DSC014 - Tarea N° 3
Plazo de entrega: 28/11/2025 - 22:00

En esta tercera y última tarea grupal, el objetivo es integrar métodos estocásticos, cómputo paralelo y análisis espectral para resolver un problema clásico. Deben investigar y resolver el problema propuesto, justificando cada paso numérico y físico.

El informe solicitado debe presentarse en un Jupyter Notebook, entregado en dos formatos: `.ipynb` (para su edición y revisión de código) y `.html` (para una visualización estática y portable). La estructura del notebook debe seguir el formato de un informe técnico o académico, incluyendo secciones bien definidas como introducción, marco teórico, metodología, análisis de resultados, discusión y conclusiones. En caso de utilizar programas `.py` separados como los vistos en clases, deben ser entregados junto el notebook para su posterior revisión.

Cada sección debe contener una descripción exhaustiva de los fenómenos estudiados, justificando los métodos y técnicas aplicadas. Se espera una exposición detallada de los pasos seguidos, junto con una discusión crítica de los hallazgos. Las visualizaciones dinámicas deben incluirse en la entrega en formato `.mp4` y ser etiquetadas con nombres que sean claros, concisos y descriptivos para facilitar su identificación.

Objetivo general de la tarea

El objetivo principal es resolver la Ecuación de Laplace en 2D utilizando el método de Random Walk, acelerar su cálculo mediante técnicas de paralelismo en memoria compartida (mediante `multiprocessing` de python) y analizar las propiedades de filtrado espacial de la solución utilizando la Transformada Discreta de Fourier (DFT/FFT).

Potencial Electrostático en una Caja

Considere una región cuadrada en 2D libre de carga, definida por una grilla de $N \times N$ puntos. El potencial eléctrico $V(x, y)$ en el interior satisface la Ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 V = 0 \tag{1}$$

Las condiciones de borde son las siguientes:

- Pared Superior ($y = L$): $V = 100$ V
- Pared Inferior ($y = 0$): $V = 0$ V
- Pared Izquierda ($x = 0$): $V = 0$ V

- Pared Derecha ($x = L$): $V = 0$ V

Como vimos en clases, la solución $V(x, y)$ en un punto interior puede interpretarse como el valor esperado del potencial en la frontera alcanzada por un caminante aleatorio que parte desde (x, y).

Tareas mínimas a realizar

Implementación del solver estocástico

Implemente una función `random_walk_laplace` que estime el potencial en un punto (i, j) de la grilla.

1. La función debe simular M caminatas aleatorias independientes partiendo desde (i, j).
2. Cada paso mueve al caminante a uno de sus 4 vecinos con igual probabilidad.
3. La caminata termina cuando golpea una frontera. Se registra el valor del potencial de esa frontera.
4. El potencial $V(i, j)$ es el promedio de los valores registrados en las M caminatas.
5. Implemente un programa serial que resuelva toda la grilla interior ($N = 30$ o 40, $M = 500$ caminantes por punto) y mida el tiempo de ejecución T_1. Puede modificar los valores de N, M si lo desea para expandir la exploración del problema.
6. Realice animaciones para $N = 30$ de la solución para varios valores M, mostrando la naturaleza estocástica de la solución obtenida y como va convergiendo lentamente a medida que se aumenta M.
7. Compare la solución obtenida con la solución analítica obtenida para diferentes valores de N, M. ¿Cómo escala el error con los números M,N? (Ayuda: para responder a esta pregunta no es necesario resolver el potencial en toda la grilla!)

Aceleración paralela

Dado que el cálculo de cada punto (i, j) es independiente (*Embarrassingly Parallel*), utilice la librería `multiprocessing` para acelerar la solución. (Puede utilizar multiprocessing en un notebook siempre que la función que se ejecuta en paralelo sea importada desde un archivo externo .py.)

1. Divida la lista de coordenadas a resolver entre los procesadores disponibles.
2. Reconstruya la matriz de potencial 2D a partir de los resultados paralelos.
3. Realice un análisis de escalabilidad: Mida el tiempo T_p para $p = 1, 2, 4, \ldots$ núcleos (hasta el máximo de su CPU).
4. Grafique el Speedup $S_p = T_1/T_p$ en función de p. Discuta si el comportamiento es lineal y qué factores limitan la eficiencia (overhead de creación de procesos, serialización de datos, etc.).

Análisis Espectral

La Ecuación de Laplace tiene propiedades de suavizado. Esto implica que las discontinuidades en las esquinas superiores (salto de 0V a 100V) deberían atenuarse hacia el centro de la caja.

1. Extraiga un perfil 1D del potencial resuelto a lo largo de una línea horizontal a mitad de la caja ($y = L/2$).
2. Calcule la Transformada Rápida de Fourier (FFT) de este perfil espacial.
3. Grafique el Espectro de Potencia ($|F_k|^2$) vs. Frecuencia espacial (k).
4. Compare cualitativamente el espectro obtenido con el espectro de una función escalón (que representa las condiciones de borde abruptas iniciales). ¿Cómo actúa la Ecuación de Laplace sobre las altas frecuencias espaciales? Discuta el resultado en términos de un filtro pasa bajos.