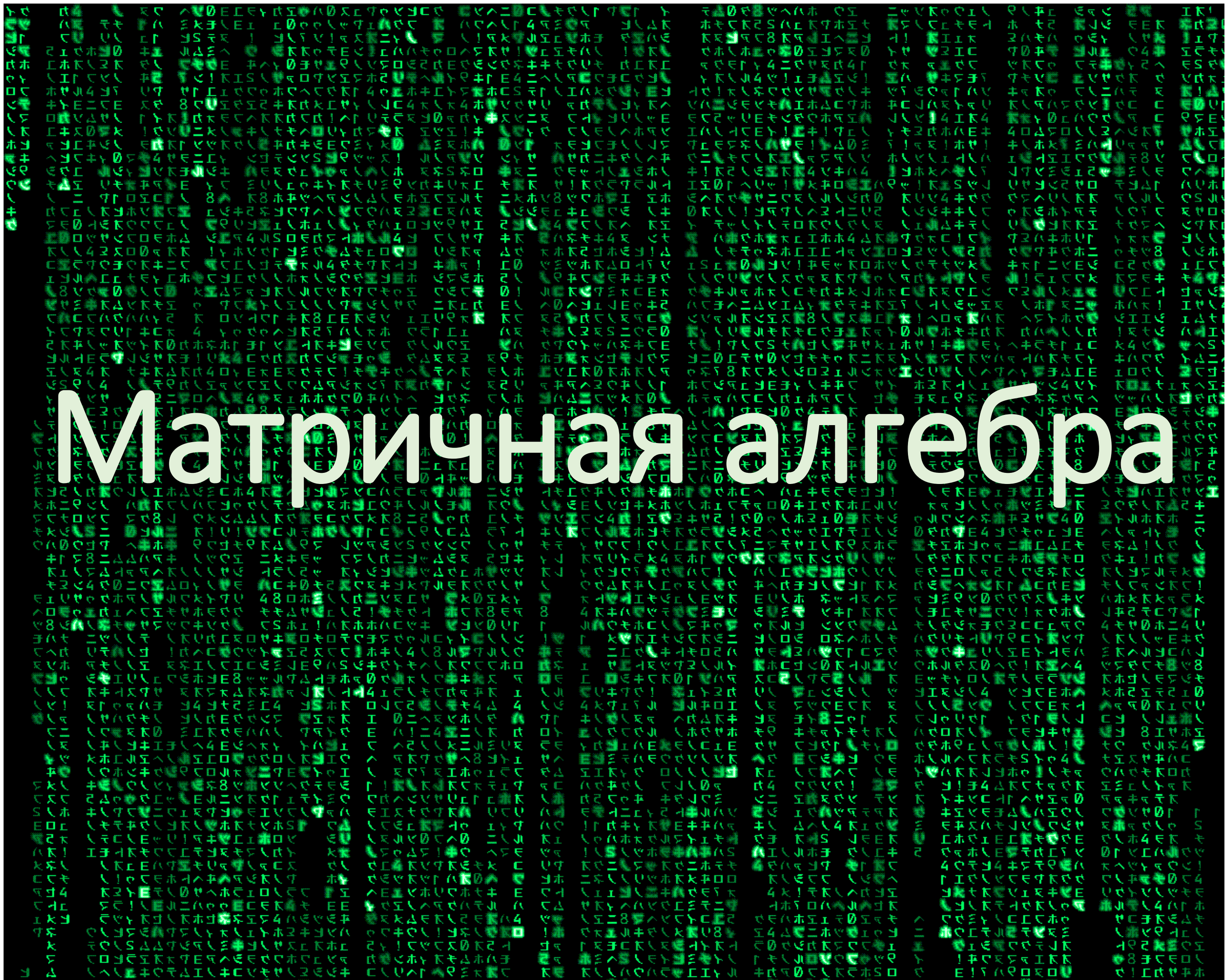
09.04.03 Прикладная информатика

Профиль «Машинное обучение и анализ данных»

Дисциплина «Математические основы анализа данных»

Лекция 2



# Матричная алгебра

# План лекции

- Основные определения
- Определитель (детерминант) квадратной матрицы
- Минор и алгебраическое дополнение
- Операции над матрицами
- Обратная матрица: нахождение двумя способами

# Основные определения

- Система из $m \times n$ чисел (действительных, комплексных), или функций, или других объектов, записанная в виде прямоугольной таблицы, состоящей из $m$ строк и $n$ столбцов называется **матрицей**.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

- Числа (функции, другие объекты) , составляющие матрицу (1), называются **элементами матрицы**. Первый индекс $i$ обозначает номер строки, а второй $j$ – номер столбца, на пересечении которых расположен данный элемент матрицы.

- Если $m = n$, то матрица называется **квадратной порядка $n$**.
- Если $m \neq n$, то матрица называется **прямоугольной**.
- Матрица размерности $1\times n$ называется **вектором-строкой**, а матрица размерности $m\times 1$ – **вектором-столбцом**.
- Обычное число (скаляр) можно считать матрицей размерности 1×1.
- Если квадратная матрица имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

то она называется **диагональной**.

- Если в диагональной матрице (2) все диагональные элементы равны 1, то матрица называется **единичной** и обозначается:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j \ ; \\ 1, & \text{если } i = j \ , \end{cases} \qquad E = [\delta_{ij}].$$

- Матрица, у которой все элементы равны 0, называется **нулевой** и обозначается 0.

# Характеристики квадратных матриц

- Элементы квадратной матрицы $n$-го порядка $a_{11}; a_{22}; a_{33}; \ldots; a_{nn}$ образуют так называемую **главную диагональ матрицы**.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

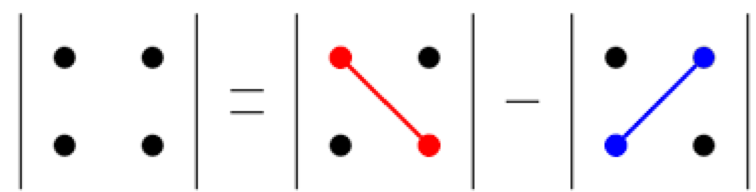
- Сумма элементов главной диагонали называется **следом** (Trace, Spur) матрицы:

$$\operatorname{Tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}. \qquad (3)$$

# Определитель матрицы

- С квадратной числовой матрицей связано понятие **определитель (детерминант).**
- Определитель – это число**.**
- Чтобы вычислить определитель матрицы А второго порядка, надо от произведения элементов главной диагонали отнять произведение элементов побочной диагонали:

$$\Delta_2 = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$



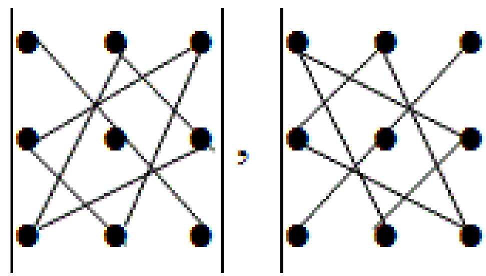
- <u>Пример</u>:

$$\Delta_2 = |A| = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = -2 \cdot 5 - 3 \cdot (-4) = -10 + 12 = 2.$$

# Методы вычисления определителей третьего порядка

## 1. Правило треугольника

Схематически это правило можно изобразить следующим образом:



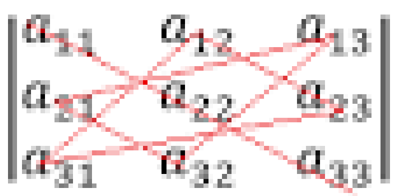
«+» «–»

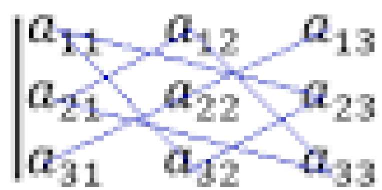
Произведение элементов в первом определителе, которые соединены прямыми, берется со знаком «плюс»; аналогично, для второго определителя - соответствующие произведения берутся со знаком «минус».

- Правило треугольника

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32} -$$

$$-a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} - a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32} - a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}$$



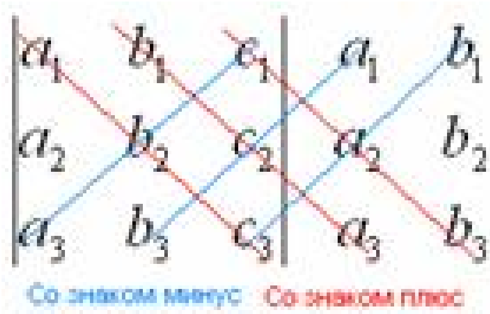

- <u>Пример:</u>

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1*5*9 + 2*6*7 + 4*8*3 - (3*5*7 + 4*2*9 + 6*8*1) =$$

$$= 45+84+96 - (105+72+48) = 225 - 225 = 0$$

# 2. Правило Саррюса

- Справа от определителя приписывают первый и второй столбец и проводят линии:




- Множители, находящиеся на «красных» диагоналях входят в формулу со знаком «плюс».
Множители, находящиеся на «синих» диагоналях входят в формулу со знаком минус.

- <u>Пример</u>:

$$\left|\begin{matrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & -2 \\ 4 & 0 \\ -7 & 8 \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot 0\cdot 9 + (-2)\cdot 6\cdot(-7) + 3\cdot 4\cdot 8 - 3\cdot 0\cdot(-7) - 1\cdot 6\cdot 8 - (-2)\cdot 4\cdot 9 =$$

$$= 0 + 84 + 96 - 0 - 48 + 72 = 204$$

# Минор и алгебраическое дополнение

- **Минором** $M_{ij}$ к элементу $a_{ij}$ определителя $n$-го порядка называется определитель $(n-1)$-го порядка, полученный из исходного вычеркиванием *i*-той строки и *j*-того столбца.
- <u>Пример</u>: Найти минор $M_{23}$ к элементу $a_{23}$ определителя

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 7 & 8 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 7 & 8 & 4 \end{vmatrix} \Rightarrow M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

- **Алгебраическим дополнением** $A_{ij}$ к элементу $a_{ij}$ определителя $n$-го порядка называется число

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$$

- Пример: Найти алгебраическое дополнение $A_{23}$ к элементу $a_{23}$ определителя

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 7 & 8 & 4 \end{vmatrix}$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot M_{23}=(-1)^{5}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

# 3. Разложение определителя по строке или столбцу

- Применяется для вычисления определителя матрицы произвольного размера

$$|A| = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \ldots + a_{in} \cdot A_{in} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} \cdot A_{il}$$

$$|A| = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \ldots + a_{nj} \cdot A_{nj} = \sum_{l=1}^{n} a_{lj} \cdot A_{lj}$$

- Пример:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (3 \cdot 5 - 1 \cdot 4) + 0 + 2 \cdot ((-1) \cdot 1 - 3 \cdot (-2)) = 11 + 10 = 21$$

# Операции над матрицами

<u>1. Равенство матриц</u>

- Две матрицы А и В одной и той же размерности считаются равными А=В, если равны их соответствующие элементы, то есть $a_{ij} = b_{ij}$.

<u>2. Сумма и разность матриц</u>

- Суммой двух матриц А и В одной размерности называется матрица С той же размерности, элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц А и В, то есть $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.
- <u>Пример</u>:

$$F+G=\begin{pmatrix}12 & -1\\ -5 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4 & -3\\ 15 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12+(-4) & -1+(-3)\\ -5+15 & 0+7\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}12-4 & -1-3)\\ -5+15 & 0+7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & -4\\ 10 & 7\end{pmatrix}$$

Из определения суммы матриц непосредственно следуют ее основные свойства:

1) $A+B = B+A$ ; (коммутативность)
2) $A+(B+C) = (A+B)+C$ ; (ассоциативность)
3) $A+0 = A$. (наличие нейтрального элемента)

Аналогичным образом определяется *разность* матриц $A - B$.

- Пример:

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 7 \\ 8 & -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 12 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

## 3. Транспонирование матриц

- **Транспонирование матрицы** - это операция над матрицей, при которой ее строки и столбцы меняются местами:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix}$$

- Пример:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Свойства операции транспонирования матриц

1. $(k \cdot A)^T = k \cdot A^T$, где: $k$ – число.

2. $(A + B)^T = A^T + B^T$

3. $(A - B)^T = A^T - B^T$

4. $(A^T)^T = A$

5. $E^T = E$

## 4. Умножение матрицы на число

- **Произведением** матрицы $A$ на число $d$ (или произведением числа $d$ на матрицу $A$) называется матрица, элементы которой являются произведениями элементов матрицы $A$ на число $d$. Иными словами,

$$Ad = dA = \begin{pmatrix} da_{11} & da_{12} & da_{13} & \dots & da_{1n} \\ da_{21} & da_{22} & da_{23} & \dots & da_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ da_{m1} & da_{m2} & da_{m3} & \dots & da_{mn} \end{pmatrix}.$$

- Пример:

$$2A = \begin{pmatrix} 2\cdot 2 & 2\cdot 1 & 2\cdot 0 \\ 2\cdot 3 & 2\cdot 4 & 2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 6 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

# Основные свойства умножения матрицы на число

Для произвольных чисел $\alpha$ и $\beta$
и матриц $A$ и $B$

1) $1A = A1 = A$;
2) $0A = A0 = 0$;
3) $\beta(\alpha A) = (\beta\alpha)A = \alpha(\beta A)$;
4) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;
5) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.

Матрица $-A = (-1)A$ называется **противоположной**.

## 4. Умножение матриц

- Пусть размерности матриц $A$ и $B$ равны соответственно $m \times n$ и $n \times k$, то есть **число столбцов матрицы *A* равно числу строк матрицы *B***.
- Тогда для этих двух матриц определена матрица *C* размерности $m \times k$, являющаяся их произведением: $C = AB$.
- Элементы матрицы *C* вычисляются по формуле:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} \quad (i = 1, 2, \ldots, m; \; j = 1, 2, \ldots, k).$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} \end{pmatrix}$$

- <u>Пример 1:</u> $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\3&1&1\end{pmatrix}$

$$B=\begin{pmatrix}4&2\\3&1\\1&5\end{pmatrix}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&2&2\\3&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&2\\3&1\\1&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot4+2\cdot3+2\cdot1 & 1\cdot2+2\cdot1+2\cdot5\\3\cdot4+1\cdot3+1\cdot1 & 3\cdot2+1\cdot1+1\cdot5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12&14\\16&12\end{pmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}4&2\\3&1\\1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&2\\3&1&1\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}4\cdot1+2\cdot3 & 4\cdot2+2\cdot1 & 4\cdot2+2\cdot1\\3\cdot1+1\cdot3 & 3\cdot2+1\cdot1 & 3\cdot2+1\cdot1\\1\cdot1+5\cdot3 & 1\cdot2+5\cdot1 & 1\cdot2+5\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&10&10\\6&7&7\\16&7&7\end{pmatrix}$$

- Заметим, что $\boldsymbol{A\cdot B\neq B\cdot A}$!!!

- <u>Пример 2</u>*:*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 5 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 3 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 0 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 5 + 1 \cdot 3 & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

# Основные свойства матричного произведения

Для матриц $A$, $B$ и $C$ и числа $\alpha$

1) $A(BC) = (AB)C;$
2) $\alpha(AB) = (\alpha A)B;$
3) $(A+B)\,C = AC + BC;$
4) $C(A+B) = CA+CB$ .

Произведение двух матриц в общем случае не коммутативно, то есть $\boldsymbol{AB \neq BA}$.

- В частном случае, когда $AB = BA$, матрицы $A$ и $B$ называются **коммутативными** (перестановочными).
- Единичная матрица $E$ перестановочна с любой квадратной матрицей того же порядка, причем $AE = EA = A$.

# Обратная матрица

- **Обратной матрицей** называется матрица, которая при умножении как справа, так и слева на данную матрицу дает единичную матрицу.
- Обозначим обратную матрицу к матрице $A$ через $A^{-1}$, тогда по определению получим:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

- Квадратная матрица называется **невырожденной (неособенной)**, если её определитель не равен нулю. В противном случае она называется **особенной (вырожденной)** или **сингулярной**.

**Теорема: всякая невырожденная матрица имеет обратную матрицу.**

# Алгоритм обращения матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

1) Найти определитель матрицы $\Delta$.
2) Составить так называемую *присоединенную* матрицу из алгебраических дополнений:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \dots & A_{n2} \\ . & . & . & . & . \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

3) Разделить все элементы присоединенной матрицу на $\Delta$:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}/\Delta & A_{21}/\Delta & A_{31}/\Delta & \dots & A_{n1}/\Delta \\ A_{12}/\Delta & A_{22}/\Delta & A_{32}/\Delta & \dots & A_{n2}/\Delta \\ . & . & . & . & . \\ A_{1n}/\Delta & A_{2n}/\Delta & A_{3n}/\Delta & \dots & A_{nn}/\Delta \end{pmatrix}.$$

- <u>Пример 1:</u>

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1) $$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5 \neq 0$$

2) $$A^{*} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3) $$A^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = E$$

• <u>Пример 2:</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \qquad A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -6$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \qquad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$\Delta = 1 \cdot 2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \cdot 3 - 1 \cdot 2 \cdot 3 - 0 - 1 = -6 - 1 = -7 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{-1}{7} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 & -6 \\ 1 & -3 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

# Нахождение обратной матрицы с помощью присоединённой матрицы

- Если к квадратной матрице дописать справа единичную матрицу того же порядка
 и с помощью элементарных преобразований над строками добиться того, чтобы начальная матрица, стоящая в левой части, стала единичной,
 то полученная справа будет обратной к исходной.

- $$\left(\begin{array}{ccc|cccc} a_{11} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right) \leftrightarrow (A|E) \to (E|A^{-1})$$

# Элементарные преобразования над строками матрицы:

- умножение строки на ненулевое число;
- перестановка двух строк;
- прибавление к одной строке матрицы другой ее строки, умноженной на некоторое ненулевое число.

Если от матрицы $A$ к матрице $B$ перешли с помощью эквивалентных преобразований над строками, то такие матрицы называются **эквивалентными** и обозначают $A \sim B$.

- **Пример:** $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & -4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ $A^{-1} = \begin{pmatrix} -11/5 & 18/5 & 46/5 \\ 2 & -3 & -8 \\ 7/5 & -11/5 & -27/5 \end{pmatrix}.$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 7 & 4 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left|\begin{array}{l} \textit{меняем местами первую и третью} \\ \textit{строки расширенной матрицы} \end{array}\right| \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 6 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ II - 2\cdot I \\ III - 7\cdot I \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & -10 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 11 & -15 & 1 & 0 & -7 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ 7\cdot III - 11\cdot II \end{array} \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & -10 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & -11 & -27 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ III : 5 \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & -10 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 7/5 & -11/5 & -27/5 \end{array}\right) \begin{array}{l} I - 3\cdot III \\ II + 10\cdot III \\ \\ \end{array} \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -21/5 & 33/5 & 86/5 \\ 0 & 7 & 0 & 14 & -21 & -56 \\ 0 & 0 & 1 & 7/5 & -11/5 & -27/5 \end{array}\right) II : 7 \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -21/5 & 33/5 & 86/5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 7/5 & -11/5 & -27/5 \end{array}\right) \begin{array}{l} I + II \\ \\ \\ \end{array} \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11/5 & 18/5 & 46/5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 7/5 & -11/5 & -27/5 \end{array}\right)$$