*R*ozwiązywanie równania macierzowego $AX = B$

za pomocą rozkładu Cholesky'ego-Banachiewicza

Tymoteusz Kwieciński

Grudzień 2022

Spis treści

1 Opis zadania

Moim zadaniem było rozwiązywanie równania macierzowego $AX = B$, gdzie $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ jest macierzą symetryczną oraz dodatnio określoną, zaś macierz $B \in \mathbf{R}^{n \times m}, \quad m \geq 1$, przy pomocy metody Cholesky'ego-Banachiewicza.

2 Opis używanej metody

Metoda Cholesky'ego-Banachiewicza rozwiązywania równania macierzowego $AX = B$, polega na rozkładzie macierzy symetrycznej, dodatnio określonej A na iloczyn macierzy $L \cdot L^T$, gdzie macierz L jest macierzą dolnotrójkątną.

Po rozłożeniu macierzy A na iloczyn macierzy $L \cdot L^T$ należy rozwiązać dwa proste równania macierzowe:

1. $LY = B$, L jest macierzą dolnotrójkątną.
2. $L^T X = B$, L^T jest macierzą górnotrójkątną.

Wówczas macierz X jest szukanym rozwiązaniem równania, gdyż spełnia ona równanie:

$$AX = L(L^T X) = LY = B$$

3 Sposób implementacji

Zadanie zostało zaimplementowane w programie MATlab. Program składa się z kilku funkcji, które wzajemnie składają się na rozwiązanie zadania.

4 Sposób pomiaru błędu

Aby zweryfikować poprawność stosowanego przeze mnie algorytmu ustaliłem prosty sposób weryfikacji błędu otrzymywanej macierzy X.

Miarą błędu było odchylenie przeciętne wartości macierzy AX oraz macierzy B, gdzie macierz X jest znalezionym rozwiązaniem równania $AX = B$.

5 Przykłady

Aby sprawdzić zachowanie, poprawność i wydajność napisanej przeze mnie funkcji rozwiązującej równanie macierzowe $AX = B$ przy użyciu metody Cholesky'ego-Banachiewicza, przetestowałem ją na kilku przykładowych macierzach.

Dodatkowo wyniki były porównywane z wynikami funkcji rozwiązującej równanie $AX = B$ przy użyciu wbudowanej funkcji programu $MATlab$ odwracającej macierz - $inv()$. Funkcja rozwiązywała układ równań szukając wpierw macierzy A^{-1} - odwrotnej do A, a następnie mnożąc ją lewostronnie z macierzą B.

Przykład 1.

Macierz A jest jednostkowa o wymiarach 3×3, zaś B macierzą o wymiarach 3×4 o wartościach losowych.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0.5377 & 0.8622 & -0.4336 & 2.7694 \\ 1.8339 & 0.3188 & 0.3426 & -1.3499 \\ -2.2588 & -1.3077 & 3.5784 & 3.0349 \end{pmatrix}$$

W tym przypadku, algorytm sprawdził się bardzo dobrze. Rozłożył macierz A dokładnie na iloczyn dwóch macierzy jednostkowych, a także ustalił precyzyjnie $X = B$.
Podobnie dobrze sprawdziła się również funkcja używająca wbudowaną funkcję programu MATlab *inv*.

Przykład 2.

Macierz A jest macierzą symetryczną, dodatnio określoną o wymiarach 3×3, gdzie na miejscu (i, j) macierzy A stoi największy wspólny dzielnik i oraz j. B jest macierzą jednostkową o wymiarach 3×3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

W tym przypadku napisana przeze mnie metoda zwróciła macierz X będącą bardzo blisko poprawnego wyniku. Odchylenie przeciętne odpowiadających współczynników wynosiło

Badana metoda	Cholesky-Banachiewicz	wbudowana funkcja *inv*
Przybliżony błąd	10^{-16}	0

Przykład 3.

Przykład numer 3 ma na celu sprawdzenie jak zaimplementowane funkcje radzą sobie z napotkanymi błędami. W tym przypadku podana macierz A nie jest dodatnio określona.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zgodnie z przewidywaniami, algorytm nie poradził sobie z rozwiązaniem równania, gdyż rozwiązanie równania $AX = B$ z takimi danymi jak wyżej nie istnieje.

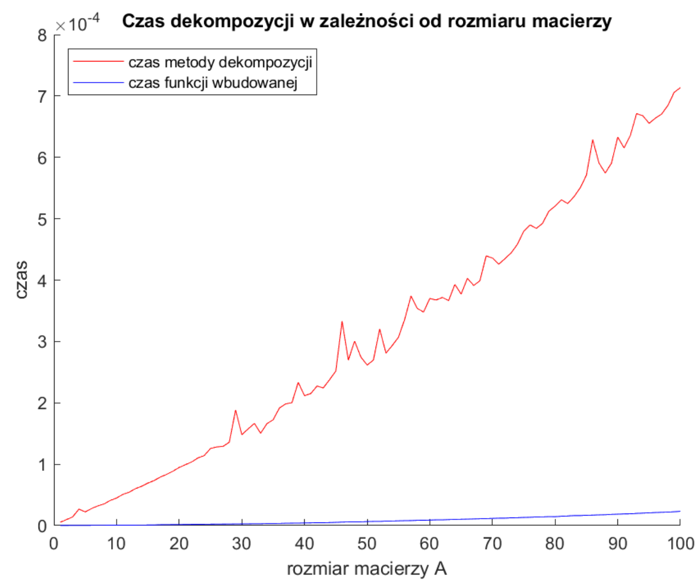
6 Dalsze przykłady

W tym oraz następnych przykładach analizować będę wielokrotne przykłady - to znaczy przy pomocy funkcji *gallery* programu MATlab generowałem coraz macierze A o wymiarach $n \times n$ dla zwiększających się wartości n. W ten sposób można łatwo porównać dokładność metody wykorzystującej wbudowaną funkcję programu MATlab oraz tą napisaną przeze mnie.

Co więcej takie podejście pokazuje, że zaimplementowana przeze mnie funkcja rzeczywiście działa - na przykładach różnego typu i rozmiarów.

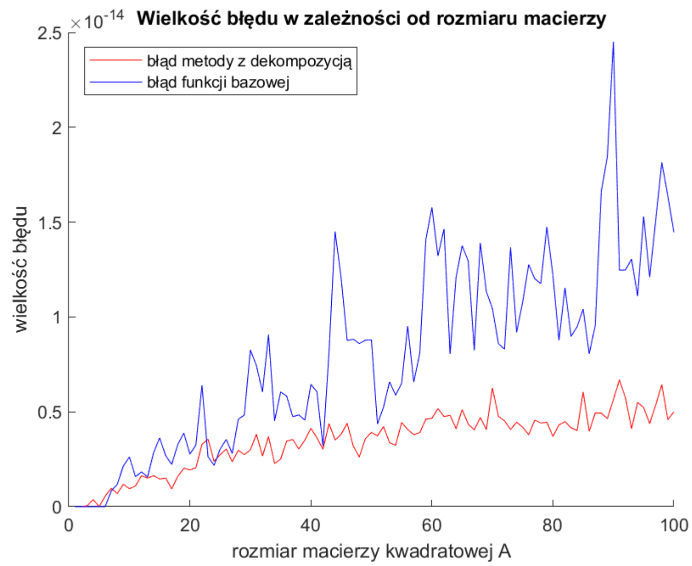
Przykład 4.

Macierz A o wymiarach $n \times n$ jest macierzą najmniejszej wspólnej wielokrotności - A jest macierzą symetryczną, dodatnio określoną o wymiarach 3×3, gdzie na miejscu (i, j) macierzy A stoi największy wspólny dzielnik i oraz j. Macierz B jest macierzą o wymiarach $n \times 4$ o współczynnikach naturalnych nie większych niż 10, generowana losowo.



Rysunek 1: Wykres czasu wykonywania dekompozycji różnymi metodami dla macierzy najmniejszej wspólnej wielokrotności

Jak widać, zaimplementowana przez nas metoda wykorzystująca dekompozycje sprawuje się trochę lepiej dla macierzy większych wymiarów, niż wbudowana metoda. Jest jednak od niej znacząco wolniejsza i mniej stabilna czasowo.

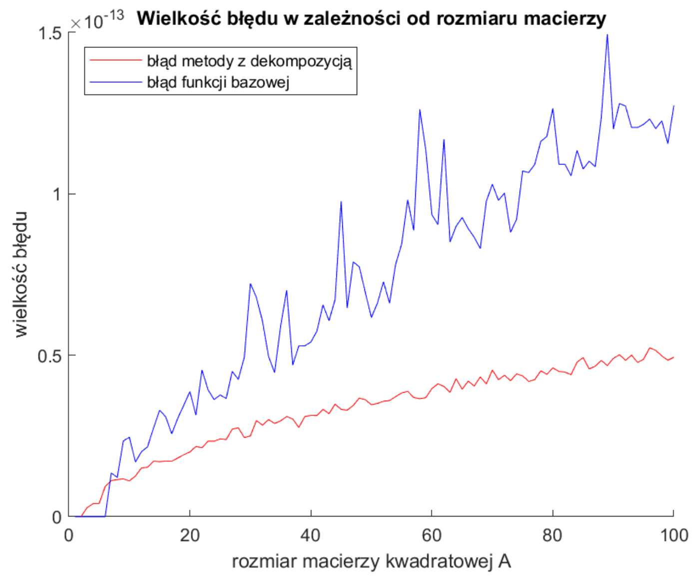


Rysunek 2: Wykres odchylenia przeciętnego iloczynu znalezionego rozwiązania dla macierzy najmniejszej wspólnej wielokrotności i losowej macierzy B o 4 kolumnach

Przykład 5.

Podobnie jak w poprzednim przykładzie macierz A jest macierzą najmniejszej wspólnej wielokrotności i losowej macierzy B o wartościach naturalnych nie większych od 100, tym razem macierz B ma 100 kolumn

Podobnie jak w poprzednim przykładzie wartość błędu jest mniejsza w przypadku metody używającej dekompozycję, ale jej czas działania jest dłuższy.

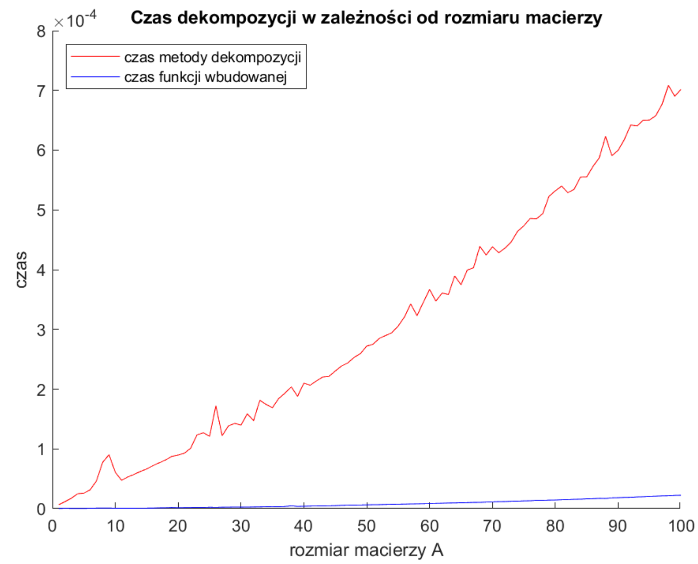


Rysunek 3: Wykres odchylenia przeciętnego iloczynu znalezionego rozwiązania dla macierzy najmniejszej wspólnej wielokrotności i losowej macierzy B o 100 kolumnach

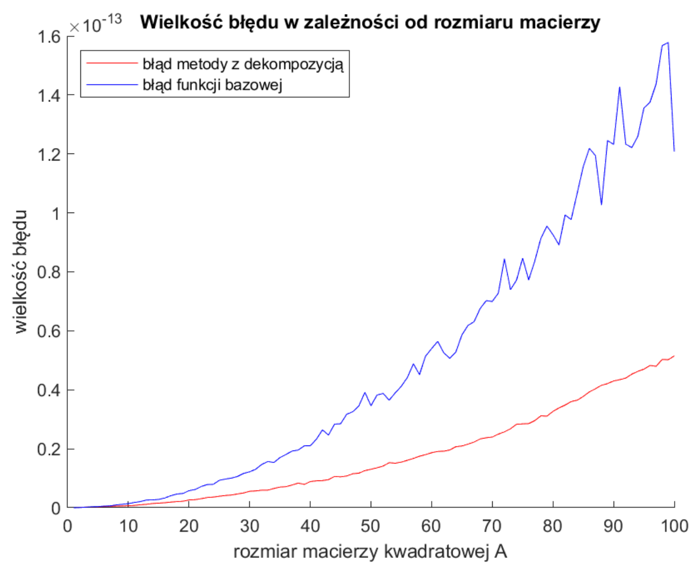
Przykład 6.

Macierz A o wymiarach $n \times n$ jest dodatnio określoną, symetryczną macierzą Lehmera. Macierz B jest macierzą o wymiarach $n \times 100$ o współczynnikach losowych z rozkładu normalnego.

Ponownie, zaimplementowana przeze mnie metoda daje bardziej dokładne rezultaty, ale sprawowała się znacznie wolniej.



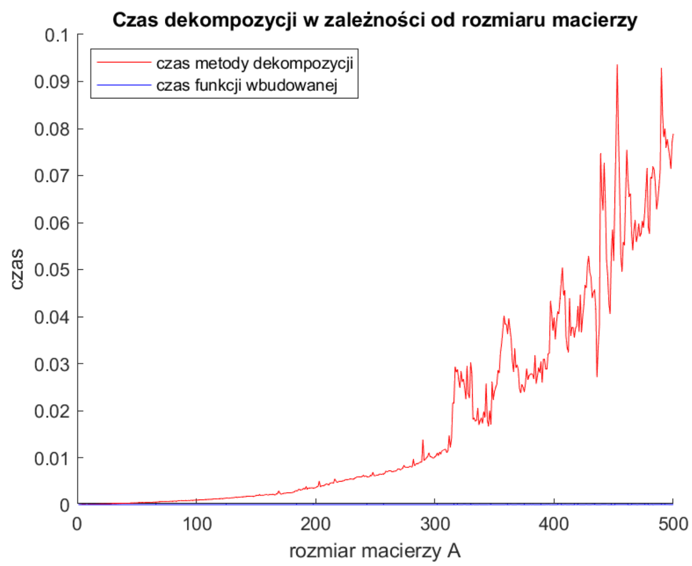
Rysunek 4: Wykres czasu wykonywania dekompozycji różnymi metodami dla macierzy Lehmera



Rysunek 5: Wykres odchylenia przeciętnego iloczynu znalezionego rozwiązania dla macierzy Lehmera i losowej macierzy B o 100 kolumnach

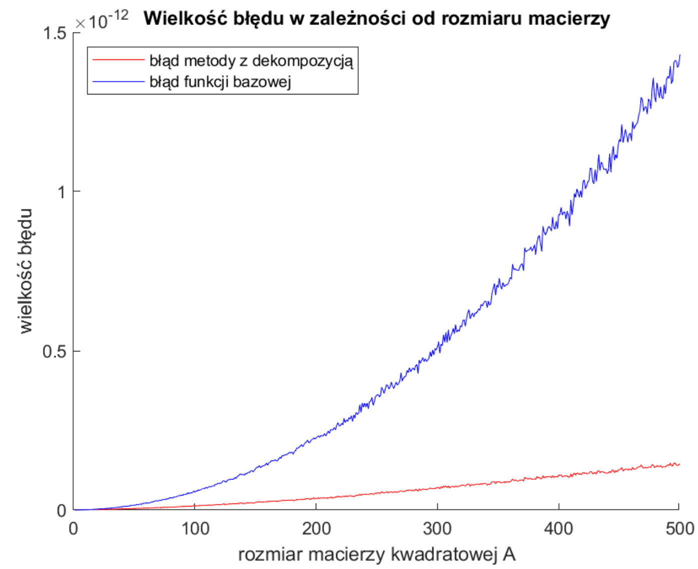
Przykład 7

W tym przypadku macierz A jest macierzą rzadką o współczynnikach tylko na trzech diagonalach o wymiarach $n \times n$ gdzie n jest nie większe niż 500, zaś macierz B jest macierzą o wymiarach $n \times 200$ o współczynnikach losowych z rozkładu normalnego.



Rysunek 6: Wykres czasu wykonywania dekompozycji różnymi metodami dla rzadkiej macierzy

Ponownie, zaimplementowana funkcja zwróciła dokładniejsze wyniki. Również w tym przypadku jej czas działania był znacznie dłuższy



Rysunek 7: Wykres odchylenia przeciętnego iloczynu znalezionego rozwiązania dla macierzy rzadkiej i losowej macierzy B o 200 kolumnach

7 Jeszcze więcej przykładów

Aby sprawdzić wydajność zaimplementowanej funkcji wykorzystującej dekompozycję, zmierzyłem i porównałem czasy wykonywania poszczególnych wywołań obliczania równania $AX = B$ za pomocą napisanej przeze mnie funkcji oraz funkcji wykorzystującej odwracanie macierzy.

Przykład 8

Macierz A jest macierzą symetryczną, dodatnio określoną o wymiarach 3×3, gdzie na miejscu (i, j) macierzy A stoi największy wspólny dzielnik i oraz j. B jest macierzą jednostkową o wymiarach 3×3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

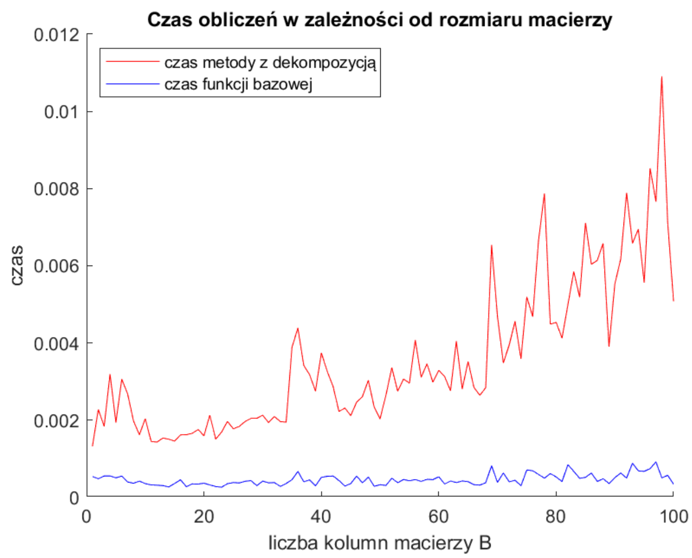
W tym przypadku napisana przeze mnie metoda zwróciła macierz X będącą bardzo blisko poprawnego wyniku. Czas działania poszczególnych funkcji wynosił

Badana metoda	Cholesky-Banachiewicz	wbudowana funkcja *inv*
przybliżony czas działania	10^{-5}	10^{-6}

Jak się okazuje funkcja wykorzystująca dekompozycję macierzy metodą Cholesky'ego-Banachiewicza jest odrobinę wolniejsza.

Przykład 9

W tym przypadku macierz A jest macierzą Lehmera 100×100 zaś macierz B jest macierzą o wymiarach $100 \times m$, gdzie m jest nie większe niż 100, o współczynnikach losowych z rozkładu normalnego.

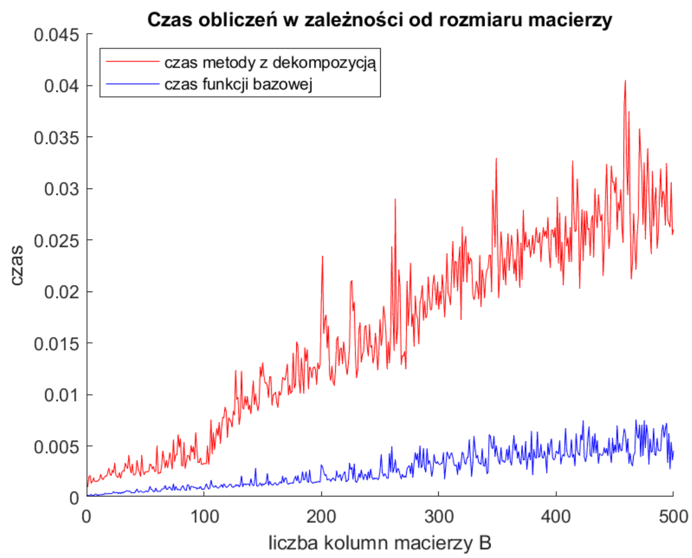


Rysunek 8: Wykres odchylenia przeciętnego iloczynu znalezionego rozwiązania dla macierzy rzadkiej i losowej macierzy B o 200 kolumnach

W tym przypadku funkcja wykorzystująca macierz odwrotną poradziła sobie lepiej niż zaimplementowana funkcja wykorzystująca dekompozycje Cholesky'ego-Banachiewicza, mimo że ta różnica była niewielka.

Przykład 10

W tym przypadku macierz A jest macierzą rzadką o współczynnikach tylko na trzech diagonalach o wymiarach 100×100, zaś macierz B jest macierzą o wymiarach $100 \times m$, gdzie m jest nie większe niż 500 o współczynnikach losowych z rozkładu normalnego.



Rysunek 9: Wykres czasu potrzebnego na rozwiązanie równania dla macierzy rzadkiej i losowej macierzy B

W tym przypadku ponownie funkcja wykorzystująca macierz odwrotną poradziła sobie lepiej niż zaimplementowana funkcja wykorzystująca dekompozycje Cholesky'ego-Banachiewicza, mimo że ta różnica była niewielka.

8 Podsumowanie

Okazuje się, że zaimplementowana przeze mnie metoda, zarówno w przypadku dekompozycji jak i rozwiązywaniu równań macierzowych, mimo wektoryzacji, sprawuje się trochę wolniej niż funkcja wykorzystująca macierz odwrotną i wbudowaną funkcję programu MATlab.

Mimo to wydaje się bardzo dobrą funkcją do rozwiązywania równań zadanego typu, szczególnie, że zwracane wyniki są bardziej dokładne.

9 Literatura

- Notatki z wykładu z przedmiotu Metody Numeryczne