# Probabilidade e estatística - Aula 12 Estatística descritiva

Dr. Giannini Italino Alves Vieira

Universidade Federal do Ceará - Campus de Crateús

2024

- Média da amostra
- Variância da amostra
- Mediana
- Amplitude
- Moda
- Quartis

# Motivação

- A estatística descritiva é um importante e fundamental aspecto que consiste em resumir os dados, objetivando facilitar a interpretação e análise dos mesmos.
- Veremos, na aula de hoje, métodos para resumir dados. Tais métodos capturam
- Na próxima aula veremos alguns recursos para podermos fazer apresentações de

#### Motivação

- A estatística descritiva é um importante e fundamental aspecto que consiste em resumir os dados, objetivando facilitar a interpretação e análise dos mesmos.
- Veremos, na aula de hoje, métodos para resumir dados. Tais métodos capturam características importantes dos dados, tais como tendência central e variabilidade. Essas características são frequentemente importantes para a tomada de decisão.
- Na próxima aula veremos alguns recursos para podermos fazer apresentações de

#### Motivação

- A estatística descritiva é um importante e fundamental aspecto que consiste em resumir os dados, objetivando facilitar a interpretação e análise dos mesmos.
- Veremos, na aula de hoje, métodos para resumir dados. Tais métodos capturam características importantes dos dados, tais como tendência central e variabilidade. Essas características são frequentemente importantes para a tomada de decisão.
- Na próxima aula veremos alguns recursos para podermos fazer apresentações de dados. Resumos e apresentações de dados, bem constituídos, são fundamentais para fazermos uma boa análise estatística, uma vez que, a partir destes, podemos extrair características importantes dos dados e também ter noção sobre o tipo de modelo que é mais apropriado na solução do problema.

Em todas as medidas de resumo que veremos a seguir o termo *amostra* se refere às observações coletadas a partir de uma população de interesse, isto é, a partir do conjunto de todos os elementos que estão sob investigação.

#### Média da amostra

Se as n observações em uma amostra forem denotadas por  $x_1, x_2, \ldots, x_n$  então a média amostral é definida por

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

- Intuitivamente, a média da amostra é uma medida de tendência central dos dados.
- Veremos, mais na frente, que a média da amostra, isto é  $\bar{x}$ , é uma boa estimativa para a média da população.

4 D > 4 B > 4 E > 4 E > 9 Q Q

Em todas as medidas de resumo que veremos a seguir o termo *amostra* se refere às observações coletadas a partir de uma população de interesse, isto é, a partir do conjunto de todos os elementos que estão sob investigação.

#### Média da amostra

Se as n observações em uma amostra forem denotadas por  $x_1, x_2, \dots, x_n$  então a média amostral é definida por

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

- Intuitivamente, a média da amostra é uma medida de tendência central dos dados.
- Veremos, mais na frente, que a média da amostra, isto é  $\bar{x}$ , é uma boa estimativa para a média da população.

◆ロト ◆御 ト ◆ 恵 ト ◆ 恵 ・ 夕 Q ②

Em todas as medidas de resumo que veremos a seguir o termo amostra se refere às observações coletadas a partir de uma população de interesse, isto é, a partir do conjunto de todos os elementos que estão sob investigação.

#### Média da amostra

Se as n observações em uma amostra forem denotadas por  $x_1, x_2, \ldots, x_n$  então a média amostral é definida por

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

- Intuitivamente, a média da amostra é uma medida de tendência central dos dados.
- ullet Veremos, mais na frente, que a média da amostra, isto é  $\bar{x}$ , é uma boa estimativa para a média da população.

Exemplo: Prevenir a propagação de trinca de fadiga em estruturas de aviões é um importante elemento da segurança em aeronaves. Um estudo de engenharia para investigar a trinca de fadiga em n=9 asas carregadas ciclicamente reportou os seguintes comprimentos (em mm) de trinca:

$$2.13, 2.96, 3.02, 1.82, 1.15, 1.37, 2.04, 2.47, 2.60$$

• Sol. Temos que as 9 observações da nossa amostra são  $x_1 = 2.13, x_2 = 2.96, x_3 =$ 

$$\bar{x} = \frac{2.13 + 2.96 + 3.02 + 1.82 + 1.15 + 1.37 + 2.04 + 2.47 + 2.60}{9} \approx 2.173.$$

Exemplo: Prevenir a propagação de trinca de fadiga em estruturas de aviões é um importante elemento da segurança em aeronaves. Um estudo de engenharia para investigar a trinca de fadiga em n=9 asas carregadas ciclicamente reportou os seguintes comprimentos (em mm) de trinca:

$$2.13, 2.96, 3.02, 1.82, 1.15, 1.37, 2.04, 2.47, 2.60$$

Calcule a média da amostra.

• Sol. Temos que as 9 observações da nossa amostra são  $x_1=2.13, x_2=2.96, x_3=3.02, x_4=1.82, x_5=1.15, x_6=1.37, x_7=2.04, x_8=2.47, x_9=2.60$ . Logo, a média da amostra é

$$\bar{x} = \frac{2.13 + 2.96 + 3.02 + 1.82 + 1.15 + 1.37 + 2.04 + 2.47 + 2.60}{9} \approx 2.173.$$

◆ロ → ◆母 → ◆ き → も き め へ で 。

Exemplo: Prevenir a propagação de trinca de fadiga em estruturas de aviões é um importante elemento da segurança em aeronaves. Um estudo de engenharia para investigar a trinca de fadiga em n=9 asas carregadas ciclicamente reportou os seguintes comprimentos (em mm) de trinca:

$$2.13, 2.96, 3.02, 1.82, 1.15, 1.37, 2.04, 2.47, 2.60$$

Calcule a média da amostra.

• Sol. Temos que as 9 observações da nossa amostra são  $x_1=2.13, x_2=2.96, x_3=3.02, x_4=1.82, x_5=1.15, x_6=1.37, x_7=2.04, x_8=2.47, x_9=2.60$ . Logo, a média da amostra é

$$\bar{x} = \frac{2.13 + 2.96 + 3.02 + 1.82 + 1.15 + 1.37 + 2.04 + 2.47 + 2.60}{9} \approx 2.173.$$

◄□▶◀圖▶◀불▶◀불▶ 불 쒸٩℃

- Embora a média seja uma medida interessante, ela não captura todas as informações a respeito da amostra.
- Uma outra medida importante, que captura a variabilidade dos dados, é a variância da amostra.

#### Variância da amostra

Se  $x_1, x_2, \ldots, x_n$  for uma amostra de n observações, então a variância da amostra é definida por

$$s^{2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_{i} - \bar{x})^{2}$$

O desvio-padrão da amostra, denotado por s, é a raiz quadrada positiva da variância da amostra.

 Note que as unidades de medida da variância são o quadrado das unidades de medida originais da variável, enquanto que o desvio-padrão tem mesma unidade de medida dos dados.

□ > < □ > < □ > < □ > < □ >
 □ > < □ </li>

- Embora a média seja uma medida interessante, ela não captura todas as informações a respeito da amostra.
- Uma outra medida importante, que captura a variabilidade dos dados, é a variância da amostra.

#### Variância da amostra

Se  $x_1, x_2, \ldots, x_n$  for uma amostra de n observações, então a variância da amostra é definida por

$$s^{2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_{i} - \bar{x})^{2}$$

O desvio-padrão da amostra, denotado por s, é a raiz quadrada positiva da variância da amostra.

 Note que as unidades de medida da variância são o quadrado das unidades de medida originais da variável, enquanto que o desvio-padrão tem mesma unidade de medida dos dados.

□ > < □ > < □ > < □ > < □ >
 □ > < □ </li>

- Embora a média seja uma medida interessante, ela não captura todas as informações a respeito da amostra.
- Uma outra medida importante, que captura a variabilidade dos dados, é a variância da amostra

#### Variância da amostra

Se  $x_1, x_2, \ldots, x_n$  for uma amostra de *n* observações, então a variância da amostra é definida por

$$s^{2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_{i} - \bar{x})^{2}$$

Note que as unidades de medida da variância são o quadrado das unidades de

- Embora a média seja uma medida interessante, ela não captura todas as informações a respeito da amostra.
- Uma outra medida importante, que captura a variabilidade dos dados, é a variância da amostra

#### Variância da amostra

Se  $x_1, x_2, \ldots, x_n$  for uma amostra de n observações, então a variância da amostra é definida por

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

Note que as unidades de medida da variância são o quadrado das unidades de

- Embora a média seja uma medida interessante, ela não captura todas as informações a respeito da amostra.
- Uma outra medida importante, que captura a variabilidade dos dados, é a variância da amostra

#### Variância da amostra

Se  $x_1, x_2, \ldots, x_n$  for uma amostra de n observações, então a variância da amostra é definida por

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

O desvio-padrão da amostra, denotado por s, é a raiz quadrada positiva da variância da amostra

Note que as unidades de medida da variância são o quadrado das unidades de

- Embora a média seja uma medida interessante, ela não captura todas as informações a respeito da amostra.
- Uma outra medida importante, que captura a variabilidade dos dados, é a variância da amostra

#### Variância da amostra

Se  $x_1, x_2, \ldots, x_n$  for uma amostra de n observações, então a variância da amostra é definida por

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

O desvio-padrão da amostra, denotado por s, é a raiz quadrada positiva da variância da amostra

 Note que as unidades de medida da variância são o quadrado das unidades de medida originais da variável, enquanto que o desvio-padrão tem mesma unidade de medida dos dados.

2024

#### Alternativa ao cálculo da variância da amostra

• Note que o cálculo de  $s^2$  necessita do cálculo de  $\bar{x}$  e de n diferenças  $(x_i - \bar{x})^2$ . Se

$$s^{2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_{i} - \bar{x})^{2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_{i}^{2} - 2x_{i}\bar{x} + \bar{x}^{2})$$

$$s^{2} = \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^{n} x_{i}^{2} - 2\bar{x} \frac{n}{n} \sum_{i=1}^{n} x_{i} + n\bar{x}^{2} \right) = \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^{n} x_{i}^{2} - 2n\bar{x}^{2} + n\bar{x}^{2} \right)$$

$$s^{2} = \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^{n} x_{i}^{2} - n\bar{x}^{2} \right)$$

2024

#### Alternativa ao cálculo da variância da amostra

• Note que o cálculo de  $s^2$  necessita do cálculo de  $\bar{x}$  e de n diferenças  $(x_i - \bar{x})^2$ . Se  $(x_i - \bar{x})$  não for inteiro, então calcular a variância da amostra pode resultar em bastante trabalho. Uma maneira alternativa de se obter a variância da amostra, que em alguns casos pode simplificar os cálculos, é a seguinte:

$$s^{2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_{i} - \bar{x})^{2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_{i}^{2} - 2x_{i}\bar{x} + \bar{x}^{2})$$

ou seja

$$s^{2} = \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^{n} x_{i}^{2} - 2\bar{x} \frac{n}{n} \sum_{i=1}^{n} x_{i} + n\bar{x}^{2} \right) = \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^{n} x_{i}^{2} - 2n\bar{x}^{2} + n\bar{x}^{2} \right)$$

ou ainda

$$s^{2} = \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^{n} x_{i}^{2} - n\bar{x}^{2} \right)$$

4 D > 4 A > 4 B > 4 B > B = 900

Dr. Giannini Italino

#### Alternativa ao cálculo da variância da amostra

• Note que o cálculo de  $s^2$  necessita do cálculo de  $\bar{x}$  e de n diferenças  $(x_i - \bar{x})^2$ . Se  $(x_i - \bar{x})$  não for inteiro, então calcular a variância da amostra pode resultar em bastante trabalho. Uma maneira alternativa de se obter a variância da amostra, que em alguns casos pode simplificar os cálculos, é a seguinte:

$$s^{2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_{i} - \bar{x})^{2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_{i}^{2} - 2x_{i}\bar{x} + \bar{x}^{2})$$

ou seja

$$s^{2} = \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^{n} x_{i}^{2} - 2\bar{x} \frac{n}{n} \sum_{i=1}^{n} x_{i} + n\bar{x}^{2} \right) = \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^{n} x_{i}^{2} - 2n\bar{x}^{2} + n\bar{x}^{2} \right)$$

ou ainda

$$s^{2} = \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^{n} x_{i}^{2} - n\bar{x}^{2} \right)$$

401491451451 5 000

#### Alternativa ao cálculo da variância da amostra

• Note que o cálculo de  $s^2$  necessita do cálculo de  $\bar{x}$  e de n diferenças  $(x_i - \bar{x})^2$ . Se  $(x_i - \bar{x})$  não for inteiro, então calcular a variância da amostra pode resultar em bastante trabalho. Uma maneira alternativa de se obter a variância da amostra, que em alguns casos pode simplificar os cálculos, é a seguinte:

$$s^{2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_{i} - \bar{x})^{2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_{i}^{2} - 2x_{i}\bar{x} + \bar{x}^{2})$$

ou seja,

$$s^{2} = \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^{n} x_{i}^{2} - 2\bar{x} \frac{n}{n} \sum_{i=1}^{n} x_{i} + n\bar{x}^{2} \right) = \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^{n} x_{i}^{2} - 2n\bar{x}^{2} + n\bar{x}^{2} \right)$$

ou ainda

$$s^{2} = \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^{n} x_{i}^{2} - n\bar{x}^{2} \right)$$

4 D > 4 A > 4 B > 4 B > B = 900

#### Alternativa ao cálculo da variância da amostra

• Note que o cálculo de  $s^2$  necessita do cálculo de  $\bar{x}$  e de n diferenças  $(x_i - \bar{x})^2$ . Se  $(x_i - \bar{x})$  não for inteiro, então calcular a variância da amostra pode resultar em bastante trabalho. Uma maneira alternativa de se obter a variância da amostra, que em alguns casos pode simplificar os cálculos, é a seguinte:

$$s^{2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_{i} - \bar{x})^{2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_{i}^{2} - 2x_{i}\bar{x} + \bar{x}^{2})$$

ou seja,

$$s^{2} = \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^{n} x_{i}^{2} - 2\bar{x} \frac{n}{n} \sum_{i=1}^{n} x_{i} + n\bar{x}^{2} \right) = \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^{n} x_{i}^{2} - 2n\bar{x}^{2} + n\bar{x}^{2} \right)$$

ou ainda

$$s^{2} = \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^{n} x_{i}^{2} - n\bar{x}^{2} \right)$$

4 D > 4 A > 4 B > 4 B > B 900

#### Alternativa ao cálculo da variância da amostra

• Note que o cálculo de  $s^2$  necessita do cálculo de  $\bar{x}$  e de n diferenças  $(x_i - \bar{x})^2$ . Se  $(x_i - ar{x})$  não for inteiro, então calcular a variância da amostra pode resultar em bastante trabalho. Uma maneira alternativa de se obter a variância da amostra, que em alguns casos pode simplificar os cálculos, é a seguinte:

$$s^{2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_{i} - \bar{x})^{2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_{i}^{2} - 2x_{i}\bar{x} + \bar{x}^{2})$$

ou seja,

$$s^{2} = \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^{n} x_{i}^{2} - 2\bar{x} \frac{n}{n} \sum_{i=1}^{n} x_{i} + n\bar{x}^{2} \right) = \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^{n} x_{i}^{2} - 2n\bar{x}^{2} + n\bar{x}^{2} \right)$$

ou ainda

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 \right)$$

2024

Exemplo: Considere novamente o exemplo anterior, ou seja, os dados referentes a trinca de fadiga. Temos que os dados são os seguintes:

$$2.13, 2.96, 3.02, 1.82, 1.15, 1.37, 2.04, 2.47, 2.60$$

Suponha que nosso interesse seja em obter a variância dessa amostra.

 Sol. No exercício anterior, obtivemos que a média da amostra é aproximadamente 2.173. Logo, temos que a variância da amostra é dada por

$$s^{2} = \frac{1}{9-1} \left( \sum_{i=1}^{9} x_{i}^{2} - 9(2.173)^{2} \right)$$

ou seja

$$s^2 = \frac{2.13^2 + 2.96^2 + 3.02^2 + \ldots + 2.60^2 - 9(2.173)^2}{8} \approx 0.43035$$

Dr. Giannini Italino Probabilidade e estatística

Exemplo: Considere novamente o exemplo anterior, ou seja, os dados referentes a trinca de fadiga. Temos que os dados são os seguintes:

Suponha que nosso interesse seja em obter a variância dessa amostra.

 Sol. No exercício anterior, obtivemos que a média da amostra é aproximadamente 2.173. Logo, temos que a variância da amostra é dada por

$$s^{2} = \frac{1}{9-1} \left( \sum_{i=1}^{9} x_{i}^{2} - 9(2.173)^{2} \right)$$

ou seja

$$s^{2} = \frac{2.13^{2} + 2.96^{2} + 3.02^{2} + \dots + 2.60^{2} - 9(2.173)^{2}}{8} \approx 0.43035$$

Dr. Giannini Italino Probabilidade e estatística

Exemplo: Considere novamente o exemplo anterior, ou seja, os dados referentes a trinca de fadiga. Temos que os dados são os seguintes:

Suponha que nosso interesse seja em obter a variância dessa amostra.

 Sol. No exercício anterior, obtivemos que a média da amostra é aproximadamente 2.173. Logo, temos que a variância da amostra é dada por

$$s^{2} = \frac{1}{9-1} \left( \sum_{i=1}^{9} x_{i}^{2} - 9(2.173)^{2} \right)$$

ou seja

$$5^2 = \frac{2.13^2 + 2.96^2 + 3.02^2 + \ldots + 2.60^2 - 9(2.173)^2}{8} \approx 0.43035$$

◆□▶ ◆□▶ ◆□▶ ◆□▶ □ り<0</p>

Exemplo: Considere novamente o exemplo anterior, ou seja, os dados referentes a trinca de fadiga. Temos que os dados são os seguintes:

Suponha que nosso interesse seja em obter a variância dessa amostra.

 Sol. No exercício anterior, obtivemos que a média da amostra é aproximadamente 2.173. Logo, temos que a variância da amostra é dada por

$$s^2 = \frac{1}{9-1} \left( \sum_{i=1}^{9} x_i^2 - 9(2.173)^2 \right)$$

ou seja,

$$s^2 = \frac{2.13^2 + 2.96^2 + 3.02^2 + \ldots + 2.60^2 - 9(2.173)^2}{8} \approx 0.43035$$

◆ロト ◆問 ト ◆ 恵 ト ◆ 恵 ・ 夕 Q (\*)

Dr. Giannini Italino

#### Mediana

 A mediana é uma outra medida de tendência central, que divide a amostra em duas partes iguais, metade abaixo da mediana e metade acima.

$$X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$$

$$Md = egin{cases} x_{\left(rac{n+1}{2}
ight)}, & ext{se } n ext{ \'e impar.} \ rac{x_{\left(rac{n}{2}
ight)} + x_{\left(rac{n}{2}+1
ight)}}{2}, & ext{se } n ext{ \'e par.} \end{cases}$$

2024

#### Mediana

 A mediana é uma outra medida de tendência central, que divide a amostra em duas partes iguais, metade abaixo da mediana e metade acima.

#### Mediana

A fim de entender como se calcula a mediana, considere que  $x_1, x_2, \ldots, x_n$  é uma amostra de n observações e que

$$X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$$

é a ordenação da amostra em ordem crescente, ou seja,  $x_{(1)}$  é a menor observação,  $x_{(2)}$  é a segunda e assim por diante. Então a mediana é dada por

$$Md = \begin{cases} x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}, & \text{se } n \text{ \'e impar}, \\ \frac{x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2}, & \text{se } n \text{ \'e par}. \end{cases}$$

Exemplo: Considere novamente os dados referentes a trinca de fadiga, fornecidos no primeiro exemplo. Temos que os dados, ordenados, são os seguintes:

$$x_{(1)} = 1.15, x_{(2)} = 1.37, x_{(3)} = 1.82, x_{(4)} = 2.04, x_{(5)} = 2.13, x_{(6)} = 2.47, x_{(7)} = 2.60, x_{(8)} = 2.96, x_{(9)} = 3.02.$$

Como n=9 (impar), então temos que

$$Md = X_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} = X_{\left(\frac{10}{2}\right)} = X_{(5)} = 2.13.$$

# Outro exemplo

Reconsidere novamente os dados acima. Suponha que uma outra medida referente a trinca de fadiga foi coletada e o valor dessa observação foi  $x_{(10)}=3.03$ .

Note que a mediana desse novo conjunto de dados é

$$Md = \frac{x_{\left(\frac{10}{2}\right)} + x_{\left(\frac{10}{2}+1\right)}}{2} = \frac{x_{\left(5\right)} + x_{\left(6\right)}}{2} = \frac{2.13 + 2.47}{2} = 2.3.$$

◆ロト ◆母 ト ◆注 ト ◆注 ト 注 ・ かへの

Exemplo: Considere novamente os dados referentes a trinca de fadiga, fornecidos no primeiro exemplo. Temos que os dados, ordenados, são os seguintes:

$$x_{(1)} = 1.15, x_{(2)} = 1.37, x_{(3)} = 1.82, x_{(4)} = 2.04, x_{(5)} = 2.13, x_{(6)} = 2.47, x_{(7)} = 2.60, x_{(8)} = 2.96, x_{(9)} = 3.02.$$

Como n=9 (impar), então temos que

$$Md = x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} = x_{\left(\frac{10}{2}\right)} = x_{(5)} = 2.13.$$

# Outro exemplo

Reconsidere novamente os dados acima. Suponha que uma outra medida referente a trinca de fadiga foi coletada e o valor dessa observação foi  $x_{(10)}=3.03$ .

Note que a mediana desse novo conjunto de dados é

$$Md = \frac{x_{\left(\frac{10}{2}\right)} + x_{\left(\frac{10}{2}+1\right)}}{2} = \frac{x_{\left(5\right)} + x_{\left(6\right)}}{2} = \frac{2.13 + 2.47}{2} = 2.3.$$

◆ロト ◆母 ト ◆注 ト ◆注 ト 注 ・ かへの

Exemplo: Considere novamente os dados referentes a trinca de fadiga, fornecidos no primeiro exemplo. Temos que os dados, ordenados, são os seguintes:

$$x_{(1)} = 1.15, x_{(2)} = 1.37, x_{(3)} = 1.82, x_{(4)} = 2.04, x_{(5)} = 2.13, x_{(6)} = 2.47, x_{(7)} = 2.60, x_{(8)} = 2.96, x_{(9)} = 3.02.$$

Como n=9 (impar), então temos que

$$Md = x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} = x_{\left(\frac{10}{2}\right)} = x_{(5)} = 2.13.$$

### Outro exemplo

Reconsidere novamente os dados acima. Suponha que uma outra medida referente a trinca de fadiga foi coletada e o valor dessa observação foi  $x_{(10)}=3.03$ .

Note que a mediana desse novo conjunto de dados é

$$Md = \frac{x_{\left(\frac{10}{2}\right)} + x_{\left(\frac{10}{2} + 1\right)}}{2} = \frac{x_{\left(5\right)} + x_{\left(6\right)}}{2} = \frac{2.13 + 2.47}{2} = 2.3.$$

◆□▶ ◆□▶ ◆■▶ ◆■▶ ● りへ○

Exemplo: Considere novamente os dados referentes a trinca de fadiga, fornecidos no primeiro exemplo. Temos que os dados, ordenados, são os seguintes:

$$x_{(1)} = 1.15, x_{(2)} = 1.37, x_{(3)} = 1.82, x_{(4)} = 2.04, x_{(5)} = 2.13, x_{(6)} = 2.47, x_{(7)} = 2.60, x_{(8)} = 2.96, x_{(9)} = 3.02.$$

Como n=9 (impar), então temos que

$$Md = x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} = x_{\left(\frac{10}{2}\right)} = x_{(5)} = 2.13.$$

### Outro exemplo

Reconsidere novamente os dados acima. Suponha que uma outra medida referente a trinca de fadiga foi coletada e o valor dessa observação foi  $x_{(10)} = 3.03$ .

Note que a mediana desse novo conjunto de dados é

$$Md = \frac{x_{\left(\frac{10}{2}\right)} + x_{\left(\frac{10}{2} + 1\right)}}{2} = \frac{x_{\left(5\right)} + x_{\left(6\right)}}{2} = \frac{2.13 + 2.47}{2} = 2.3.$$

◆□▶ ◆□▶ ◆■▶ ◆■▶ ● りへ○

Exemplo: Considere novamente os dados referentes a trinca de fadiga, fornecidos no primeiro exemplo. Temos que os dados, ordenados, são os seguintes:

$$x_{(1)} = 1.15, x_{(2)} = 1.37, x_{(3)} = 1.82, x_{(4)} = 2.04, x_{(5)} = 2.13, x_{(6)} = 2.47, x_{(7)} = 2.60, x_{(8)} = 2.96, x_{(9)} = 3.02.$$

Como n=9 (impar), então temos que

$$Md = x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} = x_{\left(\frac{10}{2}\right)} = x_{(5)} = 2.13.$$

#### Outro exemplo

Reconsidere novamente os dados acima. Suponha que uma outra medida referente a trinca de fadiga foi coletada e o valor dessa observação foi  $x_{(10)}=3.03$ .

Note que a mediana desse novo conjunto de dados é

$$Md = \frac{x_{\left(\frac{10}{2}\right)} + x_{\left(\frac{10}{2} + 1\right)}}{2} = \frac{x_{\left(5\right)} + x_{\left(6\right)}}{2} = \frac{2.13 + 2.47}{2} = 2.3.$$

◆ロト ◆個ト ◆夏ト ◆夏ト ■ りへの

# Amplitude

 Além da variância e do desvio-padrão de uma amostra, a amplitude da amostra é também uma outra medida útil de variabilidade.

# Amplitude

Se as n observações de uma amostra forem denotadas por  $x_1, x_2, \ldots, x_n$ , então a amplitude da amostra é definida por

$$ap = \max(x_i) - \min(x_i).$$

Ou seja, a amplitude é simplesmente a diferença entre a maior e a menor observação da amostra.

• Por exemplo, temos que a amplitude da amostra do primeiro exemplo é ap= 3.02-1.15=1.87

# **Amplitude**

 Além da variância e do desvio-padrão de uma amostra, a amplitude da amostra é também uma outra medida útil de variabilidade.

# **Amplitude**

Se as n observações de uma amostra forem denotadas por  $x_1, x_2, \ldots, x_n$ , então a amplitude da amostra é definida por

$$\mathsf{ap} = \mathsf{max}(x_i) - \mathsf{min}(x_i).$$

Ou seja, a amplitude é simplesmente a diferença entre a maior e a menor observação da amostra

 Por exemplo, temos que a amplitude da amostra do primeiro exemplo é ap = 3.02 - 1.15 = 1.87

- Note que a amplitude é uma medida bem simples de ser calculada. Contudo, ela não leva em consideração as informações contidas nos dados entre o maior e o menor valor
- Por exemplo, considere os dois conjuntos de dados a seguir: 1,3,5,8,9 e

Uma outra medida de resumo bem simples e útil é a moda da amostra. A moda da

2024

- Note que a amplitude é uma medida bem simples de ser calculada. Contudo, ela não leva em consideração as informações contidas nos dados entre o maior e o menor valor
- Por exemplo, considere os dois conjuntos de dados a seguir: 1,3,5,8,9 e 1, 5, 5, 5, 9. Note que a amplitude dos dois conjuntos de dados é a mesma, isto é,

Uma outra medida de resumo bem simples e útil é a moda da amostra. A moda da

- Note que a amplitude é uma medida bem simples de ser calculada. Contudo, ela não leva em consideração as informações contidas nos dados entre o maior e o menor valor
- Por exemplo, considere os dois conjuntos de dados a seguir: 1,3,5,8,9 e 1, 5, 5, 5, 9. Note que a amplitude dos dois conjuntos de dados é a mesma, isto é, ap= 8. Contudo, o desvio-padrão da primeira amostra é  $s_1 \approx 3.35$  enguanto que o

- Note que a amplitude é uma medida bem simples de ser calculada. Contudo, ela não leva em consideração as informações contidas nos dados entre o maior e o menor valor
- Por exemplo, considere os dois conjuntos de dados a seguir: 1,3,5,8,9 e 1, 5, 5, 5, 9. Note que a amplitude dos dois conjuntos de dados é a mesma, isto é, ap= 8. Contudo, o desvio-padrão da primeira amostra é  $s_1 \approx 3.35$  enquanto que o desvio-padrão da segunda amostra é  $s_2 \approx 2.83$ .

- Note que a amplitude é uma medida bem simples de ser calculada. Contudo, ela não leva em consideração as informações contidas nos dados entre o maior e o menor valor.
- Por exemplo, considere os dois conjuntos de dados a seguir: 1,3,5,8,9 e 1,5,5,5,9. Note que a amplitude dos dois conjuntos de dados é a mesma, isto é, ap= 8. Contudo, o desvio-padrão da primeira amostra é  $s_1 \approx 3.35$  enquanto que o desvio-padrão da segunda amostra é  $s_2 \approx 2.83$ .

### Moda

Uma outra medida de resumo bem simples e útil é a moda da amostra. A moda da amostra é o valor da observação que ocorre com mais frequência.

Por exemplo, no segundo conjunto de dados do exemplo acima temos que 5 é a moda da amostra, uma vez que apareceu com maior frequência no conjunto de dados. Alguns conjuntos de dados podem ter mais de uma moda. Neste caso, dizemos que o conjunto é multimodal.

Pode ocorrer também de não existir moda na amostra, como por exemplo, no primeiro conjunto de dados do exemplo acima.

- Note que a amplitude é uma medida bem simples de ser calculada. Contudo, ela não leva em consideração as informações contidas nos dados entre o maior e o menor valor
- Por exemplo, considere os dois conjuntos de dados a seguir: 1,3,5,8,9 e 1, 5, 5, 5, 9. Note que a amplitude dos dois conjuntos de dados é a mesma, isto é, ap= 8. Contudo, o desvio-padrão da primeira amostra é  $s_1 \approx 3.35$  enguanto que o desvio-padrão da segunda amostra é  $s_2 \approx 2.83$ .

### Moda

Uma outra medida de resumo bem simples e útil é a moda da amostra. A moda da amostra é o valor da observação que ocorre com mais frequência.

- Note que a amplitude é uma medida bem simples de ser calculada. Contudo, ela não leva em consideração as informações contidas nos dados entre o maior e o menor valor
- Por exemplo, considere os dois conjuntos de dados a seguir: 1,3,5,8,9 e 1, 5, 5, 5, 9. Note que a amplitude dos dois conjuntos de dados é a mesma, isto é, ap= 8. Contudo, o desvio-padrão da primeira amostra é  $s_1 \approx 3.35$  enquanto que o desvio-padrão da segunda amostra é  $s_2 \approx 2.83$ .

### Moda

Uma outra medida de resumo bem simples e útil é a moda da amostra. A moda da amostra é o valor da observação que ocorre com mais frequência.

Por exemplo, no segundo conjunto de dados do exemplo acima temos que 5 é a moda da amostra, uma vez que apareceu com maior frequência no conjunto de dados. Alguns

- Note que a amplitude é uma medida bem simples de ser calculada. Contudo, ela não leva em consideração as informações contidas nos dados entre o maior e o menor valor
- Por exemplo, considere os dois conjuntos de dados a seguir: 1,3,5,8,9 e 1, 5, 5, 5, 9. Note que a amplitude dos dois conjuntos de dados é a mesma, isto é, ap= 8. Contudo, o desvio-padrão da primeira amostra é  $s_1 \approx 3.35$  enguanto que o desvio-padrão da segunda amostra é  $s_2 \approx 2.83$ .

### Moda

Uma outra medida de resumo bem simples e útil é a moda da amostra. A moda da amostra é o valor da observação que ocorre com mais frequência.

Por exemplo, no segundo conjunto de dados do exemplo acima temos que 5 é a moda da amostra, uma vez que apareceu com maior frequência no conjunto de dados. Alguns conjuntos de dados podem ter mais de uma moda. Neste caso, dizemos que o conjunto é multimodal.

- Note que a amplitude é uma medida bem simples de ser calculada. Contudo, ela não leva em consideração as informações contidas nos dados entre o maior e o menor valor.
- Por exemplo, considere os dois conjuntos de dados a seguir: 1,3,5,8,9 e 1,5,5,5,9. Note que a amplitude dos dois conjuntos de dados é a mesma, isto é, ap= 8. Contudo, o desvio-padrão da primeira amostra é  $s_1 \approx 3.35$  enquanto que o desvio-padrão da segunda amostra é  $s_2 \approx 2.83$ .

### Moda

Uma outra medida de resumo bem simples e útil é a moda da amostra. A moda da amostra é o valor da observação que ocorre com mais frequência.

Por exemplo, no segundo conjunto de dados do exemplo acima temos que 5 é a moda da amostra, uma vez que apareceu com maior frequência no conjunto de dados. Alguns conjuntos de dados podem ter mais de uma moda. Neste caso, dizemos que o conjunto é multimodal.

Pode ocorrer também de não existir moda na amostra, como por exemplo, no primeiro conjunto de dados do exemplo acima.

- Note que tanto a média como a variância são afetadas por valores extremos da amostra.
- Além disso, somente com essas medidas não tem como termos ideia da simetria ou assimetria da distribuição dos dados.
- Vimos que a mediana divide a amostra ordenada em duas partes iguais. Veremos que, por meio dos quartis, podemos dividir a amostra ordenada em quatro partes iguais. Os pontos de divisão são chamados de quartis.

### Quartis

- (i) O primeiro quartil, denotado por  $q_1$ , é um valor que tem aproximadamente 25% da amostra abaixo dele e aproximadamente 75% acima dele.
- (ii) O segundo quartil, denotado por  $q_2$ , é um valor que tem aproximadamente 50% da amostra abaixo dele. Ou seja,  $q_2$  é a mediana.
- (iii) O terceiro quartil, denotado por  $q_3$ , é um valor que tem aproximadamente 75% da amostra abaixo dele.

- Note que tanto a média como a variância são afetadas por valores extremos da amostra.
- Além disso, somente com essas medidas não tem como termos ideia da simetria ou assimetria da distribuição dos dados.
- Vimos que a mediana divide a amostra ordenada em duas partes iguais. Veremos que, por meio dos quartis, podemos dividir a amostra ordenada em quatro partes iguais. Os pontos de divisão são chamados de quartis.

### Quartis

- (i) O primeiro quartil, denotado por  $q_1$ , é um valor que tem aproximadamente 25% da amostra abaixo dele e aproximadamente 75% acima dele.
- (ii) O segundo quartil, denotado por  $q_2$ , é um valor que tem aproximadamente 50% da amostra abaixo dele. Ou seja,  $q_2$  é a mediana.
- (iii) O terceiro quartil, denotado por  $q_3$ , é um valor que tem aproximadamente 75% da amostra abaixo dele.

- Note que tanto a média como a variância são afetadas por valores extremos da amostra.
- Além disso, somente com essas medidas não tem como termos ideia da simetria ou assimetria da distribuição dos dados.
- Vimos que a mediana divide a amostra ordenada em duas partes iguais. Veremos que, por meio dos quartis, podemos dividir a amostra ordenada em quatro partes iguais. Os pontos de divisão são chamados de quartis.

### Quartis

- (i) O primeiro quartil, denotado por  $q_1$ , é um valor que tem aproximadamente 25% da amostra abaixo dele e aproximadamente 75% acima dele.
- (ii) O segundo quartil, denotado por  $q_2$ , é um valor que tem aproximadamente 50% da amostra abaixo dele. Ou seja,  $q_2$  é a mediana.
- (iii) O terceiro quartil, denotado por  $q_3$ , é um valor que tem aproximadamente 75% da amostra abaixo dele.

- Note que tanto a média como a variância são afetadas por valores extremos da amostra.
- Além disso, somente com essas medidas não tem como termos ideia da simetria ou assimetria da distribuição dos dados.
- Vimos que a mediana divide a amostra ordenada em duas partes iguais. Veremos que, por meio dos quartis, podemos dividir a amostra ordenada em quatro partes iguais. Os pontos de divisão são chamados de quartis.

## Quartis

- (i) O primeiro quartil, denotado por  $q_1$ , é um valor que tem aproximadamente 25% da amostra abaixo dele e aproximadamente 75% acima dele.
- (ii) O segundo quartil, denotado por  $q_2$ , é um valor que tem aproximadamente 50% da amostra abaixo dele. Ou seja,  $q_2$  é a mediana.
- (iii) O terceiro quartil, denotado por  $q_3$ , é um valor que tem aproximadamente 75% da amostra abaixo dele.

- Note que tanto a média como a variância são afetadas por valores extremos da amostra.
- Além disso, somente com essas medidas não tem como termos ideia da simetria ou assimetria da distribuição dos dados.
- Vimos que a mediana divide a amostra ordenada em duas partes iguais. Veremos que, por meio dos quartis, podemos dividir a amostra ordenada em quatro partes iguais. Os pontos de divisão são chamados de quartis.

## Quartis

- (i) O primeiro quartil, denotado por  $q_1$ , é um valor que tem aproximadamente 25% da amostra abaixo dele e aproximadamente 75% acima dele.
- (ii) O segundo quartil, denotado por  $q_2$ , é um valor que tem aproximadamente 50% da amostra abaixo dele. Ou seja,  $q_2$  é a mediana.
- (iii) O terceiro quartil, denotado por  $q_3$ , é um valor que tem aproximadamente 75% da amostra abaixo dele.

- Note que tanto a média como a variância são afetadas por valores extremos da amostra.
- Além disso, somente com essas medidas não tem como termos ideia da simetria ou assimetria da distribuição dos dados.
- Vimos que a mediana divide a amostra ordenada em duas partes iguais. Veremos que, por meio dos quartis, podemos dividir a amostra ordenada em quatro partes iguais. Os pontos de divisão são chamados de quartis.

## Quartis

- (i) O primeiro quartil, denotado por  $q_1$ , é um valor que tem aproximadamente 25% da amostra abaixo dele e aproximadamente 75% acima dele.
- (ii) O segundo quartil, denotado por  $q_2$ , é um valor que tem aproximadamente 50% da amostra abaixo dele. Ou seja,  $q_2$  é a mediana.
- (iii) O terceiro quartil, denotado por  $q_3$ , é um valor que tem aproximadamente 75% da amostra abaixo dele.

- Note que tanto a média como a variância são afetadas por valores extremos da amostra.
- Além disso, somente com essas medidas não tem como termos ideia da simetria ou assimetria da distribuição dos dados.
- Vimos que a mediana divide a amostra ordenada em duas partes iguais. Veremos que, por meio dos quartis, podemos dividir a amostra ordenada em quatro partes iguais. Os pontos de divisão são chamados de quartis.

## Quartis

- (i) O primeiro quartil, denotado por  $q_1$ , é um valor que tem aproximadamente 25% da amostra abaixo dele e aproximadamente 75% acima dele.
- (ii) O segundo quartil, denotado por  $q_2$ , é um valor que tem aproximadamente 50% da amostra abaixo dele. Ou seja,  $q_2$  é a mediana.
- (iii) O terceiro quartil, denotado por  $q_3$ , é um valor que tem aproximadamente 75% da amostra abaixo dele.

Exemplo: Considere novamente os dados referentes a trinca de fadiga, fornecidos no primeiro exemplo. Vimos que a mediana dos dados é  $x_{(5)}=2.13$ . Logo,

$$q_2 = x_{(5)} = 2.13$$
.

$$1.15, 1.37, 1.82, 2.04, 2.13, 2.47, 2.60, 2.96, 3.02.$$

Uma opção possível para obter  $q_1$  e  $q_3$  é calcular a mediana dos primeiros quatro valores e dos últimos quarto valores, respectivamente. Ou seja

$$q_1 = 1.82$$
.

е

$$q_3 = 2.6.$$

Exemplo: Considere novamente os dados referentes a trinca de fadiga, fornecidos no primeiro exemplo. Vimos que a mediana dos dados é  $x_{(5)}=2.13$ . Logo,

$$q_2 = x_{(5)} = 2.13$$
.

$$1.15, 1.37, 1.82, 2.04, 2.13, 2.47, 2.60, 2.96, 3.02.$$

Uma opção possível para obter  $q_1$  e  $q_3$  é calcular a mediana dos primeiros quatro valores e dos últimos quarto valores, respectivamente. Ou seja

$$q_1 = 1.82.$$

$$q_3 = 2.6.$$



Exemplo: Considere novamente os dados referentes a trinca de fadiga, fornecidos no primeiro exemplo. Vimos que a mediana dos dados é  $x_{(5)} = 2.13$ . Logo,  $q_2 = x_{(5)} = 2.13$ .

Uma opção possível para obter  $q_1$  e  $q_3$  é calcular a mediana dos primeiros quatro valores e dos últimos quarto valores, respectivamente. Ou seja

$$q_1 = 1.82.$$

$$q_3 = 2.6.$$

Exemplo: Considere novamente os dados referentes a trinca de fadiga, fornecidos no primeiro exemplo. Vimos que a mediana dos dados é  $x_{(5)}=2.13$ . Logo,

$$q_2 = x_{(5)} = 2.13.$$

$$1.15, 1.37, 1.82, 2.04, 2.13, 2.47, 2.60, 2.96, 3.02.$$

Uma opção possível para obter  $q_1$  e  $q_3$  é calcular a mediana dos primeiros quatro valores e dos últimos quarto valores, respectivamente. Ou seja

$$q_1 = 1.82$$
.

e

$$q_3 = 2.6$$
.

Os cinco valores  $x_{(1)}$ ,  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$  e  $x_{(n)}$  são importantes para se ter uma boa ideia a respeito da simetria da distribuição dos dados. Para termos uma distribuição simétrica, ou aproximadamente simétrica, devemos ter:

- (i)  $q_2 x_{(1)} \approx x_{(n)} q_2$
- (ii)  $q_2 q_1 \approx q_3 q_2$ ;
- (iii)  $q_1 x_{(1)} \approx x_{(n)} q_3$ ;
- (iv) distâncias entre a mediana e  $q_1, q_3$  menores do que as distâncias entre os extremos e  $q_1, q_3$ .

Os cinco valores  $x_{(1)}$ ,  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$  e  $x_{(n)}$  são importantes para se ter uma boa ideia a respeito da simetria da distribuição dos dados. Para termos uma distribuição simétrica, ou aproximadamente simétrica, devemos ter:

- (i)  $q_2 x_{(1)} \approx x_{(n)} q_2$
- (ii)  $q_2 q_1 \approx q_3 q_2$ ;
- (iii)  $q_1 x_{(1)} \approx x_{(n)} q_3$ ;
- (iv) distâncias entre a mediana e  $q_1, q_3$  menores do que as distâncias entre os extremos e  $q_1, q_3$ .

Os cinco valores  $x_{(1)}$ ,  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$  e  $x_{(n)}$  são importantes para se ter uma boa ideia a respeito da simetria da distribuição dos dados. Para termos uma distribuição simétrica, ou aproximadamente simétrica, devemos ter:

- (i)  $q_2 x_{(1)} \approx x_{(n)} q_2$ ;
- (ii)  $q_2 q_1 \approx q_3 q_2$ ;
- (iii)  $q_1 x_{(1)} \approx x_{(n)} q_3$ ;
- (iv) distâncias entre a mediana e  $q_1, q_3$  menores do que as distâncias entre os extremos e  $q_1, q_3$ .

Os cinco valores  $x_{(1)}$ ,  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$  e  $x_{(n)}$  são importantes para se ter uma boa ideia a respeito da simetria da distribuição dos dados. Para termos uma distribuição simétrica, ou aproximadamente simétrica, devemos ter:

- (i)  $q_2 x_{(1)} \approx x_{(n)} q_2$ ;
- (ii)  $q_2 q_1 \approx q_3 q_2$ ;
- (iii)  $q_1 x_{(1)} \approx x_{(n)} q_3$ ;
- (iv) distâncias entre a mediana e  $q_1, q_3$  menores do que as distâncias entre os extremos e  $q_1, q_3$ .

Os cinco valores  $x_{(1)}$ ,  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$  e  $x_{(n)}$  são importantes para se ter uma boa ideia a respeito da simetria da distribuição dos dados. Para termos uma distribuição simétrica, ou aproximadamente simétrica, devemos ter:

- (i)  $q_2 x_{(1)} \approx x_{(n)} q_2$ ;
- (ii)  $q_2 q_1 \approx q_3 q_2$ ;
- (iii)  $q_1 x_{(1)} \approx x_{(n)} q_3$ ;
- (iv) distâncias entre a mediana e  $q_1, q_3$  menores do que as distâncias entre os extremos e  $q_1, q_3$ .

Os cinco valores  $x_{(1)}$ ,  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$  e  $x_{(n)}$  são importantes para se ter uma boa ideia a respeito da simetria da distribuição dos dados. Para termos uma distribuição simétrica, ou aproximadamente simétrica, devemos ter:

- (i)  $q_2 x_{(1)} \approx x_{(n)} q_2$ ;
- (ii)  $q_2 q_1 \approx q_3 q_2$ ;
- (iii)  $q_1 x_{(1)} \approx x_{(n)} q_3$ ;
- (iv) distâncias entre a mediana e  $q_1, q_3$  menores do que as distâncias entre os extremos e  $q_1, q_3$ .

Os cinco valores  $x_{(1)}$ ,  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$  e  $x_{(n)}$  são importantes para se ter uma boa ideia a respeito da simetria da distribuição dos dados. Para termos uma distribuição simétrica, ou aproximadamente simétrica, devemos ter:

- (i)  $q_2 x_{(1)} \approx x_{(n)} q_2$ ;
- (ii)  $q_2 q_1 \approx q_3 q_2$ ;
- (iii)  $q_1 x_{(1)} \approx x_{(n)} q_3$ ;
- (iv) distâncias entre a mediana e  $q_1, q_3$  menores do que as distâncias entre os extremos e  $q_1, q_3$ .

## Quartis - Distribuição normal

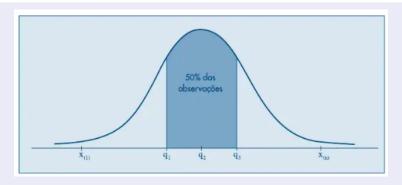


Figure 1: MORETTIN, Pedro Alberto; BUSSAB, WILTON OLIVEIRA. Estatística básica. Saraiva Educação SA, 2017.

16 / 16

Dr. Giannini Italino Probabilidade e estatística 2024