Probabilidade e estatística - Aula 8

Alguns modelos probabilísticos discretos

Dr. Giannini Italino Alves Vieira

Universidade Federal do Ceará - Campus de Crateús

Abril, 2024

Alguns modelos probabilísticos discretos

Motivação

- Dada as características do experimento aleatório e de uma variável aleatória X relacionada a ele, podemos em alguns casos associar a X um modelo probabilístico conhecido na literatura.
- Veremos alguns dos principais modelos probabilísticos discretos, tais como: a distribuição uniforme discreta, binomial, geométrica, binomial negativa e Poisson.
- Tais modelos adaptam-se muito bem a uma série de problemas práticos.

Alguns modelos probabilísticos discretos

Motivação

- Dada as características do experimento aleatório e de uma variável aleatória X relacionada a ele, podemos em alguns casos associar a X um modelo probabilístico conhecido na literatura.
- Veremos alguns dos principais modelos probabilísticos discretos, tais como: a distribuição uniforme discreta, binomial, geométrica, binomial negativa e Poisson.
- Tais modelos adaptam-se muito bem a uma série de problemas práticos.

Motivação

- Dada as características do experimento aleatório e de uma variável aleatória X relacionada a ele, podemos em alguns casos associar a X um modelo probabilístico conhecido na literatura.
- Veremos alguns dos principais modelos probabilísticos discretos, tais como: a distribuição uniforme discreta, binomial, geométrica, binomial negativa e Poisson.
- Tais modelos adaptam-se muito bem a uma série de problemas práticos.

Intuitivamente, uma variável aleatória X é dita ter distribuição uniforme discreta quando ela assume somente uma quantidade finita de valores, cada um deles com mesma probabilidade.

Distribuição uniforme discreta

Formalmente, dizemos que uma variável aleatória X assumindo valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tem distribuição uniforme discreta se cada um dos seus n valores tiver igual probabilidade, ou seja, se a função de probabilidade de X for

$$f(x_i) = \frac{1}{n}, \ \ \forall \ \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

- Ex.: Seja X a variável aleatória que indica o numero de pontos marcados na face superior de um dado honesto, quando ele é lançado. Note que X tem distribuição uniforme discreta, ou seja, sua função de probabilidade é

$$f(x_i) = \frac{1}{6}, \ \ \text{para} \ \ x_i = 1, 2, \ldots, 6.$$

Distribuição uniforme discreta

Intuitivamente, uma variável aleatória X é dita ter distribuição uniforme discreta quando ela assume somente uma quantidade finita de valores, cada um deles com mesma probabilidade.

Distribuição uniforme discreta

Formalmente, dizemos que uma variável aleatória X assumindo valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tem distribuição uniforme discreta se cada um dos seus n valores tiver igual probabilidade, ou seja, se a função de probabilidade de X for

$$f(x_i) = \frac{1}{n}, \quad \forall \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

- Ex.: Seja X a variável aleatória que indica o numero de pontos marcados na face superior de um dado honesto, quando ele é lançado. Note que X tem distribuição uniforme discreta, ou seja, sua função de probabilidade é

$$f(x_i) = \frac{1}{6}, \quad \text{para} \quad x_i = 1, 2, \ldots, 6.$$

Distribuição uniforme discreta

Intuitivamente, uma variável aleatória X é dita ter distribuição uniforme discreta quando ela assume somente uma quantidade finita de valores, cada um deles com mesma probabilidade.

Distribuição uniforme discreta

Formalmente, dizemos que uma variável aleatória X assumindo valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tem distribuição uniforme discreta se cada um dos seus n valores tiver igual probabilidade, ou seja, se a função de probabilidade de X for

$$f(x_i) = \frac{1}{n}, \ \ \forall \ \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

- Ex.: Seja X a variável aleatória que indica o numero de pontos marcados na face superior de um dado honesto, quando ele é lançado. Note que X tem distribuição uniforme discreta, ou seja, sua função de probabilidade é

$$f(x_i) = \frac{1}{6}, \ \ \text{para} \ \ x_i = 1, 2, \ldots, 6.$$

Distribuição uniforme discreta

Intuitivamente, uma variável aleatória X é dita ter distribuição uniforme discreta quando ela assume somente uma quantidade finita de valores, cada um deles com mesma probabilidade.

Distribuição uniforme discreta

Formalmente, dizemos que uma variável aleatória X assumindo valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tem distribuição uniforme discreta se cada um dos seus n valores tiver igual probabilidade, ou seja, se a função de probabilidade de X for

$$f(x_i) = \frac{1}{n}, \quad \forall \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

- Ex.: Seja X a variável aleatória que indica o numero de pontos marcados na face superior de um dado honesto, quando ele é lançado. Note que X tem distribuição uniforme discreta, ou seja, sua função de probabilidade é

$$f(x_i) = \frac{1}{6}, \quad \text{para} \quad x_i = 1, 2, \ldots, 6.$$

Média e variância da uniforme discreta

Suponha que X é uma uniforme discreta assumindo valores $a, a+1, a+2, \ldots, b$ (uniforme discreta sobre inteiros consecutivos). Não é difícil mostrar que

- $\mu = E(X) = \frac{b+a}{2}$ e
- $Var(X) = \frac{(b-a+1)^2-1}{12}$.

Por exemplo, se X é a variável aleatória do exemplo acima, então temos que a média de X é

$$E(X) = \frac{b+a}{2} = \frac{6+1}{2} = 3.5$$

e a variância de X é $Var(X) = \frac{(b-a+1)^2-1}{12} = \frac{(6-1+1)^2-1}{12} = \frac{35}{12} \approx 2.91$.

Média e variância da uniforme discreta

Suponha que X é uma uniforme discreta assumindo valores $a, a+1, a+2, \ldots, b$ (uniforme discreta sobre inteiros consecutivos). Não é difícil mostrar que

- $\mu = E(X) = \frac{b+a}{2}$ e
- $Var(X) = \frac{(b-a+1)^2-1}{12}$.

Por exemplo, se X é a variável aleatória do exemplo acima, então temos que a média de X é

$$E(X) = \frac{b+a}{2} = \frac{6+1}{2} = 3.5$$

e a variância de X é $Var(X) = \frac{(b-a+1)^2-1}{12} = \frac{(6-1+1)^2-1}{12} = \frac{35}{12} \approx 2.91$.

Média e variância da uniforme discreta

Suponha que X é uma uniforme discreta assumindo valores $a, a+1, a+2, \ldots, b$ (uniforme discreta sobre inteiros consecutivos). Não é difícil mostrar que

- $\mu = E(X) = \frac{b+a}{2}$ e
- $Var(X) = \frac{(b-a+1)^2-1}{12}$.

Por exemplo, se X é a variável aleatória do exemplo acima, então temos que a média de X é

$$E(X) = \frac{b+a}{2} = \frac{6+1}{2} = 3.5$$

e a variância de X é $Var(X) = \frac{(b-a+1)^2-1}{12} = \frac{(6-1+1)^2-1}{12} = \frac{35}{12} \approx 2.91$.

Média e variância da uniforme discreta

Suponha que X é uma uniforme discreta assumindo valores $a, a+1, a+2, \ldots, b$ (uniforme discreta sobre inteiros consecutivos). Não é difícil mostrar que

- $\mu = E(X) = \frac{b+a}{2}$ e
- $Var(X) = \frac{(b-a+1)^2-1}{12}$.

Por exemplo, se X é a variável aleatória do exemplo acima, então temos que a média de X é

$$E(X) = \frac{b+a}{2} = \frac{6+1}{2} = 3.5$$

e a variância de X é $Var(X) = \frac{(b-a+1)^2-1}{12} = \frac{(6-1+1)^2-1}{12} = \frac{35}{12} \approx 2.91$.

Média e variância da uniforme discreta

Suponha que X é uma uniforme discreta assumindo valores $a, a+1, a+2, \ldots, b$ (uniforme discreta sobre inteiros consecutivos). Não é difícil mostrar que

- $\mu = E(X) = \frac{b+a}{2}$ e
- $Var(X) = \frac{(b-a+1)^2-1}{12}$.

Por exemplo, se X é a variável aleatória do exemplo acima, então temos que a média de X é

$$E(X) = \frac{b+a}{2} = \frac{6+1}{2} = 3.5$$

e a variância de X é $Var(X) = \frac{(b-a+1)^2-1}{12} = \frac{(6-1+1)^2-1}{12} = \frac{35}{12} \approx 2.91$.

Média e variância da uniforme discreta

Suponha que X é uma uniforme discreta assumindo valores $a, a+1, a+2, \ldots, b$ (uniforme discreta sobre inteiros consecutivos). Não é difícil mostrar que

- $\mu = E(X) = \frac{b+a}{2}$ e
- $Var(X) = \frac{(b-a+1)^2-1}{12}$.

Por exemplo, se X é a variável aleatória do exemplo acima, então temos que a média de X é

$$E(X) = \frac{b+a}{2} = \frac{6+1}{2} = 3.5$$

e a variância de X é $Var(X) = \frac{(b-a+1)^2-1}{12} = \frac{(6-1+1)^2-1}{12} = \frac{35}{12} \approx 2.91$.

Modelo binomial

A fim de motivar a distribuição binomial considere os seguintes experimentos:

- Uma moeda honesta é lançada cinco vezes. Seja X o número de coroas obtidos;
- Uma peça produzida em uma fábrica tem 5% de chance de ser defeituosa. Seja X o número de peças defeituosas em um lote contendo 500 peças.
- De todos os bits que são transmitidos por meio de um canal de transmissão, 90% são recebidos sem distorção. Seja X o numero de bits recebidos sem distorção nos próximos cinco bits enviados.

Todos os exemplos acima podem ser vistos como sendo casos particulares de um modelo bem geral, chamado de modelo binomial.

- Nas próximas distribuições que estudaremos, o experimento aleatório em questão terá, como uma de suas características, tentativas de Bernoulli, que são tentativas com somente dois resultados possíveis.

Modelo binomial

A fim de motivar a distribuição binomial considere os seguintes experimentos:

- Uma moeda honesta é lançada cinco vezes. Seja X o número de coroas obtidos;
- Uma peça produzida em uma fábrica tem 5% de chance de ser defeituosa. Seja X o número de peças defeituosas em um lote contendo 500 peças.
- De todos os bits que são transmitidos por meio de um canal de transmissão, 90% são recebidos sem distorção. Seja X o numero de bits recebidos sem distorção nos próximos cinco bits enviados.

Todos os exemplos acima podem ser vistos como sendo casos particulares de um modelo bem geral, chamado de modelo binomial.

- Nas próximas distribuições que estudaremos, o experimento aleatório em questão terá, como uma de suas características, tentativas de Bernoulli, que são tentativas com somente dois resultados possíveis.

Modelo binomial

A fim de motivar a distribuição binomial considere os seguintes experimentos:

- Uma moeda honesta é lançada cinco vezes. Seja X o número de coroas obtidos;
- Uma peça produzida em uma fábrica tem 5% de chance de ser defeituosa. Seja X o número de peças defeituosas em um lote contendo 500 peças.
- De todos os bits que são transmitidos por meio de um canal de transmissão, 90% são recebidos sem distorção. Seja X o numero de bits recebidos sem distorção nos próximos cinco bits enviados.

Todos os exemplos acima podem ser vistos como sendo casos particulares de um modelo bem geral, chamado de modelo binomial.

- Nas próximas distribuições que estudaremos, o experimento aleatório em questão terá, como uma de suas características, tentativas de Bernoulli, que são tentativas com somente dois resultados possíveis.

Modelo binomial

A fim de motivar a distribuição binomial considere os seguintes experimentos:

- Uma moeda honesta é lançada cinco vezes. Seja X o número de coroas obtidos;
- Uma peça produzida em uma fábrica tem 5% de chance de ser defeituosa. Seja X o número de peças defeituosas em um lote contendo 500 peças.
- De todos os bits que são transmitidos por meio de um canal de transmissão, 90% são recebidos sem distorção. Seja X o numero de bits recebidos sem distorção nos próximos cinco bits enviados.

Todos os exemplos acima podem ser vistos como sendo casos particulares de um modelo bem geral, chamado de modelo binomial.

- Nas próximas distribuições que estudaremos, o experimento aleatório em questão terá, como uma de suas características, tentativas de Bernoulli, que são tentativas com somente dois resultados possíveis.

Modelo binomial

A fim de motivar a distribuição binomial considere os seguintes experimentos:

- Uma moeda honesta é lançada cinco vezes. Seja X o número de coroas obtidos;
- Uma peça produzida em uma fábrica tem 5% de chance de ser defeituosa. Seja X o número de peças defeituosas em um lote contendo 500 peças.
- De todos os bits que são transmitidos por meio de um canal de transmissão, 90% são recebidos sem distorção. Seja X o numero de bits recebidos sem distorção nos próximos cinco bits enviados.

Todos os exemplos acima podem ser vistos como sendo casos particulares de um modelo bem geral, chamado de modelo binomial.

- Nas próximas distribuições que estudaremos, o experimento aleatório em questão terá, como uma de suas características, tentativas de Bernoulli, que são tentativas com somente dois resultados possíveis.

Modelo binomial

A fim de motivar a distribuição binomial considere os seguintes experimentos:

- Uma moeda honesta é lançada cinco vezes. Seja X o número de coroas obtidos;
- Uma peça produzida em uma fábrica tem 5% de chance de ser defeituosa. Seja X o número de peças defeituosas em um lote contendo 500 peças.
- De todos os bits que são transmitidos por meio de um canal de transmissão, 90% são recebidos sem distorção. Seja X o numero de bits recebidos sem distorção nos próximos cinco bits enviados.

Todos os exemplos acima podem ser vistos como sendo casos particulares de um modelo bem geral, chamado de modelo binomial.

- Nas próximas distribuições que estudaremos, o experimento aleatório em questão terá, como uma de suas características, tentativas de Bernoulli, que são tentativas com somente dois resultados possíveis.

Modelo binomial

Se um experimento aleatórios consistir em n tentativas de Bernoulli de modo que

(i) As tentativas são independentes;

(ii) Cada tentativa resulta em somente duas possibilidades, designadas de *sucesso* e *falha*;

(iii) A probabilidade de um sucesso em cada tentativa é sempre uma mesma constante p.

Então, se X for uma variável aleatória definida como o numero de tentativas que resultam em sucesso em n realizações de um experimento aleatório satisfazendo as condições (i)-(iii), dizemos que X tem distribuição binomial de parâmetros $n = 1, 2, \ldots$ e $0 < p < 1$ e sua função de probabilidade é dada por

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Obs.: Note que $\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$ é igual ao número total de sequências diferentes de tentativas que contem x sucessos e $n - x$ falhas.

Modelo binomial

Se um experimento aleatórios consistir em n tentativas de Bernoulli de modo que

(i) As tentativas são independentes;

(ii) Cada tentativa resulta em somente duas possibilidades, designadas de *sucesso* e *falha*;

(iii) A probabilidade de um sucesso em cada tentativa é sempre uma mesma constante p.

Então, se X for uma variável aleatória definida como o numero de tentativas que resultam em sucesso em n realizações de um experimento aleatório satisfazendo as condições (i)-(iii), dizemos que X tem distribuição binomial de parâmetros $n = 1, 2, \ldots$ e $0 < p < 1$ e sua função de probabilidade é dada por

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Obs.: Note que $\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$ é igual ao número total de sequências diferentes de tentativas que contem x sucessos e $n - x$ falhas.

Modelo binomial

Se um experimento aleatórios consistir em n tentativas de Bernoulli de modo que

(i) As tentativas são independentes;

(ii) Cada tentativa resulta em somente duas possibilidades, designadas de *sucesso* e *falha*;

(iii) A probabilidade de um sucesso em cada tentativa é sempre uma mesma constante p.

Então, se X for uma variável aleatória definida como o numero de tentativas que resultam em sucesso em n realizações de um experimento aleatório satisfazendo as condições (i)-(iii), dizemos que X tem distribuição binomial de parâmetros $n = 1, 2, \ldots$ e $0 < p < 1$ e sua função de probabilidade é dada por

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Obs.: Note que $\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$ é igual ao número total de sequências diferentes de tentativas que contem x sucessos e $n - x$ falhas.

Modelo binomial

Se um experimento aleatórios consistir em n tentativas de Bernoulli de modo que

(i) As tentativas são independentes;

(ii) Cada tentativa resulta em somente duas possibilidades, designadas de *sucesso* e *falha*;

(iii) A probabilidade de um sucesso em cada tentativa é sempre uma mesma constante p.

Então, se X for uma variável aleatória definida como o numero de tentativas que resultam em sucesso em n realizações de um experimento aleatório satisfazendo as condições (i)-(iii), dizemos que X tem distribuição binomial de parâmetros $n = 1, 2, \ldots$ e $0 < p < 1$ e sua função de probabilidade é dada por

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Obs.: Note que $\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$ é igual ao número total de sequências diferentes de tentativas que contem x sucessos e $n - x$ falhas.

Modelo binomial

Se um experimento aleatórios consistir em n tentativas de Bernoulli de modo que

(i) As tentativas são independentes;

(ii) Cada tentativa resulta em somente duas possibilidades, designadas de *sucesso* e *falha*;

(iii) A probabilidade de um sucesso em cada tentativa é sempre uma mesma constante p.

Então, se X for uma variável aleatória definida como o numero de tentativas que resultam em sucesso em n realizações de um experimento aleatório satisfazendo as condições (i)-(iii), dizemos que X tem distribuição binomial de parâmetros $n = 1, 2, \ldots$ e $0 < p < 1$ e sua função de probabilidade é dada por

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Obs.: Note que $\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$ é igual ao número total de sequências diferentes de tentativas que contem x sucessos e $n - x$ falhas.

Modelo binomial

Se um experimento aleatórios consistir em n tentativas de Bernoulli de modo que

(i) As tentativas são independentes;

(ii) Cada tentativa resulta em somente duas possibilidades, designadas de *sucesso* e *falha*;

(iii) A probabilidade de um sucesso em cada tentativa é sempre uma mesma constante p.

Então, se X for uma variável aleatória definida como o numero de tentativas que resultam em sucesso em n realizações de um experimento aleatório satisfazendo as condições (i)-(iii), dizemos que X tem distribuição binomial de parâmetros $n = 1, 2, \ldots$ e $0 < p < 1$ e sua função de probabilidade é dada por

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Obs.: Note que $\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$ é igual ao número total de sequências diferentes de tentativas que contem x sucessos e $n - x$ falhas.

Modelo binomial

Se um experimento aleatórios consistir em n tentativas de Bernoulli de modo que

(i) As tentativas são independentes;

(ii) Cada tentativa resulta em somente duas possibilidades, designadas de *sucesso* e *falha*;

(iii) A probabilidade de um sucesso em cada tentativa é sempre uma mesma constante p.

Então, se X for uma variável aleatória definida como o numero de tentativas que resultam em sucesso em n realizações de um experimento aleatório satisfazendo as condições (i)-(iii), dizemos que X tem distribuição binomial de parâmetros $n = 1, 2, \ldots$ e $0 < p < 1$ e sua função de probabilidade é dada por

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Obs.: Note que $\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$ é igual ao número total de sequências diferentes de tentativas que contem x sucessos e $n - x$ falhas.

Exemplo

As linhas telefônicas em um sistema de reservas de uma companhia aérea estão ocupadas 40% do tempo. Suponha que os eventos em que as linhas estejam ocupadas em sucessivas chamadas sejam independentes. Considere que 10 chamadas aconteçam para a companhia aérea.

(a) Qual a probabilidade de que para exatamente três chamadas as linhas estejam ocupadas?

(b) Qual o numero esperado de chamadas em que as linhas estejam ocupadas?

- Sol.:(a) Se X é a variável aleatória definida como o número de chamadas ocupadas em 10 ligações realizadas. Então, X tem distribuição binomial com parâmetros $n = 10$ e $p = 0.4$. Ou seja,

$$f(x) = \binom{10}{x}(0.4)^x(0.6)^{10-x}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, 10.$$

Logo, queremos calcular $P(X = 3) = f(3)$, ou seja,

$$P(X = 3) = \binom{10}{3}(0.4)^3(0.6)^{10-3} = \frac{10!}{3!(7!)}(0.4)^3(0.6)^7 \approx 0.2149.$$

Exemplo

As linhas telefônicas em um sistema de reservas de uma companhia aérea estão ocupadas 40% do tempo. Suponha que os eventos em que as linhas estejam ocupadas em sucessivas chamadas sejam independentes. Considere que 10 chamadas aconteçam para a companhia aérea.

(a) Qual a probabilidade de que para exatamente três chamadas as linhas estejam ocupadas?

(b) Qual o numero esperado de chamadas em que as linhas estejam ocupadas?

- Sol.:(a) Se X é a variável aleatória definida como o número de chamadas ocupadas em 10 ligações realizadas. Então, X tem distribuição binomial com parâmetros $n = 10$ e $p = 0.4$. Ou seja,

$$f(x) = \binom{10}{x}(0.4)^x(0.6)^{10-x}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, 10.$$

Logo, queremos calcular $P(X = 3) = f(3)$, ou seja,

$$P(X = 3) = \binom{10}{3}(0.4)^3(0.6)^{10-3} = \frac{10!}{3!(7!)}(0.4)^3(0.6)^7 \approx 0.2149.$$

Exemplo

As linhas telefônicas em um sistema de reservas de uma companhia aérea estão ocupadas 40% do tempo. Suponha que os eventos em que as linhas estejam ocupadas em sucessivas chamadas sejam independentes. Considere que 10 chamadas aconteçam para a companhia aérea.

(a) Qual a probabilidade de que para exatamente três chamadas as linhas estejam ocupadas?

(b) Qual o numero esperado de chamadas em que as linhas estejam ocupadas?

- Sol.:(a) Se X é a variável aleatória definida como o número de chamadas ocupadas em 10 ligações realizadas. Então, X tem distribuição binomial com parâmetros $n = 10$ e $p = 0.4$. Ou seja,

$$f(x) = \binom{10}{x}(0.4)^x(0.6)^{10-x}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, 10.$$

Logo, queremos calcular $P(X = 3) = f(3)$, ou seja,

$$P(X = 3) = \binom{10}{3}(0.4)^3(0.6)^{10-3} = \frac{10!}{3!(7!)}(0.4)^3(0.6)^7 \approx 0.2149.$$

Exemplo

As linhas telefônicas em um sistema de reservas de uma companhia aérea estão ocupadas 40% do tempo. Suponha que os eventos em que as linhas estejam ocupadas em sucessivas chamadas sejam independentes. Considere que 10 chamadas aconteçam para a companhia aérea.

(a) Qual a probabilidade de que para exatamente três chamadas as linhas estejam ocupadas?

(b) Qual o numero esperado de chamadas em que as linhas estejam ocupadas?

- Sol.:(a) Se X é a variável aleatória definida como o número de chamadas ocupadas em 10 ligações realizadas. Então, X tem distribuição binomial com parâmetros $n = 10$ e $p = 0.4$. Ou seja,

$$f(x) = \binom{10}{x}(0.4)^x(0.6)^{10-x}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, 10.$$

Logo, queremos calcular $P(X = 3) = f(3)$, ou seja,

$$P(X = 3) = \binom{10}{3}(0.4)^3(0.6)^{10-3} = \frac{10!}{3!(7!)}(0.4)^3(0.6)^7 \approx 0.2149.$$

Exemplo

As linhas telefônicas em um sistema de reservas de uma companhia aérea estão ocupadas 40% do tempo. Suponha que os eventos em que as linhas estejam ocupadas em sucessivas chamadas sejam independentes. Considere que 10 chamadas aconteçam para a companhia aérea.

(a) Qual a probabilidade de que para exatamente três chamadas as linhas estejam ocupadas?

(b) Qual o numero esperado de chamadas em que as linhas estejam ocupadas?

- Sol.:(a) Se X é a variável aleatória definida como o número de chamadas ocupadas em 10 ligações realizadas. Então, X tem distribuição binomial com parâmetros $n = 10$ e $p = 0.4$. Ou seja,

$$f(x) = \binom{10}{x}(0.4)^x(0.6)^{10-x}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, 10.$$

Logo, queremos calcular $P(X = 3) = f(3)$, ou seja,

$$P(X = 3) = \binom{10}{3}(0.4)^3(0.6)^{10-3} = \frac{10!}{3!(7!)}(0.4)^3(0.6)^7 \approx 0.2149.$$

Exemplo

As linhas telefônicas em um sistema de reservas de uma companhia aérea estão ocupadas 40% do tempo. Suponha que os eventos em que as linhas estejam ocupadas em sucessivas chamadas sejam independentes. Considere que 10 chamadas aconteçam para a companhia aérea.

(a) Qual a probabilidade de que para exatamente três chamadas as linhas estejam ocupadas?

(b) Qual o numero esperado de chamadas em que as linhas estejam ocupadas?

- Sol.:(a) Se X é a variável aleatória definida como o número de chamadas ocupadas em 10 ligações realizadas. Então, X tem distribuição binomial com parâmetros $n = 10$ e $p = 0.4$. Ou seja,

$$f(x) = \binom{10}{x}(0.4)^x(0.6)^{10-x}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, 10.$$

Logo, queremos calcular $P(X = 3) = f(3)$, ou seja,

$$P(X = 3) = \binom{10}{3}(0.4)^3(0.6)^{10-3} = \frac{10!}{3!(7!)}(0.4)^3(0.6)^7 \approx 0.2149.$$

Cont. do exemplo

Note que no item (b) queremos calcular o numero esperado de chamadas em que as linhas estejam ocupadas, ou seja, a média de X.

Média e variância da binomial

Se X for uma variável aleatória binomial de parâmetros n e p, então pode-se mostrar que

- $E(X) = np$ (média é o produto dos parâmetros) e
- $Var(X) = np(1-p)$ (variância é n vezes a probabilidade de sucesso vezes a probabilidade de falha).

Logo, usando o fato acima, temos que

- Sol.: (b) O número esperado de chamadas em que as linhas estejam ocupadas é

$$E(X) = np = 10(0.4) = 4.$$

Note que a variância da variável X do exemplo acima é

$$Var(X) = np(1-p) = 10(0.4)(0.6) = 2,4.$$

Cont. do exemplo

Note que no item (b) queremos calcular o numero esperado de chamadas em que as linhas estejam ocupadas, ou seja, a média de X.

Média e variância da binomial

Se X for uma variável aleatória binomial de parâmetros n e p, então pode-se mostrar que

- $E(X) = np$ (média é o produto dos parâmetros) e
- $Var(X) = np(1-p)$ (variância é n vezes a probabilidade de sucesso vezes a probabilidade de falha).

Logo, usando o fato acima, temos que

- Sol.: (b) O número esperado de chamadas em que as linhas estejam ocupadas é

$$E(X) = np = 10(0.4) = 4.$$

Note que a variância da variável X do exemplo acima é

$$Var(X) = np(1-p) = 10(0.4)(0.6) = 2,4.$$

Cont. do exemplo

Note que no item (b) queremos calcular o numero esperado de chamadas em que as linhas estejam ocupadas, ou seja, a média de X.

Média e variância da binomial

Se X for uma variável aleatória binomial de parâmetros n e p, então pode-se mostrar que

- $E(X) = np$ (média é o produto dos parâmetros) e
- $Var(X) = np(1-p)$ (variância é n vezes a probabilidade de sucesso vezes a probabilidade de falha).

Logo, usando o fato acima, temos que

- Sol.: (b) O número esperado de chamadas em que as linhas estejam ocupadas é

$$E(X) = np = 10(0.4) = 4.$$

Note que a variância da variável X do exemplo acima é

$$Var(X) = np(1-p) = 10(0.4)(0.6) = 2,4.$$

Cont. do exemplo

Note que no item (b) queremos calcular o numero esperado de chamadas em que as linhas estejam ocupadas, ou seja, a média de X.

Média e variância da binomial

Se X for uma variável aleatória binomial de parâmetros n e p, então pode-se mostrar que

- $E(X) = np$ (média é o produto dos parâmetros) e
- $Var(X) = np(1-p)$ (variância é n vezes a probabilidade de sucesso vezes a probabilidade de falha).

Logo, usando o fato acima, temos que

- Sol.: (b) O número esperado de chamadas em que as linhas estejam ocupadas é

$$E(X) = np = 10(0.4) = 4.$$

Note que a variância da variável X do exemplo acima é

$$Var(X) = np(1-p) = 10(0.4)(0.6) = 2,4.$$

Cont. do exemplo

Note que no item (b) queremos calcular o numero esperado de chamadas em que as linhas estejam ocupadas, ou seja, a média de X.

Média e variância da binomial

Se X for uma variável aleatória binomial de parâmetros n e p, então pode-se mostrar que

- $E(X) = np$ (média é o produto dos parâmetros) e
- $Var(X) = np(1-p)$ (variância é n vezes a probabilidade de sucesso vezes a probabilidade de falha).

Logo, usando o fato acima, temos que

- Sol.: (b) O número esperado de chamadas em que as linhas estejam ocupadas é

$$E(X) = np = 10(0.4) = 4.$$

Note que a variância da variável X do exemplo acima é

$$Var(X) = np(1-p) = 10(0.4)(0.6) = 2,4.$$

Cont. do exemplo

Note que no item (b) queremos calcular o numero esperado de chamadas em que as linhas estejam ocupadas, ou seja, a média de X.

Média e variância da binomial

Se X for uma variável aleatória binomial de parâmetros n e p, então pode-se mostrar que

- $E(X) = np$ (média é o produto dos parâmetros) e
- $Var(X) = np(1-p)$ (variância é n vezes a probabilidade de sucesso vezes a probabilidade de falha).

Logo, usando o fato acima, temos que

- Sol.: (b) O número esperado de chamadas em que as linhas estejam ocupadas é

$$E(X) = np = 10(0.4) = 4.$$

Note que a variância da variável X do exemplo acima é

$$Var(X) = np(1-p) = 10(0.4)(0.6) = 2,4.$$

Distribuição geométrica

Considere novamente um experimento aleatório que esteja bem relacionado com o experimento do modelo binomial, ou seja, cada tentativa resulta em somente duas possibilidades, as tentativas são independentes e a probabilidade de sucesso em cada tentativa é uma mesma constante p.

- Suponha agora que estamos interessados na variável aleatória que representa o numero de tentativas que devemos realizar o experimento aleatório até que o primeiro sucesso ocorra.
- Observe que, diferentemente do modelo binomial que tem numero fixo de tentativas, agora as tentativas são realizadas até que um sucesso seja obtido.

Distribuição geométrica

Considere uma série de tentativas Bernoulli, de modo que as tentativas sejam independentes e com mesma probabilidade p de sucesso. Seja a variável aleatória definida como o número de tentativas até que o primeiro sucesso ocorra. Então, X é dita ser uma variável geométrica com parâmetro $0 < p < 1$ e sua função de probabilidade é

$$f(x) = (1-p)^{x-1}p, \quad \forall \quad x = 1, 2, \ldots$$

Considere novamente um experimento aleatório que esteja bem relacionado com o experimento do modelo binomial, ou seja, cada tentativa resulta em somente duas possibilidades, as tentativas são independentes e a probabilidade de sucesso em cada tentativa é uma mesma constante p.

- Suponha agora que estamos interessados na variável aleatória que representa o numero de tentativas que devemos realizar o experimento aleatório até que o primeiro sucesso ocorra.
- Observe que, diferentemente do modelo binomial que tem numero fixo de tentativas, agora as tentativas são realizadas até que um sucesso seja obtido.

Distribuição geométrica

Considere uma série de tentativas Bernoulli, de modo que as tentativas sejam independentes e com mesma probabilidade p de sucesso. Seja a variável aleatória definida como o número de tentativas até que o primeiro sucesso ocorra. Então, X é dita ser uma variável geométrica com parâmetro $0 < p < 1$ e sua função de probabilidade é

$$f(x) = (1-p)^{x-1}p, \quad \forall \quad x = 1, 2, \ldots$$

Distribuição geométrica

Considere novamente um experimento aleatório que esteja bem relacionado com o experimento do modelo binomial, ou seja, cada tentativa resulta em somente duas possibilidades, as tentativas são independentes e a probabilidade de sucesso em cada tentativa é uma mesma constante p.

- Suponha agora que estamos interessados na variável aleatória que representa o numero de tentativas que devemos realizar o experimento aleatório até que o primeiro sucesso ocorra.
- Observe que, diferentemente do modelo binomial que tem numero fixo de tentativas, agora as tentativas são realizadas até que um sucesso seja obtido.

Distribuição geométrica

Considere uma série de tentativas Bernoulli, de modo que as tentativas sejam independentes e com mesma probabilidade p de sucesso. Seja a variável aleatória definida como o número de tentativas até que o primeiro sucesso ocorra. Então, X é dita ser uma variável geométrica com parâmetro $0 < p < 1$ e sua função de probabilidade é

$$f(x) = (1-p)^{x-1}p, \quad \forall \quad x = 1, 2, \ldots$$

Distribuição geométrica

Considere novamente um experimento aleatório que esteja bem relacionado com o experimento do modelo binomial, ou seja, cada tentativa resulta em somente duas possibilidades, as tentativas são independentes e a probabilidade de sucesso em cada tentativa é uma mesma constante p.

- Suponha agora que estamos interessados na variável aleatória que representa o numero de tentativas que devemos realizar o experimento aleatório até que o primeiro sucesso ocorra.
- Observe que, diferentemente do modelo binomial que tem numero fixo de tentativas, agora as tentativas são realizadas até que um sucesso seja obtido.

Distribuição geométrica

Considere uma série de tentativas Bernoulli, de modo que as tentativas sejam independentes e com mesma probabilidade p de sucesso. Seja a variável aleatória definida como o número de tentativas até que o primeiro sucesso ocorra. Então, X é dita ser uma variável geométrica com parâmetro $0 < p < 1$ e sua função de probabilidade é

$$f(x) = (1-p)^{x-1}p, \quad \forall \quad x = 1, 2, \ldots$$

Exemplo

- Se no exemplo anterior X fosse a variável que representa o número de chamadas realizadas até que a primeira ligação livre ocorra, então essa nova variável tem distribuição geométrica de parâmetro $p = 0.6$. Logo, sua função de probabilidade é

$$f(x) = (0.4)^{x-1}(0.6), \quad \forall \quad x = 1, 2, \ldots$$

- Se desejarmos calcular, por exemplo, a probabilidade do numero de ligações até a primeira livre ocorrer ser igual a 5, então

$$P(X = 5) = f(5) = (0.4)^{5-1}(0.6) = 0,01536.$$

Exemplo

- Se no exemplo anterior X fosse a variável que representa o número de chamadas realizadas até que a primeira ligação livre ocorra, então essa nova variável tem distribuição geométrica de parâmetro $p = 0.6$. Logo, sua função de probabilidade é

$$f(x) = (0.4)^{x-1}(0.6), \quad \forall \quad x = 1, 2, \ldots$$

- Se desejarmos calcular, por exemplo, a probabilidade do numero de ligações até a primeira livre ocorrer ser igual a 5, então

$$P(X = 5) = f(5) = (0.4)^{5-1}(0.6) = 0,01536.$$

Exemplo

- Se no exemplo anterior X fosse a variável que representa o número de chamadas realizadas até que a primeira ligação livre ocorra, então essa nova variável tem distribuição geométrica de parâmetro $p = 0.6$. Logo, sua função de probabilidade é

$$f(x) = (0.4)^{x-1}(0.6), \quad \forall \quad x = 1, 2, \ldots$$

- Se desejarmos calcular, por exemplo, a probabilidade do numero de ligações até a primeira livre ocorrer ser igual a 5, então

$$P(X = 5) = f(5) = (0.4)^{5-1}(0.6) = 0,01536.$$

Outro exemplo

Em seu caminho matinal, você se aproxima de um sinal de transito que está verde 20% do tempo. Suponha que cada manhã representa uma tentativa independente.

(a) Qual a probabilidade de a primeira manhã em que o sinal esteja verde ser a quarta manhã em que você se aproxima dele?

(b) Qual a probabilidade de a luz não estar verde por 10 manhãs consecutivas?

- Sol.: (a) Primeiro note que se definirmos a variável X como sendo o número de manhãs até que o o sinal esteja verde, então X tem distribuição geométrica de parâmetro $p = 0.2$. Ou seja,

$$f(x) = (1 - 0.2)^{x-1}(0.2), \quad x = 1, 2, \ldots$$

Note que no item (a) queremos obter $P(X = 4)$, ou seja,

$$P(X = 4) = (1 - 0.2)^{4-1}(0.2) = (0.8)^3(0.2) = 0.1024.$$

Outro exemplo

Em seu caminho matinal, você se aproxima de um sinal de transito que está verde 20% do tempo. Suponha que cada manhã representa uma tentativa independente.

(a) Qual a probabilidade de a primeira manhã em que o sinal esteja verde ser a quarta manhã em que você se aproxima dele?

(b) Qual a probabilidade de a luz não estar verde por 10 manhãs consecutivas?

- Sol.: (a) Primeiro note que se definirmos a variável X como sendo o número de manhãs até que o o sinal esteja verde, então X tem distribuição geométrica de parâmetro $p = 0.2$. Ou seja,

$$f(x) = (1 - 0.2)^{x-1}(0.2), \quad x = 1, 2, \ldots$$

Note que no item (a) queremos obter $P(X = 4)$, ou seja,

$$P(X = 4) = (1 - 0.2)^{4-1}(0.2) = (0.8)^3(0.2) = 0.1024.$$

Outro exemplo

Em seu caminho matinal, você se aproxima de um sinal de transito que está verde 20% do tempo. Suponha que cada manhã representa uma tentativa independente.

(a) Qual a probabilidade de a primeira manhã em que o sinal esteja verde ser a quarta manhã em que você se aproxima dele?

(b) Qual a probabilidade de a luz não estar verde por 10 manhãs consecutivas?

- Sol.: (a) Primeiro note que se definirmos a variável X como sendo o número de manhãs até que o o sinal esteja verde, então X tem distribuição geométrica de parâmetro $p = 0.2$. Ou seja,

$$f(x) = (1 - 0.2)^{x-1}(0.2), \quad x = 1, 2, \ldots$$

Note que no item (a) queremos obter $P(X = 4)$, ou seja,

$$P(X = 4) = (1 - 0.2)^{4-1}(0.2) = (0.8)^3(0.2) = 0.1024.$$

Cont. do exemplo

(b) Qual a probabilidade de a luz não estar verde por 10 manhãs consecutivas?

- Sol.: (b) Observe nesse item que se definirmos a variável Y como sendo o o número de manhãs em que o sinal não está verde em 10 manhãs, então Y é uma binomial de parâmetros $n = 10$ e $p = 0.8$. Note que

$$f(y) = \binom{10}{y}(0.8)^y(1-0.8)^{10-y}, \quad y = 0, 1, 2, \ldots, 10.$$

Note que queremos calcular $P(X = 10)$

$$P(X = 10) = \binom{10}{10}(0.8)^{10}(1-0.8)^{10-10} = (0.8)^{10} \approx 0.1073.$$

(b) Qual a probabilidade de a luz não estar verde por 10 manhãs consecutivas?

- Sol.: (b) Observe nesse item que se definirmos a variável Y como sendo o o número de manhãs em que o sinal não está verde em 10 manhãs, então Y é uma binomial de parâmetros $n = 10$ e $p = 0.8$. Note que

$$f(y) = \binom{10}{y}(0.8)^y(1-0.8)^{10-y}, \quad y = 0, 1, 2, \dots, 10.$$

Note que queremos calcular $P(X = 10)$

$$P(X = 10) = \binom{10}{10}(0.8)^{10}(1-0.8)^{10-10} = (0.8)^{10} \approx 0.1073.$$

Média e variância da distribuição geométrica

Se X é variável aleatória geométrica com parâmetro p, então pode-se mostrar que

- $\mu = E(X) = \frac{1}{p}$ e
- $Var(X) = \frac{(1-p)}{p^2}$.

Por exemplo, se X é a variável aleatória do item (a) do exemplo acima, então temos que a média de X é

$$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.2} = 5,$$

que representa o numero médio de manhãs até que a primeira manhã em que o sinal esteja verde ocorra.

Média e variância da distribuição geométrica

Se X é variável aleatória geométrica com parâmetro p, então pode-se mostrar que

- $\mu = E(X) = \frac{1}{p}$ e
- $Var(X) = \frac{(1-p)}{p^2}$.

Por exemplo, se X é a variável aleatória do item (a) do exemplo acima, então temos que a média de X é

$$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.2} = 5,$$

que representa o numero médio de manhãs até que a primeira manhã em que o sinal esteja verde ocorra.

Média e variância da distribuição geométrica

Se X é variável aleatória geométrica com parâmetro p, então pode-se mostrar que

- $\mu = E(X) = \frac{1}{p}$ e
- $Var(X) = \frac{(1-p)}{p^2}$.

Por exemplo, se X é a variável aleatória do item (a) do exemplo acima, então temos que a média de X é

$$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.2} = 5,$$

que representa o numero médio de manhãs até que a primeira manhã em que o sinal esteja verde ocorra.

Média e variância da distribuição geométrica

Se X é variável aleatória geométrica com parâmetro p, então pode-se mostrar que

- $\mu = E(X) = \frac{1}{p}$ e
- $Var(X) = \frac{(1-p)}{p^2}$.

Por exemplo, se X é a variável aleatória do item (a) do exemplo acima, então temos que a média de X é

$$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.2} = 5,$$

que representa o numero médio de manhãs até que a primeira manhã em que o sinal esteja verde ocorra.

Média e variância da distribuição geométrica

Se X é variável aleatória geométrica com parâmetro p, então pode-se mostrar que

- $\mu = E(X) = \frac{1}{p}$ e
- $Var(X) = \frac{(1-p)}{p^2}$.

Por exemplo, se X é a variável aleatória do item (a) do exemplo acima, então temos que a média de X é

$$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.2} = 5,$$

que representa o numero médio de manhãs até que a primeira manhã em que o sinal esteja verde ocorra.