薄板样条插值(Thin Plate Spline)

FesianXu 2020/09/08 at UESTC

# 前言

本文是笔者阅读[1]过程中，遇到了关于Thin Plate Spline[5]相关的知识，因而查找若干资料学习后得到的一些笔记，本文主要参考[2,3,4]，希望对大家有所帮助。 **如有谬误，请联系指出，转载请联系作者并注明出处。**

$\nabla$ 联系方式：

**e-mail**: FesianXu@gmail.com

**QQ**: 973926198

github: https://github.com/FesianXu

# 薄板样条插值

薄板样条插值（Thin Plate Spline,TPS）是插值方法的一种，是常用的2D插值方法。假如给定两张图片中一些相互对应的控制点，如何将其中一个图片进行特定的形变，使得其控制点可以与另一张图片的控制点重合，如Fig 1.1所示。当然，提供插值的方法也特别的多，TPS是其中一种技术，其有着一个基本假设

> *如果用一个薄钢板（只是一个比喻）的形变来模拟这种2D形变，在确保所有控制点能够尽可能匹配的情况下，怎么样才能使得钢板的弯曲量最小。*

几乎所有的生物有关的形变都是可以用TPS来近似，因此TPS也经常被用于脸部关键点形变等相关的应用[1]。

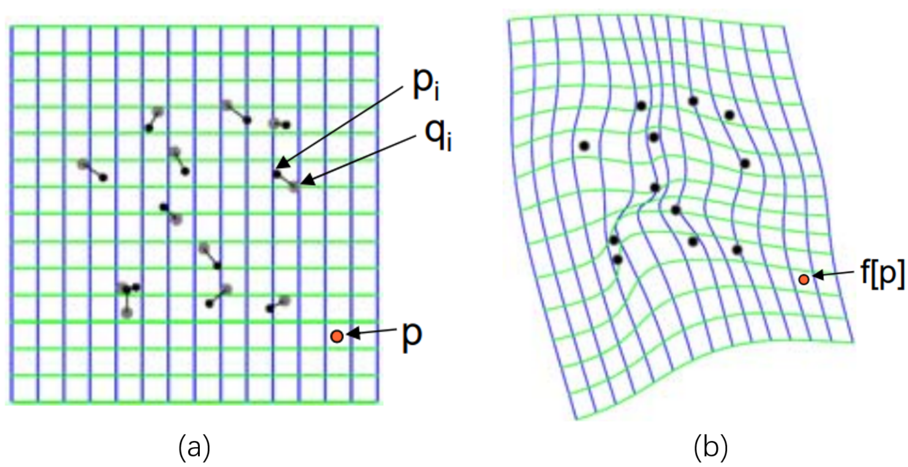



**Fig 1.1** 该图演示了**TPS**的基本任务，**(a)**图的**p**点表示的是移动之前的点，而**q**点表示的是移动之后的点，若干控制点产生了这种移动之后，势必整个

平面发生了扭曲，其结果如(b)所示，TPS的目的就是拟合得到每个曲面上的点的变化。

为了描述整个插值过程，按照我们刚才所说的，需要定义两个项，一个是拟合项$\mathcal{E}_\Phi$，测量将源点变形后距离目标点的大小；第二个是扭曲项$\mathcal{E}_d$，测量曲面的扭曲大小。那么有总的损失函数：

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_\Phi + \lambda \mathcal{E}_d \tag{1.1}$$

其中的$\lambda$为权值系数，控制允许非刚体形变发生的程度，不同的$\lambda$对于整个拟合效果的影响如Fig 1.2所示。

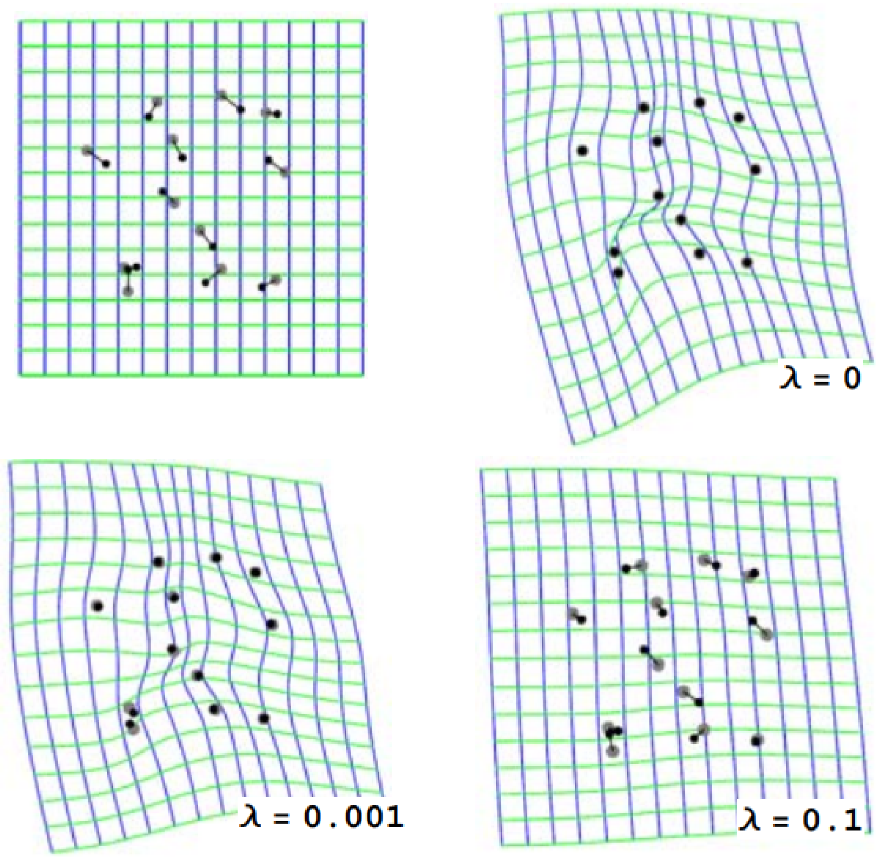



**Fig 1.2** 不同的权重系数对于拟合效果的影响，越大的权重变形就越接近仿射变换。

其中有：

$$\mathcal{E}_\Phi = \sum_{i=1}^{N} ||\Phi(p_i) - q_i||^2 \tag{1.2}$$

$$\mathcal{E}_d = \int\int_{\mathbb{R}^2} \left( \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \mathrm{x}^2} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \mathrm{x} \partial \mathrm{y}} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \mathrm{y}^2} \right)^2 \right)^2 \mathrm{dxdy} \tag{1.3}$$

其中的$N$为控制点的数量，式子(1.2)很容易理解，是源目标经过形变函数$\Phi$之后和目标之间的距离；而式子(1.3)是曲面扭曲的能量函数，由文献[6]中给出，最小化式子(1.1)的结果，可以推导出形变函数的唯一闭式解结果为：

$$\Phi(p) = \mathbf{M} \cdot p + m_0 + \sum_{i=1}^{N} \omega_i U(||p - p_i||) \tag{1.4}$$

其中$p$为曲面上的任意一个点，有$p=(x,y)^{\mathrm{T}}$，$p_i$是对应域的控制点，而$\mathbf{M}=(m_1,m_2)$，而这里的$U(\cdot)$为径向基函数，表示某个曲面上的点的变形会受到所有控制点变形的影响（当然，不同控制点的影响程度不一样），有

$$U(x)=r^2\log r \tag{1.5}$$

而$\omega_i$表示对不同径向基的加权。如Fig 1.3所示，如果我们假设每个控制点都对应一个高度，也就是$(x_i,y_i)\rightarrow v_i$，也就是说控制点是三维空间坐标系中的自变量，而其高度是因变量，那么我们可以再继续分析式子(1.4)中的第一项和第二项。

我们发现第一项其实是尝试用一个平面$y=\mathbf{M}\cdot p+m_0$去拟合所有的目标控制点，当然这个拟合肯定不够好，因此用第二项尝试在该平面的基础上去弯曲（当然是尽可能小的弯曲），从而达到更好的拟合效果，如Fig 1.3所示。此时有未知参数$\mathbf{M}\in\mathbb{R}^2, m_0\in\mathbb{R}$，和$\omega_i, i\in[1,N]$，因此一共有$1+2+N$个参数，其中$D=2$是维度，$N$是控制点数目。

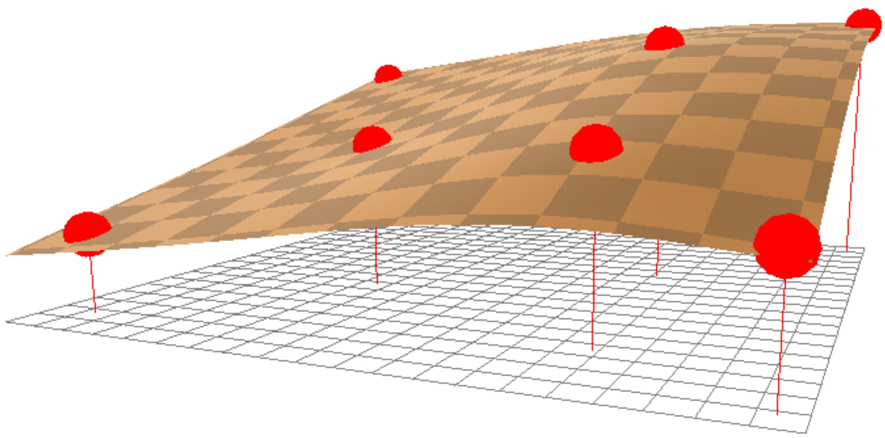


**Fig 1.3 最小程度地扭曲平面，使得该曲面可以符合所有的控制点，而扭曲程度最小。**

我们为了求解形式一般化，用以下矩阵代表之前谈到的数值，有：

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}1 & x_1 & y_1\\ 1 & x_2 & y_2\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & x_n & y_n\end{bmatrix} \tag{1.6}$$

其中每一行代表一个控制点坐标，该矩阵称之为控制点矩阵。

$$\mathbf{Y}=\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\\ \vdots\\ v_n\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \tag{1.7}$$

该矩阵称之为高度矩阵，后面三个0是为了形式统一填充的。

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix} U(r_{11}) & U(r_{12}) & \cdots \\ U(r_{21}) & U(r_{22}) & \cdots \\ \cdots & \cdots & U(r_{NN}) \end{bmatrix} \tag{1.8}$$

其中$r_{ij}=||p_i-p_j||$表示两个控制点之间的距离。令矩阵$\mathbf{L}$为：

$$\mathbf{L}=\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{P} \\ \mathbf{P}^{\mathrm{T}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(N+3)\times(N+3)} \tag{1.9}$$

那么由式子(1.4)和$\Phi(p_i)=v_i$，有：

$$\mathbf{Y}=\mathbf{L}(\Omega|m_0,m_1,m_2)^{\mathrm{T}} \tag{1.10}$$

其中$\Omega=(\omega_1,\cdots,\omega_N)$。其中的后三行引入了一组对参数的约束（虽然我并不知道这组约束的含义，有了解的朋友请在评论区赐教，谢谢）：

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N}\omega_i=0 \\ \sum_{i=1}^{N}x_i\omega_i=0 \\ \sum_{i=1}^{N}y_i\omega_i=0 \end{aligned} \tag{1.11}$$

那么从式子(1.10)我们有：

$$(\Omega|m_0,m_1,m_2)^{\mathrm{T}}=\mathbf{L}^{-1}\mathbf{Y} \tag{1.12}$$

当然也可以通过解线性方程组(1.10)得到参数组$(\Omega|m_0,m_1,m_2)^{\mathrm{T}}$，一旦这个参数组计算得到，那么我们的插值函数$\Phi(p)$也就已知了，只要给定平面上任意一个点，就能通过插值函数将其插值到目标平面上。

# 变形(deformation)

这里介绍TPS的一个主要应用，对图片的控制点进行偏移，以达到通过控制点对图像进行特定形变的目的。如Fig 2.1所示，通过拉拽嘴角的控制点（即是蓝色点），使得周围的像素，比如$A$点移动到了$A'$点，此时存在位移$(\Delta x,\Delta y)$，此时我们需要插值这个位移。 当然，对应控制点之间的移动偏移是可以知道的，记为$\Delta\mathbf{S}=\{(\Delta x_1,\Delta y_1),\cdots,(\Delta x_N,\Delta y_N)\}$，我们要根据已知的控制点偏移去插值图片上其他任意像素点的偏移。

不妨我们把这两个位移的分量隔离开来，不考虑两个维度之间的相关性，那么可以将第一章提到的“高度”$v_i$在这里理解成每一个位移的分量，那么我们有两个插值函数需要预测，即是：

$$\begin{aligned} \Delta x(p)=\Phi(p)_{\Delta x} \\ \Delta y(p)=\Phi(p)_{\Delta y} \end{aligned} \tag{2.1}$$


**Fig 2.1** 通过拉拽嘴角和眼角的控制点，可以实现图像的内容形变。

假如只是选定6个控制点，分别是图片的四个角落，右眼和右侧嘴角，如Fig 2.2所示。

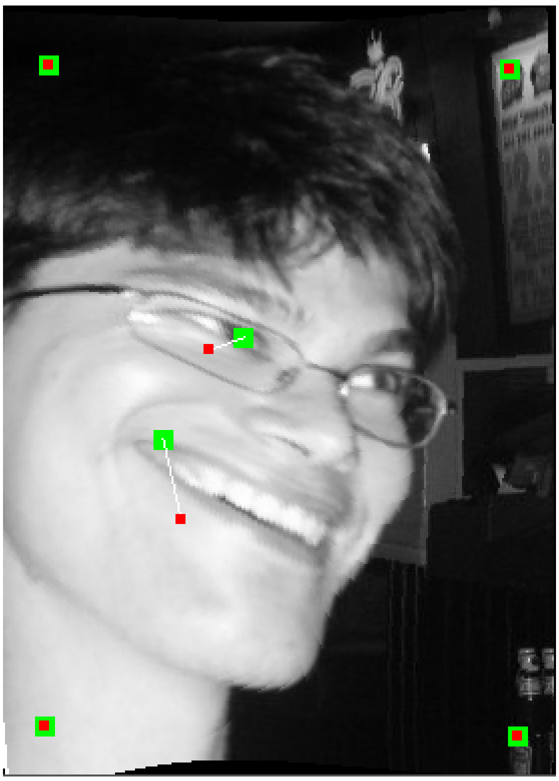
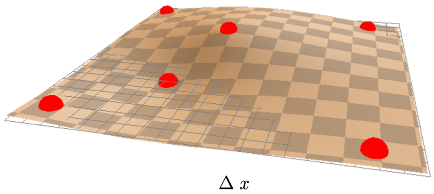
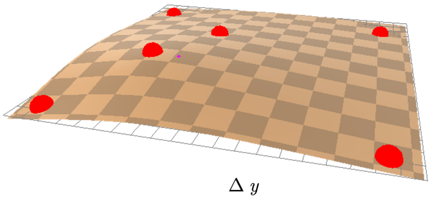


**Fig 2.2** 红色点表示移动之前的控制点，绿色点表示移动后的控制点，我们发现只是移动了右边眼睛和右边嘴角。



$\Delta\ x$



$\Delta\ y$

# Reference

[1]. Siarohin, A., Lathuilière, S., Tulyakov, S., Ricci, E., & Sebe, N. (2019). First order motion model for image animation. In *Advances in Neural Information Processing Systems* (pp. 7137-7147).

[2]. http://profs.etsmtl.ca/hlombaert/thinplates/

[3]. https://www.jianshu.com/p/2cc189dfbcc5#fn3

[4]. https://www.cse.wustl.edu/~taoju/cse554/lectures/lect07_Deformation2.pdf

[5]. Bookstein, F. L. (1989). Principal warps: Thin-plate splines and the decomposition of deformations. *IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence*, *11*(6), 567-585.

[6]. Kent, J. T. and Mardia, K. V. (1994a). The link between kriging and thin-plate splines. In: Probability, Statistics and Optimization: a Tribute to Peter Whittle (ed. F. P. Kelly), pp 325–339. John Wiley & Sons, Ltd, Chichester. page 282, 287, 311