Probabilidade e estatística - Aula 6

Variáveis aleatórias contínuas

Dr. Giannini Italino Alves Vieira

Universidade Federal do Ceará - Campus de Crateús

2024

Recordando

Na aula passada fizemos um estudo sobre variáveis aleatórias discretas. Vimos que

- Uma variável aleatória é classificada como **discreta** se ela assume somente um número finito ou infinito enumerável de valores.
- Vimos ainda que podemos associar duas funções a uma variável aleatória discreta X, a saber: a função de probabilidade e a função de distribuição acumulada de X.
- Vimos que o objetivo da função de probabilidade de uma variável aleatória X discreta é atribuir probabilidade a cada um dos possíveis valores que a variável pode assumir;
- Vimos também que o objetivo da função de distribuição acumulada de X é expressar probabilidades cumulativas, ou seja, probabilidades do tipo $P(X \leq x)$.

Recordando

Na aula passada fizemos um estudo sobre variáveis aleatórias discretas. Vimos que

- Uma variável aleatória é classificada como **discreta** se ela assume somente um número finito ou infinito enumerável de valores.
- Vimos ainda que podemos associar duas funções a uma variável aleatória discreta X, a saber: a função de probabilidade e a função de distribuição acumulada de X.
- Vimos que o objetivo da função de probabilidade de uma variável aleatória X discreta é atribuir probabilidade a cada um dos possíveis valores que a variável pode assumir;
- Vimos também que o objetivo da função de distribuição acumulada de X é expressar probabilidades cumulativas, ou seja, probabilidades do tipo $P(X \leq x)$.

Recordando

Na aula passada fizemos um estudo sobre variáveis aleatórias discretas. Vimos que

- Uma variável aleatória é classificada como **discreta** se ela assume somente um número finito ou infinito enumerável de valores.
- Vimos ainda que podemos associar duas funções a uma variável aleatória discreta X, a saber: a função de probabilidade e a função de distribuição acumulada de X.
- Vimos que o objetivo da função de probabilidade de uma variável aleatória X discreta é atribuir probabilidade a cada um dos possíveis valores que a variável pode assumir;
- Vimos também que o objetivo da função de distribuição acumulada de X é expressar probabilidades cumulativas, ou seja, probabilidades do tipo $P(X \leq x)$.

Recordando

Na aula passada fizemos um estudo sobre variáveis aleatórias discretas. Vimos que

- Uma variável aleatória é classificada como **discreta** se ela assume somente um número finito ou infinito enumerável de valores.
- Vimos ainda que podemos associar duas funções a uma variável aleatória discreta X, a saber: a função de probabilidade e a função de distribuição acumulada de X.
- Vimos que o objetivo da função de probabilidade de uma variável aleatória X discreta é atribuir probabilidade a cada um dos possíveis valores que a variável pode assumir;
- Vimos também que o objetivo da função de distribuição acumulada de X é expressar probabilidades cumulativas, ou seja, probabilidades do tipo $P(X \leq x)$.

Recordando

Na aula passada fizemos um estudo sobre variáveis aleatórias discretas. Vimos que

- Uma variável aleatória é classificada como **discreta** se ela assume somente um número finito ou infinito enumerável de valores.
- Vimos ainda que podemos associar duas funções a uma variável aleatória discreta X, a saber: a função de probabilidade e a função de distribuição acumulada de X.
- Vimos que o objetivo da função de probabilidade de uma variável aleatória X discreta é atribuir probabilidade a cada um dos possíveis valores que a variável pode assumir;
- Vimos também que o objetivo da função de distribuição acumulada de X é expressar probabilidades cumulativas, ou seja, probabilidades do tipo $P(X \leq x)$.

Variável aleatória contínua

Na aula de hoje, o nosso objetivo consiste em fazer um estudo sobre variáveis aleatórias contínuas. Veremos que, similarmente às variáveis aleatórias discretas, podemos associar duas funções às variáveis contínuas.

Vimos que uma variável aleatória é classificada como **contínua** se ela assume valores em um intervalo (finito ou infinito) de números reais.

- Ex.: Suponha que uma peça manufaturada seja selecionada em um determinado dia de uma produção e seu comprimento seja medido. Note que podem ocorrer pequenas variações nas medidas da peça, devido a várias causas, como por exemplo: variações na temperatura, vibrações, desgaste da ferramenta de corte, mudança nos operadores, entre outras. Seja X a variável aleatória que representa o comprimento da peça. Note que X assume valores em um intervalo de números reais, ou seja, é um exemplo de uma variável aleatória contínua.

Variável aleatória contínua

Na aula de hoje, o nosso objetivo consiste em fazer um estudo sobre variáveis aleatórias contínuas. Veremos que, similarmente às variáveis aleatórias discretas, podemos associar duas funções às variáveis contínuas.

Vimos que uma variável aleatória é classificada como **contínua** se ela assume valores em um intervalo (finito ou infinito) de números reais.

- Ex.: Suponha que uma peça manufaturada seja selecionada em um determinado dia de uma produção e seu comprimento seja medido. Note que podem ocorrer pequenas variações nas medidas da peça, devido a várias causas, como por exemplo: variações na temperatura, vibrações, desgaste da ferramenta de corte, mudança nos operadores, entre outras. Seja X a variável aleatória que representa o comprimento da peça. Note que X assume valores em um intervalo de números reais, ou seja, é um exemplo de uma variável aleatória contínua.

Variável aleatória contínua

Na aula de hoje, o nosso objetivo consiste em fazer um estudo sobre variáveis aleatórias contínuas. Veremos que, similarmente às variáveis aleatórias discretas, podemos associar duas funções às variáveis contínuas.

Vimos que uma variável aleatória é classificada como **contínua** se ela assume valores em um intervalo (finito ou infinito) de números reais.

- Ex.: Suponha que uma peça manufaturada seja selecionada em um determinado dia de uma produção e seu comprimento seja medido. Note que podem ocorrer pequenas variações nas medidas da peça, devido a várias causas, como por exemplo: variações na temperatura, vibrações, desgaste da ferramenta de corte, mudança nos operadores, entre outras. Seja X a variável aleatória que representa o comprimento da peça. Note que X assume valores em um intervalo de números reais, ou seja, é um exemplo de uma variável aleatória contínua.

Função densidade de probabilidade

- Assim como no caso de variáveis aleatórias discretas, que vimos que associada a variável podemos ter uma função que especifica probabilidade da variável assumir qualquer um de seus valores, em variáveis aleatórias contínuas temos uma função com objetivo análogo.
- Essa função é chamada de função densidade de probabilidade e pode ser usada para descrever a distribuição de probabilidade de uma variável aleatória contínua X.
- Veremos que se $f(x)$ é uma densidade de X (v. a. contínua), então a probabilidade de X estar entre a e b é determinada pela integral de $f(x)$ de a até b.

Função densidade de probabilidade

Definição: Se X é uma variável aleatória contínua, uma função f é dita ser uma função de densidade de probabilidade de X se

- $f(x) \geq 0$;
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$;
- $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$ (área sob f(x) de a até b, para qualquer a e b).

Função densidade de probabilidade

- Assim como no caso de variáveis aleatórias discretas, que vimos que associada a variável podemos ter uma função que especifica probabilidade da variável assumir qualquer um de seus valores, em variáveis aleatórias contínuas temos uma função com objetivo análogo.
- Essa função é chamada de função densidade de probabilidade e pode ser usada para descrever a distribuição de probabilidade de uma variável aleatória contínua X.
- Veremos que se $f(x)$ é uma densidade de X (v. a. contínua), então a probabilidade de X estar entre a e b é determinada pela integral de $f(x)$ de a até b.

Função densidade de probabilidade

Definição: Se X é uma variável aleatória contínua, uma função f é dita ser uma função de densidade de probabilidade de X se

- $f(x) \geq 0$;
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$;
- $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$ (área sob f(x) de a até b, para qualquer a e b).

Função densidade de probabilidade

- Assim como no caso de variáveis aleatórias discretas, que vimos que associada a variável podemos ter uma função que especifica probabilidade da variável assumir qualquer um de seus valores, em variáveis aleatórias contínuas temos uma função com objetivo análogo.
- Essa função é chamada de função densidade de probabilidade e pode ser usada para descrever a distribuição de probabilidade de uma variável aleatória contínua X.
- Veremos que se $f(x)$ é uma densidade de X (v. a. contínua), então a probabilidade de X estar entre a e b é determinada pela integral de $f(x)$ de a até b.

Função densidade de probabilidade

Definição: Se X é uma variável aleatória contínua, uma função f é dita ser uma função de densidade de probabilidade de X se

- $f(x) \geq 0$;
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$;
- $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$ (área sob f(x) de a até b, para qualquer a e b).

Função densidade de probabilidade

- Assim como no caso de variáveis aleatórias discretas, que vimos que associada a variável podemos ter uma função que especifica probabilidade da variável assumir qualquer um de seus valores, em variáveis aleatórias contínuas temos uma função com objetivo análogo.
- Essa função é chamada de função densidade de probabilidade e pode ser usada para descrever a distribuição de probabilidade de uma variável aleatória contínua X.
- Veremos que se $f(x)$ é uma densidade de X (v. a. contínua), então a probabilidade de X estar entre a e b é determinada pela integral de $f(x)$ de a até b.

Função densidade de probabilidade

Definição: Se X é uma variável aleatória contínua, uma função f é dita ser uma função de densidade de probabilidade de X se

- $f(x) \geq 0$;
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$;
- $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$ (área sob f(x) de a até b, para qualquer a e b).

Função densidade de probabilidade

- Assim como no caso de variáveis aleatórias discretas, que vimos que associada a variável podemos ter uma função que especifica probabilidade da variável assumir qualquer um de seus valores, em variáveis aleatórias contínuas temos uma função com objetivo análogo.
- Essa função é chamada de função densidade de probabilidade e pode ser usada para descrever a distribuição de probabilidade de uma variável aleatória contínua X.
- Veremos que se $f(x)$ é uma densidade de X (v. a. contínua), então a probabilidade de X estar entre a e b é determinada pela integral de $f(x)$ de a até b.

Função densidade de probabilidade

Definição: Se X é uma variável aleatória contínua, uma função f é dita ser uma função de densidade de probabilidade de X se

- $f(x) \geq 0$;
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$;
- $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$ (área sob f(x) de a até b, para qualquer a e b).

Função densidade de probabilidade

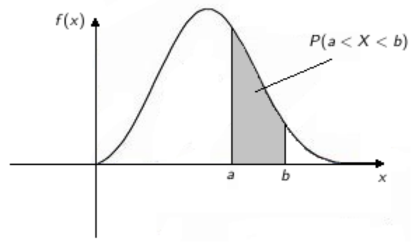
- Assim como no caso de variáveis aleatórias discretas, que vimos que associada a variável podemos ter uma função que especifica probabilidade da variável assumir qualquer um de seus valores, em variáveis aleatórias contínuas temos uma função com objetivo análogo.
- Essa função é chamada de função densidade de probabilidade e pode ser usada para descrever a distribuição de probabilidade de uma variável aleatória contínua X.
- Veremos que se $f(x)$ é uma densidade de X (v. a. contínua), então a probabilidade de X estar entre a e b é determinada pela integral de $f(x)$ de a até b.

Função densidade de probabilidade

Definição: Se X é uma variável aleatória contínua, uma função f é dita ser uma função de densidade de probabilidade de X se

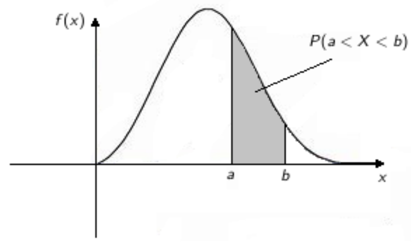
- $f(x) \geq 0$;
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$;
- $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$ (área sob f(x) de a até b, para qualquer a e b).

Função densidade de probabilidade



- Para uma variável aleatória contínua $P(X = x) = 0$, para qualquer valor de x.
- Logo, por meio do fato acima, decorre que

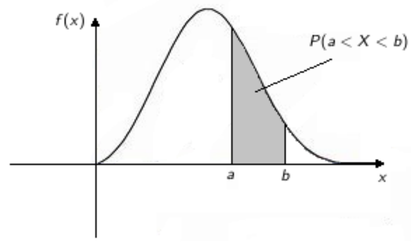
$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b).$$



- Para uma variável aleatória contínua $P(X = x) = 0$, para qualquer valor de x.
- Logo, por meio do fato acima, decorre que

$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b).$$

Função densidade de probabilidade



- Para uma variável aleatória contínua $P(X = x) = 0$, para qualquer valor de x.
- Logo, por meio do fato acima, decorre que

$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b).$$

Exemplo

Ex.: A duração, em anos, de uma certa lâmpada especial é uma variável aleatória contínua com densidade $f(x) = 2e^{-2x}$, se $x \geq 0$ e $f(x) = 0$ se $x < 0$. Determine:

(a) $P(X < 2)$;

(b) $P(X > 4)$;

(c) $P(2 \leq X < 4)$;

(d) $P(2 < X \text{ ou } X < 4)$;

- Sol.: (a) Temos que

$$P(X < 2) = \int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 2e^{-2x}dx = -e^{-2x}\Big|_0^2 = -(e^{-4} - e^0) = 1 - e^{-4} \approx 0.98.$$

- Sol.: (b) Temos que

$$P(X > 4) = \int_4^\infty f(x)dx = \int_4^\infty 2e^{-2x}dx = -e^{-2x}\Big|_4^\infty = -(-e^{-8}) = e^{-8} \approx 0.00033.$$

Exemplo

Ex.: A duração, em anos, de uma certa lâmpada especial é uma variável aleatória contínua com densidade $f(x) = 2e^{-2x}$, se $x \geq 0$ e $f(x) = 0$ se $x < 0$. Determine:

(a) $P(X < 2)$;

(b) $P(X > 4)$;

(c) $P(2 \leq X < 4)$;

(d) $P(2 < X \text{ ou } X < 4)$;

- Sol.: (a) Temos que

$$P(X < 2) = \int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 2e^{-2x}dx = -e^{-2x}\Big|_0^2 = -(e^{-4} - e^0) = 1 - e^{-4} \approx 0.98.$$

- Sol.: (b) Temos que

$$P(X > 4) = \int_4^\infty f(x)dx = \int_4^\infty 2e^{-2x}dx = -e^{-2x}\Big|_4^\infty = -(-e^{-8}) = e^{-8} \approx 0.00033.$$

Exemplo

Ex.: A duração, em anos, de uma certa lâmpada especial é uma variável aleatória contínua com densidade $f(x) = 2e^{-2x}$, se $x \geq 0$ e $f(x) = 0$ se $x < 0$. Determine:

(a) $P(X < 2)$;

(b) $P(X > 4)$;

(c) $P(2 \leq X < 4)$;

(d) $P(2 < X \text{ ou } X < 4)$;

- Sol.: (a) Temos que

$$P(X < 2) = \int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 2e^{-2x}dx = -e^{-2x}\Big|_0^2 = -(e^{-4} - e^0) = 1 - e^{-4} \approx 0.98.$$

- Sol.: (b) Temos que

$$P(X > 4) = \int_4^\infty f(x)dx = \int_4^\infty 2e^{-2x}dx = -e^{-2x}\Big|_4^\infty = -(-e^{-8}) = e^{-8} \approx 0.00033.$$

Exemplo

Ex.: A duração, em anos, de uma certa lâmpada especial é uma variável aleatória contínua com densidade $f(x) = 2e^{-2x}$, se $x \geq 0$ e $f(x) = 0$ se $x < 0$. Determine:

(a) $P(X < 2)$;

(b) $P(X > 4)$;

(c) $P(2 \leq X < 4)$;

(d) $P(2 < X \text{ ou } X < 4)$;

- Sol.: (a) Temos que

$$P(X < 2) = \int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 2e^{-2x}dx = -e^{-2x}\Big|_0^2 = -(e^{-4} - e^0) = 1 - e^{-4} \approx 0.98.$$

- Sol.: (b) Temos que

$$P(X > 4) = \int_4^\infty f(x)dx = \int_4^\infty 2e^{-2x}dx = -e^{-2x}\Big|_4^\infty = -(-e^{-8}) = e^{-8} \approx 0.00033.$$

Exemplo

Ex.: A duração, em anos, de uma certa lâmpada especial é uma variável aleatória contínua com densidade $f(x) = 2e^{-2x}$, se $x \geq 0$ e $f(x) = 0$ se $x < 0$. Determine:

(a) $P(X < 2)$;

(b) $P(X > 4)$;

(c) $P(2 \leq X < 4)$;

(d) $P(2 < X \text{ ou } X < 4)$;

- Sol.: (a) Temos que

$$P(X < 2) = \int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 2e^{-2x}dx = -e^{-2x}\Big|_0^2 = -(e^{-4} - e^0) = 1 - e^{-4} \approx 0.98.$$

- Sol.: (b) Temos que

$$P(X > 4) = \int_4^\infty f(x)dx = \int_4^\infty 2e^{-2x}dx = -e^{-2x}\Big|_4^\infty = -(-e^{-8}) = e^{-8} \approx 0.00033.$$

Exemplo

Ex.: A duração, em anos, de uma certa lâmpada especial é uma variável aleatória contínua com densidade $f(x) = 2e^{-2x}$, se $x \geq 0$ e $f(x) = 0$ se $x < 0$. Determine:

(a) $P(X < 2)$;

(b) $P(X > 4)$;

(c) $P(2 \leq X < 4)$;

(d) $P(2 < X \,\text{ou}\, X < 4)$;

- Sol.: (a) Temos que

$$P(X < 2) = \int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 2e^{-2x}dx = -e^{-2x}\Big|_0^2 = -(e^{-4} - e^{0}) = 1 - e^{-4} \approx 0.98.$$

- Sol.: (b) Temos que

$$P(X > 4) = \int_4^\infty f(x)dx = \int_4^\infty 2e^{-2x}dx = -e^{-2x}\Big|_4^\infty = -(-e^{-8}) = e^{-8} \approx 0.00033.$$

Exemplo

Ex.: A duração, em anos, de uma certa lâmpada especial é uma variável aleatória contínua com densidade $f(x) = 2e^{-2x}$, se $x \geq 0$ e $f(x) = 0$ se $x < 0$. Determine:

(a) $P(X < 2)$;

(b) $P(X > 4)$;

(c) $P(2 \leq X < 4)$;

(d) $P(2 < X \,\text{ou}\, X < 4)$;

- Sol.: (a) Temos que

$$P(X < 2) = \int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 2e^{-2x}dx = -e^{-2x}\Big|_0^2 = -(e^{-4} - e^0) = 1 - e^{-4} \approx 0.98.$$

- Sol.: (b) Temos que

$$P(X > 4) = \int_4^\infty f(x)dx = \int_4^\infty 2e^{-2x}dx = -e^{-2x}\Big|_4^\infty = -(-e^{-8}) = e^{-8} \approx 0.00033.$$

Cont. do exemplo

- Note que no item (b) também poderíamos ter obtido $P(X > 4)$ da forma

$$P(X > 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - \int_0^4 2e^{-2x}dx = 1 - 0.99966 \approx 0.00033.$$

- Sol.: (c) Temos que

$$P(2 \leq X < 4) = \int_2^4 2e^{-2x}dx = -e^{-2x}\Big|_2^4 = -(e^{-8} - e^{-4}) = e^{-4} - e^{-8} \approx 0.01798.$$

- Sol.: (d) Temos que

$$P(2 < X \,\text{ou}\, X < 4) = P(2 < X) + P(X < 4) - P(2 < X < 4)$$

ou seja,

$$P(2 < X \,\text{ou}\, X < 4) = P(2 < X) + P(X < 4) - [P(X < 4) - P(X < 2)]$$
$$P(2 < X \,\text{ou}\, X < 4) = 1 - P(X < 2) + P(X < 4)) - P(X < 4) + P(X < 2) = 1.$$

Cont. do exemplo

- Note que no item (b) também poderíamos ter obtido $P(X > 4)$ da forma

$$P(X > 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - \int_0^4 2e^{-2x} dx = 1 - 0.99966 \approx 0.00033.$$

- Sol.: (c) Temos que

$$P(2 \leq X < 4) = \int_2^4 2e^{-2x} dx = -e^{-2x}\Big|_2^4 = -(e^{-8} - e^{-4}) = e^{-4} - e^{-8} \approx 0.01798.$$

- Sol.: (d) Temos que

$$P(2 < X \,\text{ou}\, X < 4) = P(2 < X) + P(X < 4) - P(2 < X < 4)$$

ou seja,

$$P(2 < X \,\text{ou}\, X < 4) = P(2 < X) + P(X < 4) - [P(X < 4) - P(X < 2)]$$
$$P(2 < X \,\text{ou}\, X < 4) = 1 - P(X < 2) + P(X < 4)) - P(X < 4) + P(X < 2) = 1.$$

Cont. do exemplo

- Note que no item (b) também poderíamos ter obtido $P(X > 4)$ da forma

$$P(X > 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - \int_0^4 2e^{-2x} dx = 1 - 0.99966 \approx 0.00033.$$

- Sol.: (c) Temos que

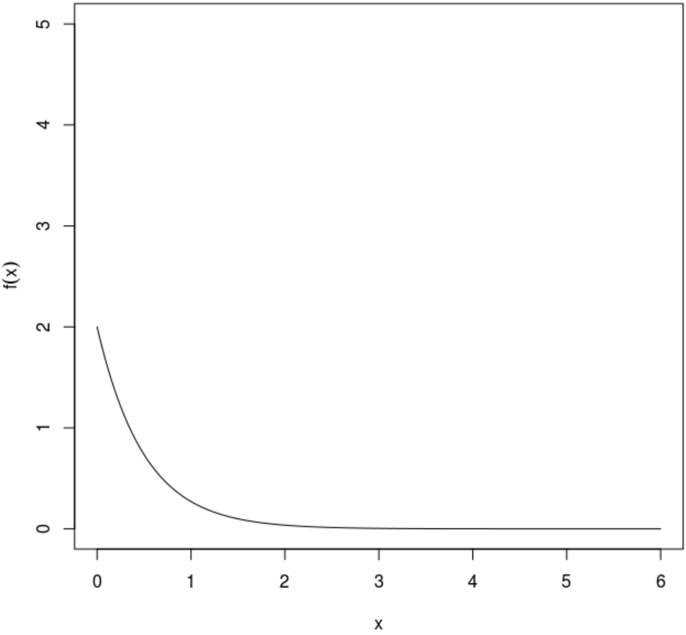
$$P(2 \leq X < 4) = \int_2^4 2e^{-2x} dx = -e^{-2x}\Big|_2^4 = -(e^{-8} - e^{-4}) = e^{-4} - e^{-8} \approx 0.01798.$$

- Sol.: (d) Temos que

$$P(2 < X \,\text{ou}\, X < 4) = P(2 < X) + P(X < 4) - P(2 < X < 4)$$

ou seja,

$$P(2 < X \,\text{ou}\, X < 4) = P(2 < X) + P(X < 4) - [P(X < 4) - P(X < 2)]$$
$$P(2 < X \,\text{ou}\, X < 4) = 1 - P(X < 2) + P(X < 4)) - P(X < 4) + P(X < 2) = 1.$$


f(x)
0
1
2
3
4
5
0
1
2
3
4
5
6
x

Função de distribuição acumulada

Vimos que um método alternativo de se descrever a distribuição de uma variável aleatória é por meio da função de distribuição acumulada. Também podemos utiliza-lo para variáveis aleatórias contínuas.

Função de distribuição acumulada

A função de distribuição acumulada de uma variável aleatória X contínua com função densidade de probabilidade $f(x)$ é dada por

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(w)dw.$$

- Recorde que para uma variável aleatória discreta, $F(x)$ é uma função do tipo escada, descontínua nos pontos que a variável discreta assume.
- Para variáveis aleatórias contínuas, note que $F(x)$ é uma função contínua (observe que na definição de F podemos trocar $<$ por $\leq$).

Função de distribuição acumulada

Vimos que um método alternativo de se descrever a distribuição de uma variável aleatória é por meio da função de distribuição acumulada. Também podemos utiliza-lo para variáveis aleatórias contínuas.

Função de distribuição acumulada

A função de distribuição acumulada de uma variável aleatória X contínua com função densidade de probabilidade $f(x)$ é dada por

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(w)dw.$$

- Recorde que para uma variável aleatória discreta, $F(x)$ é uma função do tipo escada, descontínua nos pontos que a variável discreta assume.
- Para variáveis aleatórias contínuas, note que $F(x)$ é uma função contínua (observe que na definição de F podemos trocar $<$ por $\leq$).

Função de distribuição acumulada

Vimos que um método alternativo de se descrever a distribuição de uma variável aleatória é por meio da função de distribuição acumulada. Também podemos utiliza-lo para variáveis aleatórias contínuas.

Função de distribuição acumulada

A função de distribuição acumulada de uma variável aleatória X contínua com função densidade de probabilidade $f(x)$ é dada por

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(w)dw.$$

- Recorde que para uma variável aleatória discreta, $F(x)$ é uma função do tipo escada, descontínua nos pontos que a variável discreta assume.
- Para variáveis aleatórias contínuas, note que $F(x)$ é uma função contínua (observe que na definição de F podemos trocar $<$ por $\leq$).

Exemplo

Considere novamente a variável aleatória contínua X do problema anterior. Vamos obter a função de distribuição acumulada da variável aleatória X.

- Sol.: Note que no problema anterior a função densidade de probabilidade de X é

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & \text{se} \quad x \geq 0 \\ 0, & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

- Logo, note que como f tem uma expressão para $x \geq 0$ e outra para $x < 0$, então vamos considerar dois casos:
  - Se $x < 0$, então

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} 0dw = 0.$$

Exemplo

Considere novamente a variável aleatória contínua X do problema anterior. Vamos obter a função de distribuição acumulada da variável aleatória X.

- Sol.: Note que no problema anterior a função densidade de probabilidade de X é

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & \text{se} \quad x \geq 0 \\ 0, & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

- Logo, note que como f tem uma expressão para $x \geq 0$ e outra para $x < 0$, então vamos considerar dois casos:
  - Se $x < 0$, então

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} 0 dw = 0.$$

Exemplo

Considere novamente a variável aleatória contínua X do problema anterior. Vamos obter a função de distribuição acumulada da variável aleatória X.

- Sol.: Note que no problema anterior a função densidade de probabilidade de X é

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & \text{se} \quad x \geq 0 \\ 0, & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

- Logo, note que como f tem uma expressão para $x \geq 0$ e outra para $x < 0$, então vamos considerar dois casos:
  - Se $x < 0$, então

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} 0 dw = 0.$$

Cont. do exemplo anterior

- Seja agora $x \geq 0$, então temos que

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(w)dw = \int_{0}^{x} 2e^{-2w}dw = -e^{-2w}\Big|_0^x = -(e^{-2x} - 1) = 1 - e^{-2x}.$$

Isto é, temos que

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x < 0 \\ 1 - e^{-2x}, & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

- Se, por acaso, desejamos calcular a probabilidade da lâmpada durar até 2 anos, ou seja. $P(X \leq 2)$, então podemos usar a função de distribuição acumulada. Note que $P(X \leq 2) = F(2) = 1 - e^{-4} \approx 0.98$.

Cont. do exemplo anterior

- Seja agora $x \geq 0$, então temos que

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(w)dw = \int_{0}^{x} 2e^{-2w}dw = -e^{-2w}\Big|_{0}^{x} = -(e^{-2x} - 1) = 1 - e^{-2x}.$$

Isto é, temos que

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x < 0 \\ 1 - e^{-2x}, & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

- Se, por acaso, desejamos calcular a probabilidade da lâmpada durar até 2 anos, ou seja. $P(X \leq 2)$, então podemos usar a função de distribuição acumulada. Note que $P(X \leq 2) = F(2) = 1 - e^{-4} \approx 0.98$.

Graficamente, temos que: