DSC014 - Tarea N° 1
Plazo de entrega: 24/09/2025 - 22:00

En esta primera tarea grupal, el objetivo es aplicar los conceptos que hemos discutido en clase para investigar y resolver un problema concreto. Deben **elegir uno** de los tres problemas a continuación y explorarlo en profundidad de manera independiente. La lista de tareas a realizar es orientativa y consiste en lo mínimo esperado para cada problema.

El informe solicitado debe presentarse en un Jupyter Notebook, entregado en dos formatos: .ipynb (para su edición y revisión de código) y .html (para una visualización estática y portable). La estructura del notebook debe seguir el formato de un informe técnico o académico, incluyendo secciones bien definidas como introducción, marco teórico, metodología, análisis de resultados, discusión y conclusiones. Cada sección debe contener una descripción exhaustiva de los fenómenos estudiados, justificando los métodos y técnicas aplicadas. Se espera una exposición detallada de los pasos seguidos, junto con una discusión crítica de los hallazgos. Las visualizaciones dinámicas deben incluirse en la entrega en formato .mp4 y ser etiquetadas con nombres que sean claros, concisos y descriptivos para facilitar su identificación.

El trabajo será evaluado con base en la correcta implementación de las simulaciones, la claridad del análisis realizado, la justificación de las elecciones computacionales (ej. pasos de tiempo, métodos numéricos) y la calidad del reporte final. El informe debe ser claro y bien estructurado.

Sólo se calificará a las personas cuyo nombre aparezca en la portada del informe.

No se aceptarán entregas atrasadas.

1. El Péndulo Doble

El péndulo doble es un sistema dinámico clásico conocido por su comportamiento caótico. A diferencia del péndulo simple, no tiene una solución analítica exacta, lo que lo convierte en un excelente candidato para la simulación numérica. Su tarea es modelar este sistema y explorar sus propiedades.

Las ecuaciones que rigen el movimiento del péndulo doble son un sistema de dos ecuaciones diferenciales de segundo orden que deben ser resueltas numéricamente:

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{-g(2m_1 + m_2)\sin\theta_1 - m_2 g\sin(\theta_1 - 2\theta_2) - 2\sin(\theta_1 - \theta_2)m_2(\dot{\theta}_2^2 L_2 + \dot{\theta}_1^2 L_1\cos(\theta_1 - \theta_2))}{L_1(2m_1 + m_2 - m_2\cos(2\theta_1 - 2\theta_2))}$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{2\sin(\theta_1 - \theta_2)(\dot{\theta}_1^2 L_1(m_1 + m_2) + g(m_1 + m_2)\cos\theta_1 + \dot{\theta}_2^2 L_2 m_2\cos(\theta_1 - \theta_2))}{L_2(2m_1 + m_2 - m_2\cos(2\theta_1 - 2\theta_2))}$$

Donde m_i son las masas de los péndulos, L_i sus longitudes, θ_i los ángulos respecto de la vertical y $\dot{\theta}_i$ las velocidades angulares. g es la aceleración de la gravedad.

Tareas a realizar:

1. **Formulación Numérica:** Reescribir las ecuaciones de segundo orden como un sistema de cuatro ecuaciones de primer orden, preparándolas para la integración numérica.

2. **Simulación y Conservación de la Energía:** Implementar un simulador del péndulo doble usando diferentes método numéricos vistos en clase. Analizar las propiedades de cada integrador y estudiar la energía mecánica total del sistema a lo largo del tiempo. ¿Se conserva la energía? ¿Por qué?

3. **Análisis del Paso de Tiempo:** Realizar simulaciones con al menos tres pasos de tiempo diferentes (Δt). Mostrar cómo la elección de Δt afecta la conservación de la energía y la estabilidad de la simulación. Discutir por qué un paso de tiempo menor no siempre es la mejor opción.

4. **Sensibilidad a las Condiciones Iniciales:** Elegir condiciones iniciales diferentes yxw realizar simulaciones variando una de las condiciones (ej. θ_1) en una cantidad muy pequeña (e.j., 10^{-6}). Graficar la diferencia entre las posiciones angulares de las dos simulaciones a lo largo del tiempo. ¿Qué observa? ¿Cómo se relaciona esto con el concepto de caos?

5. **Análisis de Espacio de Fase:** Generar gráficos del espacio de fase para cada una de las masas (ej., θ_1 vs $\dot{\theta}_1$). Comparar estos gráficos con los del péndulo simple. Explicar lo observado.

6. **Multimedia:** Identifique casos de interés y realice animaciones (o programas interactivos) partir de los datos de sus simulaciones.

7. **Reporte:** Elaborar un informe que incluya mínimamente los puntos anteriores, los gráficos correspondientes y una discusión de sus hallazgos. Incluir los valores de los parámetros utilizados y todos los programas utilizados. Sean creativos en la exploración del problema.

2 - Modelo de Lotka-Volterra y Dinámica de Poblaciones

El modelo de Lotka-Volterra consiste en un par de ecuaciones diferenciales no lineales que describen la dinámica de poblaciones de dos especies que interactúan en un ecosistema, una como depredador y la otra como presa.

Las ecuaciones que describen este sistema son:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy$$
$$\frac{dy}{dt} = \delta xy - \gamma y$$

con x/y el número de presas/depredadores, α la tasa de crecimiento de las presas, β la tasa de mortalidad de las presas por depredación, δ la tasa de crecimiento de los depredadores por depredación y γ la tasa de mortalidad de los depredadores.

Tareas a realizar:

1. **Implementación Numérica:** Implementar un programa para simular la evolución de las poblaciones de presas (x) y depredadores (y) a lo largo del tiempo. Utilizar diferentes métodos numéricos y comparar las soluciones.
2. **Análisis del Paso de Tiempo:** Para el método de Euler mostrar cómo un paso de tiempo Δt demasiado grande puede llevar a resultados no físicos. Comparar la estabilidad de las soluciones para diferentes Δt usando los diferentes métodos.
3. **Análisis de Error:** Cuantificar la diferencia entre las soluciones para el mismo Δt pero para diferentes métodos. Explicar las ventajas de utilizar métodos de orden superior.
4. **Diagrama de Fase:** Construir el diagrama de fase graficando y vs x. ¿Observa un ciclo de población? Identificar y analizar los **puntos fijos** del sistema.
5. **Análisis de Parámetros:** Investigar qué sucede si se altera uno de los parámetros del modelo (por ejemplo, la tasa de crecimiento de las presas α). Mostrar cómo el ciclo de población cambia y discutir las implicaciones ecológicas.
6. **Multimedia:** Identifique casos de interés y realice animaciones (o programas interactivos) partir de los datos de sus simulaciones.
7. **Reporte:** Elaborar un informe que incluya mínimamente los puntos anteriores, los gráficos correspondientes y una discusión de sus hallazgos. Incluir los valores de los parámetros utilizados y todos los programas utilizados. Sean creativos en la exploración del problema.

3 - Oscilador Armónico Forzado

El oscilador armónico forzado y amortiguado es un sistema fundamental en la física que describe, por ejemplo, el movimiento de una masa atada a un resorte con fricción, impulsada por una fuerza externa. Un ejemplo de este tipo de sistema es el amortiguador de un automovil.

La ecuación que describe este sistema es:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos(\omega t)$$

con m la masa que oscila, b el coeficiente de amortiguamiento, k la constante del resorte, F_0 la amplitud de la fuerza de forzamiento y ω la frecuencia de forzamiento.

Tareas a realizar:

1. **Formulación Numérica:** Reescribir la ecuación de segundo orden como un sistema de dos ecuaciones de primer orden. Implementar un simulador utilizando diferentes métodos numéricos.

2. **Análisis del Paso de Tiempo:** Discutir por qué el paso de tiempo (Δt) debe ser mucho menor que el periodo de la oscilación. Mostar el comportamiento de la solución para diferentes Δt para cada método implementado.

3. **Resonancia:** Mantener fijos los parámetros m, b y k y variar la frecuencia de la fuerza de forzamiento (ω) en un rango significativo. Graficar la amplitud de la oscilación en estado estacionario en función de ω. ¿En qué valor de ω se produce la **resonancia**? Comparar este valor con la frecuencia de resonancia teórica.

4. **Balance de Energía:** Graficar la energía total del sistema (cinética + potencial) a lo largo del tiempo. Calcular la potencia disipada por la fricción ($P_{\text{disipada}} = b\dot{x}^2$) y la potencia suministrada por la fuerza de forzamiento ($P_{\text{suministrada}} = F_0 \cos(\omega t)\dot{x}$). Demuestre que, en el estado estacionario, la potencia disipada promedio es igual a la potencia suministrada promedio.

5. **Dependencia del Amortiguamiento:** Variar el coeficiente de amortiguamiento b y analizar cómo afecta a la forma de la curva de resonancia. ¿Qué sucede con la amplitud máxima a medida que b aumenta?

6. **Multimedia:** Identifique casos de interés y realice animaciones (o programas interactivos) partir de los datos de sus simulaciones.

7. **Reporte:** Elaborar un informe que incluya mínimamente los puntos anteriores, los gráficos correspondientes y una discusión de sus hallazgos. Incluir los valores de los parámetros utilizados y todos los programas utilizados. Sean creativos en la exploración del problema.