Probabilidade e estatística - Aula 5

Variáveis aleatórias

Dr. Giannini Italino Alves Vieira

Universidade Federal do Ceará - Campus de Crateús

Março, 2024

Motivação

A fim de motivar a ideia de variáveis aleatórias, considere o seguinte exemplo:

- Exemplo: Considere o experimento aleatório de se lançar uma moeda honesta n vezes e observar a sequência de caras (c) e coroas (k) obtidas. Observe que os resultados possíveis são sequências, de tamanho n, de caras e coroas, ou seja,

$$\Omega = \{(w_1, w_2, \ldots, w_n) : w_i = c \text{ ou } w_i = k; \text{ em que } i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

- Suponha que nosso interesse seja no número de caras obtidos na sequência de lançamentos, ou seja, vamos definir X como sendo o número de caras observados na sequência de n lançamentos da moeda. Formalmente

$$X(w) = \text{número de caras em } w = (w_1, w_2, \ldots, w_n).$$

- X definida acima é um exemplo do que habitualmente tem sido chamada de variável aleatória. Intuitivamente, X é uma "variável" porque note que os valores que X assume variam dependendo da sequência de lançamentos da moeda.

Variáveis aleatórias

Motivação

A fim de motivar a ideia de variáveis aleatórias, considere o seguinte exemplo:

- Exemplo: Considere o experimento aleatório de se lançar uma moeda honesta n vezes e observar a sequência de caras (c) e coroas (k) obtidas. Observe que os resultados possíveis são sequências, de tamanho n, de caras e coroas, ou seja,

$$\Omega = \{(w_1, w_2, \ldots, w_n) : w_i = c \ \text{ ou } \ w_i = k; \ \text{ em que } \ i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

- Suponha que nosso interesse seja no número de caras obtidos na sequência de lançamentos, ou seja, vamos definir X como sendo o número de caras observados na sequência de n lançamentos da moeda. Formalmente

$$X(w) = \text{número de caras em } w = (w_1, w_2, \ldots, w_n).$$

- X definida acima é um exemplo do que habitualmente tem sido chamada de variável aleatória. Intuitivamente, X é uma "variável" porque note que os valores que X assume variam dependendo da sequência de lançamentos da moeda.

Motivação

A fim de motivar a ideia de variáveis aleatórias, considere o seguinte exemplo:

- Exemplo: Considere o experimento aleatório de se lançar uma moeda honesta n vezes e observar a sequência de caras (c) e coroas (k) obtidas. Observe que os resultados possíveis são sequências, de tamanho n, de caras e coroas, ou seja,

$$\Omega = \{(w_1, w_2, \ldots, w_n) : w_i = c \quad \text{ou} \quad w_i = k; \quad \text{em que} \quad i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

- Suponha que nosso interesse seja no número de caras obtidos na sequência de lançamentos, ou seja, vamos definir X como sendo o número de caras observados na sequência de n lançamentos da moeda. Formalmente

$$X(w) = \text{número de caras em } w = (w_1, w_2, \ldots, w_n).$$

- X definida acima é um exemplo do que habitualmente tem sido chamada de variável aleatória. Intuitivamente, X é uma "variável" porque note que os valores que X assume variam dependendo da sequência de lançamentos da moeda.

Motivação

A fim de motivar a ideia de variáveis aleatórias, considere o seguinte exemplo:

- Exemplo: Considere o experimento aleatório de se lançar uma moeda honesta n vezes e observar a sequência de caras (c) e coroas (k) obtidas. Observe que os resultados possíveis são sequências, de tamanho n, de caras e coroas, ou seja,

$$\Omega = \{(w_1, w_2, \ldots, w_n) : w_i = c \quad \text{ou} \quad w_i = k; \quad \text{em que} \quad i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

- Suponha que nosso interesse seja no número de caras obtidos na sequência de lançamentos, ou seja, vamos definir X como sendo o número de caras observados na sequência de n lançamentos da moeda. Formalmente

$$X(w) = \text{número de caras em } w = (w_1, w_2, \ldots, w_n).$$

- X definida acima é um exemplo do que habitualmente tem sido chamada de variável aleatória. Intuitivamente, X é uma "variável" porque note que os valores que X assume variam dependendo da sequência de lançamentos da moeda.

Variáveis aleatórias

Motivação

A fim de motivar a ideia de variáveis aleatórias, considere o seguinte exemplo:

- Exemplo: Considere o experimento aleatório de se lançar uma moeda honesta n vezes e observar a sequência de caras (c) e coroas (k) obtidas. Observe que os resultados possíveis são sequências, de tamanho n, de caras e coroas, ou seja,

$$\Omega = \{(w_1, w_2, \ldots, w_n) : w_i = c \quad \text{ou} \quad w_i = k; \quad \text{em que} \quad i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

- Suponha que nosso interesse seja no número de caras obtidos na sequência de lançamentos, ou seja, vamos definir X como sendo o número de caras observados na sequência de n lançamentos da moeda. Formalmente

$$X(w) = \text{número de caras em } w = (w_1, w_2, \ldots, w_n).$$

- X definida acima é um exemplo do que habitualmente tem sido chamada de variável aleatória. Intuitivamente, X é uma "variável" porque note que os valores que X assume variam dependendo da sequência de lançamentos da moeda.

Motivação

- Note ainda que o termo "aleatória" é usado para especificar que o seu valor é, de certo modo incerto, pois pode assumir qualquer número inteiro entre 0 e n.
- Ao trabalharmos com experimentos aleatórios, em alguns casos, descrições de resultados são suficientes. Contudo, em outros é útil associar um número a cada possível resultado do experimento, ou seja, a cada resultado no espaço amostral. Essa é a ideia de variáveis aleatória.

Motivação

- Note ainda que o termo "aleatória" é usado para especificar que o seu valor é, de certo modo incerto, pois pode assumir qualquer número inteiro entre 0 e n.
- Ao trabalharmos com experimentos aleatórios, em alguns casos, descrições de resultados são suficientes. Contudo, em outros é útil associar um número a cada possível resultado do experimento, ou seja, a cada resultado no espaço amostral. Essa é a ideia de variáveis aleatória.

Variáveis aleatórias

Definição: Uma variável aleatória é uma função que associa um numero real a cada resultado no espaço amostral de um experimento aleatório.

- Usamos letras maiúsculas para denotar uma variável aleatória, e letras minusculas para representar valores assumidos pela variável.
- Por exemplo, se X representa a corrente elétrica em um fio de cobre, então $x = 70$ miliamperes é um exemplo de um valor que pode ser assumido pela variável aleatória X.

Tipos de variáveis - Discretas e continuas

- Uma variável aleatória é classificada como **discreta** se ela assume somente um número finito ou infinito enumerável de valores.
- Uma variável aleatória é classificada como **contínua** se ela assume valores em um intervalo (finito ou infinito) de números reais.

Variáveis aleatórias

Definição: Uma variável aleatória é uma função que associa um numero real a cada resultado no espaço amostral de um experimento aleatório.

- Usamos letras maiúsculas para denotar uma variável aleatória, e letras minusculas para representar valores assumidos pela variável.
- Por exemplo, se X representa a corrente elétrica em um fio de cobre, então $x = 70$ miliamperes é um exemplo de um valor que pode ser assumido pela variável aleatória X.

Tipos de variáveis - Discretas e continuas

- Uma variável aleatória é classificada como **discreta** se ela assume somente um número finito ou infinito enumerável de valores.
- Uma variável aleatória é classificada como **contínua** se ela assume valores em um intervalo (finito ou infinito) de números reais.

Variáveis aleatórias

Definição: Uma variável aleatória é uma função que associa um numero real a cada resultado no espaço amostral de um experimento aleatório.

- Usamos letras maiúsculas para denotar uma variável aleatória, e letras minusculas para representar valores assumidos pela variável.
- Por exemplo, se X representa a corrente elétrica em um fio de cobre, então $x = 70$ miliamperes é um exemplo de um valor que pode ser assumido pela variável aleatória X.

Tipos de variáveis - Discretas e continuas

- Uma variável aleatória é classificada como **discreta** se ela assume somente um número finito ou infinito enumerável de valores.
- Uma variável aleatória é classificada como **contínua** se ela assume valores em um intervalo (finito ou infinito) de números reais.

Variáveis aleatórias

Definição: Uma variável aleatória é uma função que associa um numero real a cada resultado no espaço amostral de um experimento aleatório.

- Usamos letras maiúsculas para denotar uma variável aleatória, e letras minusculas para representar valores assumidos pela variável.
- Por exemplo, se X representa a corrente elétrica em um fio de cobre, então $x = 70$ miliamperes é um exemplo de um valor que pode ser assumido pela variável aleatória X.

Tipos de variáveis - Discretas e continuas

- Uma variável aleatória é classificada como **discreta** se ela assume somente um número finito ou infinito enumerável de valores.
- Uma variável aleatória é classificada como **contínua** se ela assume valores em um intervalo (finito ou infinito) de números reais.

Definição: Uma variável aleatória é uma função que associa um numero real a cada resultado no espaço amostral de um experimento aleatório.

- Usamos letras maiúsculas para denotar uma variável aleatória, e letras minusculas para representar valores assumidos pela variável.
- Por exemplo, se X representa a corrente elétrica em um fio de cobre, então $x = 70$ miliamperes é um exemplo de um valor que pode ser assumido pela variável aleatória X.

Tipos de variáveis - Discretas e continuas

- Uma variável aleatória é classificada como **discreta** se ela assume somente um número finito ou infinito enumerável de valores.
- Uma variável aleatória é classificada como **contínua** se ela assume valores em um intervalo (finito ou infinito) de números reais.

Exemplos de variáveis aleatórias

Exemplos de variáveis aleatórias discretas

- X é o número de conexões soldadas não conformes em uma placa de circuito impresso com 1000 conexões;
- Y número de falhas na superfície em uma grande serpentina de aço galvanizado;
- Z número de bits transmitidos que foram recebidos com erro.

Exemplos de variáveis aleatórias contínuas

- X é a corrente elétrica em um fio de cobre;
- Y é o tempo que um projetil gasta para retornar à Terra;
- Z é o volume de gasolina perdido, por evaporação, durante o enchimento de um tanque.

Exemplos de variáveis aleatórias

Exemplos de variáveis aleatórias discretas

- X é o número de conexões soldadas não conformes em uma placa de circuito impresso com 1000 conexões;
- Y número de falhas na superfície em uma grande serpentina de aço galvanizado;
- Z número de bits transmitidos que foram recebidos com erro.

Exemplos de variáveis aleatórias contínuas

- X é a corrente elétrica em um fio de cobre;
- Y é o tempo que um projetil gasta para retornar à Terra;
- Z é o volume de gasolina perdido, por evaporação, durante o enchimento de um tanque.

Exemplos de variáveis aleatórias

Exemplos de variáveis aleatórias discretas

- X é o número de conexões soldadas não conformes em uma placa de circuito impresso com 1000 conexões;
- Y número de falhas na superfície em uma grande serpentina de aço galvanizado;
- Z número de bits transmitidos que foram recebidos com erro.

Exemplos de variáveis aleatórias contínuas

- X é a corrente elétrica em um fio de cobre;
- Y é o tempo que um projetil gasta para retornar à Terra;
- Z é o volume de gasolina perdido, por evaporação, durante o enchimento de um tanque.

Exemplos de variáveis aleatórias

Exemplos de variáveis aleatórias discretas

- X é o número de conexões soldadas não conformes em uma placa de circuito impresso com 1000 conexões;
- Y número de falhas na superfície em uma grande serpentina de aço galvanizado;
- Z número de bits transmitidos que foram recebidos com erro.

Exemplos de variáveis aleatórias contínuas

- X é a corrente elétrica em um fio de cobre;
- Y é o tempo que um projetil gasta para retornar à Terra;
- Z é o volume de gasolina perdido, por evaporação, durante o enchimento de um tanque.

Exemplos de variáveis aleatórias

Exemplos de variáveis aleatórias discretas

- X é o número de conexões soldadas não conformes em uma placa de circuito impresso com 1000 conexões;
- Y número de falhas na superfície em uma grande serpentina de aço galvanizado;
- Z número de bits transmitidos que foram recebidos com erro.

Exemplos de variáveis aleatórias contínuas

- X é a corrente elétrica em um fio de cobre;
- Y é o tempo que um projetil gasta para retornar à Terra;
- Z é o volume de gasolina perdido, por evaporação, durante o enchimento de um tanque.

Exemplos de variáveis aleatórias

Exemplos de variáveis aleatórias discretas

- X é o número de conexões soldadas não conformes em uma placa de circuito impresso com 1000 conexões;
- Y número de falhas na superfície em uma grande serpentina de aço galvanizado;
- Z número de bits transmitidos que foram recebidos com erro.

Exemplos de variáveis aleatórias contínuas

- X é a corrente elétrica em um fio de cobre;
- Y é o tempo que um projetil gasta para retornar à Terra;
- Z é o volume de gasolina perdido, por evaporação, durante o enchimento de um tanque.

Variáveis aleatórias discretas

Inicialmente, faremos um estudo sobre variáveis aleatórias discretas e, posteriormente, focaremos nas variáveis aleatórias contínuas.

Função de probabilidade

Definição: Seja X uma variável aleatória discreta assumindo os valores $x_1, x_2, \ldots,$. A função de probabilidade é uma função tal que

(i) $f(x_i) \geq 0$;

(ii) $\sum_i f(x_i) = 1$;

(iii) $f(x_i) = P(X = x_i)$.

Intuitivamente, a função de probabilidade de uma variável aleatória discreta é uma função que atribui probabilidade a cada um dos possíveis valores que a variável aleatória pode assumir.

Inicialmente, faremos um estudo sobre variáveis aleatórias discretas e, posteriormente, focaremos nas variáveis aleatórias contínuas.

Função de probabilidade

Definição: Seja X uma variável aleatória discreta assumindo os valores $x_1, x_2, \ldots,$. A função de probabilidade é uma função tal que

(i) $f(x_i) \geq 0$;

(ii) $\sum_i f(x_i) = 1$;

(iii) $f(x_i) = P(X = x_i)$.

Intuitivamente, a função de probabilidade de uma variável aleatória discreta é uma função que atribui probabilidade a cada um dos possíveis valores que a variável aleatória pode assumir.

Variáveis aleatórias discretas

Inicialmente, faremos um estudo sobre variáveis aleatórias discretas e, posteriormente, focaremos nas variáveis aleatórias contínuas.

Função de probabilidade

Definição: Seja X uma variável aleatória discreta assumindo os valores $x_1, x_2, \ldots,$. A função de probabilidade é uma função tal que

(i) $f(x_i) \geq 0$;

(ii) $\sum_i f(x_i) = 1$;

(iii) $f(x_i) = P(X = x_i)$.

Intuitivamente, a função de probabilidade de uma variável aleatória discreta é uma função que atribui probabilidade a cada um dos possíveis valores que a variável aleatória pode assumir.

Variáveis aleatórias discretas

Inicialmente, faremos um estudo sobre variáveis aleatórias discretas e, posteriormente, focaremos nas variáveis aleatórias contínuas.

Função de probabilidade

Definição: Seja X uma variável aleatória discreta assumindo os valores $x_1, x_2, \ldots,$. A função de probabilidade é uma função tal que

(i) $f(x_i) \geq 0$;

(ii) $\sum_i f(x_i) = 1$;

(iii) $f(x_i) = P(X = x_i)$.

Intuitivamente, a função de probabilidade de uma variável aleatória discreta é uma função que atribui probabilidade a cada um dos possíveis valores que a variável aleatória pode assumir.

Exemplo 1

Exemplo 1: Seja X uma variável aleatória assumindo valores $-2, -1, 0, 1, 2$ e com função de probabilidade dada por

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$

Calcule as probabilidades a seguir:

(a) $P(X \leq 2)$;

(b) $P(X > -2)$;

(c) $P(-1 \leq X \leq 1)$

(d) $P(X \leq -1 \quad \text{ou} \quad X = 2)$

Exemplo 1

Exemplo 1: Seja X uma variável aleatória assumindo valores $-2, -1, 0, 1, 2$ e com função de probabilidade dada por

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$

Calcule as probabilidades a seguir:

(a) $P(X \leq 2)$;

(b) $P(X > -2)$;

(c) $P(-1 \leq X \leq 1)$

(d) $P(X \leq -1 \quad \text{ou} \quad X = 2)$

Exemplo 1

Exemplo 1: Seja X uma variável aleatória assumindo valores $-2, -1, 0, 1, 2$ e com função de probabilidade dada por

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$

Calcule as probabilidades a seguir:

(a) $P(X \leq 2)$;

(b) $P(X > -2)$;

(c) $P(-1 \leq X \leq 1)$

(d) $P(X \leq -1 \quad \text{ou} \quad X = 2)$

Exemplo 1

Exemplo 1: Seja X uma variável aleatória assumindo valores $-2, -1, 0, 1, 2$ e com função de probabilidade dada por

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$

Calcule as probabilidades a seguir:

(a) $P(X \leq 2)$;

(b) $P(X > -2)$;

(c) $P(-1 \leq X \leq 1)$

(d) $P(X \leq -1 \quad \text{ou} \quad X = 2)$

Sol. do exemplo 1

- Sol.: (a) Note que
$P(X \leq 2) = P(X = -2) + P(X = -1) + P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = f(-2) + f(-1) + f(0) + f(1) + f(2) = 1.$
- Sol.: (b) Observe que
$P(X > -2) = P(X = -1) + P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = f(-1) + f(0) + f(1) + f(2) = \frac{2}{8} + \frac{2}{8} + \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}.$
- Sol.: (c) Temos que
$P(-1 \leq X \leq 1) = P(X = -1) + P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{2}{8} + \frac{2}{8} + \frac{2}{8} = \frac{6}{8}.$
- Sol.: (d) Temos que
$P(X \leq -1 \ \text{ ou } \ X = 2) = P(X \leq -1) + P(X = 2) - P((X \leq -1) \cap (X = 2)) = P(X = -2) + P(X = -1) + P(X = 2) = \frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}.$

Sol. do exemplo 1

- Sol.: (a) Note que $P(X \leq 2) = P(X = -2) + P(X = -1) + P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = f(-2) + f(-1) + f(0) + f(1) + f(2) = 1.$
- Sol.: (b) Observe que $P(X > -2) = P(X = -1) + P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = f(-1) + f(0) + f(1) + f(2) = \frac{2}{8} + \frac{2}{8} + \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}.$
- Sol.: (c) Temos que $P(-1 \leq X \leq 1) = P(X = -1) + P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{2}{8} + \frac{2}{8} + \frac{2}{8} = \frac{6}{8}.$
- Sol.: (d) Temos que $P(X \leq -1 \text{ ou } X = 2) = P(X \leq -1) + P(X = 2) - P((X \leq -1) \cap (X = 2)) = P(X = -2) + P(X = -1) + P(X = 2) = \frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}.$

Sol. do exemplo 1

- Sol.: (a) Note que
$P(X \leq 2) = P(X = -2) + P(X = -1) + P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = f(-2) + f(-1) + f(0) + f(1) + f(2) = 1.$
- Sol.: (b) Observe que
$P(X > -2) = P(X = -1) + P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = f(-1) + f(0) + f(1) + f(2) = \frac{2}{8} + \frac{2}{8} + \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}.$
- Sol.: (c) Temos que
$P(-1 \leq X \leq 1) = P(X = -1) + P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{2}{8} + \frac{2}{8} + \frac{2}{8} = \frac{6}{8}.$
- Sol.: (d) Temos que
$P(X \leq -1 \text{ ou } X = 2) = P(X \leq -1) + P(X = 2) - P((X \leq -1) \cap (X = 2)) = P(X = -2) + P(X = -1) + P(X = 2) = \frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}.$

Sol. do exemplo 1

- Sol.: (a) Note que
$P(X \leq 2) = P(X = -2) + P(X = -1) + P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = f(-2) + f(-1) + f(0) + f(1) + f(2) = 1.$
- Sol.: (b) Observe que
$P(X > -2) = P(X = -1) + P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = f(-1) + f(0) + f(1) + f(2) = \frac{2}{8} + \frac{2}{8} + \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}.$
- Sol.: (c) Temos que
$P(-1 \leq X \leq 1) = P(X = -1) + P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{2}{8} + \frac{2}{8} + \frac{2}{8} = \frac{6}{8}.$
- Sol.: (d) Temos que
$P(X \leq -1 \;\text{ ou }\; X = 2) = P(X \leq -1) + P(X = 2) - P((X \leq -1) \cap (X = 2)) = P(X = -2) + P(X = -1) + P(X = 2) = \frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}.$

Independência de múltiplos eventos

Antes de irmos para outro exemplo, veremos o conceito de eventos independentes.

Definição: Os eventos $E_1, E_2, \ldots, E_n$ são ditos serem independentes se, e somente se, para qualquer subconjunto $E_{i_1}, E_{i_2}, \ldots, E_{i_k}$ tivermos

$$P(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \ldots \cap E_{i_k}) = P(E_{i_1}) \cdot P(E_{i_2}) \cdot \ldots \cdot P(E_{i_k})$$

Independência de múltiplos eventos

Antes de irmos para outro exemplo, veremos o conceito de eventos independentes.

Definição: Os eventos $E_1, E_2, \ldots, E_n$ são ditos serem independentes se, e somente se, para qualquer subconjunto $E_{i_1}, E_{i_2}, \ldots, E_{i_k}$ tivermos

$$P(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \ldots \cap E_{i_k}) = P(E_{i_1}) \cdot P(E_{i_2}) \cdot \ldots \cdot P(E_{i_k})$$

Exemplo 2

Exemplo 2: Em um processo de fabricação de semicondutores, três pastilhas de um lote são testadas. Cada pastilha é classificada como passa ou falha. Suponha que a probabilidade de uma pastilha passar no teste seja 0.8 e que as pastilhas sejam independentes. Determine a função de probabilidade do numero de pastilhas de um lote que passa no teste.

- Sol.: Seja X a variável aleatória definida como o numero de pastilhas de um lote que passa no teste.
- Note que X pode assumir os valores 0, 1, 2 e 3. Logo, como queremos determinar a função de probabilidade de X, então devemos determinar $f(0) = P(X = 0)$, $f(1) = P(X = 1)$, $f(2) = P(X = 2)$ e $f(3) = P(X = 3)$.
- Vamos definir alguns eventos. Seja E_i o evento em que a i-ésima pastilha passa no teste, para $i = 1, 2, 3$.

Exemplo 2

Exemplo 2: Em um processo de fabricação de semicondutores, três pastilhas de um lote são testadas. Cada pastilha é classificada como passa ou falha. Suponha que a probabilidade de uma pastilha passar no teste seja 0.8 e que as pastilhas sejam independentes. Determine a função de probabilidade do numero de pastilhas de um lote que passa no teste.

- Sol.: Seja X a variável aleatória definida como o numero de pastilhas de um lote que passa no teste.
- Note que X pode assumir os valores 0, 1, 2 e 3. Logo, como queremos determinar a função de probabilidade de X, então devemos determinar $f(0) = P(X = 0)$, $f(1) = P(X = 1)$, $f(2) = P(X = 2)$ e $f(3) = P(X = 3)$.
- Vamos definir alguns eventos. Seja E_i o evento em que a i-ésima pastilha passa no teste, para $i = 1, 2, 3$.

Exemplo 2

Exemplo 2: Em um processo de fabricação de semicondutores, três pastilhas de um lote são testadas. Cada pastilha é classificada como passa ou falha. Suponha que a probabilidade de uma pastilha passar no teste seja 0.8 e que as pastilhas sejam independentes. Determine a função de probabilidade do numero de pastilhas de um lote que passa no teste.

- Sol.: Seja X a variável aleatória definida como o numero de pastilhas de um lote que passa no teste.
- Note que X pode assumir os valores 0, 1, 2 e 3. Logo, como queremos determinar a função de probabilidade de X, então devemos determinar $f(0) = P(X = 0)$, $f(1) = P(X = 1)$, $f(2) = P(X = 2)$ e $f(3) = P(X = 3)$.
- Vamos definir alguns eventos. Seja E_i o evento em que a i-ésima pastilha passa no teste, para $i = 1, 2, 3$.

Exemplo 2

Exemplo 2: Em um processo de fabricação de semicondutores, três pastilhas de um lote são testadas. Cada pastilha é classificada como passa ou falha. Suponha que a probabilidade de uma pastilha passar no teste seja 0.8 e que as pastilhas sejam independentes. Determine a função de probabilidade do numero de pastilhas de um lote que passa no teste.

- Sol.: Seja X a variável aleatória definida como o numero de pastilhas de um lote que passa no teste.
- Note que X pode assumir os valores 0, 1, 2 e 3. Logo, como queremos determinar a função de probabilidade de X, então devemos determinar $f(0) = P(X = 0)$, $f(1) = P(X = 1)$, $f(2) = P(X = 2)$ e $f(3) = P(X = 3)$.
- Vamos definir alguns eventos. Seja E_i o evento em que a i-ésima pastilha passa no teste, para $i = 1, 2, 3$.

Cont. do exemplo 2

Temos que

- $f(0) = P(X = 0) = P(E_1^c \cap E_2^c \cap E_3^c) = P(E_1^c) \cdot P(E_2^c) \cdot P(E_3^c) = (0.2)^3 = 0.008.$
- $f(1) = P(X = 1) = P(E_1 \cap E_2^c \cap E_3^c) + P(E_1^c \cap E_2 \cap E_3^c) + P(E_1^c \cap E_2^c \cap E_3) = 3(0.8)(0.2)^2 = 0.096.$
- $f(2) = P(X = 2) = P(E_1 \cap E_2 \cap E_3^c) + P(E_1 \cap E_2^c \cap E_3) + P(E_1^c \cap E_2 \cap E_3) = 3(0.2)(0.8)^2 = 0.384.$
- $f(3) = P(X = 3) = P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = (0.8)^3 = 0.512.$

Logo, temos que

x	0	1	2	3
$f(x)$	0.008	0.096	0.384	0.512

Cont. do exemplo 2

Temos que

- $f(0) = P(X = 0) = P(E_1^c \cap E_2^c \cap E_3^c) = P(E_1^c) \cdot P(E_2^c) \cdot P(E_3^c) = (0.2)^3 = 0.008.$
- $f(1) = P(X = 1) = P(E_1 \cap E_2^c \cap E_3^c) + P(E_1^c \cap E_2 \cap E_3^c) + P(E_1^c \cap E_2^c \cap E_3) = 3(0.8)(0.2)^2 = 0.096.$
- $f(2) = P(X = 2) = P(E_1 \cap E_2 \cap E_3^c) + P(E_1 \cap E_2^c \cap E_3) + P(E_1^c \cap E_2 \cap E_3) = 3(0.2)(0.8)^2 = 0.384.$
- $f(3) = P(X = 3) = P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = (0.8)^3 = 0.512.$

Logo, temos que

x	0	1	2	3
$f(x)$	0.008	0.096	0.384	0.512

Cont. do exemplo 2

Temos que

- $f(0) = P(X = 0) = P(E_1^c \cap E_2^c \cap E_3^c) = P(E_1^c) \cdot P(E_2^c) \cdot P(E_3^c) = (0.2)^3 = 0.008.$
- $f(1) = P(X = 1) = P(E_1 \cap E_2^c \cap E_3^c) + P(E_1^c \cap E_2 \cap E_3^c) + P(E_1^c \cap E_2^c \cap E_3) = 3(0.8)(0.2)^2 = 0.096.$
- $f(2) = P(X = 2) = P(E_1 \cap E_2 \cap E_3^c) + P(E_1 \cap E_2^c \cap E_3) + P(E_1^c \cap E_2 \cap E_3) = 3(0.2)(0.8)^2 = 0.384.$
- $f(3) = P(X = 3) = P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = (0.8)^3 = 0.512.$

Logo, temos que

x	0	1	2	3
$f(x)$	0.008	0.096	0.384	0.512

Cont. do exemplo 2

Temos que

- $f(0) = P(X = 0) = P(E_1^c \cap E_2^c \cap E_3^c) = P(E_1^c) \cdot P(E_2^c) \cdot P(E_3^c) = (0.2)^3 = 0.008.$
- $f(1) = P(X = 1) = P(E_1 \cap E_2^c \cap E_3^c) + P(E_1^c \cap E_2 \cap E_3^c) + P(E_1^c \cap E_2^c \cap E_3) = 3(0.8)(0.2)^2 = 0.096.$
- $f(2) = P(X = 2) = P(E_1 \cap E_2 \cap E_3^c) + P(E_1 \cap E_2^c \cap E_3) + P(E_1^c \cap E_2 \cap E_3) = 3(0.2)(0.8)^2 = 0.384.$
- $f(3) = P(X = 3) = P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = (0.8)^3 = 0.512.$

Logo, temos que

x	0	1	2	3
$f(x)$	0.008	0.096	0.384	0.512

Cont. do exemplo 2

Temos que

- $f(0) = P(X = 0) = P(E_1^c \cap E_2^c \cap E_3^c) = P(E_1^c) \cdot P(E_2^c) \cdot P(E_3^c) = (0.2)^3 = 0.008.$
- $f(1) = P(X = 1) = P(E_1 \cap E_2^c \cap E_3^c) + P(E_1^c \cap E_2 \cap E_3^c) + P(E_1^c \cap E_2^c \cap E_3) = 3(0.8)(0.2)^2 = 0.096.$
- $f(2) = P(X = 2) = P(E_1 \cap E_2 \cap E_3^c) + P(E_1 \cap E_2^c \cap E_3) + P(E_1^c \cap E_2 \cap E_3) = 3(0.2)(0.8)^2 = 0.384.$
- $f(3) = P(X = 3) = P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = (0.8)^3 = 0.512.$

Logo, temos que

x	0	1	2	3
$f(x)$	0.008	0.096	0.384	0.512

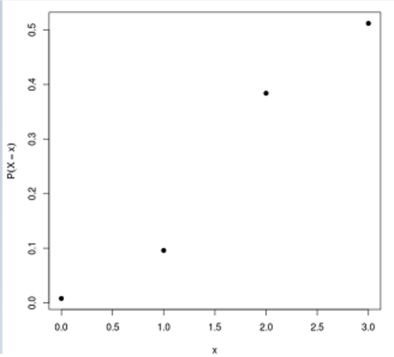
Cont. do exemplo 2

Temos que

- $f(0) = P(X = 0) = P(E_1^c \cap E_2^c \cap E_3^c) = P(E_1^c) \cdot P(E_2^c) \cdot P(E_3^c) = (0.2)^3 = 0.008.$
- $f(1) = P(X = 1) = P(E_1 \cap E_2^c \cap E_3^c) + P(E_1^c \cap E_2 \cap E_3^c) + P(E_1^c \cap E_2^c \cap E_3) = 3(0.8)(0.2)^2 = 0.096.$
- $f(2) = P(X = 2) = P(E_1 \cap E_2 \cap E_3^c) + P(E_1 \cap E_2^c \cap E_3) + P(E_1^c \cap E_2 \cap E_3) = 3(0.2)(0.8)^2 = 0.384.$
- $f(3) = P(X = 3) = P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = (0.8)^3 = 0.512.$

Logo, temos que

x	0	1	2	3
$f(x)$	0.008	0.096	0.384	0.512


P(X = x)
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
x

Função de distribuição acumulada

Em algumas situações é útil expressar probabilidades cumulativas, ou seja, probabilidades do tipo $P(X \leq x)$. Essas probabilidade podem ser utilizadas para determinar a função de probabilidade de uma variável aleatória, ou seja, o uso de probabilidades cumulativas é um método alternativo para se descrever a distribuição de probabilidade de uma variável aleatória discreta.

Definição: A função de distribuição acumulada de uma variável aleatória X discreta assumindo valores $x_1, x_2, \ldots$ é

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i).$$

Para uma variável aleatória discreta X, $F(x)$ satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$;

(ii) $0 \leq F(x) \leq 1$;

(iii) Se $x \leq y$, então $F(x) \leq F(y)$.

Função de distribuição acumulada

Em algumas situações é útil expressar probabilidades cumulativas, ou seja, probabilidades do tipo $P(X \leq x)$. Essas probabilidade podem ser utilizadas para determinar a função de probabilidade de uma variável aleatória, ou seja, o uso de probabilidades cumulativas é um método alternativo para se descrever a distribuição de probabilidade de uma variável aleatória discreta.

Definição: A função de distribuição acumulada de uma variável aleatória X discreta assumindo valores $x_1, x_2, \ldots$ é

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i).$$

Para uma variável aleatória discreta X, $F(x)$ satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$;

(ii) $0 \leq F(x) \leq 1$;

(iii) Se $x \leq y$, então $F(x) \leq F(y)$.

Função de distribuição acumulada

Em algumas situações é útil expressar probabilidades cumulativas, ou seja, probabilidades do tipo $P(X \leq x)$. Essas probabilidade podem ser utilizadas para determinar a função de probabilidade de uma variável aleatória, ou seja, o uso de probabilidades cumulativas é um método alternativo para se descrever a distribuição de probabilidade de uma variável aleatória discreta.

Definição: A função de distribuição acumulada de uma variável aleatória X discreta assumindo valores $x_1, x_2, \ldots$ é

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i).$$

Para uma variável aleatória discreta X, $F(x)$ satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$;

(ii) $0 \leq F(x) \leq 1$;

(iii) Se $x \leq y$, então $F(x) \leq F(y)$.

Função de distribuição acumulada

Em algumas situações é útil expressar probabilidades cumulativas, ou seja, probabilidades do tipo $P(X \leq x)$. Essas probabilidade podem ser utilizadas para determinar a função de probabilidade de uma variável aleatória, ou seja, o uso de probabilidades cumulativas é um método alternativo para se descrever a distribuição de probabilidade de uma variável aleatória discreta.

Definição: A função de distribuição acumulada de uma variável aleatória X discreta assumindo valores $x_1, x_2, \ldots$ é

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i).$$

Para uma variável aleatória discreta X, $F(x)$ satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$;

(ii) $0 \leq F(x) \leq 1$;

(iii) Se $x \leq y$, então $F(x) \leq F(y)$.

Exemplo 3

Considere novamente o problema anterior. Obtenha a função de distribuição acumulada da variável aleatória X definida como o numero de pastilhas de um lote que passa no teste.

- Sol.: Note que no problema anterior obtivemos que a função de probabilidade de X é

x	0	1	2	3
$f(x)$	0.008	0.096	0.384	0.512

- Como f é definida nos pontos 0, 1, 2 e 3, para determinar a função de distribuição acumulada F, vamos considerar os seguintes intervalos:
- Se $x < 0$. Note que se $x < 0$, então $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i) = 0$;
- Se $0 \leq x < 1$, então $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i) = f(0) = 0.008$;
- Se $1 \leq x < 2$, então $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i) = f(0) + f(1) = 0.008 + 0.096 = 0.104.$;

Exemplo 3

Considere novamente o problema anterior. Obtenha a função de distribuição acumulada da variável aleatória X definida como o numero de pastilhas de um lote que passa no teste.

- Sol.: Note que no problema anterior obtivemos que a função de probabilidade de X é

x	0	1	2	3
$f(x)$	0.008	0.096	0.384	0.512

- Como f é definida nos pontos 0, 1, 2 e 3, para determinar a função de distribuição acumulada F, vamos considerar os seguintes intervalos:
- Se $x < 0$. Note que se $x < 0$, então $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i) = 0$;
- Se $0 \leq x < 1$, então $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i) = f(0) = 0.008$;
- Se $1 \leq x < 2$, então $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i) = f(0) + f(1) = 0.008 + 0.096 = 0.104.$;

Exemplo 3

Considere novamente o problema anterior. Obtenha a função de distribuição acumulada da variável aleatória X definida como o numero de pastilhas de um lote que passa no teste.

- Sol.: Note que no problema anterior obtivemos que a função de probabilidade de X é

x	0	1	2	3
$f(x)$	0.008	0.096	0.384	0.512

- Como f é definida nos pontos 0, 1, 2 e 3, para determinar a função de distribuição acumulada F, vamos considerar os seguintes intervalos:
- Se $x < 0$. Note que se $x < 0$, então $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i) = 0$;
- Se $0 \leq x < 1$, então $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i) = f(0) = 0.008$;
- Se $1 \leq x < 2$, então $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i) = f(0) + f(1) = 0.008 + 0.096 = 0.104.$;

Exemplo 3

Considere novamente o problema anterior. Obtenha a função de distribuição acumulada da variável aleatória X definida como o numero de pastilhas de um lote que passa no teste.

- Sol.: Note que no problema anterior obtivemos que a função de probabilidade de X é

x	0	1	2	3
$f(x)$	0.008	0.096	0.384	0.512

- Como f é definida nos pontos 0, 1, 2 e 3, para determinar a função de distribuição acumulada F, vamos considerar os seguintes intervalos:
- Se $x < 0$. Note que se $x < 0$, então $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i) = 0$;
- Se $0 \leq x < 1$, então $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i) = f(0) = 0.008$;
- Se $1 \leq x < 2$, então $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i) = f(0) + f(1) = 0.008 + 0.096 = 0.104.$;

Exemplo 3

Considere novamente o problema anterior. Obtenha a função de distribuição acumulada da variável aleatória X definida como o numero de pastilhas de um lote que passa no teste.

- Sol.: Note que no problema anterior obtivemos que a função de probabilidade de X é

x	0	1	2	3
$f(x)$	0.008	0.096	0.384	0.512

- Como f é definida nos pontos 0, 1, 2 e 3, para determinar a função de distribuição acumulada F, vamos considerar os seguintes intervalos:
- Se $x < 0$. Note que se $x < 0$, então $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i) = 0$;
- Se $0 \leq x < 1$, então $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i) = f(0) = 0.008$;
- Se $1 \leq x < 2$, então $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i) = f(0) + f(1) = 0.008 + 0.096 = 0.104.$;

Cont. do exemplo 3

- Se $2 \leq x < 3$, então $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i) = f(0) + f(1) + f(2) = 0.008 + 0.096 + 0.384 = 0.488.$;
- Se $x \geq 3$, então $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = 0.008 + 0.096 + 0.384 + 0.512 = 1.$.

Logo, a função de distribuição acumulada de X é

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0; \\ 0.008 & \text{se } 0 \leq x < 1; \\ 0.104 & \text{se } 1 \leq x < 2; \\ 0.488 & \text{se } 2 \leq x < 3; \\ 1 & \text{se } x \geq 3. \end{cases}$$

Graficamente, temos que

Cont. do exemplo 3

- Se $2 \leq x < 3$, então $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i) = f(0) + f(1) + f(2) = 0.008 + 0.096 + 0.384 = 0.488.$;
- Se $x \geq 3$, então $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = 0.008 + 0.096 + 0.384 + 0.512 = 1.$.

Logo, a função de distribuição acumulada de X é

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0; \\ 0.008 & \text{se } 0 \leq x < 1; \\ 0.104 & \text{se } 1 \leq x < 2; \\ 0.488 & \text{se } 2 \leq x < 3; \\ 1 & \text{se } x \geq 3. \end{cases}$$

Graficamente, temos que

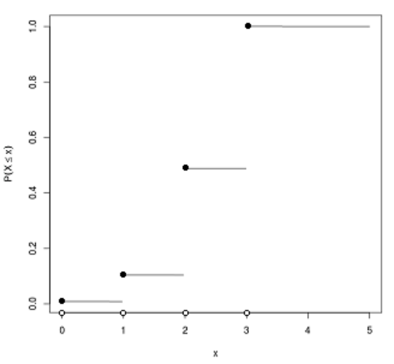
Cont. do exemplo 3

- Se $2 \leq x < 3$, então $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i) = f(0) + f(1) + f(2) = 0.008 + 0.096 + 0.384 = 0.488.$;
- Se $x \geq 3$, então $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = 0.008 + 0.096 + 0.384 + 0.512 = 1.$.

Logo, a função de distribuição acumulada de X é

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0; \\ 0.008 & \text{se } 0 \leq x < 1; \\ 0.104 & \text{se } 1 \leq x < 2; \\ 0.488 & \text{se } 2 \leq x < 3; \\ 1 & \text{se } x \geq 3. \end{cases}$$

Graficamente, temos que



1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
P(X ≤ x)
0
1
2
3
4
5
x

Obtenção da função de probabilidade por meio de $F(x)$

Como mencionado acima, podemos obter a função de probabilidade de uma variável aleatória discreta por meio da função de distribuição acumulada.
Seja $F(x)$ a função de distribuição acumulada da variável X discreta. Então temos que

$$f(x_i) = F(x_i) - F(x_i^-),$$

em que a notação $F(x_i^-)$ representa o limite de F tendendo a x_i pela esquerda, ou seja, por valores inferiores a x_i.

Por exemplo, no exemplo anterior temos que

- $f(0) = F(0) - F(0^-) = 0.008$;
- $f(1) = F(1) - F(1^-) = 0.104 - 0.008 = 0.096$;
- $f(2) = F(2) - F(2^-) = 0.488 - 0.104 = 0.384$;
- $f(3) = F(3) - F(3^-) = 1 - 0.488 = 0.512$.

Obtenção da função de probabilidade por meio de $F(x)$

Como mencionado acima, podemos obter a função de probabilidade de uma variável aleatória discreta por meio da função de distribuição acumulada.
Seja $F(x)$ a função de distribuição acumulada da variável X discreta. Então temos que

$$f(x_i) = F(x_i) - F(x_i^-),$$

em que a notação $F(x_i^-)$ representa o limite de F tendendo a x_i pela esquerda, ou seja, por valores inferiores a x_i.

Por exemplo, no exemplo anterior temos que

- $f(0) = F(0) - F(0^-) = 0.008;$
- $f(1) = F(1) - F(1^-) = 0.104 - 0.008 = 0.096;$
- $f(2) = F(2) - F(2^-) = 0.488 - 0.104 = 0.384;$
- $f(3) = F(3) - F(3^-) = 1 - 0.488 = 0.512.$

Obtenção da função de probabilidade por meio de $F(x)$

Como mencionado acima, podemos obter a função de probabilidade de uma variável aleatória discreta por meio da função de distribuição acumulada.
Seja $F(x)$ a função de distribuição acumulada da variável X discreta. Então temos que

$$f(x_i) = F(x_i) - F(x_i^-),$$

em que a notação $F(x_i^-)$ representa o limite de F tendendo a x_i pela esquerda, ou seja, por valores inferiores a x_i.

Por exemplo, no exemplo anterior temos que

- $f(0) = F(0) - F(0^-) = 0.008$;
- $f(1) = F(1) - F(1^-) = 0.104 - 0.008 = 0.096$;
- $f(2) = F(2) - F(2^-) = 0.488 - 0.104 = 0.384$;
- $f(3) = F(3) - F(3^-) = 1 - 0.488 = 0.512$.

Obtenção da função de probabilidade por meio de $F(x)$

Como mencionado acima, podemos obter a função de probabilidade de uma variável aleatória discreta por meio da função de distribuição acumulada.
Seja $F(x)$ a função de distribuição acumulada da variável X discreta. Então temos que

$$f(x_i) = F(x_i) - F(x_i^-),$$

em que a notação $F(x_i^-)$ representa o limite de F tendendo a x_i pela esquerda, ou seja, por valores inferiores a x_i.

Por exemplo, no exemplo anterior temos que

- $f(0) = F(0) - F(0^-) = 0.008;$
- $f(1) = F(1) - F(1^-) = 0.104 - 0.008 = 0.096;$
- $f(2) = F(2) - F(2^-) = 0.488 - 0.104 = 0.384;$
- $f(3) = F(3) - F(3^-) = 1 - 0.488 = 0.512.$

Obtenção da função de probabilidade por meio de $F(x)$

Como mencionado acima, podemos obter a função de probabilidade de uma variável aleatória discreta por meio da função de distribuição acumulada.
Seja $F(x)$ a função de distribuição acumulada da variável X discreta. Então temos que

$$f(x_i) = F(x_i) - F(x_i^-),$$

em que a notação $F(x_i^-)$ representa o limite de F tendendo a x_i pela esquerda, ou seja, por valores inferiores a x_i.

Por exemplo, no exemplo anterior temos que

- $f(0) = F(0) - F(0^-) = 0.008;$
- $f(1) = F(1) - F(1^-) = 0.104 - 0.008 = 0.096;$
- $f(2) = F(2) - F(2^-) = 0.488 - 0.104 = 0.384;$
- $f(3) = F(3) - F(3^-) = 1 - 0.488 = 0.512.$

Obtenção da função de probabilidade por meio de $F(x)$

Como mencionado acima, podemos obter a função de probabilidade de uma variável aleatória discreta por meio da função de distribuição acumulada.
Seja $F(x)$ a função de distribuição acumulada da variável X discreta. Então temos que

$$f(x_i) = F(x_i) - F(x_i^-),$$

em que a notação $F(x_i^-)$ representa o limite de F tendendo a x_i pela esquerda, ou seja, por valores inferiores a x_i.

Por exemplo, no exemplo anterior temos que

- $f(0) = F(0) - F(0^-) = 0.008;$
- $f(1) = F(1) - F(1^-) = 0.104 - 0.008 = 0.096;$
- $f(2) = F(2) - F(2^-) = 0.488 - 0.104 = 0.384;$
- $f(3) = F(3) - F(3^-) = 1 - 0.488 = 0.512.$

Motivação

Veremos agora duas importantes quantidades utilizadas para resumir uma distribuição de probabilidade de uma variável aleatória X. Essas quantidades são bem simples e são chamadas de média (ou valor esperado) e variância da variável aleatória X.

- Intuitivamente, a média de uma variável aleatória X pode ser pensada como sendo uma medida central, ou no meio da distribuição de probabilidade da variável.
- A variância pode ser interpretada como sendo uma medida de dispersão ou de variabilidade na distribuição de probabilidade da variável.
- Iremos ver, a seguir, como essas quantidades podem ser obtidas para variáveis aleatórias discretas.

Média e variância de variáveis aleatórias discretas

Motivação

Veremos agora duas importantes quantidades utilizadas para resumir uma distribuição de probabilidade de uma variável aleatória X. Essas quantidades são bem simples e são chamadas de média (ou valor esperado) e variância da variável aleatória X.

- Intuitivamente, a média de uma variável aleatória X pode ser pensada como sendo uma medida central, ou no meio da distribuição de probabilidade da variável.
- A variância pode ser interpretada como sendo uma medida de dispersão ou de variabilidade na distribuição de probabilidade da variável.
- Iremos ver, a seguir, como essas quantidades podem ser obtidas para variáveis aleatórias discretas.

Média e variância de variáveis aleatórias discretas

Motivação

Veremos agora duas importantes quantidades utilizadas para resumir uma distribuição de probabilidade de uma variável aleatória X. Essas quantidades são bem simples e são chamadas de média (ou valor esperado) e variância da variável aleatória X.

- Intuitivamente, a média de uma variável aleatória X pode ser pensada como sendo uma medida central, ou no meio da distribuição de probabilidade da variável.
- A variância pode ser interpretada como sendo uma medida de dispersão ou de variabilidade na distribuição de probabilidade da variável.
- Iremos ver, a seguir, como essas quantidades podem ser obtidas para variáveis aleatórias discretas.

Média e variância de variáveis aleatórias discretas

Motivação

Veremos agora duas importantes quantidades utilizadas para resumir uma distribuição de probabilidade de uma variável aleatória X. Essas quantidades são bem simples e são chamadas de média (ou valor esperado) e variância da variável aleatória X.

- Intuitivamente, a média de uma variável aleatória X pode ser pensada como sendo uma medida central, ou no meio da distribuição de probabilidade da variável.
- A variância pode ser interpretada como sendo uma medida de dispersão ou de variabilidade na distribuição de probabilidade da variável.
- Iremos ver, a seguir, como essas quantidades podem ser obtidas para variáveis aleatórias discretas.

Média e variância de variáveis aleatórias discretas

Vamos primeiro considerar o caso de variáveis aleatórias discretas.

Média e variância de variáveis aleatórias discretas

Definição: Seja X uma variável aleatória discreta assumindo valores $x_1, x_2, \ldots$ e com função de probabilidade f. A média (ou valor esperado) de X, denotado por μ ou por $E(X)$, é definida como

$$\mu = E(X) = \sum_{x_i} x_i f(x_i).$$

A variância de X, denotada por σ^2 ou por $Var(X)$, é definida como

$$\sigma^2 = Var(X) = E(X-\mu)^2 = \sum_{x_i} (x_i - \mu)^2 f(x_i)$$

- A raiz quadrada da variância é chamada de desvio-padrão, ou seja, $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ é o desvio-padrão da variável aleatória X.

Média e variância de variáveis aleatórias discretas

Vamos primeiro considerar o caso de variáveis aleatórias discretas.

Média e variância de variáveis aleatórias discretas

Definição: Seja X uma variável aleatória discreta assumindo valores $x_1, x_2, \ldots$ e com função de probabilidade f. A média (ou valor esperado) de X, denotado por μ ou por $E(X)$, é definida como

$$\mu = E(X) = \sum_{x_i} x_i f(x_i).$$

A variância de X, denotada por σ^2 ou por $Var(X)$, é definida como

$$\sigma^2 = Var(X) = E(X - \mu)^2 = \sum_{x_i} (x_i - \mu)^2 f(x_i)$$

- A raiz quadrada da variância é chamada de desvio-padrão, ou seja, $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ é o desvio-padrão da variável aleatória X.

Média e variância de variáveis aleatórias discretas

Vamos primeiro considerar o caso de variáveis aleatórias discretas.

Média e variância de variáveis aleatórias discretas

Definição: Seja X uma variável aleatória discreta assumindo valores $x_1, x_2, \ldots$ e com função de probabilidade f. A média (ou valor esperado) de X, denotado por μ ou por $E(X)$, é definida como

$$\mu = E(X) = \sum_{x_i} x_i f(x_i).$$

A variância de X, denotada por σ^2 ou por $Var(X)$, é definida como

$$\sigma^2 = Var(X) = E(X - \mu)^2 = \sum_{x_i} (x_i - \mu)^2 f(x_i)$$

- A raiz quadrada da variância é chamada de desvio-padrão, ou seja, $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ é o desvio-padrão da variável aleatória X.

Vamos primeiro considerar o caso de variáveis aleatórias discretas.

Média e variância de variáveis aleatórias discretas

Definição: Seja X uma variável aleatória discreta assumindo valores $x_1, x_2, \ldots$ e com função de probabilidade f. A média (ou valor esperado) de X, denotado por μ ou por $E(X)$, é definida como

$$\mu = E(X) = \sum_{x_i} x_i f(x_i).$$

A variância de X, denotada por σ^2 ou por $Var(X)$, é definida como

$$\sigma^2 = Var(X) = E(X - \mu)^2 = \sum_{x_i} (x_i - \mu)^2 f(x_i)$$

- A raiz quadrada da variância é chamada de desvio-padrão, ou seja, $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ é o desvio-padrão da variável aleatória X.

Interpretações

- Note que a média de uma variável aleatória discreta é uma média ponderada dos valores possíveis que a variável aleatória pode assumir, sendo que os pesos são iguais às probabilidades.
- Observe ainda que a variância de uma variável aleatória X discreta é uma medida de dispersão dos valores que a variável assume em relação à média. Note que na variância é usado o peso $f(x_i)$ como o multiplicador de cada desvio quadrático $(x_i - \mu)^2$.

Interpretações

- Note que a média de uma variável aleatória discreta é uma média ponderada dos valores possíveis que a variável aleatória pode assumir, sendo que os pesos são iguais às probabilidades.
- Observe ainda que a variância de uma variável aleatória X discreta é uma medida de dispersão dos valores que a variável assume em relação à média. Note que na variância é usado o peso $f(x_i)$ como o multiplicador de cada desvio quadrático $(x_i - \mu)^2$.

Alternativa ao cálculo da variância

Note que uma maneira alternativa, que em alguns casos pode simplificar os cálculos, de se obter a variância de uma variável aleatória discreta é a seguinte:

$$Var(X) = \sum_{x_i} (x_i - \mu)^2 f(x_i) = \sum_{x_i} (x_i^2 - 2x_i\mu + \mu^2) f(x_i)$$

ou seja,

$$Var(X) = \sum_{x_i} x_i^2 f(x_i) - 2\mu \sum_{x_i} x_i f(x_i) + \mu^2 \sum_{x_i} f(x_i)$$

ou ainda

$$Var(X) = \sum_{x_i} x_i^2 f(x_i) - 2\mu^2 + \mu^2 = \sum_{x_i} x_i^2 f(x_i) - \mu^2.$$

Ou seja, a variância de uma variável aleatória X discreta também pode ser calculada da forma

$$Var(X) = \sum_{x_i} x_i^2 f(x_i) - \mu^2.$$

Exemplo

Ex.: Considere novamente o exemplo: Em um processo de fabricação de semicondutores, três pastilhas de um lote são testadas. Cada pastilha é classificada como passa ou falha. Suponha que a probabilidade de uma pastilha passar no teste seja 0.8 e que as pastilhas sejam independentes. Determine o número médio e a variância do numero de pastilhas de um lote que passa no teste.

- Sol.: Seja X a variável aleatória definida como o numero de pastilhas de um lote que passa no teste.
- Já obtivemos a função de probabilidade de X, ou seja,

x	0	1	2	3
$f(x)$	0.008	0.096	0.384	0.512

- Note que queremos calcular $E(X)$ e $Var(X)$. Temos que

$$\mu = E(X) = \sum_{x_i} x_i f(x_i) = 0f(0) + 1f(1) + 2f(2) + 3f(3)$$

ou seja,

$$\mu = E(X) = 0(0.008) + 1(0.096) + 2(0.384) + 3(0.512) = 2.4$$

Exemplo

Ex.: Considere novamente o exemplo: Em um processo de fabricação de semicondutores, três pastilhas de um lote são testadas. Cada pastilha é classificada como passa ou falha. Suponha que a probabilidade de uma pastilha passar no teste seja 0.8 e que as pastilhas sejam independentes. Determine o número médio e a variância do numero de pastilhas de um lote que passa no teste.

- Sol.: Seja X a variável aleatória definida como o numero de pastilhas de um lote que passa no teste.
- Já obtivemos a função de probabilidade de X, ou seja,

x	0	1	2	3
$f(x)$	0.008	0.096	0.384	0.512

- Note que queremos calcular $E(X)$ e $Var(X)$. Temos que

$$\mu = E(X) = \sum_{x_i} x_i f(x_i) = 0f(0) + 1f(1) + 2f(2) + 3f(3)$$

ou seja,

$$\mu = E(X) = 0(0.008) + 1(0.096) + 2(0.384) + 3(0.512) = 2.4$$

Exemplo

Ex.: Considere novamente o exemplo: Em um processo de fabricação de semicondutores, três pastilhas de um lote são testadas. Cada pastilha é classificada como passa ou falha. Suponha que a probabilidade de uma pastilha passar no teste seja 0.8 e que as pastilhas sejam independentes. Determine o número médio e a variância do numero de pastilhas de um lote que passa no teste.

- Sol.: Seja X a variável aleatória definida como o numero de pastilhas de um lote que passa no teste.
- Já obtivemos a função de probabilidade de X, ou seja,

x	0	1	2	3
$f(x)$	0.008	0.096	0.384	0.512

- Note que queremos calcular $E(X)$ e $Var(X)$. Temos que

$$\mu = E(X) = \sum_{x_i} x_i f(x_i) = 0f(0) + 1f(1) + 2f(2) + 3f(3)$$

ou seja,

$$\mu = E(X) = 0(0.008) + 1(0.096) + 2(0.384) + 3(0.512) = 2.4$$

Exemplo

Ex.: Considere novamente o exemplo: Em um processo de fabricação de semicondutores, três pastilhas de um lote são testadas. Cada pastilha é classificada como passa ou falha. Suponha que a probabilidade de uma pastilha passar no teste seja 0.8 e que as pastilhas sejam independentes. Determine o número médio e a variância do numero de pastilhas de um lote que passa no teste.

- Sol.: Seja X a variável aleatória definida como o numero de pastilhas de um lote que passa no teste.
- Já obtivemos a função de probabilidade de X, ou seja,

x	0	1	2	3
$f(x)$	0.008	0.096	0.384	0.512

- Note que queremos calcular $E(X)$ e $Var(X)$. Temos que

$$\mu = E(X) = \sum_{x_i} x_i f(x_i) = 0f(0) + 1f(1) + 2f(2) + 3f(3)$$

ou seja,

$$\mu = E(X) = 0(0.008) + 1(0.096) + 2(0.384) + 3(0.512) = 2.4$$

Exemplo

Ex.: Considere novamente o exemplo: Em um processo de fabricação de semicondutores, três pastilhas de um lote são testadas. Cada pastilha é classificada como passa ou falha. Suponha que a probabilidade de uma pastilha passar no teste seja 0.8 e que as pastilhas sejam independentes. Determine o número médio e a variância do numero de pastilhas de um lote que passa no teste.

- Sol.: Seja X a variável aleatória definida como o numero de pastilhas de um lote que passa no teste.
- Já obtivemos a função de probabilidade de X, ou seja,

x	0	1	2	3
$f(x)$	0.008	0.096	0.384	0.512

- Note que queremos calcular $E(X)$ e $Var(X)$. Temos que

$$\mu = E(X) = \sum_{x_i} x_i f(x_i) = 0f(0) + 1f(1) + 2f(2) + 3f(3)$$

ou seja,

$$\mu = E(X) = 0(0.008) + 1(0.096) + 2(0.384) + 3(0.512) = 2.4$$

Cont. do exemplo

- Temos ainda que a variância de X é dada por

$$\sigma^2 = \sum_{x_i}(x_i - \mu)^2 f(x_i) = (0-2.4)^2 f(0) + (1-2.4)^2 f(1) + (2-2.4)^2 f(2) + (3-2.4)^2 f(3).$$

ou seja,

$$\sigma^2 = 0.04608 + 0.18816 + 0.06144 + 0.18432 = 0.48.$$

- Portanto, temos que a média e a variância da variável aleatória X desse problema são $E(X) = 2.4$ e $Var(X) = 0.48$.
- Note que as unidades de medidas da média e da variância não são as mesmas, o que torna difícil a interpretação. Contudo, note que as unidades do desvio-padrão são as mesmas unidades da variável aleatória, o que torna o desvio-padrão ser fácil de se interpretar. No exemplo acima, temos que o desvio de X, em relação à sua média, é de $\sqrt{0.48} \approx 0.6928$.

Cont. do exemplo

- Temos ainda que a variância de X é dada por

$$\sigma^2 = \sum_{x_i} (x_i - \mu)^2 f(x_i) = (0-2.4)^2 f(0) + (1-2.4)^2 f(1) + (2-2.4)^2 f(2) + (3-2.4)^2 f(3).$$

ou seja,

$$\sigma^2 = 0.04608 + 0.18816 + 0.06144 + 0.18432 = 0.48.$$

- Portanto, temos que a média e a variância da variável aleatória X desse problema são $E(X) = 2.4$ e $Var(X) = 0.48$.
- Note que as unidades de medidas da média e da variância não são as mesmas, o que torna difícil a interpretação. Contudo, note que as unidades do desvio-padrão são as mesmas unidades da variável aleatória, o que torna o desvio-padrão ser fácil de se interpretar. No exemplo acima, temos que o desvio de X, em relação à sua média, é de $\sqrt{0.48} \approx 0.6928$.

Cont. do exemplo

- Temos ainda que a variância de X é dada por

$$\sigma^2 = \sum_{x_i}(x_i-\mu)^2 f(x_i) = (0-2.4)^2 f(0)+(1-2.4)^2 f(1)+(2-2.4)^2 f(2)+(3-2.4)^2 f(3).$$

ou seja,

$$\sigma^2 = 0.04608 + 0.18816 + 0.06144 + 0.18432 = 0.48.$$

- Portanto, temos que a média e a variância da variável aleatória X desse problema são $E(X) = 2.4$ e $Var(X) = 0.48$.
- Note que as unidades de medidas da média e da variância não são as mesmas, o que torna difícil a interpretação. Contudo, note que as unidades do desvio-padrão são as mesmas unidades da variável aleatória, o que torna o desvio-padrão ser fácil de se interpretar. No exemplo acima, temos que o desvio de X, em relação à sua média, é de $\sqrt{0.48} \approx 0.6928$.

Cont. do exemplo

- Temos ainda que a variância de X é dada por

$$\sigma^2 = \sum_{x_i}(x_i - \mu)^2 f(x_i) = (0-2.4)^2 f(0) + (1-2.4)^2 f(1) + (2-2.4)^2 f(2) + (3-2.4)^2 f(3).$$

ou seja,

$$\sigma^2 = 0.04608 + 0.18816 + 0.06144 + 0.18432 = 0.48.$$

- Portanto, temos que a média e a variância da variável aleatória X desse problema são $E(X) = 2.4$ e $Var(X) = 0.48$.
- Note que as unidades de medidas da média e da variância não são as mesmas, o que torna difícil a interpretação. Contudo, note que as unidades do desvio-padrão são as mesmas unidades da variável aleatória, o que torna o desvio-padrão ser fácil de se interpretar. No exemplo acima, temos que o desvio de X, em relação à sua média, é de $\sqrt{0.48} \approx 0.6928$.

Valor esperado de uma função de uma variável aleatória discreta

- Se X for uma variável aleatória discreta com função de probabilidade f, temos que

$$E(h(X)) = \sum_{x_i} h(x_i) f(x_i).$$

- Note que, por exemplo, a variância de X pode ser vista como o valor esperado de uma particular função da variável X, a saber: $h(X) = (X - \mu)^2$.
- Por exemplo, se no exemplo anterior estivéssemos interessados em calcular o valor esperado de $h(X) = X^2$, então

$$E(h(X)) = \sum_{x_i} x_i^2 f(x_i) = 0^2 f(0) + 1^2 f(1) + 2^2 f(2) + 3^2 f(3).$$

ou seja,

$$E(h(X)) = 0^2(0.008) + 1^2(0.096) + 2^2(0.384) + 3^2(0.512) = 6.24.$$

Valor esperado de uma função de uma variável aleatória discreta

- Se X for uma variável aleatória discreta com função de probabilidade f, temos que

$$E(h(X)) = \sum_{x_i} h(x_i) f(x_i).$$

- Note que, por exemplo, a variância de X pode ser vista como o valor esperado de uma particular função da variável X, a saber: $h(X) = (X - \mu)^2$.
- Por exemplo, se no exemplo anterior estivéssemos interessados em calcular o valor esperado de $h(X) = X^2$, então

$$E(h(X)) = \sum_{x_i} x_i^2 f(x_i) = 0^2 f(0) + 1^2 f(1) + 2^2 f(2) + 3^2 f(3).$$

ou seja,

$$E(h(X)) = 0^2(0.008) + 1^2(0.096) + 2^2(0.384) + 3^2(0.512) = 6.24.$$

Valor esperado de uma função de uma variável aleatória discreta

- Se X for uma variável aleatória discreta com função de probabilidade f, temos que

$$E(h(X)) = \sum_{x_i} h(x_i)f(x_i).$$

- Note que, por exemplo, a variância de X pode ser vista como o valor esperado de uma particular função da variável X, a saber: $h(X) = (X - \mu)^2$.
- Por exemplo, se no exemplo anterior estivéssemos interessados em calcular o valor esperado de $h(X) = X^2$, então

$$E(h(X)) = \sum_{x_i} x_i^2 f(x_i) = 0^2 f(0) + 1^2 f(1) + 2^2 f(2) + 3^2 f(3).$$

ou seja,

$$E(h(X)) = 0^2(0.008) + 1^2(0.096) + 2^2(0.384) + 3^2(0.512) = 6.24.$$

Valor esperado de uma função de uma variável aleatória discreta

- Se X for uma variável aleatória discreta com função de probabilidade f, temos que

$$E(h(X)) = \sum_{x_i} h(x_i) f(x_i).$$

- Note que, por exemplo, a variância de X pode ser vista como o valor esperado de uma particular função da variável X, a saber: $h(X) = (X - \mu)^2$.
- Por exemplo, se no exemplo anterior estivéssemos interessados em calcular o valor esperado de $h(X) = X^2$, então

$$E(h(X)) = \sum_{x_i} x_i^2 f(x_i) = 0^2 f(0) + 1^2 f(1) + 2^2 f(2) + 3^2 f(3).$$

ou seja,

$$E(h(X)) = 0^2(0.008) + 1^2(0.096) + 2^2(0.384) + 3^2(0.512) = 6.24.$$

Valor esperado de uma função de uma variável aleatória discreta

- Se X for uma variável aleatória discreta com função de probabilidade f, temos que

$$E(h(X)) = \sum_{x_i} h(x_i) f(x_i).$$

- Note que, por exemplo, a variância de X pode ser vista como o valor esperado de uma particular função da variável X, a saber: $h(X) = (X - \mu)^2$.
- Por exemplo, se no exemplo anterior estivéssemos interessados em calcular o valor esperado de $h(X) = X^2$, então

$$E(h(X)) = \sum_{x_i} x_i^2 f(x_i) = 0^2 f(0) + 1^2 f(1) + 2^2 f(2) + 3^2 f(3).$$

ou seja,

$$E(h(X)) = 0^2(0.008) + 1^2(0.096) + 2^2(0.384) + 3^2(0.512) = 6.24.$$

Valor esperado de uma função de uma variável aleatória discreta

- Se X for uma variável aleatória discreta com função de probabilidade f, temos que

$$E(h(X)) = \sum_{x_i} h(x_i)f(x_i).$$

- Note que, por exemplo, a variância de X pode ser vista como o valor esperado de uma particular função da variável X, a saber: $h(X) = (X - \mu)^2$.
- Por exemplo, se no exemplo anterior estivéssemos interessados em calcular o valor esperado de $h(X) = X^2$, então

$$E(h(X)) = \sum_{x_i} x_i^2 f(x_i) = 0^2 f(0) + 1^2 f(1) + 2^2 f(2) + 3^2 f(3).$$

ou seja,

$$E(h(X)) = 0^2(0.008) + 1^2(0.096) + 2^2(0.384) + 3^2(0.512) = 6.24.$$