1 ADT Model

```
PriorityQueue  Initialize( int MaxElements );
void  Insert( ElementType X, PriorityQueue H );
ElementType  DeleteMin( PriorityQueue H );
ElementType  FindMin( PriorityQueue H );
```

2 Simple Implementations

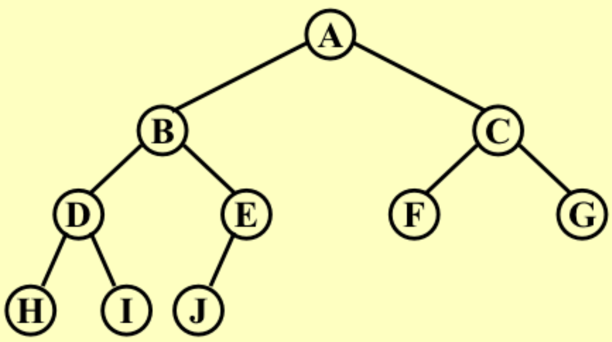
- **Array :**
  - **Insertion** — add one item at the end ~ $\Theta(1)$
  - **Deletion** — find the largest \ smallest key ~ $\Theta(n)$
    remove the item and shift array ~ $O(n)$
- **Linked List :**
  - **Insertion** — add to the front of the chain ~ $\Theta(1)$
  - **Deletion** — find the largest \ smallest key ~ $\Theta(n)$
    remove the item ~ $\Theta(1)$
- **Ordered Array :**
  - **Insertion** — find the proper position ~ $O(n)$
    shift array and add the item ~ $O(n)$
  - **Deletion** — remove the first \ last item ~ $\Theta(1)$
- **Ordered Linked List :**
  - **Insertion** — find the proper position ~ $O(n)$
    add the item ~ $\Theta(1)$
  - **Deletion** — remove the first \ last item ~ $\Theta(1)$

3 Binary Heap

3.1 Structure Property

- 【Definition】A binary tree with n nodes and height h is complete iff its nodes correspond to the nodes numbered from 1 to n in the perfect binary tree of height h.

❖ **Array Representation : BT [n + 1] (BT [0] is not used)**



BT

0	1	2	3	4	5	6
	A	B	C	D	E	F

7	8	9	10	11	12	13
G	H	I	J			

- 先保证层次遍历连续，那么就可以用数组来存他，可以用公式找parent和child

【Lemma】If a complete binary tree with n nodes is represented sequentially, then for any node with index i, $1 \le i \le n$, we have:

$$\text{(1) index of } parent(i) = \begin{cases} \lfloor i/2 \rfloor & \text{if } i \ne 1 \\ \text{None} & \text{if } i = 1 \end{cases}$$

$$\text{(2) index of } left\_child(i) = \begin{cases} 2i & \text{if } 2i \le n \\ \text{None} & \text{if } 2i > n \end{cases}$$

$$\text{(3) index of } right\_child(i) = \begin{cases} 2i+1 & \text{if } 2i+1 \le n \\ \text{None} & \text{if } 2i+1 > n \end{cases}$$

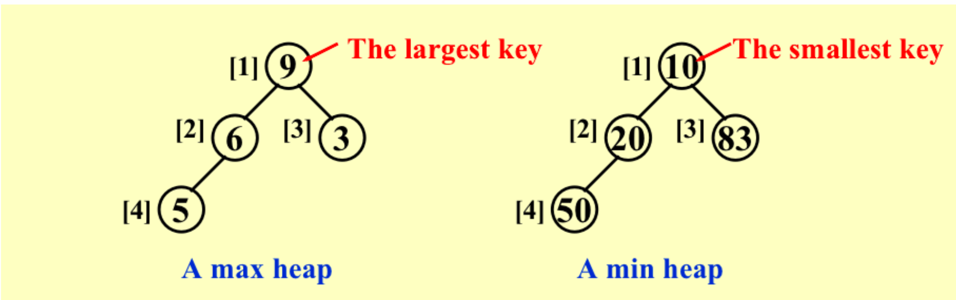
```
PriorityQueue  Initialize( int  MaxElements )
{
     PriorityQueue  H;
     if ( MaxElements < MinPQSize )
```

```c
        return  Error( "Priority queue size is too small" );
    H = malloc( sizeof ( struct HeapStruct ) );
    if ( H == NULL )
        return  FatalError( "Out of space!!!" );
    /* Allocate the array plus one extra for sentinel */
    H->Elements = malloc(( MaxElements + 1 ) * sizeof( ElementType ));
    if ( H->Elements == NULL )
        return  FatalError( "Out of space!!!" );
    H->Capacity = MaxElements;
    H->Size = 0;
    H->Elements[ 0 ] = MinData;  /* set the sentinel */
    return  H;
}
```

- 这里的0单元存了一个很小的数

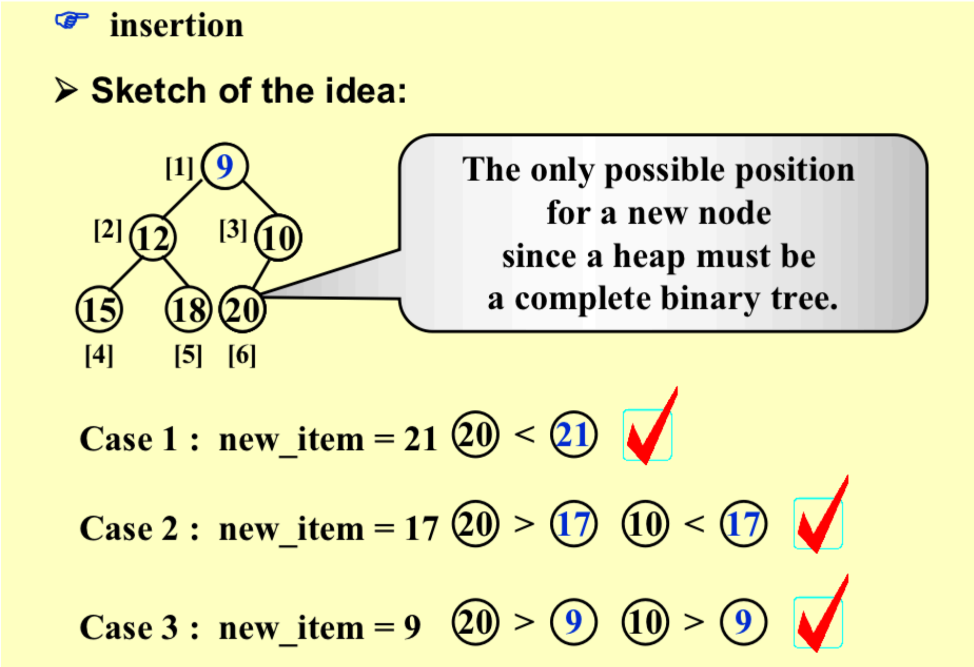
3.2 Heap Order Property

- 【Definition】A min tree is a tree in which the key value in each node is no larger than the key values in its children (if any). A min heap is a complete binary tree that is also a min tree.



3.3 Basic Heap Operations

3.3.1 insertion

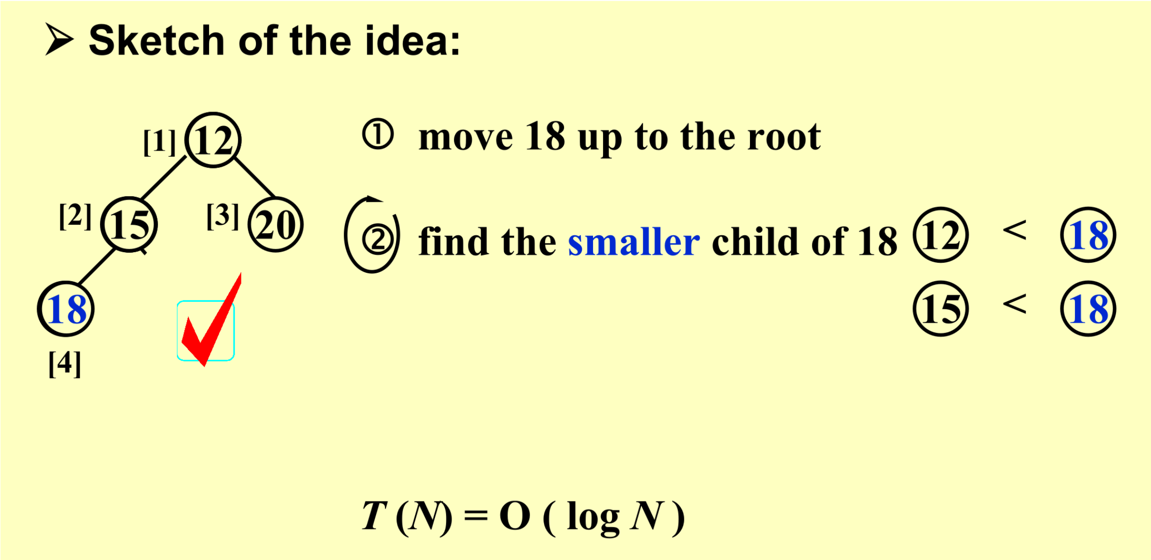


- 在最大堆中，父节点的值比每一个子节点的值都要大。在最小堆中，父节点的值比每一个子节点的值都要小。根据这一属性，那么最大堆总是将其中的最大值存放在树的根节点。而对于最小堆，根节点中的元素总是树中的最小值。

```
/* H->Element[ 0 ] is a sentinel */
// 实际上分为两步：找到合适位置（小于父节点 && 大于子节点），插入
void  Insert( ElementType  X,  PriorityQueue  H )
{
      int  i;

      if ( IsFull( H ) ) {
        Error( "Priority queue is full" );
        return;
      }

      for ( i = ++H->Size; H->Elements[ i / 2 ] > X; i /= 2 )
        H->Elements[ i ] = H->Elements[ i / 2 ];
       // 循环
       // 父节点的值换一下，要继续找值，最后会找到一个大于自己的父节点
       // 退出，直接执行下面这条
      H->Elements[ i ] = X; //对的，直接插进去就好了
}

```

- 0这个位置存了一个很小的数，是为了防止跳到根节点，一直在0这个节点死循环，因此置一个很小的数来使循环跳出

3.3.2 Delete Min

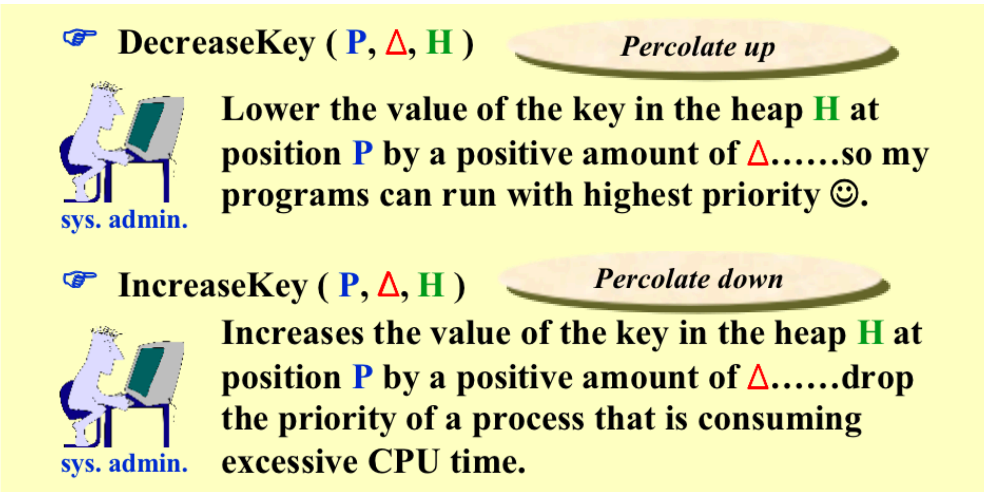


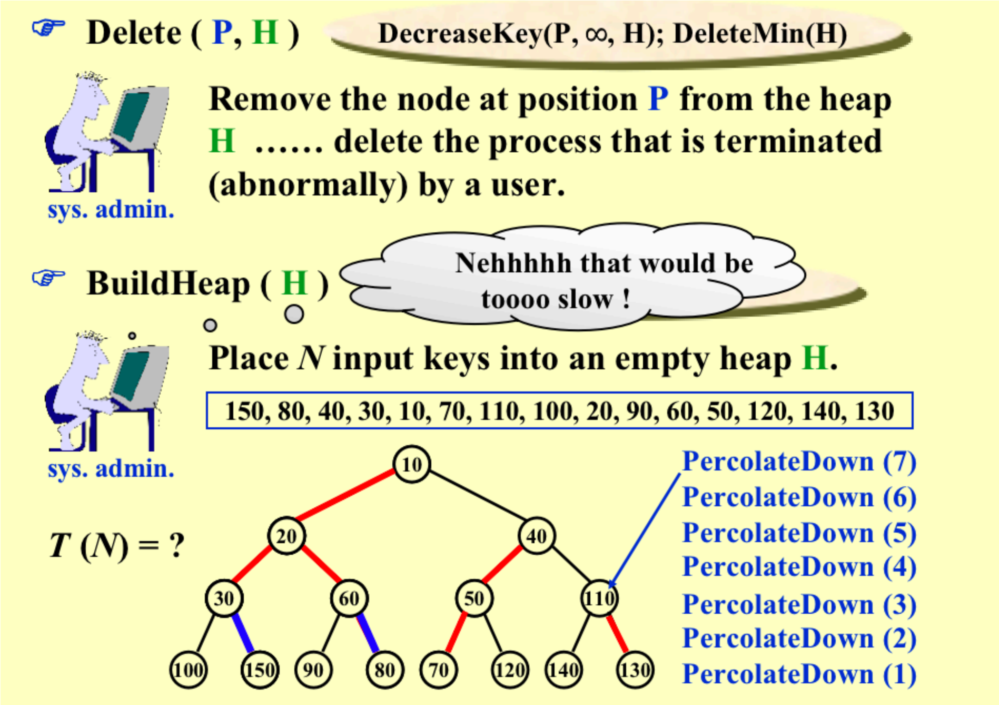
- 把最小的数删掉，直接上就是把根节点摘掉，但是要保持一个完整的树
- 先把最后一个数18移过来，然后根据自己和两个子节点来判断往哪移

```
ElementType  DeleteMin( PriorityQueue  H )
{
    int  i, Child;
    ElementType  MinElement, LastElement;
    if ( IsEmpty( H ) ) {
         Error( "Priority queue is empty" );
         return  H->Elements[ 0 ];
    }
    MinElement = H->Elements[ 1 ];  /* save the min element */

    LastElement = H->Elements[ H->Size-- ]; /* take last and reset size */

    for ( i = 1; i * 2 <= H->Size; i = Child ) {
      /* Find smaller child */
         Child = i * 2;

         if (Child != H->Size && H->Elements[Child+1] < H->Elements[Child])
           Child++; // 右节点更小，那就选择右子节点作为下个可能要更换的节点

         if ( LastElement > H->Elements[ Child ] )
           /* Percolate one level */
           // 说明此时的节点数值仍大于子节点数值，要更换，每次都是选三个里面最小的那个换
```

```
            // 要么就是和子节点换，那么就是进入if这里，要么就是自己是最小的
            // 进入else，此时可以break跳出循环
            H->Elements[ i ] = H->Elements[ Child ];
          else break;
            /* find the proper position */

      }
      H->Elements[ i ] = LastElement;
      return  MinElement;
}

```

3.4 Other Heap Operation





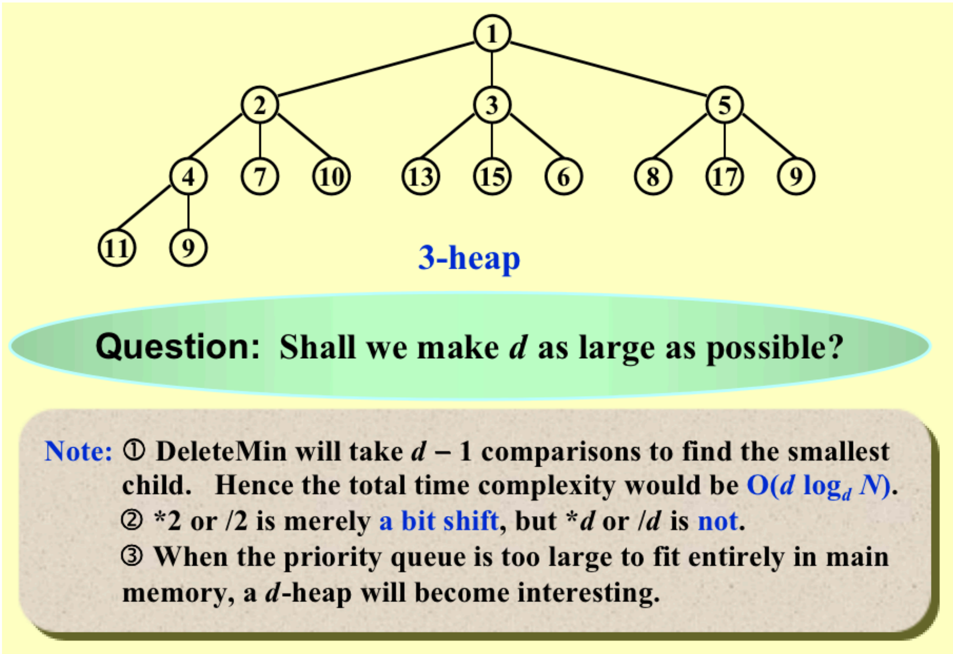
- 3.建堆

  (1)首先把数组按照层序（level order）放在一个空堆中
  (2)从最后一个父节点开始，让父节点，右孩子，左孩子中最小的放在父节点的位置。
  (3)如果父节点被换下去了，那么必须执行shiftdown操作，即被换下去的结点与当前的子节点比较，并交换，直到符合比任何一个子节点大的条件。

- **T (N) = O (N)** ， 最多需要2N-2次

4 Application

5 d-Heaps ---- All nodes have d children



- `Delete Min`：每层进行d次比较，找最小；一共走$\log_d N$层。故$T(N) = O(d\log_d N)$.

6 Problems

- If a binary search tree of N nodes is complete, which one of the following statements is FALSE?
  - the maximum key must be at a leaf node （F）可以没有右节点
  - the median node must either be the root or in the left subtree（T）完整二叉搜索树是左节点多于右边的，中位数偏向左边
- 完整二叉搜索树：一棵深度为k的有n个结点的二叉树，对树中的结点按从上至下、从左到右的顺序进行编号，如果编号为i（1≤i≤n）的结点与满二叉树中编号为i的结点在二叉树中的位置相同，则这棵二叉树称为完全二叉树。
- 也就是符合堆的排列的那种上面、左边先填满
- If a complete binary tree with 137 nodes is stored in an array (root at position 1), then the nodes at positions 128 and 137 are at the same level.(T)

$$N = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q} + M = q^n - 1 + M = 2^n - 1 + M \tag{1}$$

- 前127个，符合$2^7 - 1 = 127$，他们位于一个完整无多的二叉树，后面的位于同一层