2}$$

401491451451 5 000

□ > <□ > <□ > < □ > < □ > < □ > < □ >

Exemplo 1: Sejam X_1, X_2, \ldots, X_n uma amostra aleatória de uma população normal com média μ e variância 1. Vamos obter o estimador de máxima verossimilhança do parâmetro μ .

• Sol.: Primeiro note que se X_1, X_2, \ldots, X_n é uma amostra aleatória proveniente de $X \sim N(\mu, 1)$, então suas densidades são da forma

$$f(x_i, \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i - \mu)^2}{2}}$$

Logo, a função de verossimilhança é

$$L(\mu) = f(x_1, \mu) \cdot f(x_2, \mu) \cdot \ldots \cdot f(x_n, \mu)$$

ou seja.

$$L(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_1 - \mu)^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_2 - \mu)^2}{2}} \cdot \dots \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_n - \mu)^2}{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}$$

Exemplo 1: Sejam X_1, X_2, \ldots, X_n uma amostra aleatória de uma população normal com média μ e variância 1. Vamos obter o estimador de máxima verossimilhança do parâmetro μ .

• Sol.: Primeiro note que se X_1, X_2, \ldots, X_n é uma amostra aleatória proveniente de $X \sim N(\mu, 1)$, então suas densidades são da forma

$$f(x_i, \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i - \mu)^2}{2}}$$

Logo, a função de verossimilhança é

$$L(\mu) = f(x_1, \mu) \cdot f(x_2, \mu) \cdot \ldots \cdot f(x_n, \mu)$$

ou seja,

$$L(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_1-\mu)^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_2-\mu)^2}{2}} \cdot \dots \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_n-\mu)^2}{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2}$$

4014411111111111111

Exemplo 1: Sejam X_1, X_2, \ldots, X_n uma amostra aleatória de uma população normal com média μ e variância 1. Vamos obter o estimador de máxima verossimilhança do parâmetro μ .

• Sol.: Primeiro note que se X_1, X_2, \ldots, X_n é uma amostra aleatória proveniente de $X \sim N(\mu, 1)$, então suas densidades são da forma

$$f(x_i, \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i - \mu)^2}{2}}$$

Logo, a função de verossimilhança é

$$L(\mu) = f(x_1, \mu) \cdot f(x_2, \mu) \cdot \ldots \cdot f(x_n, \mu)$$

ou seja.

$$L(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_1-\mu)^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_2-\mu)^2}{2}} \cdot \dots \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_n-\mu)^2}{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2}$$

2024

Obtivemos que

$$L(\mu) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)}$$

Logo, a função de log-verossimilhança é

$$I(\mu) = \ln L(\mu) = \ln \left((\sqrt{2\pi})^{-n} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2} \right) = -n \ln \sqrt{2\pi} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2$$

ullet Derivando a última equação acima, com respeito a μ , e igualando a zero temos

$$\frac{dI(\mu)}{d\mu} = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} 2(x_i - \mu)(-1) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i = n\mu \Leftrightarrow \hat{\mu} = 0$$

Obtivemos que

$$L(\mu) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}$$

Logo, a função de log-verossimilhança é

$$I(\mu) = \ln L(\mu) = \ln \left((\sqrt{2\pi})^{-n} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2} \right) = -n \ln \sqrt{2\pi} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2$$

ullet Derivando a última equação acima, com respeito a μ , e igualando a zero temos

$$\frac{dI(\mu)}{d\mu} = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} 2(x_i - \mu)(-1) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i = n\mu \Leftrightarrow \hat{\mu} = 0$$

Obtivemos que

$$L(\mu) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}$$

• Logo, a função de log-verossimilhança é

$$I(\mu) = \ln L(\mu) = \ln \left((\sqrt{2\pi})^{-n} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2} \right) = -n \ln \sqrt{2\pi} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2$$

ullet Derivando a última equação acima, com respeito a μ , e igualando a zero temos

$$\frac{dI(\mu)}{d\mu} = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} 2(x_i - \mu)(-1) = 0$$

ou seja

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i = n\mu \Leftrightarrow \hat{\mu} = 0$$

Probabilidade e estatística

Obtivemos que

$$L(\mu) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}$$

Logo, a função de log-verossimilhança é

$$I(\mu) = \ln L(\mu) = \ln \left((\sqrt{2\pi})^{-n} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2} \right) = -n \ln \sqrt{2\pi} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2$$

ullet Derivando a última equação acima, com respeito a μ , e igualando a zero temos

$$\frac{dl(\mu)}{d\mu} = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} 2(x_i - \mu)(-1) = 0$$

ou seja

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i = n\mu \Leftrightarrow \hat{\mu} = 0$$

Probabilidade e estatística

Obtivemos que

$$L(\mu) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}$$

• Logo, a função de log-verossimilhança é

$$I(\mu) = \ln L(\mu) = \ln \left((\sqrt{2\pi})^{-n} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2} \right) = -n \ln \sqrt{2\pi} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2$$

ullet Derivando a última equação acima, com respeito a μ , e igualando a zero temos

$$\frac{dI(\mu)}{d\mu}=0\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}2(x_{i}-\mu)(-1)=0$$

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i = n\mu \Leftrightarrow \hat{\mu} = \hat{\lambda}$$

Obtivemos que

$$L(\mu) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}$$

Logo, a função de log-verossimilhança é

$$I(\mu) = \ln L(\mu) = \ln \left((\sqrt{2\pi})^{-n} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2} \right) = -n \ln \sqrt{2\pi} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2$$

ullet Derivando a última equação acima, com respeito a μ , e igualando a zero temos

$$\frac{dI(\mu)}{d\mu}=0\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}2(x_{i}-\mu)(-1)=0$$

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i = n\mu \Leftrightarrow \hat{\mu} = \bar{X}$$

Obtivemos que

$$L(\mu) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}$$

Logo, a função de log-verossimilhança é

$$I(\mu) = \ln L(\mu) = \ln \left((\sqrt{2\pi})^{-n} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2} \right) = -n \ln \sqrt{2\pi} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2$$

ullet Derivando a última equação acima, com respeito a μ , e igualando a zero temos

$$\frac{dI(\mu)}{d\mu}=0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}2(x_{i}-\mu)(-1)=0$$

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i = n\mu \Leftrightarrow \hat{\mu} = \bar{X}$$

Obtivemos que

$$L(\mu) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}$$

• Logo, a função de log-verossimilhança é

$$I(\mu) = \ln L(\mu) = \ln \left((\sqrt{2\pi})^{-n} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2} \right) = -n \ln \sqrt{2\pi} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2$$

ullet Derivando a última equação acima, com respeito a μ , e igualando a zero temos

$$\frac{dI(\mu)}{d\mu}=0\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}2(x_{i}-\mu)(-1)=0$$

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i = n\mu \Leftrightarrow \hat{\mu} = \bar{X}$$

Obtivemos que

$$L(\mu) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}$$

Logo, a função de log-verossimilhança é

$$I(\mu) = \ln L(\mu) = \ln \left((\sqrt{2\pi})^{-n} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2} \right) = -n \ln \sqrt{2\pi} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2$$

ullet Derivando a última equação acima, com respeito a μ , e igualando a zero temos

$$\frac{dl(\mu)}{d\mu} = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} 2(x_i - \mu)(-1) = 0$$

ou seja,

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i = n\mu \Leftrightarrow \hat{\mu} = \bar{X}$$

Probabilidade e estatística

Note ainda que

$$\frac{d^2l(\mu)}{d\mu^2} = \frac{d}{d\mu}\left(\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)\right) = \frac{d}{d\mu}\left(\sum_{i=1}^n x_i - n\mu\right) = -n < 0.$$

ullet Portanto, temos que o estimador de máxima verossimilhança de μ é $\hat{\mu}=ar{X}.$

10 / 15

Dr. Giannini Italino Probabilidade e estatística 2024

Note ainda que

$$\frac{d^2I(\mu)}{d\mu^2} = \frac{d}{d\mu}\left(\sum_{i=1}^n(x_i-\mu)\right) = \frac{d}{d\mu}\left(\sum_{i=1}^nx_i-n\mu\right) = -n < 0.$$

• Portanto, temos que o estimador de máxima verossimilhança de μ é $\hat{\mu}=ar{X}$.

2024

Note ainda que

$$\frac{d^2I(\mu)}{d\mu^2} = \frac{d}{d\mu}\left(\sum_{i=1}^n(x_i - \mu)\right) = \frac{d}{d\mu}\left(\sum_{i=1}^nx_i - n\mu\right) = -n < 0.$$

ullet Portanto, temos que o estimador de máxima verossimilhança de μ é $\hat{\mu}=ar{X}$.

2024

Exemplo 2: Sejam X_1, X_2, \ldots, X_n uma amostra aleatória de uma população com distribuição Bernoulli de parâmetro p, isto é, a função de probabilidade de X é

$$f(x) = egin{cases} p^{\mathrm{x}}(1-p)^{1-\mathrm{x}} & ext{ se } x=0,1, \ 0, & ext{ se caso contrário} \end{cases}$$

Vamos obter o EMV de *p*.

Sol. Temos que a função de verossimilhança é

$$L(p) = f(x_1, p) \cdot f(x_2, p) \cdot \ldots \cdot f(x_n, p)$$

ou seja,

$$L(p) = p^{x_1} (1-p)^{1-x_1} \cdot p^{x_2} (1-p)^{1-x_2} \cdot \ldots \cdot p^{x_n} (1-p)^{1-x_n}$$

$$L(p) = p^{\sum_{i=1}^{n} x_i} (1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

Exemplo 2: Sejam X_1, X_2, \ldots, X_n uma amostra aleatória de uma população com distribuição Bernoulli de parâmetro p, isto é, a função de probabilidade de X é

$$f(x) = \begin{cases} p^x (1-p)^{1-x} & \text{se } x = 0, 1, \\ 0, & \text{se caso contrário.} \end{cases}$$

Vamos obter o EMV de *p*.

Sol. Temos que a função de verossimilhança é

$$L(p) = f(x_1, p) \cdot f(x_2, p) \cdot \ldots \cdot f(x_n, p)$$

ou seja,

$$L(p) = p^{x_1} (1-p)^{1-x_1} \cdot p^{x_2} (1-p)^{1-x_2} \cdot \ldots \cdot p^{x_n} (1-p)^{1-x_n}$$

ou seja,

$$L(p) = p^{\sum_{i=1}^{n} x_i} (1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}$$



Dr. Giannini Italino

Exemplo 2: Sejam X_1, X_2, \ldots, X_n uma amostra aleatória de uma população com distribuição Bernoulli de parâmetro p, isto é, a função de probabilidade de X é

$$f(x) = \begin{cases} p^x (1-p)^{1-x} & \text{se } x = 0, 1, \\ 0, & \text{se caso contrário.} \end{cases}$$

Vamos obter o EMV de *p*.

Sol. Temos que a função de verossimilhança é

$$L(p) = f(x_1, p) \cdot f(x_2, p) \cdot \ldots \cdot f(x_n, p)$$

ou seja,

$$L(p) = p^{x_1} (1-p)^{1-x_1} \cdot p^{x_2} (1-p)^{1-x_2} \cdot \ldots \cdot p^{x_n} (1-p)^{1-x_n}$$

$$L(p) = p^{\sum_{i=1}^{n} x_i} (1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

Exemplo 2: Sejam X_1, X_2, \ldots, X_n uma amostra aleatória de uma população com distribuição Bernoulli de parâmetro p, isto é, a função de probabilidade de X é

$$f(x) = \begin{cases} p^x (1-p)^{1-x} & \text{se } x = 0, 1, \\ 0, & \text{se caso contrário.} \end{cases}$$

Vamos obter o EMV de *p*.

Sol. Temos que a função de verossimilhança é

$$L(p) = f(x_1, p) \cdot f(x_2, p) \cdot \ldots \cdot f(x_n, p)$$

ou seja,

$$L(p) = p^{x_1} (1-p)^{1-x_1} \cdot p^{x_2} (1-p)^{1-x_2} \cdot \ldots \cdot p^{x_n} (1-p)^{1-x_n}$$

ou seja,

$$L(p) = p^{\sum_{i=1}^{n} x_i} (1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

→ロト→同ト→ヨト→ヨ → のQで

Exemplo 2: Sejam X_1, X_2, \ldots, X_n uma amostra aleatória de uma população com distribuição Bernoulli de parâmetro p, isto é, a função de probabilidade de X é

$$f(x) = \begin{cases} p^x (1-p)^{1-x} & \text{se } x = 0, 1, \\ 0, & \text{se caso contrário.} \end{cases}$$

Vamos obter o EMV de *p*.

Sol. Temos que a função de verossimilhança é

$$L(p) = f(x_1, p) \cdot f(x_2, p) \cdot \ldots \cdot f(x_n, p)$$

ou seja,

$$L(p) = p^{x_1}(1-p)^{1-x_1} \cdot p^{x_2}(1-p)^{1-x_2} \cdot \ldots \cdot p^{x_n}(1-p)^{1-x_n}$$

ou seja,

$$L(p) = p^{\sum_{i=1}^{n} x_i} (1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

◆ロト 4周ト 4 重ト 4 重ト ■ 900

Exemplo 2: Sejam X_1, X_2, \ldots, X_n uma amostra aleatória de uma população com distribuição Bernoulli de parâmetro p, isto é, a função de probabilidade de X é

$$f(x) = \begin{cases} p^x (1-p)^{1-x} & \text{se } x = 0, 1, \\ 0, & \text{se caso contrário.} \end{cases}$$

Vamos obter o EMV de *p*.

Sol. Temos que a função de verossimilhança é

$$L(p) = f(x_1, p) \cdot f(x_2, p) \cdot \ldots \cdot f(x_n, p)$$

ou seja,

$$L(p) = p^{x_1} (1-p)^{1-x_1} \cdot p^{x_2} (1-p)^{1-x_2} \cdot \ldots \cdot p^{x_n} (1-p)^{1-x_n}$$

ou seja,

$$L(p) = p^{\sum_{i=1}^{n} x_i} (1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

4□▶ 4□▶ 4□▶ 4□▶ 3□ 900

Exemplo 2: Sejam X_1, X_2, \ldots, X_n uma amostra aleatória de uma população com distribuição Bernoulli de parâmetro p, isto é, a função de probabilidade de X é

$$f(x) = \begin{cases} p^x (1-p)^{1-x} & \text{se } x = 0, 1, \\ 0, & \text{se caso contrário.} \end{cases}$$

Vamos obter o EMV de *p*.

Sol. Temos que a função de verossimilhança é

$$L(p) = f(x_1, p) \cdot f(x_2, p) \cdot \ldots \cdot f(x_n, p)$$

ou seja,

$$L(p) = p^{x_1}(1-p)^{1-x_1} \cdot p^{x_2}(1-p)^{1-x_2} \cdot \ldots \cdot p^{x_n}(1-p)^{1-x_n}$$

ou seja,

$$L(p) = p^{\sum_{i=1}^{n} x_i} (1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

◆ロト 4周ト 4 重ト 4 重ト 重 めなべ

Exemplo 2: Sejam X_1, X_2, \ldots, X_n uma amostra aleatória de uma população com distribuição Bernoulli de parâmetro p, isto é, a função de probabilidade de X é

$$f(x) = \begin{cases} \rho^x (1-p)^{1-x} & \text{se } x = 0, 1, \\ 0, & \text{se caso contrário.} \end{cases}$$

Vamos obter o EMV de *p*.

Sol. Temos que a função de verossimilhança é

$$L(p) = f(x_1, p) \cdot f(x_2, p) \cdot \ldots \cdot f(x_n, p)$$

ou seja,

$$L(p) = p^{x_1}(1-p)^{1-x_1} \cdot p^{x_2}(1-p)^{1-x_2} \cdot \ldots \cdot p^{x_n}(1-p)^{1-x_n}$$

ou seja,

$$L(p) = p^{\sum_{i=1}^{n} x_i} (1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

(ロ) (個) (目) (目) (目) (の)

Exemplo 2: Sejam X_1, X_2, \ldots, X_n uma amostra aleatória de uma população com distribuição Bernoulli de parâmetro p, isto é, a função de probabilidade de X é

$$f(x) = \begin{cases} p^x (1-p)^{1-x} & \text{se } x = 0, 1, \\ 0, & \text{se caso contrário.} \end{cases}$$

Vamos obter o EMV de *p*.

Sol. Temos que a função de verossimilhança é

$$L(p) = f(x_1, p) \cdot f(x_2, p) \cdot \ldots \cdot f(x_n, p)$$

ou seja,

$$L(p) = p^{x_1}(1-p)^{1-x_1} \cdot p^{x_2}(1-p)^{1-x_2} \cdot \ldots \cdot p^{x_n}(1-p)^{1-x_n}$$

ou seja,

$$L(p) = p^{\sum_{i=1}^{n} x_i} (1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

(ロ) (部) (注) (注) 注 り(())

Obtivemos que

$$L(p) = p^{\sum_{i=1}^{n} x_i} (1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

Logo, a função de log-verossimilhança é

$$I(p) = \ln L(p) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \ln p + \left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right) \ln(1-p)$$

Derivando a última equação acima, com respeito a p, e igualando a zero temos

$$\frac{dl(p)}{dp} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{p} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) - \frac{1}{1-p} \left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i \right) = 0$$

$$\frac{dI(p)}{dp} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{p} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) = \frac{1}{1-p} \left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i \right)$$

Obtivemos que

$$L(p) = p^{\sum_{i=1}^{n} x_i} (1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

Logo, a função de log-verossimilhança é

$$I(p) = \ln L(p) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \ln p + \left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right) \ln(1-p)$$

Derivando a última equação acima, com respeito a p, e igualando a zero temos

$$\frac{dl(p)}{dp} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{p} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) - \frac{1}{1-p} \left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i \right) = 0$$

$$\frac{dI(p)}{dp} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{p} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) = \frac{1}{1-p} \left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i \right)$$

Obtivemos que

$$L(p) = p^{\sum_{i=1}^{n} x_i} (1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

Logo, a função de log-verossimilhança é

$$I(p) = \ln L(p) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \ln p + \left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right) \ln(1-p)$$

• Derivando a última equação acima, com respeito a p, e igualando a zero temos

$$\frac{dl(p)}{dp} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{p} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) - \frac{1}{1-p} \left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i \right) = 0$$

ou seja

$$\frac{dI(p)}{dp} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{p} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) = \frac{1}{1-p} \left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i \right)$$

◆□▶ ◆□▶ ◆■▶ ◆■▶ ■ め�@

Dr. Giannini Italino Probabilidade e estatística 2024 12/15

Obtivemos que

$$L(p) = p^{\sum_{i=1}^{n} x_i} (1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

Logo, a função de log-verossimilhança é

$$I(p) = \ln L(p) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \ln p + \left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right) \ln(1-p)$$

• Derivando a última equação acima, com respeito a p, e igualando a zero temos

$$\frac{dl(p)}{dp} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\rho} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) - \frac{1}{1-\rho} \left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i \right) = 0$$

ou seja

$$\frac{dI(p)}{dp} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{p} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) = \frac{1}{1-p} \left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i \right)$$

12 / 15

Dr. Giannini Italino Probabilidade e estatística 2024

Obtivemos que

$$L(p) = p^{\sum_{i=1}^{n} x_i} (1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

Logo, a função de log-verossimilhança é

$$I(p) = \ln L(p) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \ln p + \left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right) \ln(1-p)$$

Derivando a última equação acima, com respeito a p, e igualando a zero temos

$$\frac{dl(p)}{dp} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{p} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) - \frac{1}{1-p} \left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i \right) = 0$$

ou seja

$$\frac{dI(p)}{dp} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{p} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) = \frac{1}{1-p} \left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i \right)$$

4日 | 4日 | 4日 | 4日 | 4日 | 900で

12 / 15

Obtivemos que

$$L(p) = p^{\sum_{i=1}^{n} x_i} (1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

Logo, a função de log-verossimilhança é

$$I(p) = \ln L(p) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \ln p + \left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right) \ln(1-p)$$

Derivando a última equação acima, com respeito a p, e igualando a zero temos

$$\frac{dl(p)}{dp} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{p} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) - \frac{1}{1-p} \left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i \right) = 0$$

ou seja,

$$\frac{dl(p)}{dp} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{p} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) = \frac{1}{1-p} \left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i \right)$$

◆ロト ◆団ト ◆草ト ◆草ト ■ めの(で)

12 / 15

Obtivemos que

$$L(p) = p^{\sum_{i=1}^{n} x_i} (1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

Logo, a função de log-verossimilhança é

$$I(p) = \ln L(p) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \ln p + \left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right) \ln(1-p)$$

• Derivando a última equação acima, com respeito a p, e igualando a zero temos

$$\frac{dl(p)}{dp} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{p} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) - \frac{1}{1-p} \left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i \right) = 0$$

ou seja,

$$\frac{dI(p)}{dp} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{p} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) = \frac{1}{1-p} \left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i \right)$$

◆ロト ◆団ト ◆草ト ◆草ト ■ めの(で)

Dr. Giannini Italino Probabilidade e estatística 2024 12/15

Ou ainda

$$\frac{1}{p}\left(\sum_{i=1}^{n}x_{i}\right)=\frac{1}{1-p}\left(n-\sum_{i=1}^{n}x_{i}\right)\Leftrightarrow\frac{1-p}{p}=\frac{n-\sum_{i=1}^{n}x_{i}}{\sum_{i=1}^{n}x_{i}}$$

simplificando, temos que

Ou ainda

$$\frac{1}{p} - 1 = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} - 1 \Leftrightarrow p = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}.$$

• Não é difícil verificar que $\frac{d^2I(p)}{dp^2}\Big|_{p=\hat{p}}<0$. Logo, temos que o EMV de p é

$$\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$



13 / 15

Ou ainda

$$\frac{1}{p}\left(\sum_{i=1}^{n}x_{i}\right)=\frac{1}{1-p}\left(n-\sum_{i=1}^{n}x_{i}\right)\Leftrightarrow\frac{1-p}{p}=\frac{n-\sum_{i=1}^{n}x_{i}}{\sum_{i=1}^{n}x_{i}}$$

simplificando, temos que

Ou ainda

$$\frac{1}{p} - 1 = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} - 1 \Leftrightarrow p = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}.$$

• Não é difícil verificar que $\frac{d^2 I(p)}{dp^2}\Big|_{p=\hat{p}} < 0$. Logo, temos que o EMV de p é

$$\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$



Dr. Giannini Italino

Ou ainda

$$\frac{1}{p}\left(\sum_{i=1}^{n}x_{i}\right)=\frac{1}{1-p}\left(n-\sum_{i=1}^{n}x_{i}\right)\Leftrightarrow\frac{1-p}{p}=\frac{n-\sum_{i=1}^{n}x_{i}}{\sum_{i=1}^{n}x_{i}}$$

simplificando, temos que

Ou ainda

$$\frac{1}{p}-1=\frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i}-1 \Leftrightarrow p=\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}.$$

• Não é difícil verificar que $\frac{d^2 l(p)}{dp^2}$ < 0. Logo, temos que o EMV de p é

Ou ainda

$$\frac{1}{p}\left(\sum_{i=1}^{n}x_{i}\right)=\frac{1}{1-p}\left(n-\sum_{i=1}^{n}x_{i}\right)\Leftrightarrow\frac{1-p}{p}=\frac{n-\sum_{i=1}^{n}x_{i}}{\sum_{i=1}^{n}x_{i}}$$

simplificando, temos que

Ou ainda

$$\frac{1}{p}-1=\frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i}-1 \Leftrightarrow p=\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}.$$

• Não é difícil verificar que $\frac{d^2 l(p)}{dp^2}$ < 0. Logo, temos que o EMV de p é

$$|_{p=\hat{p}}$$

Ou ainda

$$\frac{1}{p}\left(\sum_{i=1}^{n}x_{i}\right)=\frac{1}{1-p}\left(n-\sum_{i=1}^{n}x_{i}\right)\Leftrightarrow\frac{1-p}{p}=\frac{n-\sum_{i=1}^{n}x_{i}}{\sum_{i=1}^{n}x_{i}}$$

simplificando, temos que

Ou ainda

$$\frac{1}{p}-1=\frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i}-1 \Leftrightarrow p=\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}.$$

• Não é difícil verificar que $\frac{d^2 I(p)}{dp^2}\Big|_{p=\hat{p}}$ < 0. Logo, temos que o EMV de p é

$$\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$



Probabilidade e estatística 2024 13 / 15

Ou ainda

$$\frac{1}{p}\left(\sum_{i=1}^{n}x_{i}\right)=\frac{1}{1-p}\left(n-\sum_{i=1}^{n}x_{i}\right)\Leftrightarrow\frac{1-p}{p}=\frac{n-\sum_{i=1}^{n}x_{i}}{\sum_{i=1}^{n}x_{i}}$$

simplificando, temos que

Ou ainda

$$\frac{1}{p}-1=\frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i}-1 \Leftrightarrow p=\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}.$$

• Não é difícil verificar que $\frac{d^2 l(p)}{dp^2}\bigg|_{p=\hat{p}} < 0$. Logo, temos que o EMV de p é

$$\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}.$$

4□ > 4□ > 4□ > 4□ > 4□ > 4□

13 / 15

Dr. Giannini Italino Probabilidade e estatística 2024

- Suponha que, em uma situação prática, estamos querendo estimar a proporção p de pecas defeituosas produzida por uma fábrica. Se n itens são selecionados, ao acaso, de uma linha de produção e cada item é considerado como defeituoso ou não defeituoso, então

- Suponha que, em uma situação prática, estamos querendo estimar a proporção p
 de peças defeituosas produzida por uma fábrica. Se n itens são selecionados, ao
 acaso, de uma linha de produção e cada item é considerado como defeituoso ou
 não defeituoso, então
 - Podemos relacionar o i-ésimo item defeituoso com $x_i = 1$ e o i-ésimo item não defeituoso com $x_i = 0$.
 - Note $\sum_{i=1}^{n} x_i$ é o número de itens defeituosos na amostra. E \hat{p} é a proporção de itens defeituosos na amostra.

- Suponha que, em uma situação prática, estamos querendo estimar a proporção p
 de peças defeituosas produzida por uma fábrica. Se n itens são selecionados, ao
 acaso, de uma linha de produção e cada item é considerado como defeituoso ou
 não defeituoso, então
 - Podemos relacionar o i-ésimo item defeituoso com $x_i = 1$ e o i-ésimo item não defeituoso com $x_i = 0$.
 - Note $\sum_{i=1}^{n} x_i$ é o número de itens defeituosos na amostra. E \hat{p} é a proporção de itens defeituosos na amostra.

14 / 15

- O método de máxima verossimilhança é um dos métodos de estimação mais usuais, sendo que os estimadores obtidos por esse métodos possuem boas propriedades estatísticas.
- Se $\hat{\theta}$ for o EMV de θ , então sob condições bem gerais e não restritivas, se n

- O método de máxima verossimilhança é um dos métodos de estimação mais usuais, sendo que os estimadores obtidos por esse métodos possuem boas propriedades estatísticas.
- Se $\hat{\theta}$ for o EMV de θ , então sob condições bem gerais e não restritivas, se n (tamanho da amostra) for grande pode-se mostrar que
 - $\hat{ heta}$ é aproximadamente não viesado para heta, isto é, $E(\hat{ heta})pprox heta$
 - a variância de $\ddot{\theta}$ é aproximadamente tão pequena quanto a variância que poderia ser obtida com qualquer outro estimador;
 - $ilde{ heta}$ tem uma distribuição normal aproximada.

- O método de máxima verossimilhança é um dos métodos de estimação mais usuais, sendo que os estimadores obtidos por esse métodos possuem boas propriedades estatísticas.
- Se $\hat{\theta}$ for o EMV de θ , então sob condições bem gerais e não restritivas, se n (tamanho da amostra) for grande pode-se mostrar que
 - $\hat{ heta}$ é aproximadamente não viesado para heta, isto é, $E(\hat{ heta})pprox heta$;
 - a variância de $\hat{\theta}$ é aproximadamente tão pequena quanto a variância que poderia ser obtida com qualquer outro estimador;
 - $ilde{ heta}$ tem uma distribuição normal aproximada.

- O método de máxima verossimilhança é um dos métodos de estimação mais usuais, sendo que os estimadores obtidos por esse métodos possuem boas propriedades estatísticas.
- Se $\hat{\theta}$ for o EMV de θ , então sob condições bem gerais e não restritivas, se n (tamanho da amostra) for grande pode-se mostrar que
 - $\hat{ heta}$ é aproximadamente não viesado para heta, isto é, $E(\hat{ heta})pprox heta$;
 - a variância de $\hat{\theta}$ é aproximadamente tão pequena quanto a variância que poderia ser obtida com qualquer outro estimador;
 - heta tem uma distribuição normal aproximada

- O método de máxima verossimilhança é um dos métodos de estimação mais usuais, sendo que os estimadores obtidos por esse métodos possuem boas propriedades estatísticas.
- Se $\hat{\theta}$ for o EMV de θ , então sob condições bem gerais e não restritivas, se n (tamanho da amostra) for grande pode-se mostrar que
 - $\hat{ heta}$ é aproximadamente não viesado para heta, isto é, $E(\hat{ heta})pprox heta$;
 - a variância de $\hat{\theta}$ é aproximadamente tão pequena quanto a variância que poderia ser obtida com qualquer outro estimador;
 - lacksquare tem uma distribuição normal aproximada.