Probabilidade e estatística - Aula 2

Introdução à probabilidade

Dr. Giannini Italino Alves Vieira

Universidade Federal do Ceará - Campus de Crateús

Março, 2024

Probabilidade

Veremos agora a definição axiomática de probabilidade. Tal definição é suficiente para fazermos um estudo rigoroso acerca de probabilidade e é fundamental para obtermos várias propriedades.

Definição: Uma função P definida em uma classe $\mathcal{A}$ de subconjuntos de Ω e com valores em $[0, 1]$ é chamada de probabilidade (ou medida de probabilidade) se satisfaz os seguintes axiomas de Kolmogorov:

(Ax1) $P(A) \geq 0$, para todo $A \in \mathcal{A}$;

(Ax2) $P(\Omega) = 1$;

(Ax3) Para toda sequência enumerável $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, mutuamente excludentes, temos que

$$P\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

- A classe $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra e sua definição formal está fora do escopo deste curso. Contudo, intuitivamente, pode ser pensada como uma classe que contem todos os eventos de interesse sobre os quais queremos calcular probabilidade.

Veremos agora a definição axiomática de probabilidade. Tal definição é suficiente para fazermos um estudo rigoroso acerca de probabilidade e é fundamental para obtermos várias propriedades.

Definição: Uma função P definida em uma classe $\mathcal{A}$ de subconjuntos de Ω e com valores em $[0, 1]$ é chamada de probabilidade (ou medida de probabilidade) se satisfaz os seguintes axiomas de Kolmogorov:

(Ax1) $P(A) \geq 0$, para todo $A \in \mathcal{A}$;
(Ax2) $P(\Omega) = 1$;
(Ax3) Para toda sequência enumerável $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, mutuamente excludentes, temos que

$$P\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

- A classe $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra e sua definição formal está fora do escopo deste curso. Contudo, intuitivamente, pode ser pensada como uma classe que contem todos os eventos de interesse sobre os quais queremos calcular probabilidade.

Probabilidade

Veremos agora a definição axiomática de probabilidade. Tal definição é suficiente para fazermos um estudo rigoroso acerca de probabilidade e é fundamental para obtermos várias propriedades.

Definição: Uma função P definida em uma classe $\mathcal{A}$ de subconjuntos de Ω e com valores em $[0, 1]$ é chamada de probabilidade (ou medida de probabilidade) se satisfaz os seguintes axiomas de Kolmogorov:

(Ax1) $P(A) \geq 0$, para todo $A \in \mathcal{A}$;

(Ax2) $P(\Omega) = 1$;

(Ax3) Para toda sequência enumerável $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, mutuamente excludentes, temos que

$$P\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

- A classe $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra e sua definição formal está fora do escopo deste curso. Contudo, intuitivamente, pode ser pensada como uma classe que contem todos os eventos de interesse sobre os quais queremos calcular probabilidade.

Probabilidade

Veremos agora a definição axiomática de probabilidade. Tal definição é suficiente para fazermos um estudo rigoroso acerca de probabilidade e é fundamental para obtermos várias propriedades.

Definição: Uma função P definida em uma classe $\mathcal{A}$ de subconjuntos de Ω e com valores em $[0, 1]$ é chamada de probabilidade (ou medida de probabilidade) se satisfaz os seguintes axiomas de Kolmogorov:

(Ax1) $P(A) \geq 0$, para todo $A \in \mathcal{A}$;

(Ax2) $P(\Omega) = 1$;

(Ax3) Para toda sequência enumerável $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, mutuamente excludentes, temos que

$$P\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

- A classe $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra e sua definição formal está fora do escopo deste curso. Contudo, intuitivamente, pode ser pensada como uma classe que contem todos os eventos de interesse sobre os quais queremos calcular probabilidade.

Probabilidade

Veremos agora a definição axiomática de probabilidade. Tal definição é suficiente para fazermos um estudo rigoroso acerca de probabilidade e é fundamental para obtermos várias propriedades.

Definição: Uma função P definida em uma classe $\mathcal{A}$ de subconjuntos de Ω e com valores em $[0,1]$ é chamada de probabilidade (ou medida de probabilidade) se satisfaz os seguintes axiomas de Kolmogorov:

(Ax1) $P(A) \geq 0$, para todo $A \in \mathcal{A}$;
(Ax2) $P(\Omega) = 1$;
(Ax3) Para toda sequência enumerável $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, mutuamente excludentes, temos que

$$P\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

- A classe $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra e sua definição formal está fora do escopo deste curso. Contudo, intuitivamente, pode ser pensada como uma classe que contem todos os eventos de interesse sobre os quais queremos calcular probabilidade.

Exemplos de probabilidades

Probabilidade Clássica

No caso particular em que estivermos trabalhando com experimento aleatório com espaço amostral finito e seus eventos unitários são equiprováveis, isto é, possuem mesma chance de ocorrerem, então a probabilidade de um evento $A \subseteq \Omega$ é dada por

$$P(A) = \frac{||A||}{||\Omega||}$$

Essa é a definição clássica de probabilidade. Não é difícil verificar que P definida acima satisfaz os axiomas de Kolmogorov, ou seja, é um caso particular da definição anterior.

Exemplos de probabilidades

Probabilidade Clássica

No caso particular em que estivermos trabalhando com experimento aleatório com espaço amostral finito e seus eventos unitários são equiprováveis, isto é, possuem mesma chance de ocorrerem, então a probabilidade de um evento $A \subseteq \Omega$ é dada por

$$P(A) = \frac{||A||}{||\Omega||}$$

Essa é a definição clássica de probabilidade. Não é difícil verificar que P definida acima satisfaz os axiomas de Kolmogorov, ou seja, é um caso particular da definição anterior.

Exemplos de probabilidades

Probabilidade Clássica

No caso particular em que estivermos trabalhando com experimento aleatório com espaço amostral finito e seus eventos unitários são equiprováveis, isto é, possuem mesma chance de ocorrerem, então a probabilidade de um evento $A \subseteq \Omega$ é dada por

$$P(A) = \frac{||A||}{||\Omega||}$$

Essa é a definição clássica de probabilidade. Não é difícil verificar que P definida acima satisfaz os axiomas de Kolmogorov, ou seja, é um caso particular da definição anterior.

Probabilidade Clássica

- Por exemplo, suponha que lançamos simultaneamente uma moeda e um dado, ambos honestos. Calcule a probabilidade de obtermos um cara e um número par.
  - Sol.: Primeiro note que o espaço amostral é dado por $\Omega = \{C1, C2, C3, C4, C5, C6, K1, K2, K3, K4, K5, K6\}$, em que C representa cara e K representa coroa. Note que estamos interessados em calcular probabilidade do evento $A = \{C2, C4, C6\}$. Como Ω é finito e não há motivos para supor que algum dos seus resultados unitário é mais provável que outro, uma vez que a moeda e o dado são honestos, então podemos usar a probabilidade clássica para calcular $P(A)$. Dessa forma temos que

$$P(A) = \frac{||A||}{||\Omega||} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}.$$

Exemplos de probabilidades

Probabilidade Clássica

- Por exemplo, suponha que lançamos simultaneamente uma moeda e um dado, ambos honestos. Calcule a probabilidade de obtermos um cara e um número par.
  - Sol.: Primeiro note que o espaço amostral é dado por $\Omega = \{C1, C2, C3, C4, C5, C6, K1, K2, K3, K4, K5, K6\}$, em que C representa cara e K representa coroa. Note que estamos interessados em calcular probabilidade do evento $A = \{C2, C4, C6\}$. Como Ω é finito e não há motivos para supor que algum dos seus resultados unitário é mais provável que outro, uma vez que a moeda e o dado são honestos, então podemos usar a probabilidade clássica para calcular $P(A)$. Dessa forma temos que

$$P(A) = \frac{||A||}{||\Omega||} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}.$$

Exemplos de probabilidades

Mais geralmente, se $\Omega = \{w_1, w_2, \ldots, w_n, \ldots\}$ for um espaço amostral discreto, isto é, se possuir uma quantidade finita ou infinita enumerável de elementos, então se $E \subseteq \Omega$, temos que

$$P(E) = \sum_{w_i \in E} P(\{w_i\})$$

Neste caso, também é fácil verificar que P, definida acima, é uma medida de probabilidade verificando os axiomas de Kolmogorov.

- Por exemplo, suponha que um determinado experimento aleatório tem como resultados possíveis o conjunto $\Omega = \{a, b, c, d\}$ com probabilidades 0.1, 0.3, 0.4 e 0.2, respectivamente. Seja $A = \{a, d\}$, temos que

$$P(A) = P(a) + P(d) = 0.1 + 0.2 = 0.3.$$

Exemplos de probabilidades

Mais geralmente, se $\Omega = \{w_1, w_2, \ldots, w_n, \ldots\}$ for um espaço amostral discreto, isto é, se possuir uma quantidade finita ou infinita enumerável de elementos, então se $E \subseteq \Omega$, temos que

$$P(E) = \sum_{w_i \in E} P(\{w_i\})$$

Neste caso, também é fácil verificar que P, definida acima, é uma medida de probabilidade verificando os axiomas de Kolmogorov.

- Por exemplo, suponha que um determinado experimento aleatório tem como resultados possíveis o conjunto $\Omega = \{a, b, c, d\}$ com probabilidades 0.1, 0.3, 0.4 e 0.2, respectivamente. Seja $A = \{a, d\}$, temos que

$$P(A) = P(a) + P(d) = 0.1 + 0.2 = 0.3.$$

Exemplos de probabilidades

Mais geralmente, se $\Omega = \{w_1, w_2, \ldots, w_n, \ldots\}$ for um espaço amostral discreto, isto é, se possuir uma quantidade finita ou infinita enumerável de elementos, então se $E \subseteq \Omega$, temos que

$$P(E) = \sum_{w_i \in E} P(\{w_i\})$$

Neste caso, também é fácil verificar que P, definida acima, é uma medida de probabilidade verificando os axiomas de Kolmogorov.

- Por exemplo, suponha que um determinado experimento aleatório tem como resultados possíveis o conjunto $\Omega = \{a, b, c, d\}$ com probabilidades 0.1, 0.3, 0.4 e 0.2, respectivamente. Seja $A = \{a, d\}$, temos que

$$P(A) = P(a) + P(d) = 0.1 + 0.2 = 0.3.$$

Exemplos de probabilidades

Mais geralmente, se $\Omega = \{w_1, w_2, \ldots, w_n, \ldots\}$ for um espaço amostral discreto, isto é, se possuir uma quantidade finita ou infinita enumerável de elementos, então se $E \subseteq \Omega$, temos que

$$P(E) = \sum_{w_i \in E} P(\{w_i\})$$

Neste caso, também é fácil verificar que P, definida acima, é uma medida de probabilidade verificando os axiomas de Kolmogorov.

- Por exemplo, suponha que um determinado experimento aleatório tem como resultados possíveis o conjunto $\Omega = \{a, b, c, d\}$ com probabilidades 0.1, 0.3, 0.4 e 0.2, respectivamente. Seja $A = \{a, d\}$, temos que

$$P(A) = P(a) + P(d) = 0.1 + 0.2 = 0.3.$$

Exemplos de probabilidades

Mais geralmente, se $\Omega = \{w_1, w_2, \ldots, w_n, \ldots\}$ for um espaço amostral discreto, isto é, se possuir uma quantidade finita ou infinita enumerável de elementos, então se $E \subseteq \Omega$, temos que

$$P(E) = \sum_{w_i \in E} P(\{w_i\})$$

Neste caso, também é fácil verificar que P, definida acima, é uma medida de probabilidade verificando os axiomas de Kolmogorov.

- Por exemplo, suponha que um determinado experimento aleatório tem como resultados possíveis o conjunto $\Omega = \{a, b, c, d\}$ com probabilidades 0.1, 0.3, 0.4 e 0.2, respectivamente. Seja $A = \{a, d\}$, temos que

$$P(A) = P(a) + P(d) = 0.1 + 0.2 = 0.3.$$

Propriedades de uma probabilidade

Por meio da definição axiomática de probabilidade, podemos obter formalmente uma série de propriedades sobre probabilidades. Essas serão úteis para solucionarmos problemas mais elaborados.

- (P1) $P(\emptyset) = 0$.
  - Prova: De fato, considere a sequência de eventos $A_1 = \Omega$, $A_2 = \emptyset$, $A_3 = \emptyset, \dots, A_k = \emptyset, \dots$. Ou seja, $A_1 = \Omega$ e $A_i = \emptyset$, para todo $i = 2, 3, \dots$. Note que os eventos $A_1, A_2, A_3, \dots$ definidos acima são dois a dois disjuntos. Como P é uma probabilidade, pelo (Ax3) temos que

$$P\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

ou seja, $P(\Omega) = P(A_1) + \sum_{i=2}^{\infty} P(A_i) \Leftrightarrow 1 = 1 + \sum_{i=2}^{\infty} P(A_i)$. Logo, como $P(A_i) \geq 0$, então temos que $\sum_{i=2}^{\infty} P(\emptyset) = 0 \Leftrightarrow P(\emptyset) = 0$.

Propriedades de uma probabilidade

Por meio da definição axiomática de probabilidade, podemos obter formalmente uma série de propriedades sobre probabilidades. Essas serão úteis para solucionarmos problemas mais elaborados.

- (P1) $P(\emptyset) = 0$.
  - Prova: De fato, considere a sequência de eventos $A_1 = \Omega$, $A_2 = \emptyset$, $A_3 = \emptyset, \ldots, A_k = \emptyset, \ldots$. Ou seja, $A_1 = \Omega$ e $A_i = \emptyset$, para todo $i = 2, 3, \ldots$. Note que os eventos $A_1, A_2, A_3, \ldots$ definidos acima são dois a dois disjuntos. Como P é uma probabilidade, pelo (Ax3) temos que

$$P\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

ou seja, $P(\Omega) = P(A_1) + \sum_{i=2}^{\infty} P(A_i) \Leftrightarrow 1 = 1 + \sum_{i=2}^{\infty} P(A_i)$. Logo, como $P(A_i) \geq 0$, então temos que $\sum_{i=2}^{\infty} P(\emptyset) = 0 \Leftrightarrow P(\emptyset) = 0$.

Propriedades de uma probabilidade

Por meio da definição axiomática de probabilidade, podemos obter formalmente uma série de propriedades sobre probabilidades. Essas serão úteis para solucionarmos problemas mais elaborados.

- (P1) $P(\emptyset) = 0$.
  - Prova: De fato, considere a sequência de eventos $A_1 = \Omega$, $A_2 = \emptyset$, $A_3 = \emptyset, \ldots, A_k = \emptyset, \ldots$. Ou seja, $A_1 = \Omega$ e $A_i = \emptyset$, para todo $i = 2, 3, \ldots$. Note que os eventos $A_1, A_2, A_3, \ldots$ definidos acima são dois a dois disjuntos. Como P é uma probabilidade, pelo (Ax3) temos que
  $$P\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$
  ou seja, $P(\Omega) = P(A_1) + \sum_{i=2}^{\infty} P(A_i) \Leftrightarrow 1 = 1 + \sum_{i=2}^{\infty} P(A_i)$. Logo, como $P(A_i) \geq 0$, então temos que $\sum_{i=2}^{\infty} P(\emptyset) = 0 \Leftrightarrow P(\emptyset) = 0$.

Propriedades de uma probabilidade

Por meio da definição axiomática de probabilidade, podemos obter formalmente uma série de propriedades sobre probabilidades. Essas serão úteis para solucionarmos problemas mais elaborados.

- (P1) $P(\emptyset) = 0$.
  - Prova: De fato, considere a sequência de eventos $A_1 = \Omega$, $A_2 = \emptyset$, $A_3 = \emptyset, \ldots, A_k = \emptyset, \ldots$. Ou seja, $A_1 = \Omega$ e $A_i = \emptyset$, para todo $i = 2, 3, \ldots$. Note que os eventos $A_1, A_2, A_3, \ldots$ definidos acima são dois a dois disjuntos. Como P é uma probabilidade, pelo (Ax3) temos que

$$P\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

ou seja, $P(\Omega) = P(A_1) + \sum_{i=2}^{\infty} P(A_i) \Leftrightarrow 1 = 1 + \sum_{i=2}^{\infty} P(A_i)$.
Logo, como $P(A_i) \geq 0$, então temos que $\sum_{i=2}^{\infty} P(\emptyset) = 0 \Leftrightarrow P(\emptyset) = 0$.

Propriedades de uma probabilidade

Por meio da definição axiomática de probabilidade, podemos obter formalmente uma série de propriedades sobre probabilidades. Essas serão úteis para solucionarmos problemas mais elaborados.

- (P1) $P(\emptyset) = 0$.
  - Prova: De fato, considere a sequência de eventos $A_1 = \Omega$, $A_2 = \emptyset$, $A_3 = \emptyset, \ldots, A_k = \emptyset, \ldots$. Ou seja, $A_1 = \Omega$ e $A_i = \emptyset$, para todo $i = 2, 3, \ldots$. Note que os eventos $A_1, A_2, A_3, \ldots$ definidos acima são dois a dois disjuntos. Como P é uma probabilidade, pelo (Ax3) temos que

$$P\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

ou seja, $P(\Omega) = P(A_1) + \sum_{i=2}^{\infty} P(A_i) \Leftrightarrow 1 = 1 + \sum_{i=2}^{\infty} P(A_i)$. Logo, como $P(A_i) \geq 0$, então temos que $\sum_{i=2}^{\infty} P(\emptyset) = 0 \Leftrightarrow P(\emptyset) = 0$.

Propriedades de uma probabilidade

Por meio da definição axiomática de probabilidade, podemos obter formalmente uma série de propriedades sobre probabilidades. Essas serão úteis para solucionarmos problemas mais elaborados.

- (P1) $P(\emptyset) = 0$.
  - Prova: De fato, considere a sequência de eventos $A_1 = \Omega$, $A_2 = \emptyset$, $A_3 = \emptyset, \ldots, A_k = \emptyset, \ldots$. Ou seja, $A_1 = \Omega$ e $A_i = \emptyset$, para todo $i = 2, 3, \ldots$. Note que os eventos $A_1, A_2, A_3, \ldots$ definidos acima são dois a dois disjuntos. Como P é uma probabilidade, pelo (Ax3) temos que

$$P\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

ou seja, $P(\Omega) = P(A_1) + \sum_{i=2}^{\infty} P(A_i) \Leftrightarrow 1 = 1 + \sum_{i=2}^{\infty} P(A_i)$.
Logo, como $P(A_i) \geq 0$, então temos que $\sum_{i=2}^{\infty} P(\emptyset) = 0 \Leftrightarrow P(\emptyset) = 0$.

Propriedades de uma probabilidade

Por meio da definição axiomática de probabilidade, podemos obter formalmente uma série de propriedades sobre probabilidades. Essas serão úteis para solucionarmos problemas mais elaborados.

- (P1) $P(\emptyset) = 0$.
  - Prova: De fato, considere a sequência de eventos $A_1 = \Omega$, $A_2 = \emptyset$, $A_3 = \emptyset, \ldots, A_k = \emptyset, \ldots$. Ou seja, $A_1 = \Omega$ e $A_i = \emptyset$, para todo $i = 2, 3, \ldots$. Note que os eventos $A_1, A_2, A_3, \ldots$ definidos acima são dois a dois disjuntos. Como P é uma probabilidade, pelo (Ax3) temos que

$$P\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

ou seja, $P(\Omega) = P(A_1) + \sum_{i=2}^{\infty} P(A_i) \Leftrightarrow 1 = 1 + \sum_{i=2}^{\infty} P(A_i)$. Logo, como $P(A_i) \geq 0$, então temos que $\sum_{i=2}^{\infty} P(\emptyset) = 0 \Leftrightarrow P(\emptyset) = 0$.

Propriedades de uma probabilidade

- (P2) Se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são eventos de Ω, dos a dois disjuntos, então

$$P\left(\cup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

  - Prova: De fato. Note que em (P1) acabamos de provar que $P(\emptyset) = 0$. Seja agora a sequência consistindo dos eventos, A_1, $A_2, \ldots, A_n$, $A_{n+1} = \emptyset$, $A_{n+2} = \emptyset$, $A_{n+3} = \emptyset, \ldots$. Ou seja, $A_j = \emptyset$, para todo $j \geq n+1$.
  - Note que os eventos A_i acima são dois a dois disjuntos. Logo, por (Ax3) temos que

$$P\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P\left(\cup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i),$$

Ou seja, $P\left(\cup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

Propriedades de uma probabilidade

- (P2) Se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são eventos de Ω, dos a dois disjuntos, então

$$P\left(\cup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

  - Prova: De fato. Note que em (P1) acabamos de provar que $P(\emptyset) = 0$. Seja agora a sequência consistindo dos eventos, A_1, $A_2, \ldots, A_n$, $A_{n+1} = \emptyset$, $A_{n+2} = \emptyset$, $A_{n+3} = \emptyset, \ldots$. Ou seja, $A_j = \emptyset$, para todo $j \geq n+1$.
  - Note que os eventos A_i acima são dois a dois disjuntos. Logo, por (Ax3) temos que

$$P\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P\left(\cup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i),$$

    Ou seja, $P\left(\cup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

Propriedades de uma probabilidade

- (P2) Se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são eventos de Ω, dos a dois disjuntos, então

$$P\left(\cup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

  - Prova: De fato. Note que em (P1) acabamos de provar que $P(\emptyset) = 0$. Seja agora a sequência consistindo dos eventos, A_1, $A_2, \ldots, A_n$, $A_{n+1} = \emptyset$, $A_{n+2} = \emptyset$, $A_{n+3} = \emptyset, \ldots$. Ou seja, $A_j = \emptyset$, para todo $j \geq n+1$.
  - Note que os eventos A_i acima são dois a dois disjuntos. Logo, por (Ax3) temos que

$$P\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P\left(\cup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i),$$

Ou seja, $P\left(\cup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

Propriedades de uma probabilidade

- (P3) Se $P(A) = 1 - P(A^c)$.
  - Prova: De fato, note que $\Omega = A \cup A^c$. Como A e A^c são disjuntos, temos por (P2) que

$$P(\Omega) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c),$$

Como $P(\Omega) = 1$, temos que

$$1 = P(A) + P(A^c), \quad \text{ou seja} \quad P(A^c) = 1 - P(A).$$

Propriedades de uma probabilidade

- (P3) Se $P(A) = 1 - P(A^c)$.
  - Prova: De fato, note que $\Omega = A \cup A^c$. Como A e A^c são disjuntos, temos por (P2) que

$$P(\Omega) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c),$$

Como $P(\Omega) = 1$, temos que

$$1 = P(A) + P(A^c), \quad \text{ou seja} \quad P(A^c) = 1 - P(A).$$

Propriedades de uma probabilidade

- (P3) Se $P(A) = 1 - P(A^c)$.
  - Prova: De fato, note que $\Omega = A \cup A^c$. Como A e A^c são disjuntos, temos por (P2) que

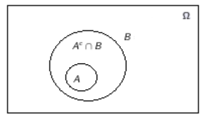
    $$P(\Omega) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c),$$

    Como $P(\Omega) = 1$, temos que

    $$1 = P(A) + P(A^c), \quad \text{ou seja} \quad P(A^c) = 1 - P(A).$$

Propriedades de uma probabilidade

- (P4) Se A e B são eventos de Ω tais que $A \subseteq B$, então $P(A) \leq P(B)$.
  - Prova: De fato, note que se $A \subseteq B$, então podemos escrever o evento B da forma $B = A \cup (A^c \cap B)$.



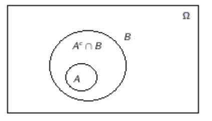
  - Note que os eventos A e $(A^c \cap B)$ são disjuntos. Logo, temos que

$$P(B) = P(A) + P(A^c \cap B)$$

Note ainda que como $P(A^c \cap B) \geq 0$, decorre que

$$P(B) \geq P(A).$$

- (P4) Se A e B são eventos de Ω tais que $A \subseteq B$, então $P(A) \leq P(B)$.
  - Prova: De fato, note que se $A \subseteq B$, então podemos escrever o evento B da forma $B = A \cup (A^c \cap B)$.



  - Note que os eventos A e $(A^c \cap B)$ são disjuntos. Logo, temos que

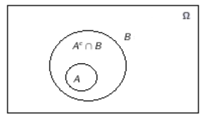
$$P(B) = P(A) + P(A^c \cap B)$$

Note ainda que como $P(A^c \cap B) \geq 0$, decorre que

$$P(B) \geq P(A).$$

Propriedades de uma probabilidade

- (P4) Se A e B são eventos de Ω tais que $A \subseteq B$, então $P(A) \leq P(B)$.
  - Prova: De fato, note que se $A \subseteq B$, então podemos escrever o evento B da forma $B = A \cup (A^c \cap B)$.



  - Note que os eventos A e $(A^c \cap B)$ são disjuntos. Logo, temos que

$$P(B) = P(A) + P(A^c \cap B)$$

Note ainda que como $P(A^c \cap B) \geq 0$, decorre que

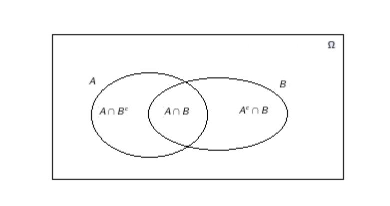
$$P(B) \geq P(A).$$

Propriedades de uma probabilidade

- (P5) Se A e B são eventos quaisquer de Ω, então

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

  - Prova: Note que $A \cup B = (A \cap B^c) \cup (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$

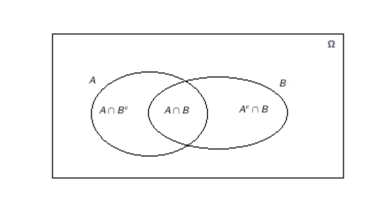


Propriedades de uma probabilidade

- (P5) Se A e B são eventos quaisquer de Ω, então

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

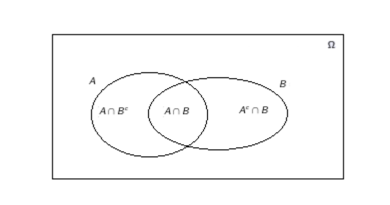
  - Prova: Note que $A \cup B = (A \cap B^c) \cup (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$



- (P5) Se A e B são eventos quaisquer de Ω, então

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

  - Prova: Note que $A \cup B = (A \cap B^c) \cup (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$



Propriedades de uma probabilidade

Note ainda que $(A \cap B^c)$, $(A \cap B)$ e $(A^c \cap B)$ são dois a dois disjuntos. Logo, por (P2), temos que

$$P(A \cup B) = P(A \cap B^c) + P(A \cap B) + P(A^c \cap B) \qquad (1)$$

Observe agora que

- (i) $A = (A \cap B^c) \cup (A \cap B)$, logo $P(A) = P(A \cap B^c) + P(A \cap B)$, o que implica que $P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$
- (ii) $B = (A^c \cap B) \cup (A \cap B)$, logo $P(B) = P(A^c \cap B) + P(A \cap B)$, o que implica que $P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$.

Dessa forma, substituindo $P(A \cap B^c)$ e $P(A^c \cap B)$ em (1) temos que

$$P(A \cup B) = P(A) - P(A \cap B) + P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B),$$

ou seja,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Propriedades de uma probabilidade

Note ainda que $(A \cap B^c)$, $(A \cap B)$ e $(A^c \cap B)$ são dois a dois disjuntos. Logo, por (P2), temos que

$$P(A \cup B) = P(A \cap B^c) + P(A \cap B) + P(A^c \cap B) \qquad (1)$$

Observe agora que

- (i) $A = (A \cap B^c) \cup (A \cap B)$, logo $P(A) = P(A \cap B^c) + P(A \cap B)$, o que implica que $P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$
- (ii) $B = (A^c \cap B) \cup (A \cap B)$, logo $P(B) = P(A^c \cap B) + P(A \cap B)$, o que implica que $P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$.

Dessa forma, substituindo $P(A \cap B^c)$ e $P(A^c \cap B)$ em (1) temos que

$$P(A \cup B) = P(A) - P(A \cap B) + P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B),$$

ou seja,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Propriedades de uma probabilidade

Note ainda que $(A \cap B^c)$, $(A \cap B)$ e $(A^c \cap B)$ são dois a dois disjuntos. Logo, por (P2), temos que

$$P(A \cup B) = P(A \cap B^c) + P(A \cap B) + P(A^c \cap B) \qquad (1)$$

Observe agora que

- (i) $A = (A \cap B^c) \cup (A \cap B)$, logo $P(A) = P(A \cap B^c) + P(A \cap B)$, o que implica que $P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$
- (ii) $B = (A^c \cap B) \cup (A \cap B)$, logo $P(B) = P(A^c \cap B) + P(A \cap B)$, o que implica que $P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$.

Dessa forma, substituindo $P(A \cap B^c)$ e $P(A^c \cap B)$ em (1) temos que

$$P(A \cup B) = P(A) - P(A \cap B) + P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B),$$

ou seja,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Propriedades de uma probabilidade

Note ainda que $(A \cap B^c)$, $(A \cap B)$ e $(A^c \cap B)$ são dois a dois disjuntos. Logo, por (P2), temos que

$$P(A \cup B) = P(A \cap B^c) + P(A \cap B) + P(A^c \cap B) \qquad (1)$$

Observe agora que

- (i) $A = (A \cap B^c) \cup (A \cap B)$, logo $P(A) = P(A \cap B^c) + P(A \cap B)$, o que implica que $P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$
- (ii) $B = (A^c \cap B) \cup (A \cap B)$, logo $P(B) = P(A^c \cap B) + P(A \cap B)$, o que implica que $P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$.

Dessa forma, substituindo $P(A \cap B^c)$ e $P(A^c \cap B)$ em (1) temos que

$$P(A \cup B) = P(A) - P(A \cap B) + P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B),$$

ou seja,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Propriedades de uma probabilidade

Note ainda que $(A \cap B^c)$, $(A \cap B)$ e $(A^c \cap B)$ são dois a dois disjuntos. Logo, por (P2), temos que

$$P(A \cup B) = P(A \cap B^c) + P(A \cap B) + P(A^c \cap B) \qquad (1)$$

Observe agora que

- (i) $A = (A \cap B^c) \cup (A \cap B)$, logo $P(A) = P(A \cap B^c) + P(A \cap B)$, o que implica que $P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$
- (ii) $B = (A^c \cap B) \cup (A \cap B)$, logo $P(B) = P(A^c \cap B) + P(A \cap B)$, o que implica que $P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$.

Dessa forma, substituindo $P(A \cap B^c)$ e $P(A^c \cap B)$ em (1) temos que

$$P(A \cup B) = P(A) - P(A \cap B) + P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B),$$

ou seja,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Propriedades de uma probabilidade

Note ainda que $(A \cap B^c)$, $(A \cap B)$ e $(A^c \cap B)$ são dois a dois disjuntos. Logo, por (P2), temos que

$$P(A \cup B) = P(A \cap B^c) + P(A \cap B) + P(A^c \cap B) \qquad (1)$$

Observe agora que

- (i) $A = (A \cap B^c) \cup (A \cap B)$, logo $P(A) = P(A \cap B^c) + P(A \cap B)$, o que implica que $P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$
- (ii) $B = (A^c \cap B) \cup (A \cap B)$, logo $P(B) = P(A^c \cap B) + P(A \cap B)$, o que implica que $P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$.

Dessa forma, substituindo $P(A \cap B^c)$ e $P(A^c \cap B)$ em (1) temos que

$$P(A \cup B) = P(A) - P(A \cap B) + P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B),$$

ou seja,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Exemplo

A fim de ilustrar algumas das propriedades estudadas acima considere o seguinte problema.

- Exemplo: Suponha que lançamos um dado honesto duas vezes e as faces resultantes são observadas. Considere os seguintes eventos:
  - A: os resultados obtidos foram pares;
  - B: a soma dos resultados é igual a 6.
- Calcule: $P(A), P(B), P(A^c), P(A \cap B), P(A \cup B)$ e $P(A^c \cap B^c)$.
  Sol.: Primeiro note que $||\Omega|| = 36$, uma vez que

  $$\Omega = \{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),(2,1),(2,2),\ldots(2,6),\ldots,(6,1),(6,2),\ldots,(6,6)\}$$

  Note ainda que $A = \{(2,2),(2,4),(2,6),(4,2),(4,4),(4,6),(6,2),(6,4),(6,6)\}$ e $B = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$. Logo, temos que

Exemplo

A fim de ilustrar algumas das propriedades estudadas acima considere o seguinte problema.

- Exemplo: Suponha que lançamos um dado honesto duas vezes e as faces resultantes são observadas. Considere os seguintes eventos:
  - A: os resultados obtidos foram pares;
  - B: a soma dos resultados é igual a 6.
- Calcule: $P(A), P(B), P(A^c), P(A \cap B), P(A \cup B)$ e $P(A^c \cap B^c)$.
  Sol.: Primeiro note que $||\Omega|| = 36$, uma vez que

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),\dots,(1,6),(2,1),(2,2),\dots(2,6),\dots,(6,1),(6,2),\dots,(6,6)\}$$

Note ainda que $A = \{(2,2),(2,4),(2,6),(4,2),(4,4),(4,6),(6,2),(6,4),(6,6)\}$ e $B = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$. Logo, temos que

Exemplo

A fim de ilustrar algumas das propriedades estudadas acima considere o seguinte problema.

- Exemplo: Suponha que lançamos um dado honesto duas vezes e as faces resultantes são observadas. Considere os seguintes eventos:
  - A: os resultados obtidos foram pares;
  - B: a soma dos resultados é igual a 6.
- Calcule: $P(A), P(B), P(A^c), P(A \cap B), P(A \cup B)$ e $P(A^c \cap B^c)$.
  Sol.: Primeiro note que $||\Omega|| = 36$, uma vez que

  $$\Omega = \{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),(2,1),(2,2),\ldots(2,6),\ldots,(6,1),(6,2),\ldots,(6,6)\}$$

  Note ainda que $A = \{(2,2),(2,4),(2,6),(4,2),(4,4),(4,6),(6,2),(6,4),(6,6)\}$ e $B = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$. Logo, temos que

Exemplo

A fim de ilustrar algumas das propriedades estudadas acima considere o seguinte problema.

- Exemplo: Suponha que lançamos um dado honesto duas vezes e as faces resultantes são observadas. Considere os seguintes eventos:
  - A: os resultados obtidos foram pares;
  - B: a soma dos resultados é igual a 6.
- Calcule: $P(A), P(B), P(A^c), P(A \cap B), P(A \cup B)$ e $P(A^c \cap B^c)$.
  Sol.: Primeiro note que $||\Omega|| = 36$, uma vez que

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),(2,1),(2,2),\ldots(2,6),\ldots,(6,1),(6,2),\ldots,(6,6)\}$$

Note ainda que $A = \{(2,2),(2,4),(2,6),(4,2),(4,4),(4,6),(6,2),(6,4),(6,6)\}$ e $B = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$. Logo, temos que

Exemplo

A fim de ilustrar algumas das propriedades estudadas acima considere o seguinte problema.

- Exemplo: Suponha que lançamos um dado honesto duas vezes e as faces resultantes são observadas. Considere os seguintes eventos:
  - A: os resultados obtidos foram pares;
  - B: a soma dos resultados é igual a 6.
- Calcule: $P(A), P(B), P(A^c), P(A \cap B), P(A \cup B)$ e $P(A^c \cap B^c)$.

  Sol.: Primeiro note que $||\Omega|| = 36$, uma vez que

  $$\Omega = \{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),(2,1),(2,2),\ldots(2,6),\ldots,(6,1),(6,2),\ldots,(6,6)\}$$

  Note ainda que $A = \{(2,2),(2,4),(2,6),(4,2),(4,4),(4,6),(6,2),(6,4),(6,6)\}$ e $B = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$. Logo, temos que

Exemplo

A fim de ilustrar algumas das propriedades estudadas acima considere o seguinte problema.

- Exemplo: Suponha que lançamos um dado honesto duas vezes e as faces resultantes são observadas. Considere os seguintes eventos:
  - A: os resultados obtidos foram pares;
  - B: a soma dos resultados é igual a 6.
- Calcule: $P(A), P(B), P(A^c), P(A \cap B), P(A \cup B)$ e $P(A^c \cap B^c)$.
  Sol.: Primeiro note que $||\Omega|| = 36$, uma vez que

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),(2,1),(2,2),\ldots(2,6),\ldots,(6,1),(6,2),\ldots,(6,6)\}$$

Note ainda que $A = \{(2,2),(2,4),(2,6),(4,2),(4,4),(4,6),(6,2),(6,4),(6,6)\}$ e $B = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$. Logo, temos que

Cont. do exemplo

- $P(A) = \frac{||A||}{||\Omega||} = \frac{9}{36}$;
- $P(B) = \frac{||B||}{||\Omega||} = \frac{5}{36}$;
- $P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{9}{36} = \frac{27}{36}$;
- $P(A \cap B) = \frac{||A \cap B||}{||\Omega||} = \frac{2}{36}$;
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{9}{36} + \frac{5}{36} - \frac{2}{36} = \frac{12}{36}$;
- $P(A^c \cap B^c) = P[(A \cup B)^c] = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{12}{36} = \frac{24}{36}$.

Cont. do exemplo

- $P(A) = \frac{||A||}{||\Omega||} = \frac{9}{36}$;
- $P(B) = \frac{||B||}{||\Omega||} = \frac{5}{36}$;
- $P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{9}{36} = \frac{27}{36}$;
- $P(A \cap B) = \frac{||A \cap B||}{||\Omega||} = \frac{2}{36}$;
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{9}{36} + \frac{5}{36} - \frac{2}{36} = \frac{12}{36}$;
- $P(A^c \cap B^c) = P[(A \cup B)^c] = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{12}{36} = \frac{24}{36}$.

Cont. do exemplo

- $P(A) = \frac{||A||}{||\Omega||} = \frac{9}{36}$;
- $P(B) = \frac{||B||}{||\Omega||} = \frac{5}{36}$;
- $P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{9}{36} = \frac{27}{36}$;
- $P(A \cap B) = \frac{||A \cap B||}{||\Omega||} = \frac{2}{36}$;
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{9}{36} + \frac{5}{36} - \frac{2}{36} = \frac{12}{36}$;
- $P(A^c \cap B^c) = P[(A \cup B)^c] = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{12}{36} = \frac{24}{36}$.

Cont. do exemplo

- $P(A) = \frac{||A||}{||\Omega||} = \frac{9}{36}$;
- $P(B) = \frac{||B||}{||\Omega||} = \frac{5}{36}$;
- $P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{9}{36} = \frac{27}{36}$;
- $P(A \cap B) = \frac{||A \cap B||}{||\Omega||} = \frac{2}{36}$;
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{9}{36} + \frac{5}{36} - \frac{2}{36} = \frac{12}{36}$;
- $P(A^c \cap B^c) = P[(A \cup B)^c] = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{12}{36} = \frac{24}{36}$.

Cont. do exemplo

- $P(A) = \frac{||A||}{||\Omega||} = \frac{9}{36}$;
- $P(B) = \frac{||B||}{||\Omega||} = \frac{5}{36}$;
- $P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{9}{36} = \frac{27}{36}$;
- $P(A \cap B) = \frac{||A \cap B||}{||\Omega||} = \frac{2}{36}$;
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{9}{36} + \frac{5}{36} - \frac{2}{36} = \frac{12}{36}$;
- $P(A^c \cap B^c) = P[(A \cup B)^c] = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{12}{36} = \frac{24}{36}$.

Cont. do exemplo

- $P(A) = \frac{||A||}{||\Omega||} = \frac{9}{36}$;
- $P(B) = \frac{||B||}{||\Omega||} = \frac{5}{36}$;
- $P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{9}{36} = \frac{27}{36}$;
- $P(A \cap B) = \frac{||A \cap B||}{||\Omega||} = \frac{2}{36}$;
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{9}{36} + \frac{5}{36} - \frac{2}{36} = \frac{12}{36}$;
- $P(A^c \cap B^c) = P[(A \cup B)^c] = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{12}{36} = \frac{24}{36}$.

Outro exemplo

Exemplo: Discos de plástico de policarbonato, provenientes de um fornecedor, são analisados com relação à resistência a arranhões e a choque. Os resultados de 100 disco analisados estão resumidos a seguir:

	Res. a choque (alta)	Res. a choque (baixa)
Res. a arranhões (alta)	70	9
Res. a arranhões (baixa)	16	5

(a) Se um disco for selecionado ao acaso, qual a probabilidade de sua resistência a arranhões ser alta e de sua resistência a choque ser alta?

- Sol.: Sejam os eventos E_1: discos com resistência alta a arranhões e E_2: discos com resistência alta a choques. Note que queremos calcular $P(E_1 \cap E_2)$. Como o disco foi selecionado ao acaso, podemos calcular essa probabilidade da forma

$$P(E_1 \cap E_2) = \frac{||E_1 \cap E_2||}{||\Omega||} = \frac{70}{100} = 0,7.$$

Outro exemplo

Exemplo: Discos de plástico de policarbonato, provenientes de um fornecedor, são analisados com relação à resistência a arranhões e a choque. Os resultados de 100 disco analisados estão resumidos a seguir:

	Res. a choque (alta)	Res. a choque (baixa)
Res. a arranhões (alta)	70	9
Res. a arranhões (baixa)	16	5

(a) Se um disco for selecionado ao acaso, qual a probabilidade de sua resistência a arranhões ser alta e de sua resistência a choque ser alta?

- Sol.: Sejam os eventos E_1: discos com resistência alta a arranhões e E_2: discos com resistência alta a choques. Note que queremos calcular $P(E_1 \cap E_2)$. Como o disco foi selecionado ao acaso, podemos calcular essa probabilidade da forma

$$P(E_1 \cap E_2) = \frac{||E_1 \cap E_2||}{||\Omega||} = \frac{70}{100} = 0,7.$$

Cont. do exemplo

(b) Se um disco for selecionado ao acaso, qual a probabilidade de sua resistência a arranhões ser alta ou de sua resistência a choque ser alta?

- Sol.: Considere novamente os definidos no item (a). Note que queremos calcular $P(E_1 \cup E_2)$. Mas essa probabilidade pode ser calculada da forma

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = \frac{79}{100} + \frac{86}{100} - \frac{70}{100} = \frac{95}{100}.$$

(c) Considere o evento em que um discos tenha alta resistência a arranhões e o evento em que um disco tenha alta resistência a choque. Esses dois eventos são mutuamente excludentes?

- Sol.: Não, pois note que $(E_1 \cap E_2) \neq \emptyset$.

(b) Se um disco for selecionado ao acaso, qual a probabilidade de sua resistência a arranhões ser alta ou de sua resistência a choque ser alta?

- Sol.: Considere novamente os definidos no item (a). Note que queremos calcular $P(E_1 \cup E_2)$. Mas essa probabilidade pode ser calculada da forma

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = \frac{79}{100} + \frac{86}{100} - \frac{70}{100} = \frac{95}{100}.$$

(c) Considere o evento em que um discos tenha alta resistência a arranhões e o evento em que um disco tenha alta resistência a choque. Esses dois eventos são mutuamente excludentes?

- Sol.: Não, pois note que $(E_1 \cap E_2) \neq \emptyset$.

Cont. do exemplo

(b) Se um disco for selecionado ao acaso, qual a probabilidade de sua resistência a arranhões ser alta ou de sua resistência a choque ser alta?

- Sol.: Considere novamente os definidos no item (a). Note que queremos calcular $P(E_1 \cup E_2)$. Mas essa probabilidade pode ser calculada da forma

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = \frac{79}{100} + \frac{86}{100} - \frac{70}{100} = \frac{95}{100}.$$

(c) Considere o evento em que um discos tenha alta resistência a arranhões e o evento em que um disco tenha alta resistência a choque. Esses dois eventos são mutuamente excludentes?

- Sol.: Não, pois note que $(E_1 \cap E_2) \neq \emptyset$.

Cont. do exemplo

(b) Se um disco for selecionado ao acaso, qual a probabilidade de sua resistência a arranhões ser alta ou de sua resistência a choque ser alta?

- Sol.: Considere novamente os definidos no item (a). Note que queremos calcular $P(E_1 \cup E_2)$. Mas essa probabilidade pode ser calculada da forma

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = \frac{79}{100} + \frac{86}{100} - \frac{70}{100} = \frac{95}{100}.$$

(c) Considere o evento em que um discos tenha alta resistência a arranhões e o evento em que um disco tenha alta resistência a choque. Esses dois eventos são mutuamente excludentes?

- Sol.: Não, pois note que $(E_1 \cap E_2) \neq \emptyset$.