Probabilidade e estatística - Aula 14

Estimação pontual de parâmetros

Dr. Giannini Italino Alves Vieira

Universidade Federal do Ceará - Campus de Crateús

2024

Objetivo da inferência estatística

Motivação

- A ideia da inferência estatística consiste em estudar uma população através de evidências fornecidas por uma amostra de observações selecionadas a partir dessa população de interesse.
- Por exemplo, suponha que nosso interesse consiste em modelar a distribuição de alturas de brasileiros adultos.
  - É razoável supor, neste caso, que essa distribuição das alturas pode ser modelada por uma normal.
  - Contudo, note que o modelo só ficará completamente especificado se soubermos os valores dos parâmetros μ e σ^2.
  - Uma forma de se obter μ e σ^2 é medir as alturas de todos os brasileiros adultos o que é inviável.
  - Outra forma é selecionar, de maneira apropriada, uma amostra da população e, a partir dessa amostra, analisa-la e inferir propriedades para toda a população.

Objetivo da inferência estatística

Motivação

- A ideia da inferência estatística consiste em estudar uma população através de evidências fornecidas por uma amostra de observações selecionadas a partir dessa população de interesse.
- Por exemplo, suponha que nosso interesse consiste em modelar a distribuição de alturas de brasileiros adultos.
  - É razoável supor, neste caso, que essa distribuição das alturas pode ser modelada por uma normal.
  - Contudo, note que o modelo só ficará completamente especificado se soubermos os valores dos parâmetros μ e σ^2.
  - Uma forma de se obter μ e σ^2 é medir as alturas de todos os brasileiros adultos o que é inviável.
  - Outra forma é selecionar, de maneira apropriada, uma amostra da população e, a partir dessa amostra, analisa-la e inferir propriedades para toda a população.

Objetivo da inferência estatística

Motivação

- A ideia da inferência estatística consiste em estudar uma população através de evidências fornecidas por uma amostra de observações selecionadas a partir dessa população de interesse.
- Por exemplo, suponha que nosso interesse consiste em modelar a distribuição de alturas de brasileiros adultos.
  - É razoável supor, neste caso, que essa distribuição das alturas pode ser modelada por uma normal.
  - Contudo, note que o modelo só ficará completamente especificado se soubermos os valores dos parâmetros μ e σ^2.
  - Uma forma de se obter μ e σ^2 é medir as alturas de todos os brasileiros adultos o que é inviável.
  - Outra forma é selecionar, de maneira apropriada, uma amostra da população e, a partir dessa amostra, analisa-la e inferir propriedades para toda a população.

Objetivo da inferência estatística

Motivação

- A ideia da inferência estatística consiste em estudar uma população através de evidências fornecidas por uma amostra de observações selecionadas a partir dessa população de interesse.
- Por exemplo, suponha que nosso interesse consiste em modelar a distribuição de alturas de brasileiros adultos.
  - É razoável supor, neste caso, que essa distribuição das alturas pode ser modelada por uma normal.
  - Contudo, note que o modelo só ficará completamente especificado se soubermos os valores dos parâmetros μ e σ^2.
  - Uma forma de se obter μ e σ^2 é medir as alturas de todos os brasileiros adultos o que é inviável.
  - Outra forma é selecionar, de maneira apropriada, uma amostra da população e, a partir dessa amostra, analisa-la e inferir propriedades para toda a população.

Objetivo da inferência estatística

Motivação

- A ideia da inferência estatística consiste em estudar uma população através de evidências fornecidas por uma amostra de observações selecionadas a partir dessa população de interesse.
- Por exemplo, suponha que nosso interesse consiste em modelar a distribuição de alturas de brasileiros adultos.
  - É razoável supor, neste caso, que essa distribuição das alturas pode ser modelada por uma normal.
  - Contudo, note que o modelo só ficará completamente especificado se soubermos os valores dos parâmetros μ e σ^2.
  - Uma forma de se obter μ e σ^2 é medir as alturas de todos os brasileiros adultos o que é inviável.
  - Outra forma é selecionar, de maneira apropriada, uma amostra da população e, a partir dessa amostra, analisa-la e inferir propriedades para toda a população.

Objetivo da inferência estatística

Motivação

- A ideia da inferência estatística consiste em estudar uma população através de evidências fornecidas por uma amostra de observações selecionadas a partir dessa população de interesse.
- Por exemplo, suponha que nosso interesse consiste em modelar a distribuição de alturas de brasileiros adultos.
  - É razoável supor, neste caso, que essa distribuição das alturas pode ser modelada por uma normal.
  - Contudo, note que o modelo só ficará completamente especificado se soubermos os valores dos parâmetros μ e σ^2.
  - Uma forma de se obter μ e σ^2 é medir as alturas de todos os brasileiros adultos o que é inviável.
  - Outra forma é selecionar, de maneira apropriada, uma amostra da população e, a partir dessa amostra, analisa-la e inferir propriedades para toda a população.

Relação entre população e amostra

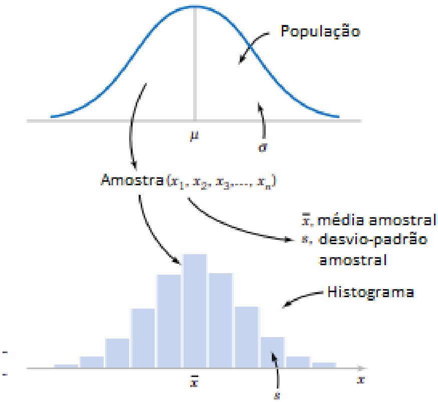

Figure 1: Adaptado de: MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. C. Estatística Aplicada e Probabilidade para Engenheiros. 2. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científico, 2003.

Estimação pontual

Conceitos iniciais

- Como dito acima, a inferência estatística está focada em tirar conclusões a respeito de parâmetros populacionais.
- Considere que estamos querendo estimar um certo parâmetro populacional. Então:
  - Antes dos dados serem coletados, as observações são consideradas variáveis aleatórias, isto é, $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Estatística

Qualquer função das observações em uma amostra é chamada de estatística.

- Por exemplo, $\bar{X}$ (média da amostra) e S^2 (variância da amostra) são exemplos de estatísticas e são, também variáveis aleatórias.

Estimação pontual

Conceitos iniciais

- Como dito acima, a inferência estatística está focada em tirar conclusões a respeito de parâmetros populacionais.
- Considere que estamos querendo estimar um certo parâmetro populacional. Então:
  - Antes dos dados serem coletados, as observações são consideradas variáveis aleatórias, isto é, $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Estatística

Qualquer função das observações em uma amostra é chamada de estatística.

- Por exemplo, $\bar{X}$ (média da amostra) e S^2 (variância da amostra) são exemplos de estatísticas e são, também variáveis aleatórias.

Conceitos iniciais

- Como dito acima, a inferência estatística está focada em tirar conclusões a respeito de parâmetros populacionais.
- Considere que estamos querendo estimar um certo parâmetro populacional. Então:
  - Antes dos dados serem coletados, as observações são consideradas variáveis aleatórias, isto é, $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Estatística

Qualquer função das observações em uma amostra é chamada de estatística.

- Por exemplo, $\bar{X}$ (média da amostra) e S^2 (variância da amostra) são exemplos de estatísticas e são, também variáveis aleatórias.

Estimação pontual

Conceitos iniciais

- Como dito acima, a inferência estatística está focada em tirar conclusões a respeito de parâmetros populacionais.
- Considere que estamos querendo estimar um certo parâmetro populacional. Então:
    - Antes dos dados serem coletados, as observações são consideradas variáveis aleatórias, isto é, $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Estatística

Qualquer função das observações em uma amostra é chamada de estatística.

- Por exemplo, $\bar{X}$ (média da amostra) e S^2 (variância da amostra) são exemplos de estatísticas e são, também variáveis aleatórias.

Conceitos iniciais

- Como dito acima, a inferência estatística está focada em tirar conclusões a respeito de parâmetros populacionais.
- Considere que estamos querendo estimar um certo parâmetro populacional. Então:
  - Antes dos dados serem coletados, as observações são consideradas variáveis aleatórias, isto é, $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Estatística

Qualquer função das observações em uma amostra é chamada de estatística.

- Por exemplo, $\bar{X}$ (média da amostra) e S^2 (variância da amostra) são exemplos de estatísticas e são, também variáveis aleatórias.

Estimador pontual

- Em inferência, o símbolo θ é usado para representar parâmetros populacionais, que podem ser por exemplo, a média μ, a variância s^2 ou qualquer outro parâmetro de interesse.
- O objetivo da estimação pontual é determinar, com base nas informações contidas na amostra, um único valor plausível para θ.

Estimador

Um estimador pontual, denotado por $\hat{\theta}$, do parâmetro populacional θ é qualquer função das observações da amostra, ou seja, $\hat{\theta} = h(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.
Um valor assumido por $\hat{\theta}$, para uma particular amostra observada (após a amostra ser selecionada), é chamado de estimativa pontual.

- Por exemplo, suponha que X seja normalmente distribuída com média μ desconhecida.
  - A media da amostra $\bar{X}$ é um exemplo de um estimador pontual para μ, isto é, $\hat{\mu} = \bar{X}$.
  - Após a seleção da amostra, o valor $\bar{x}$ é uma estimativa pontual para μ. Assim, se por exemplo, $x_1 = 30$, $x_2 = 29$, $x_3 = 34$ e $x_4 = 33$ então $\bar{x} = (30 + 29 + 34 + 33)/4$ é a estimativa pontual de μ.

Estimador pontual

- Em inferência, o símbolo θ é usado para representar parâmetros populacionais, que podem ser por exemplo, a média μ, a variância s^2 ou qualquer outro parâmetro de interesse.
- O objetivo da estimação pontual é determinar, com base nas informações contidas na amostra, um único valor plausível para θ.

Estimador

Um estimador pontual, denotado por $\hat{\theta}$, do parâmetro populacional θ é qualquer função das observações da amostra, ou seja, $\hat{\theta} = h(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.
Um valor assumido por $\hat{\theta}$, para uma particular amostra observada (após a amostra ser selecionada), é chamado de estimativa pontual.

- Por exemplo, suponha que X seja normalmente distribuída com média μ desconhecida.
  - A media da amostra $\bar{X}$ é um exemplo de um estimador pontual para μ, isto é, $\hat{\mu} = \bar{X}$.
  - Após a seleção da amostra, o valor $\bar{x}$ é uma estimativa pontual para μ. Assim, se por exemplo, $x_1 = 30$, $x_2 = 29$, $x_3 = 34$ e $x_4 = 33$ então $\bar{x} = (30 + 29 + 34 + 33)/4$ é a estimativa pontual de μ.

Estimador pontual

- Em inferência, o símbolo θ é usado para representar parâmetros populacionais, que podem ser por exemplo, a média μ, a variância s^2 ou qualquer outro parâmetro de interesse.
- O objetivo da estimação pontual é determinar, com base nas informações contidas na amostra, um único valor plausível para θ.

Estimador

Um estimador pontual, denotado por $\hat{\theta}$, do parâmetro populacional θ é qualquer função das observações da amostra, ou seja, $\hat{\theta} = h(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.
Um valor assumido por $\hat{\theta}$, para uma particular amostra observada (após a amostra ser selecionada), é chamado de estimativa pontual.

- Por exemplo, suponha que X seja normalmente distribuída com média μ desconhecida.
  - A media da amostra $\bar{X}$ é um exemplo de um estimador pontual para μ, isto é, $\hat{\mu} = \bar{X}$.
  - Após a seleção da amostra, o valor $\bar{x}$ é uma estimativa pontual para μ. Assim, se por exemplo, $x_1 = 30$, $x_2 = 29$, $x_3 = 34$ e $x_4 = 33$ então $\bar{x} = (30 + 29 + 34 + 33)/4$ é a estimativa pontual de μ.

Estimador pontual

- Em inferência, o símbolo θ é usado para representar parâmetros populacionais, que podem ser por exemplo, a média μ, a variância s^2 ou qualquer outro parâmetro de interesse.
- O objetivo da estimação pontual é determinar, com base nas informações contidas na amostra, um único valor plausível para θ.

Estimador

Um estimador pontual, denotado por $\hat{\theta}$, do parâmetro populacional θ é qualquer função das observações da amostra, ou seja, $\hat{\theta} = h(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.
Um valor assumido por $\hat{\theta}$, para uma particular amostra observada (após a amostra ser selecionada), é chamado de estimativa pontual.

- Por exemplo, suponha que X seja normalmente distribuída com média μ desconhecida.
  - A media da amostra $\bar{X}$ é um exemplo de um estimador pontual para μ, isto é, $\hat{\mu} = \bar{X}$.
  - Após a seleção da amostra, o valor $\bar{x}$ é uma estimativa pontual para μ. Assim, se por exemplo, $x_1 = 30$, $x_2 = 29$, $x_3 = 34$ e $x_4 = 33$ então $\bar{x} = (30 + 29 + 34 + 33)/4$ é a estimativa pontual de μ.

Estimador pontual

- Em inferência, o símbolo θ é usado para representar parâmetros populacionais, que podem ser por exemplo, a média μ, a variância s^2 ou qualquer outro parâmetro de interesse.
- O objetivo da estimação pontual é determinar, com base nas informações contidas na amostra, um único valor plausível para θ.

Estimador

Um estimador pontual, denotado por $\hat{\theta}$, do parâmetro populacional θ é qualquer função das observações da amostra, ou seja, $\hat{\theta} = h(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.
Um valor assumido por $\hat{\theta}$, para uma particular amostra observada (após a amostra ser selecionada), é chamado de estimativa pontual.

- Por exemplo, suponha que X seja normalmente distribuída com média μ desconhecida.
  - A media da amostra $\bar{X}$ é um exemplo de um estimador pontual para μ, isto é, $\hat{\mu} = \bar{X}$.
  - Após a seleção da amostra, o valor $\bar{x}$ é uma estimativa pontual para μ. Assim, se por exemplo, $x_1 = 30$, $x_2 = 29$, $x_3 = 34$ e $x_4 = 33$ então $\bar{x} = (30 + 29 + 34 + 33)/4$ é a estimativa pontual de μ.

Estimador pontual

- Em inferência, o símbolo θ é usado para representar parâmetros populacionais, que podem ser por exemplo, a média μ, a variância s^2 ou qualquer outro parâmetro de interesse.
- O objetivo da estimação pontual é determinar, com base nas informações contidas na amostra, um único valor plausível para θ.

Estimador

Um estimador pontual, denotado por $\hat{\theta}$, do parâmetro populacional θ é qualquer função das observações da amostra, ou seja, $\hat{\theta} = h(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.
Um valor assumido por $\hat{\theta}$, para uma particular amostra observada (após a amostra ser selecionada), é chamado de estimativa pontual.

- Por exemplo, suponha que X seja normalmente distribuída com média μ desconhecida.
  - A media da amostra $\bar{X}$ é um exemplo de um estimador pontual para μ, isto é, $\hat{\mu} = \bar{X}$.
  - Após a seleção da amostra, o valor $\bar{x}$ é uma estimativa pontual para μ. Assim, se por exemplo, $x_1 = 30$, $x_2 = 29$, $x_3 = 34$ e $x_4 = 33$ então $\bar{x} = (30 + 29 + 34 + 33)/4$ é a estimativa pontual de μ.

Estimador pontual

- Em inferência, o símbolo θ é usado para representar parâmetros populacionais, que podem ser por exemplo, a média μ, a variância s^2 ou qualquer outro parâmetro de interesse.
- O objetivo da estimação pontual é determinar, com base nas informações contidas na amostra, um único valor plausível para θ.

Estimador

Um estimador pontual, denotado por $\hat{\theta}$, do parâmetro populacional θ é qualquer função das observações da amostra, ou seja, $\hat{\theta} = h(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.
Um valor assumido por $\hat{\theta}$, para uma particular amostra observada (após a amostra ser selecionada), é chamado de estimativa pontual.

- Por exemplo, suponha que X seja normalmente distribuída com média μ desconhecida.
  - A media da amostra $\bar{X}$ é um exemplo de um estimador pontual para μ, isto é, $\hat{\mu} = \bar{X}$.
  - Após a seleção da amostra, o valor $\bar{x}$ é uma estimativa pontual para μ. Assim, se por exemplo, $x_1 = 30$, $x_2 = 29$, $x_3 = 34$ e $x_4 = 33$ então $\bar{x} = (30 + 29 + 34 + 33)/4$ é a estimativa pontual de μ.

Amostra aleatória

- Em nossos estudos a seguir, estaremos trabalhando com amostras aleatórias, ou seja, com um conjunto de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas.

Formalmente, as variáveis $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são ditas serem amostra aleatória de tamanho n se:

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ forem variáveis aleatórias independentes;
- Cada X_i tiver a mesma distribuição de probabilidade.

- A suposição de amostra aleatória é de fundamental importância.
- Se a amostra considerada no estudo não for aleatória, então os métodos estatísticos não funcionarão de forma apropriada, podendo levar a decisões incorretas.

Amostra aleatória

Amostra aleatória

- Em nossos estudos a seguir, estaremos trabalhando com amostras aleatórias, ou seja, com um conjunto de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas.

Formalmente, as variáveis $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são ditas serem amostra aleatória de tamanho n se:

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ forem variáveis aleatórias independentes;
- Cada X_i tiver a mesma distribuição de probabilidade.

- A suposição de amostra aleatória é de fundamental importância.
- Se a amostra considerada no estudo não for aleatória, então os métodos estatísticos não funcionarão de forma apropriada, podendo levar a decisões incorretas.

Amostra aleatória

- Em nossos estudos a seguir, estaremos trabalhando com amostras aleatórias, ou seja, com um conjunto de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas.

Formalmente, as variáveis $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são ditas serem amostra aleatória de tamanho n se:

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ forem variáveis aleatórias independentes;
- Cada X_i tiver a mesma distribuição de probabilidade.

- A suposição de amostra aleatória é de fundamental importância.
- Se a amostra considerada no estudo não for aleatória, então os métodos estatísticos não funcionarão de forma apropriada, podendo levar a decisões incorretas.

Amostra aleatória

- Em nossos estudos a seguir, estaremos trabalhando com amostras aleatórias, ou seja, com um conjunto de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas.

Formalmente, as variáveis $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são ditas serem amostra aleatória de tamanho n se:

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ forem variáveis aleatórias independentes;
- Cada X_i tiver a mesma distribuição de probabilidade.

- A suposição de amostra aleatória é de fundamental importância.
- Se a amostra considerada no estudo não for aleatória, então os métodos estatísticos não funcionarão de forma apropriada, podendo levar a decisões incorretas.

Amostra aleatória

- Em nossos estudos a seguir, estaremos trabalhando com amostras aleatórias, ou seja, com um conjunto de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas.

Formalmente, as variáveis $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são ditas serem amostra aleatória de tamanho n se:

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ forem variáveis aleatórias independentes;
- Cada X_i tiver a mesma distribuição de probabilidade.

- A suposição de amostra aleatória é de fundamental importância.
- Se a amostra considerada no estudo não for aleatória, então os métodos estatísticos não funcionarão de forma apropriada, podendo levar a decisões incorretas.

Amostra aleatória

- Em nossos estudos a seguir, estaremos trabalhando com amostras aleatórias, ou seja, com um conjunto de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas.

Formalmente, as variáveis $X_1, X_2, \dots, X_n$ são ditas serem amostra aleatória de tamanho n se:

- $X_1, X_2, \dots, X_n$ forem variáveis aleatórias independentes;
- Cada X_i tiver a mesma distribuição de probabilidade.

- A suposição de amostra aleatória é de fundamental importância.
- Se a amostra considerada no estudo não for aleatória, então os métodos estatísticos não funcionarão de forma apropriada, podendo levar a decisões incorretas.

Estimador não viesado (não tendencioso)

- O problema da estimação pontual é, então, determinar uma função $\hat{\theta} = h(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ que deva estar "perto", de acordo com algum critério, do valor verdadeiro do parâmetro desconhecido θ.
- O primeiro critério que iremos estudar é o de estimadores não viesados.

Estimadores não viesados

Definição: O estimador $\hat{\theta}$ é um estimador não viesado (não tendencioso) para o parâmetro θ, se

$$E(\hat{\theta}) = \theta.$$

Se o estimador for viesado (tendencioso), então a diferença

$$E(\hat{\theta}) - \theta$$

é chamada de viés (ou tendência) do estimador.

- Note, na definição acima, que intuitivamente a identidade $E(\hat{\theta}) = \theta$ estabelece que a média da distribuição de probabilidade de $\hat{\theta}$ é igual a θ.

Estimador não viesado (não tendencioso)

- O problema da estimação pontual é, então, determinar uma função $\hat{\theta} = h(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ que deva estar "perto", de acordo com algum critério, do valor verdadeiro do parâmetro desconhecido θ.
- O primeiro critério que iremos estudar é o de estimadores não viesados.

Estimadores não viesados

Definição: O estimador $\hat{\theta}$ é um estimador não viesado (não tendencioso) para o parâmetro θ, se

$$E(\hat{\theta}) = \theta.$$

Se o estimador for viesado (tendencioso), então a diferença

$$E(\hat{\theta}) - \theta$$

é chamada de viés (ou tendência) do estimador.

- Note, na definição acima, que intuitivamente a identidade $E(\hat{\theta}) = \theta$ estabelece que a média da distribuição de probabilidade de $\hat{\theta}$ é igual a θ.

Estimador não viesado (não tendencioso)

- O problema da estimação pontual é, então, determinar uma função $\hat{\theta} = h(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ que deva estar "perto", de acordo com algum critério, do valor verdadeiro do parâmetro desconhecido θ.
- O primeiro critério que iremos estudar é o de estimadores não viesados.

Estimadores não viesados

Definição: O estimador $\hat{\theta}$ é um estimador não viesado (não tendencioso) para o parâmetro θ, se

$$E(\hat{\theta}) = \theta.$$

Se o estimador for viesado (tendencioso), então a diferença

$$E(\hat{\theta}) - \theta$$

é chamada de viés (ou tendência) do estimador.

- Note, na definição acima, que intuitivamente a identidade $E(\hat{\theta}) = \theta$ estabelece que a média da distribuição de probabilidade de $\hat{\theta}$ é igual a θ.

Estimador não viesado (não tendencioso)

- O problema da estimação pontual é, então, determinar uma função $\hat{\theta} = h(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ que deva estar "perto", de acordo com algum critério, do valor verdadeiro do parâmetro desconhecido θ.
- O primeiro critério que iremos estudar é o de estimadores não viesados.

Estimadores não viesados

Definição: O estimador $\hat{\theta}$ é um estimador não viesado (não tendencioso) para o parâmetro θ, se

$$E(\hat{\theta}) = \theta.$$

Se o estimador for viesado (tendencioso), então a diferença

$$E(\hat{\theta}) - \theta$$

é chamada de viés (ou tendência) do estimador.

- Note, na definição acima, que intuitivamente a identidade $E(\hat{\theta}) = \theta$ estabelece que a média da distribuição de probabilidade de $\hat{\theta}$ é igual a θ.

Estimador não viesado (não tendencioso)

- O problema da estimação pontual é, então, determinar uma função $\hat{\theta} = h(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ que deva estar "perto", de acordo com algum critério, do valor verdadeiro do parâmetro desconhecido θ.
- O primeiro critério que iremos estudar é o de estimadores não viesados.

Estimadores não viesados

Definição: O estimador $\hat{\theta}$ é um estimador não viesado (não tendencioso) para o parâmetro θ, se

$$E(\hat{\theta}) = \theta.$$

Se o estimador for viesado (tendencioso), então a diferença

$$E(\hat{\theta}) - \theta$$

é chamada de viés (ou tendência) do estimador.

- Note, na definição acima, que intuitivamente a identidade $E(\hat{\theta}) = \theta$ estabelece que a média da distribuição de probabilidade de $\hat{\theta}$ é igual a θ.

Estimador não viesado (não tendencioso)

- O problema da estimação pontual é, então, determinar uma função $\hat{\theta} = h(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ que deva estar "perto", de acordo com algum critério, do valor verdadeiro do parâmetro desconhecido θ.
- O primeiro critério que iremos estudar é o de estimadores não viesados.

Estimadores não viesados

Definição: O estimador $\hat{\theta}$ é um estimador não viesado (não tendencioso) para o parâmetro θ, se

$$E(\hat{\theta}) = \theta.$$

Se o estimador for viesado (tendencioso), então a diferença

$$E(\hat{\theta}) - \theta$$

é chamada de viés (ou tendência) do estimador.

- Note, na definição acima, que intuitivamente a identidade $E(\hat{\theta}) = \theta$ estabelece que a média da distribuição de probabilidade de $\hat{\theta}$ é igual a θ.

Exemplo

- O exemplo a seguir, ilustra a ideia de estimadores não viesados.

Exemplo: Seja X uma variável aleatória com média μ e variância σ^2. Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de tamanho n de uma população representada por X. Mostre que:

(a) A média amostral $\bar{X}$ é um estimador não viesado de μ;

(b) A variância amostral S^2 é não viesado para σ^2.

Exemplo

- O exemplo a seguir, ilustra a ideia de estimadores não viesados.

Exemplo: Seja X uma variável aleatória com média μ e variância σ^2. Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de tamanho n de uma população representada por X. Mostre que:

(a) A média amostral $\bar{X}$ é um estimador não viesado de μ;

(b) A variância amostral S^2 é não viesado para σ^2.

Exemplo

- O exemplo a seguir, ilustra a ideia de estimadores não viesados.

Exemplo: Seja X uma variável aleatória com média μ e variância σ^2. Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de tamanho n de uma população representada por X. Mostre que:

(a) A média amostral $\bar{X}$ é um estimador não viesado de μ;

(b) A variância amostral S^2 é não viesado para σ^2.

Exemplo

- O exemplo a seguir, ilustra a ideia de estimadores não viesados.

Exemplo: Seja X uma variável aleatória com média μ e variância σ^2. Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de tamanho n de uma população representada por X. Mostre que:

(a) A média amostral $\bar{X}$ é um estimador não viesado de μ;

(b) A variância amostral S^2 é não viesado para σ^2.

Média e variância de combinação linear de variáveis aleatórias

Antes de solucionarmos esse exercício é importante ter em mente dos seguintes resultados que serão úteis:

- Se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são variáveis aleatórias e $c_1, c_2, \ldots c_n$ são contantes então se $Y = c_1X_1 + c_2X_2 + \ldots + c_nX_n$, então

$$E(Y) = c_1E(X_1) + c_2E(X_2) + \ldots c_nE(X_n).$$

E ainda, se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são variáveis aleatórias independentes, então

$$Var(Y) = c_1^2Var(X_1) + c_2^2Var(X_2) + \ldots c_n^2Var(X_n).$$

- Recorde ainda que quando estudamos variância de variáveis aleatórias vimos que $Var(X) = \sum_{x_i} x_i^2 f(x_i) - \mu^2$ (X discreta) e $Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - \mu^2$. ($X$ contínua). Ou seja, a variância pode ser calculada da forma:

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Alguns resultados importantes

Média e variância de combinação linear de variáveis aleatórias

Antes de solucionarmos esse exercício é importante ter em mente dos seguintes resultados que serão úteis:

- Se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são variáveis aleatórias e $c_1, c_2, \ldots c_n$ são contantes então se $Y = c_1X_1 + c_2X_2 + \ldots + c_nX_n$, então

$$E(Y) = c_1E(X_1) + c_2E(X_2) + \ldots c_nE(X_n).$$

E ainda, se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são variáveis aleatórias independentes, então

$$Var(Y) = c_1^2Var(X_1) + c_2^2Var(X_2) + \ldots c_n^2Var(X_n).$$

- Recorde ainda que quando estudamos variância de variáveis aleatórias vimos que $Var(X) = \sum_{x_i} x_i^2 f(x_i) - \mu^2$ (X discreta) e $Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - \mu^2$. ($X$ contínua). Ou seja, a variância pode ser calculada da forma:

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Alguns resultados importantes

Média e variância de combinação linear de variáveis aleatórias

Antes de solucionarmos esse exercício é importante ter em mente dos seguintes resultados que serão úteis:

- Se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são variáveis aleatórias e $c_1, c_2, \ldots c_n$ são contantes então se $Y = c_1X_1 + c_2X_2 + \ldots + c_nX_n$, então

$$E(Y) = c_1E(X_1) + c_2E(X_2) + \ldots c_nE(X_n).$$

E ainda, se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são variáveis aleatórias independentes, então

$$Var(Y) = c_1^2 Var(X_1) + c_2^2 Var(X_2) + \ldots c_n^2 Var(X_n).$$

- Recorde ainda que quando estudamos variância de variáveis aleatórias vimos que $Var(X) = \sum_{x_i} x_i^2 f(x_i) - \mu^2$ (X discreta) e $Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - \mu^2$. ($X$ contínua). Ou seja, a variância pode ser calculada da forma:

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Alguns resultados importantes

Média e variância de combinação linear de variáveis aleatórias

Antes de solucionarmos esse exercício é importante ter em mente dos seguintes resultados que serão úteis:

- Se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são variáveis aleatórias e $c_1, c_2, \ldots c_n$ são contantes então se $Y = c_1X_1 + c_2X_2 + \ldots + c_nX_n$, então

$$E(Y) = c_1E(X_1) + c_2E(X_2) + \ldots c_nE(X_n).$$

  E ainda, se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são variáveis aleatórias independentes, então

$$Var(Y) = c_1^2Var(X_1) + c_2^2Var(X_2) + \ldots c_n^2Var(X_n).$$

- Recorde ainda que quando estudamos variância de variáveis aleatórias vimos que $Var(X) = \sum_{x_i} x_i^2 f(x_i) - \mu^2$ (X discreta) e $Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - \mu^2$. ($X$ contínua). Ou seja, a variância pode ser calculada da forma:

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Alguns resultados importantes

Média e variância de combinação linear de variáveis aleatórias

Antes de solucionarmos esse exercício é importante ter em mente dos seguintes resultados que serão úteis:

- Se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são variáveis aleatórias e $c_1, c_2, \ldots c_n$ são contantes então se $Y = c_1X_1 + c_2X_2 + \ldots + c_nX_n$, então

$$E(Y) = c_1E(X_1) + c_2E(X_2) + \ldots c_nE(X_n).$$

  E ainda, se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são variáveis aleatórias independentes, então

$$Var(Y) = c_1^2Var(X_1) + c_2^2Var(X_2) + \ldots c_n^2Var(X_n).$$

- Recorde ainda que quando estudamos variância de variáveis aleatórias vimos que $Var(X) = \sum_{x_i} x_i^2 f(x_i) - \mu^2$ (X discreta) e $Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - \mu^2$. ($X$ contínua). Ou seja, a variância pode ser calculada da forma:

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Solução do exercício

- Note que no item (a) do exercício acima queremos mostrar que $\bar{X}$ é estimador não viesado de μ, ou seja, mostrar que

$$E(\bar{X}) = \mu.$$

Mas note que

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}E(X_1+X_2+\ldots+X_n) = \frac{1}{n}(E(X_1)+E(X_2)+\ldots+E(X_n))$$

Como $X_1, X_2, \ldots, X_n$ é amostra aleatória de X com média μ, então $E(X_i) = \mu$, para $i = 1, 2, \ldots, n$. Logo,

$$E(\bar{X}) = \frac{1}{n}(\mu + \mu + \ldots + \mu) = \frac{1}{n}(n\mu) = \mu.$$

Portanto, $\bar{X}$ é estimador não viesado de μ.

Solução do exercício

- Note que no item (a) do exercício acima queremos mostrar que $\bar{X}$ é estimador não viesado de μ, ou seja, mostrar que

$$E(\bar{X}) = \mu.$$

Mas note que

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}E(X_1+X_2+\ldots+X_n) = \frac{1}{n}(E(X_1)+E(X_2)+\ldots+E(X_n))$$

Como $X_1, X_2, \ldots, X_n$ é amostra aleatória de X com média μ, então $E(X_i) = \mu$, para $i = 1, 2, \ldots, n$. Logo,

$$E(\bar{X}) = \frac{1}{n}(\mu + \mu + \ldots + \mu) = \frac{1}{n}(n\mu) = \mu.$$

Portanto, $\bar{X}$ é estimador não viesado de μ.

Solução do exercício

- Note que no item (a) do exercício acima queremos mostrar que $\bar{X}$ é estimador não viesado de μ, ou seja, mostrar que

$$E(\bar{X}) = \mu.$$

Mas note que

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}E(X_1+X_2+\ldots+X_n) = \frac{1}{n}(E(X_1)+E(X_2)+\ldots+E(X_n))$$

Como $X_1, X_2, \ldots, X_n$ é amostra aleatória de X com média μ, então $E(X_i) = \mu$, para $i = 1, 2, \ldots, n$. Logo,

$$E(\bar{X}) = \frac{1}{n}(\mu + \mu + \ldots + \mu) = \frac{1}{n}(n\mu) = \mu.$$

Portanto, $\bar{X}$ é estimador não viesado de μ.

Solução do exercício

- Note que no item (a) do exercício acima queremos mostrar que $\bar{X}$ é estimador não viesado de μ, ou seja, mostrar que

$$E(\bar{X}) = \mu.$$

Mas note que

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}E(X_1+X_2+\ldots+X_n) = \frac{1}{n}(E(X_1)+E(X_2)+\ldots+E(X_n))$$

Como $X_1, X_2, \ldots, X_n$ é amostra aleatória de X com média μ, então $E(X_i) = \mu$, para $i = 1, 2, \ldots, n$. Logo,

$$E(\bar{X}) = \frac{1}{n}(\mu + \mu + \ldots + \mu) = \frac{1}{n}(n\mu) = \mu.$$

Portanto, $\bar{X}$ é estimador não viesado de μ.

Solução do exercício

- Note que no item (a) do exercício acima queremos mostrar que $\bar{X}$ é estimador não viesado de μ, ou seja, mostrar que

$$E(\bar{X}) = \mu.$$

Mas note que

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}E(X_1+X_2+\ldots+X_n) = \frac{1}{n}(E(X_1)+E(X_2)+\ldots+E(X_n))$$

Como $X_1, X_2, \ldots, X_n$ é amostra aleatória de X com média μ, então $E(X_i) = \mu$, para $i = 1, 2, \ldots, n$. Logo,

$$E(\bar{X}) = \frac{1}{n}(\mu + \mu + \ldots + \mu) = \frac{1}{n}(n\mu) = \mu.$$

Portanto, $\bar{X}$ é estimador não viesado de μ.

Solução do exercício

- Note que no item (a) do exercício acima queremos mostrar que $\bar{X}$ é estimador não viesado de μ, ou seja, mostrar que

$$E(\bar{X}) = \mu.$$

Mas note que

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}E(X_1+X_2+\ldots+X_n) = \frac{1}{n}(E(X_1)+E(X_2)+\ldots+E(X_n))$$

Como $X_1, X_2, \ldots, X_n$ é amostra aleatória de X com média μ, então $E(X_i) = \mu$, para $i = 1, 2, \ldots, n$. Logo,

$$E(\bar{X}) = \frac{1}{n}(\mu + \mu + \ldots + \mu) = \frac{1}{n}(n\mu) = \mu.$$

Portanto, $\bar{X}$ é estimador não viesado de μ.

Solução do exercício

- Note que no item (a) do exercício acima queremos mostrar que $\bar{X}$ é estimador não viesado de μ, ou seja, mostrar que

$$E(\bar{X}) = \mu.$$

Mas note que

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}E(X_1+X_2+\ldots+X_n) = \frac{1}{n}(E(X_1)+E(X_2)+\ldots+E(X_n))$$

Como $X_1, X_2, \ldots, X_n$ é amostra aleatória de X com média μ, então $E(X_i) = \mu$, para $i = 1, 2, \ldots, n$. Logo,

$$E(\bar{X}) = \frac{1}{n}(\mu + \mu + \ldots + \mu) = \frac{1}{n}(n\mu) = \mu.$$

Portanto, $\bar{X}$ é estimador não viesado de μ.

Solução do exercício

- Note que no item (a) do exercício acima queremos mostrar que $\bar{X}$ é estimador não viesado de μ, ou seja, mostrar que

$$E(\bar{X}) = \mu.$$

Mas note que

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}E(X_1+X_2+\ldots+X_n) = \frac{1}{n}(E(X_1)+E(X_2)+\ldots+E(X_n))$$

Como $X_1, X_2, \ldots, X_n$ é amostra aleatória de X com média μ, então $E(X_i) = \mu$, para $i = 1, 2, \ldots, n$. Logo,

$$E(\bar{X}) = \frac{1}{n}(\mu + \mu + \ldots + \mu) = \frac{1}{n}(n\mu) = \mu.$$

Portanto, $\bar{X}$ é estimador não viesado de μ.

Solução do exercício

- Note que no item (a) do exercício acima queremos mostrar que $\bar{X}$ é estimador não viesado de μ, ou seja, mostrar que

$$E(\bar{X}) = \mu.$$

Mas note que

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}E(X_1+X_2+\ldots+X_n) = \frac{1}{n}(E(X_1)+E(X_2)+\ldots+E(X_n))$$

Como $X_1, X_2, \ldots, X_n$ é amostra aleatória de X com média μ, então $E(X_i) = \mu$, para $i = 1, 2, \ldots, n$. Logo,

$$E(\bar{X}) = \frac{1}{n}(\mu + \mu + \ldots + \mu) = \frac{1}{n}(n\mu) = \mu.$$

Portanto, $\bar{X}$ é estimador não viesado de μ.

Solução do exercício

- Note que no item (a) do exercício acima queremos mostrar que $\bar{X}$ é estimador não viesado de μ, ou seja, mostrar que

$$E(\bar{X}) = \mu.$$

Mas note que

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}E(X_1+X_2+\ldots+X_n) = \frac{1}{n}(E(X_1)+E(X_2)+\ldots+E(X_n))$$

Como $X_1, X_2, \ldots, X_n$ é amostra aleatória de X com média μ, então $E(X_i) = \mu$, para $i = 1, 2, \ldots, n$. Logo,

$$E(\bar{X}) = \frac{1}{n}(\mu + \mu + \ldots + \mu) = \frac{1}{n}(n\mu) = \mu.$$

Portanto, $\bar{X}$ é estimador não viesado de μ.

- No item (b) queremos mostrar que S^2 é estimador não viesado de σ^2, ou seja, mostrar que $E(S^2) = \sigma^2$. Note que

$$E(S^2) = E\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2\right) = \frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i^2 - 2X_i\bar{X} + \bar{X}^2)\right)$$

ou seja

$$E(S^2) = \frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - 2\bar{X}\frac{n}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i + n\bar{X}^2\right)$$

ou ainda

$$E(S^2) = \frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - 2n\bar{X}^2 + n\bar{X}^2\right) = \frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - n\bar{X}^2\right)$$

Usando a linearidade da média, temos

$$E(S^2) = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2) - nE(\bar{X}^2)\right)$$

Cont. do exercício

- No item (b) queremos mostrar que S^2 é estimador não viesado de σ^2, ou seja, mostrar que $E(S^2) = \sigma^2$. Note que

$$E(S^2) = E\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2\right) = \frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i^2 - 2X_i\bar{X} + \bar{X}^2)\right)$$

ou seja

$$E(S^2) = \frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - 2\bar{X}\frac{n}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i + n\bar{X}^2\right)$$

ou ainda

$$E(S^2) = \frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - 2n\bar{X}^2 + n\bar{X}^2\right) = \frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - n\bar{X}^2\right)$$

Usando a linearidade da média, temos

$$E(S^2) = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2) - nE(\bar{X}^2)\right)$$

Cont. do exercício

- No item (b) queremos mostrar que S^2 é estimador não viesado de σ^2, ou seja, mostrar que $E(S^2) = \sigma^2$. Note que

$$E(S^2) = E\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2\right) = \frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i^2 - 2X_i\bar{X} + \bar{X}^2)\right)$$

ou seja

$$E(S^2) = \frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - 2\bar{X}\frac{n}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i + n\bar{X}^2\right)$$

ou ainda

$$E(S^2) = \frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - 2n\bar{X}^2 + n\bar{X}^2\right) = \frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - n\bar{X}^2\right)$$

Usando a linearidade da média, temos

$$E(S^2) = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2) - nE(\bar{X}^2)\right)$$

Cont. do exercício

- No item (b) queremos mostrar que S^2 é estimador não viesado de σ^2, ou seja, mostrar que $E(S^2) = \sigma^2$. Note que

$$E(S^2) = E\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2\right) = \frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i^2 - 2X_i\bar{X} + \bar{X}^2)\right)$$

ou seja

$$E(S^2) = \frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - 2\bar{X}\frac{n}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i + n\bar{X}^2\right)$$

ou ainda

$$E(S^2) = \frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - 2n\bar{X}^2 + n\bar{X}^2\right) = \frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - n\bar{X}^2\right)$$

Usando a linearidade da média, temos

$$E(S^2) = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2) - nE(\bar{X}^2)\right)$$

Cont. do exercício

- No item (b) queremos mostrar que S^2 é estimador não viesado de σ^2, ou seja, mostrar que $E(S^2) = \sigma^2$. Note que

$$E(S^2) = E\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2\right) = \frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i^2 - 2X_i\bar{X} + \bar{X}^2)\right)$$

ou seja

$$E(S^2) = \frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - 2\bar{X}\frac{n}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i + n\bar{X}^2\right)$$

ou ainda

$$E(S^2) = \frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - 2n\bar{X}^2 + n\bar{X}^2\right) = \frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - n\bar{X}^2\right)$$

Usando a linearidade da média, temos

$$E(S^2) = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2) - nE(\bar{X}^2)\right)$$

Cont. do exercício

- No item (b) queremos mostrar que S^2 é estimador não viesado de σ^2, ou seja, mostrar que $E(S^2) = \sigma^2$. Note que

$$E(S^2) = E\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2\right) = \frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i^2 - 2X_i\bar{X} + \bar{X}^2)\right)$$

ou seja

$$E(S^2) = \frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - 2\bar{X}\frac{n}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i + n\bar{X}^2\right)$$

ou ainda

$$E(S^2) = \frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - 2n\bar{X}^2 + n\bar{X}^2\right) = \frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - n\bar{X}^2\right)$$

Usando a linearidade da média, temos

$$E(S^2) = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2) - nE(\bar{X}^2)\right)$$

Cont. do exercício

- No item (b) queremos mostrar que S^2 é estimador não viesado de σ^2, ou seja, mostrar que $E(S^2) = \sigma^2$. Note que

$$E(S^2) = E\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2\right) = \frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i^2 - 2X_i\bar{X} + \bar{X}^2)\right)$$

ou seja

$$E(S^2) = \frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - 2\bar{X}\frac{n}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i + n\bar{X}^2\right)$$

ou ainda

$$E(S^2) = \frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - 2n\bar{X}^2 + n\bar{X}^2\right) = \frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - n\bar{X}^2\right)$$

Usando a linearidade da média, temos

$$E(S^2) = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2) - nE(\bar{X}^2)\right)$$

Cont. do exercício

Temos que $E(S^2) = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) - nE(\bar{X}^2)\right)$.

- Note que precisamos obter $E(X_i^2)$ e $E(\bar{X}^2)$. Contudo, usando o fato de que $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$ temos que:

$$E(X_i^2) = Vax(X_i) + E(X_i)^2 = \sigma^2 + \mu^2.$$

e ainda

$$E(\bar{X}^2) = Vax\left(\bar{X}\right) + E(\bar{X})^2 = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) + \mu^2$$

Observe ainda que $Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}(\sum_{i=1}^{n} Var(X_i)) = \frac{1}{n^2}(\sum_{i=1}^{n} \sigma^2) = \frac{\sigma^2}{n}$.

- Ou seja, $E(X_i^2) = \sigma^2 + \mu^2$ e $E(\bar{X}^2) = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$. Voltando para o cálculo de $E(S^2)$, temos que

$$E(S^2) = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}(\sigma^2 + \mu^2) - n(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2)\right) = \frac{1}{n-1}(n\sigma^2 + n\mu^2 - \sigma^2 - n\mu^2)$$

Ou seja,

$$E(S^2) = \frac{1}{n-1}(n\sigma^2 - \sigma^2) = \frac{1}{n-1}(n-1)\sigma^2 = \sigma^2.$$

Portanto, S^2 é não viesado para σ^2.

Cont. do exercício

Temos que $E(S^2) = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^n E(X_i^2) - nE(\bar{X}^2)\right)$.

- Note que precisamos obter $E(X_i^2)$ e $E(\bar{X}^2)$. Contudo, usando o fato de que $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$ temos que:

$$E(X_i^2) = Vax(X_i) + E(X_i)^2 = \sigma^2 + \mu^2.$$

e ainda

$$E(\bar{X}^2) = Vax\left(\bar{X}\right) + E(\bar{X})^2 = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right) + \mu^2$$

Observe ainda que $Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2}(\sum_{i=1}^n Var(X_i)) = \frac{1}{n^2}(\sum_{i=1}^n \sigma^2) = \frac{\sigma^2}{n}$.

- Ou seja, $E(X_i^2) = \sigma^2 + \mu^2$ e $E(\bar{X}^2) = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$. Voltando para o cálculo de $E(S^2)$, temos que

$$E(S^2) = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^n(\sigma^2 + \mu^2) - n(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2)\right) = \frac{1}{n-1}(n\sigma^2 + n\mu^2 - \sigma^2 - n\mu^2)$$

Ou seja,

$$E(S^2) = \frac{1}{n-1}(n\sigma^2 - \sigma^2) = \frac{1}{n-1}(n-1)\sigma^2 = \sigma^2.$$

Portanto, S^2 é não viesado para σ^2.

Cont. do exercício

Temos que $E(S^2) = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) - nE(\bar{X}^2)\right)$.

- Note que precisamos obter $E(X_i^2)$ e $E(\bar{X}^2)$. Contudo, usando o fato de que $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$ temos que:

$$E(X_i^2) = Vax(X_i) + E(X_i)^2 = \sigma^2 + \mu^2.$$

e ainda

$$E(\bar{X}^2) = Vax\left(\bar{X}\right) + E(\bar{X})^2 = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) + \mu^2$$

Observe ainda que $Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}(\sum_{i=1}^{n} Var(X_i)) = \frac{1}{n^2}(\sum_{i=1}^{n} \sigma^2) = \frac{\sigma^2}{n}$.

- Ou seja, $E(X_i^2) = \sigma^2 + \mu^2$ e $E(\bar{X}^2) = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$. Voltando para o cálculo de $E(S^2)$, temos que

$$E(S^2) = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}(\sigma^2 + \mu^2) - n(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2)\right) = \frac{1}{n-1}(n\sigma^2 + n\mu^2 - \sigma^2 - n\mu^2)$$

Ou seja,

$$E(S^2) = \frac{1}{n-1}(n\sigma^2 - \sigma^2) = \frac{1}{n-1}(n-1)\sigma^2 = \sigma^2.$$

Portanto, S^2 é não viesado para σ^2.

Cont. do exercício

Temos que $E(S^2) = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^n E(X_i^2) - nE(\bar{X}^2)\right)$.

- Note que precisamos obter $E(X_i^2)$ e $E(\bar{X}^2)$. Contudo, usando o fato de que $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$ temos que:

$$E(X_i^2) = Vax(X_i) + E(X_i)^2 = \sigma^2 + \mu^2.$$

  e ainda

$$E(\bar{X}^2) = Vax\left(\bar{X}\right) + E(\bar{X})^2 = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right) + \mu^2$$

  Observe ainda que $Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2}(\sum_{i=1}^n Var(X_i)) = \frac{1}{n^2}(\sum_{i=1}^n \sigma^2) = \frac{\sigma^2}{n}$.

- Ou seja, $E(X_i^2) = \sigma^2 + \mu^2$ e $E(\bar{X}^2) = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$. Voltando para o cálculo de $E(S^2)$, temos que

$$E(S^2) = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^n(\sigma^2 + \mu^2) - n(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2)\right) = \frac{1}{n-1}(n\sigma^2 + n\mu^2 - \sigma^2 - n\mu^2)$$

  Ou seja,

$$E(S^2) = \frac{1}{n-1}(n\sigma^2 - \sigma^2) = \frac{1}{n-1}(n-1)\sigma^2 = \sigma^2.$$

  Portanto, S^2 é não viesado para σ^2.

Cont. do exercício

Temos que $E(S^2) = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) - nE(\bar{X}^2)\right)$.

- Note que precisamos obter $E(X_i^2)$ e $E(\bar{X}^2)$. Contudo, usando o fato de que $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$ temos que:

$$E(X_i^2) = Vax(X_i) + E(X_i)^2 = \sigma^2 + \mu^2.$$

e ainda

$$E(\bar{X}^2) = Vax\left(\bar{X}\right) + E(\bar{X})^2 = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) + \mu^2$$

Observe ainda que $Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}(\sum_{i=1}^{n} Var(X_i)) = \frac{1}{n^2}(\sum_{i=1}^{n} \sigma^2) = \frac{\sigma^2}{n}$.

- Ou seja, $E(X_i^2) = \sigma^2 + \mu^2$ e $E(\bar{X}^2) = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$. Voltando para o cálculo de $E(S^2)$, temos que

$$E(S^2) = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}(\sigma^2 + \mu^2) - n(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2)\right) = \frac{1}{n-1}(n\sigma^2 + n\mu^2 - \sigma^2 - n\mu^2)$$

Ou seja,

$$E(S^2) = \frac{1}{n-1}(n\sigma^2 - \sigma^2) = \frac{1}{n-1}(n-1)\sigma^2 = \sigma^2.$$

Portanto, S^2 é não viesado para σ^2.

Cont. do exercício

Temos que $E(S^2) = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) - nE(\bar{X}^2)\right)$.

- Note que precisamos obter $E(X_i^2)$ e $E(\bar{X}^2)$. Contudo, usando o fato de que $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$ temos que:

$$E(X_i^2) = Vax(X_i) + E(X_i)^2 = \sigma^2 + \mu^2.$$

  e ainda

$$E(\bar{X}^2) = Vax\left(\bar{X}\right) + E(\bar{X})^2 = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) + \mu^2$$

  Observe ainda que $Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}(\sum_{i=1}^{n} Var(X_i)) = \frac{1}{n^2}(\sum_{i=1}^{n} \sigma^2) = \frac{\sigma^2}{n}$.

- Ou seja, $E(X_i^2) = \sigma^2 + \mu^2$ e $E(\bar{X}^2) = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$. Voltando para o cálculo de $E(S^2)$, temos que

$$E(S^2) = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}(\sigma^2 + \mu^2) - n(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2)\right) = \frac{1}{n-1}(n\sigma^2 + n\mu^2 - \sigma^2 - n\mu^2)$$

  Ou seja,

$$E(S^2) = \frac{1}{n-1}(n\sigma^2 - \sigma^2) = \frac{1}{n-1}(n-1)\sigma^2 = \sigma^2.$$

  Portanto, S^2 é não viesado para σ^2.

Cont. do exercício

Temos que $E(S^2) = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) - nE(\bar{X}^2)\right)$.

- Note que precisamos obter $E(X_i^2)$ e $E(\bar{X}^2)$. Contudo, usando o fato de que $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$ temos que:

$$E(X_i^2) = Vax(X_i) + E(X_i)^2 = \sigma^2 + \mu^2.$$

e ainda

$$E(\bar{X}^2) = Vax\left(\bar{X}\right) + E(\bar{X})^2 = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) + \mu^2$$

Observe ainda que $Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}(\sum_{i=1}^{n} Var(X_i)) = \frac{1}{n^2}(\sum_{i=1}^{n}\sigma^2) = \frac{\sigma^2}{n}$.

- Ou seja, $E(X_i^2) = \sigma^2 + \mu^2$ e $E(\bar{X}^2) = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$. Voltando para o cálculo de $E(S^2)$, temos que

$$E(S^2) = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}(\sigma^2 + \mu^2) - n(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2)\right) = \frac{1}{n-1}(n\sigma^2 + n\mu^2 - \sigma^2 - n\mu^2)$$

Ou seja,

$$E(S^2) = \frac{1}{n-1}(n\sigma^2 - \sigma^2) = \frac{1}{n-1}(n-1)\sigma^2 = \sigma^2.$$

Portanto, S^2 é não viesado para σ^2.

Cont. do exercício

Temos que $E(S^2) = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) - nE(\bar{X}^2)\right)$.

- Note que precisamos obter $E(X_i^2)$ e $E(\bar{X}^2)$. Contudo, usando o fato de que $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$ temos que:

$$E(X_i^2) = Vax(X_i) + E(X_i)^2 = \sigma^2 + \mu^2.$$

  e ainda

$$E(\bar{X}^2) = Vax\left(\bar{X}\right) + E(\bar{X})^2 = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) + \mu^2$$

  Observe ainda que $Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}(\sum_{i=1}^{n} Var(X_i)) = \frac{1}{n^2}(\sum_{i=1}^{n} \sigma^2) = \frac{\sigma^2}{n}$.

- Ou seja, $E(X_i^2) = \sigma^2 + \mu^2$ e $E(\bar{X}^2) = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$. Voltando para o cálculo de $E(S^2)$, temos que

$$E(S^2) = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}(\sigma^2 + \mu^2) - n(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2)\right) = \frac{1}{n-1}(n\sigma^2 + n\mu^2 - \sigma^2 - n\mu^2)$$

  Ou seja,

$$E(S^2) = \frac{1}{n-1}(n\sigma^2 - \sigma^2) = \frac{1}{n-1}(n-1)\sigma^2 = \sigma^2.$$

  Portanto, S^2 é não viesado para σ^2.

Cont. do exercício

Temos que $E(S^2) = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) - nE(\bar{X}^2)\right)$.

- Note que precisamos obter $E(X_i^2)$ e $E(\bar{X}^2)$. Contudo, usando o fato de que $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$ temos que:

$$E(X_i^2) = Vax(X_i) + E(X_i)^2 = \sigma^2 + \mu^2.$$

  e ainda

$$E(\bar{X}^2) = Vax\left(\bar{X}\right) + E(\bar{X})^2 = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) + \mu^2$$

  Observe ainda que $Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}(\sum_{i=1}^{n} Var(X_i)) = \frac{1}{n^2}(\sum_{i=1}^{n}\sigma^2) = \frac{\sigma^2}{n}$.

- Ou seja, $E(X_i^2) = \sigma^2 + \mu^2$ e $E(\bar{X}^2) = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$. Voltando para o cálculo de $E(S^2)$, temos que

$$E(S^2) = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}(\sigma^2 + \mu^2) - n(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2)\right) = \frac{1}{n-1}(n\sigma^2 + n\mu^2 - \sigma^2 - n\mu^2)$$

  Ou seja,

$$E(S^2) = \frac{1}{n-1}(n\sigma^2 - \sigma^2) = \frac{1}{n-1}(n-1)\sigma^2 = \sigma^2.$$

  Portanto, S^2 é não viesado para σ^2.

Estimador não viesado de variância minima

- Suponha que θ é um parâmetro populacional e $\hat{\theta}_1$ e $\hat{\theta}_2$ são dois estimadores não viesados de θ, ou seja,

$$E(\hat{\theta}_1) = E(\hat{\theta}_2) = \theta.$$

Note que esses dois estimadores são indiferentes se o critério adotado for não viés.

- Contudo, suponha que $Var(\hat{\theta}_1) < Var(\hat{\theta}_2)$. Então, naturalmente, na seleção dos dois estimadores o estimador $\hat{\theta}_1$ é mais adequado, uma vez que possui menor variância.
- Um principio lógico de estimação, ao selecionar um entre vários estimadores, é escolher o estimador com menor variância.

Estimador não viesado de variância mínima

Se consideramos todos os estimadores não viesados de um parâmetro θ, aquele com a menor variância será chamado de estimador não viesado de variância mínima - ENVVM.

Estimador não viesado de variância minima

- Suponha que θ é um parâmetro populacional e $\hat{\theta}_1$ e $\hat{\theta}_2$ são dois estimadores não viesados de θ, ou seja,

$$E(\hat{\theta}_1) = E(\hat{\theta}_2) = \theta.$$

Note que esses dois estimadores são indiferentes se o critério adotado for não viés.

- Contudo, suponha que $Var(\hat{\theta}_1) < Var(\hat{\theta}_2)$. Então, naturalmente, na seleção dos dois estimadores o estimador $\hat{\theta}_1$ é mais adequado, uma vez que possui menor variância.
- Um principio lógico de estimação, ao selecionar um entre vários estimadores, é escolher o estimador com menor variância.

Estimador não viesado de variância mínima

Se consideramos todos os estimadores não viesados de um parâmetro θ, aquele com a menor variância será chamado de estimador não viesado de variância mínima - ENVVM.

Estimador não viesado de variância minima

- Suponha que θ é um parâmetro populacional e $\hat{\theta}_1$ e $\hat{\theta}_2$ são dois estimadores não viesados de θ, ou seja,

$$E(\hat{\theta}_1) = E(\hat{\theta}_2) = \theta.$$

  Note que esses dois estimadores são indiferentes se o critério adotado for não viés.
- Contudo, suponha que $Var(\hat{\theta}_1) < Var(\hat{\theta}_2)$. Então, naturalmente, na seleção dos dois estimadores o estimador $\hat{\theta}_1$ é mais adequado, uma vez que possui menor variância.
- Um principio lógico de estimação, ao selecionar um entre vários estimadores, é escolher o estimador com menor variância.

Estimador não viesado de variância mínima

Se consideramos todos os estimadores não viesados de um parâmetro θ, aquele com a menor variância será chamado de estimador não viesado de variância mínima - ENVVM.

Estimador não viesado de variância minima

- Suponha que θ é um parâmetro populacional e $\hat{\theta}_1$ e $\hat{\theta}_2$ são dois estimadores não viesados de θ, ou seja,

$$E(\hat{\theta}_1) = E(\hat{\theta}_2) = \theta.$$

  Note que esses dois estimadores são indiferentes se o critério adotado for não viés.

- Contudo, suponha que $Var(\hat{\theta}_1) < Var(\hat{\theta}_2)$. Então, naturalmente, na seleção dos dois estimadores o estimador $\hat{\theta}_1$ é mais adequado, uma vez que possui menor variância.

- Um principio lógico de estimação, ao selecionar um entre vários estimadores, é escolher o estimador com menor variância.

Estimador não viesado de variância mínima

Se consideramos todos os estimadores não viesados de um parâmetro θ, aquele com a menor variância será chamado de estimador não viesado de variância mínima - ENVVM.

Estimador não viesado de variância minima

- Suponha que θ é um parâmetro populacional e $\hat{\theta}_1$ e $\hat{\theta}_2$ são dois estimadores não viesados de θ, ou seja,

$$E(\hat{\theta}_1) = E(\hat{\theta}_2) = \theta.$$

  Note que esses dois estimadores são indiferentes se o critério adotado for não viés.

- Contudo, suponha que $Var(\hat{\theta}_1) < Var(\hat{\theta}_2)$. Então, naturalmente, na seleção dos dois estimadores o estimador $\hat{\theta}_1$ é mais adequado, uma vez que possui menor variância.

- Um principio lógico de estimação, ao selecionar um entre vários estimadores, é escolher o estimador com menor variância.

Estimador não viesado de variância mínima

Se consideramos todos os estimadores não viesados de um parâmetro θ, aquele com a menor variância será chamado de estimador não viesado de variância mínima - ENVVM.

- Suponha que θ é um parâmetro populacional e $\hat{\theta}_1$ e $\hat{\theta}_2$ são dois estimadores não viesados de θ, ou seja,

$$E(\hat{\theta}_1) = E(\hat{\theta}_2) = \theta.$$

  Note que esses dois estimadores são indiferentes se o critério adotado for não viés.

- Contudo, suponha que $Var(\hat{\theta}_1) < Var(\hat{\theta}_2)$. Então, naturalmente, na seleção dos dois estimadores o estimador $\hat{\theta}_1$ é mais adequado, uma vez que possui menor variância.

- Um principio lógico de estimação, ao selecionar um entre vários estimadores, é escolher o estimador com menor variância.

Estimador não viesado de variância mínima

Se consideramos todos os estimadores não viesados de um parâmetro θ, aquele com a menor variância será chamado de estimador não viesado de variância mínima - ENVVM.

Exemplo

- É possível obter o estimador não viesado de variância mínima em muitas situações práticas. Contudo, essa metodologia de identificação está fora do escopo desse curso.
- Mas, por exemplo, se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ for uma amostra aleatória de uma normal de média μ e variância σ^2 então é possível mostrar que $\bar{X}$ será o estimador não viesado de variância mínima para μ.
- Em situações que não sabemos se existe um ENVVM, mesmo assim podemos usar o principio da variância mínima para comparar estimadores.
  - Por exemplo, suponha que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ seja uma amostra aleatória de uma população não normal de média μ e variância σ^2. Considere que estamos querendo comparar os dois estimadores abaixo:

    $$\hat{\theta}_1 = (\bar{X}) \ \text{ e } \ \hat{\theta}_2 = X_i$$

    Note que ambos os estimadores são não viesados para μ. Contudo, $Var(\hat{\theta}_1) = \frac{\sigma^2}{n}$, enquanto que $Var(\hat{\theta}_2) = \sigma^2$.
  - Logo, se $n \geq 2$, como $Var(\hat{\theta}_1) < Var(\hat{\theta}_2)$, então o estimador $(\hat{\theta}_1)$ seria um melhor estimador de μ do que uma única observação X_i.

Exemplo

- É possível obter o estimador não viesado de variância mínima em muitas situações práticas. Contudo, essa metodologia de identificação está fora do escopo desse curso.
- Mas, por exemplo, se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ for uma amostra aleatória de uma normal de média μ e variância σ^2 então é possível mostrar que $\bar{X}$ será o estimador não viesado de variância mínima para μ.
- Em situações que não sabemos se existe um ENVVM, mesmo assim podemos usar o principio da variância mínima para comparar estimadores.
    - Por exemplo, suponha que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ seja uma amostra aleatória de uma população não normal de média μ e variância σ^2. Considere que estamos querendo comparar os dois estimadores abaixo:

$$\hat{\theta}_1 = (\bar{X}) \text{ e } \hat{\theta}_2 = X_i$$

      Note que ambos os estimadores são não viesados para μ. Contudo, $Var(\hat{\theta}_1) = \frac{\sigma^2}{n}$, enquanto que $Var(\hat{\theta}_2) = \sigma^2$.
    - Logo, se $n \geq 2$, como $Var(\hat{\theta}_1) < Var(\hat{\theta}_2)$, então o estimador $(\hat{\theta}_1)$ seria um melhor estimador de μ do que uma única observação X_i.

Exemplo

- É possível obter o estimador não viesado de variância mínima em muitas situações práticas. Contudo, essa metodologia de identificação está fora do escopo desse curso.
- Mas, por exemplo, se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ for uma amostra aleatória de uma normal de média μ e variância σ^2 então é possível mostrar que $\bar{X}$ será o estimador não viesado de variância mínima para μ.
- Em situações que não sabemos se existe um ENVVM, mesmo assim podemos usar o principio da variância mínima para comparar estimadores.
  - Por exemplo, suponha que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ seja uma amostra aleatória de uma população não normal de média μ e variância σ^2. Considere que estamos querendo comparar os dois estimadores abaixo:

$$\hat{\theta}_1 = (\bar{X}) \text{ e } \hat{\theta}_2 = X_i$$

    Note que ambos os estimadores são não viesados para μ. Contudo, $Var(\hat{\theta}_1) = \frac{\sigma^2}{n}$, enquanto que $Var(\hat{\theta}_2) = \sigma^2$.
  - Logo, se $n \geq 2$, como $Var(\hat{\theta}_1) < Var(\hat{\theta}_2)$, então o estimador $(\hat{\theta}_1)$ seria um melhor estimador de μ do que uma única observação X_i.

Exemplo

- É possível obter o estimador não viesado de variância mínima em muitas situações práticas. Contudo, essa metodologia de identificação está fora do escopo desse curso.
- Mas, por exemplo, se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ for uma amostra aleatória de uma normal de média μ e variância σ^2 então é possível mostrar que $\bar{X}$ será o estimador não viesado de variância mínima para μ.
- Em situações que não sabemos se existe um ENVVM, mesmo assim podemos usar o principio da variância mínima para comparar estimadores.
  - Por exemplo, suponha que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ seja uma amostra aleatória de uma população não normal de média μ e variância σ^2. Considere que estamos querendo comparar os dois estimadores abaixo:

    $$\hat{\theta}_1 = (\bar{X}) \text{ e } \hat{\theta}_2 = X_i$$

    Note que ambos os estimadores são não viesados para μ. Contudo, $Var(\hat{\theta}_1) = \frac{\sigma^2}{n}$, enquanto que $Var(\hat{\theta}_2) = \sigma^2$.
  - Logo, se $n \geq 2$, como $Var(\hat{\theta}_1) < Var(\hat{\theta}_2)$, então o estimador $(\hat{\theta}_1)$ seria um melhor estimador de μ do que uma única observação X_i.

Exemplo

- É possível obter o estimador não viesado de variância mínima em muitas situações práticas. Contudo, essa metodologia de identificação está fora do escopo desse curso.
- Mas, por exemplo, se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ for uma amostra aleatória de uma normal de média μ e variância σ^2 então é possível mostrar que $\bar{X}$ será o estimador não viesado de variância mínima para μ.
- Em situações que não sabemos se existe um ENVVM, mesmo assim podemos usar o principio da variância mínima para comparar estimadores.
  - Por exemplo, suponha que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ seja uma amostra aleatória de uma população não normal de média μ e variância σ^2. Considere que estamos querendo comparar os dois estimadores abaixo:

    $$\hat{\theta}_1 = (\bar{X}) \text{ e } \hat{\theta}_2 = X_i$$

    Note que ambos os estimadores são não viesados para μ. Contudo, $Var(\hat{\theta}_1) = \frac{\sigma^2}{n}$, enquanto que $Var(\hat{\theta}_2) = \sigma^2$.
  - Logo, se $n \geq 2$, como $Var(\hat{\theta}_1) < Var(\hat{\theta}_2)$, então o estimador $(\hat{\theta}_1)$ seria um melhor estimador de μ do que uma única observação X_i.