09.04.03 Прикладная информатика

Профиль «Машинное обучение и анализ данных»

Дисциплина «Математические основы анализа данных»

Лекция 10

Теория вероятностей

Повторение и обобщение

План лекции

- Основные понятия теории вероятностей
- Условная вероятность
- Формула полной вероятности
- Формула Байеса
- Непрерывные и дискретные случайные величины
- Числовые характеристики случайных величин
- Законы распределения случайных величин:
  - Биномиальное распределение
  - Распределение Пуассона
  - Геометрическое распределение
  - Равномерное распределение
  - Показательное (экспоненциальное) распределение
  - Нормальное распределение

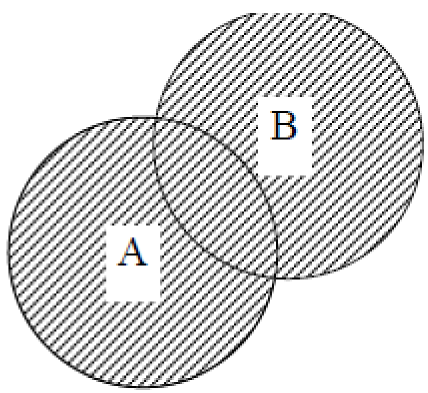
Случайное событие

- ***Случайным*** будем называть *событие*, которое в результате эксперимента может произойти или не произойти.
- Математическая формализация модели случайного эксперимента включает в себя:

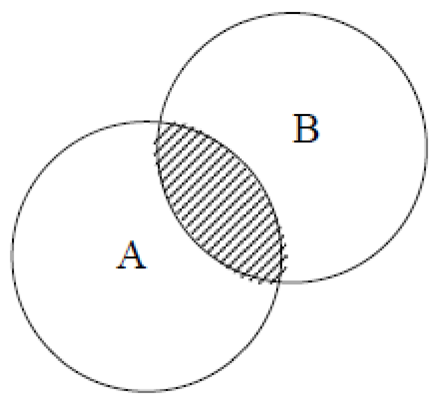
    1) построение множества элементарных исходов Ω;

    2) описание поля событий для данного эксперимента.
- Под *множеством элементарных исходов* понимают такое множество взаимоисключающих исходов, что в результате эксперимента всегда является один и только один исход.
- Любое подмножество данного множества Ω интерпретируется как *случайное событие* (обозначается буквами A,B,C,D,..). Совокупность всех наблюдаемых событий составляет *поле событий* для данного эксперимента. Говорят, что событие A произошло, если результатом эксперимента является элементарный исход, принадлежащий A ($A \in \omega$).
- ***Достоверным*** событием назовём событие, которое всегда происходит (обозначается Ω или D). ***Невозможным*** событием назовем событие, которое никогда не происходит (обозначается ∅ или N).

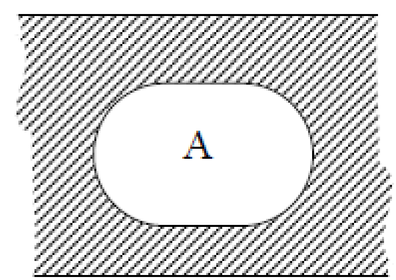
- Событие $\overline{\mathrm{A}}$ назовём событием, ***противоположным*** событию A (не A), если оно происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие A.
- ***Суммой или объединением*** событий A и B назовем событие, обозначаемое A∪B или A+B, которое происходит тогда и только тогда, когда происходят A, или B, или оба вместе.
- ***Произведением или пересечением*** событии A и B назовем событие, обозначаемое A∩B или AB, которое происходит тогда и только тогда, когда происходят события и A и B вместе.
- События A и B назовем ***несовместными или несовместимыми***, если AB=∅, т.е. такие события, которые не могут произойти одновременно.



A∪B



A∩B



$\bar{A}$

Аксиоматическое определение вероятности события

- Для количественного описания степени объективной возможности наступления того или иного события вводится специальная числовая функция P(A), называемая вероятностью события A.

Пусть F - поле событий для данного эксперимента.

Вероятностью P(A) называется числовая функция, определенная для всех $A \subset F$ и удовлетворяющая трём ***аксиомам вероятностей***:

1 .$P(A) \geq 0$;

2. $P(\Omega) = 1$;

3. Для любой конечной или бесконечной совокупности наблюдаемых событий $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$, таких, что $A_i A_j = \emptyset$ при $i \neq j$, $(P(\sum_k A_k) = \sum_k P(A_k)$.

- Смысл этих аксиом: *вероятность есть неотрицательная, нормированная и аддитивная функция множеств, принадлежащих алгебре событий F*.
- Для любого случайного эксперимента можно построить *вероятностное пространство тройку* {*Ω,F,P*}, где *F* - алгебра подмножеств множества Ω (множества элементарных исходов), *P* - числовая функция, удовлетворяющая аксиомам вероятностей.

Классическое определение вероятности

- Предположим, что результатом некоторого испытания может быть *конечное число n несовместных и равновозможных* исходов и в *m* исходах, называемых благоприятными, осуществляется событие *A*.
- Тогда *вероятность события A равна отношению числа благоприятных исходов к общему числу исходов испытания:*

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

- Вероятность осуществления события *A* или вероятность события *A* обозначим *P(A)*.
- Вероятность **достоверного** события равна **единице**, **невозможного** события – **нулю**.
- **Для случайного события $0 \leq P(A) \leq 1$.**

Геометрическое определение вероятности

- Геометрическое определение вероятности обобщает классическое определение вероятности на случай бесконечного числа исходов (на случай непрерывных пространств).
- Пусть Ω – некоторая область, имеющая меру $\mu(\Omega)$ (длину, площадь, объём и т.д.), такую, что $0 < \mu(\Omega) < \infty$.
- Скажем, что точка равномерным образом попадает в Ω, если вероятность $P(A)$ попадания её в область A, являющуюся подобластью Ω, пропорциональна мере этой области $\mu(\mathrm{A})$.
- В силу аксиомы нормированности, **геометрическая вероятность** события A определяется по формуле

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

Пример 1. Два друга договорились о встрече в определенном месте в промежутке времени между 7-ю и 8-ю часами. Найти вероятность того, что встреча состоится, если время ожидания первым лицом равно 15 минутам (после чего он уходит, не дождавшись друга), а вторым лицом – 20 минутам.

Решение.

Событие А – встреча состоится.

Пусть время прихода первым x (минут после семи часов), а вторым – y.

Очевидно, что $0 \le y \le 60$ и $0 \le y \le 60$,

т.е. время прихода друзей к месту встречи есть точка, принадлежащая квадрату с площадью $S = 3600$.

Множество точек, благоприятствующих событию А, удовлетворяют системе:

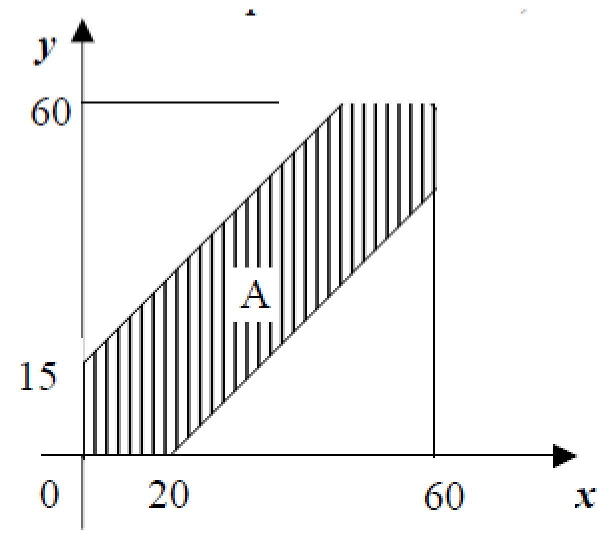
$y - x \le 15$ и $x - y \le 20$.

Площадь этой области

$S(A) = 3600 - 0{,}5(2025 + 1600) = 1787{,}5.$

Вероятность встречи

$P(A)=S(A)/S=1787{,}5/3600 =0{,}496.$



Классическое и геометрическое определения вероятности

- К недостаткам классического и геометрического определений вероятности следует отнести необходимость обоснования **равновозможности** исходов испытания (опыта, эксперимента).

Условные вероятности

- Пусть А и В – наблюдаемые события в эксперименте.
- **Условной вероятностью** $P(B/A)$ осуществления события В, при условии, что событие А произошло в результате данного эксперимента, называется величина, определяемая равенством

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}, P(A) \neq 0.$$

- Нетрудно проверить, что в случае произвольного вероятностного пространства вероятность $\mathrm{P}(\mathrm{B}|A)$, рассматриваемая как функция наблюдаемых событий $B \in F$ при фиксированном событии А, удовлетворяет трём основным аксиомам и всем их следствиям.
- Событие А называется **независимым от события** *B* если выполняется равенство $\mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}) = \mathrm{P}(\mathrm{A})$ или **события А и В называются независимыми**, если $\mathrm{P(AB)=P(A)P(B)}$.
- Во многих задачах условную вероятность можно подсчитать непосредственно из условия.

Пример 2. Из урны содержащей 3 белых и 7 черных шаров, наудачу последовательно и без возвращений извлекаются 2 шара. События: A – первый шар белый, B – второй шар белый. Определить вероятности P(A) и P(B|A).

Решение.

По формуле классической вероятности P(A)=3/10.

После того как извлекли первый белый шар, в урне осталось 9 шаров, из них 2-белых, и в этом случае P(B|A)=2/9.

Пример 3. Из колоды карт, содержащей 36 карт, вынули карту. Пусть событие А – вынули даму, событие В – вынутая карта пиковой масти. Выяснить являются ли события А и В зависимыми.

Решение.

Т.к. P(A) = 1/9 и P(B) = 1/4, то P(A)P(B)=1/36.

Событие AB – вынутая карта является дамой пик и его вероятность P(AB)=1/36.

Получилось, что выполняется теорема умножения для независимых событий

P(AB) = P(A)P(B) = 1/36 ,

следовательно события А и В – независимы.

Вероятности сложных событий

- **Сложным событием** называется наблюдаемое событие, выраженное через другие наблюдаемые в том же эксперименте события с помощью допустимых алгебраических операций.
- Вероятность осуществления того или иного сложного события вычисляется по правилам, основу которых составляют:

формула умножения вероятностей

$$\mathrm{P}(\mathrm{AB}) = \mathrm{P}(\mathrm{B})\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}),$$

и *формула сложения вероятностей* совместных событий

$$\mathbf{P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)}.$$

Пример 4. В колоде 36 карт. Наудачу извлечена карта. Найти вероятность, что извлекли даму или туза.

Решение.

Пусть случайные события: А – извлеченная карта дама, В – извлеченная карта туз, С – извлеченная карта дама или туз. Событие С = А + В.

Тогда $P(C)=P(A)+P(B)$, т.к. события А и В – несовместные.

$P(A)=P(B)=4/36=1/9$.

Следовательно, $P(C)= 1/9+1\ /9=2/9$.

Пример 5. Два стрелка независимо друг от друга стреляют по мишени. Найти вероятность попадания в мишень двумя стрелками, если вероятности попадания для них соответственно равны 0,8 и 0,9.

Решение.

Пусть случайные события: А – первый стрелок попал в мишень, В – второй попал, С – оба попали.

Очевидно, что $C = AB$, где события А и В независимы по условию.

Тогда $P(C)=P(AB)=P(A)P(B)=0{,}8\cdot 0{,}9=0{,}72$.

Пример 6. Два стрелка независимо друг от друга стреляют по мишени. Найти вероятность попадания в мишень хотя бы одним стрелком, если вероятности попадания для них соответственно равны 0,8 и 0,9.

Решение.

Пусть случайные события: A – в мишень попал первый стрелок,

B – в мишень попал второй стрелок.

Случайное событие D – хотя бы один стрелок попал в мишень.

Очевидно, что $D = A + B$ и тогда

$$P(D) = P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0{,}8 + 0{,}9 - 0{,}72 = 0{,}98.$$

Формула полной вероятности

- Пусть событие A может произойти только совместно с одним из событий $\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2, \ldots, \mathrm{H}_\mathrm{n}$, образующих полную группу несовместных событий ($\mathrm{H}_\mathrm{i}\mathrm{H}_\mathrm{j} = \emptyset$ при $\mathrm{i} \neq \mathrm{j}$; $\sum_{i=1}^{n} H_i = \Omega$), которые часто называют **гипотезами**.
- Т.е. система множеств $\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2, \ldots, \mathrm{H}_\mathrm{n}$ образует разбиение множества Ω.
- Имеет место **формула полной вероятности**:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A|H_i)$$

- Безусловные вероятности $P(H_i)$ трактуются как **доопытные (априорные)** вероятности гипотез.

Пример 7. В тире имеется 5 винтовок, три из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,7. Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелок производит один выстрел из наудачу взятой винтовки.

Решение. Гипотезы будет две:
H_1 – стрелок выберет винтовку с оптическим прицелом;
H_2 – стрелок выберет винтовку без оптического прицела.
По классическому определению вероятности:

$$P(H_1) = \frac{3}{5} = 0{,}6, P(H_2) = \frac{2}{5} = 0{,}4$$

Рассмотрим событие: *A* – стрелок поразит мишень из наугад взятой винтовки.
По условию: $P(A|H_1) = 0{,}95, P(A|H_2) = 0{,}7.$
По формуле полной вероятности: $P(A) = P(A|H_1) \cdot P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) =$
$= 0{,}6 \cdot 0{,}95 + 0{,}4 \cdot 0{,}7 = 0{,}57 + 0{,}28 = 0{,}85.$

Формула Байеса

- Пусть событие А осуществилось.
- Какова послеопытная (апостериорная) вероятность гипотез H_k ($k = 1,2,\ldots, n$) при условии, что событие А имело место?
- Ответ даётся формулой Байеса: для гипотезы H_k

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{P(A)},$$

где $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i)$ – полная вероятность события А.

- Формула Байеса позволяет «переоценить» вероятность каждой из гипотез после поступления новой информации относительно наблюдаемых событий.

Пример 8. Литье в болванках поступает из двух подготовительных цехов в процентном отношении 70% и 30%. При этом заготовки первого цеха имеют 10% брака, а второго – 20%. Найти вероятность того, что взятая наугад болванка имеет брак и что эта бракованная болванка изготовлена в первом цехе.

Решение.

- Случайное событие A – взятая наугад болванка бракованная.
- Гипотезы: H_1 – взятая наугад болванка из первого цеха, H_2 – из второго.
- По формуле полной вероятности $P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2)$, где $P(H_1) = 0{,}7$ и $P(H_2) = 0{,}3$, а $P(A|H_1) = 0{,}1$ и $P(A|H_2) = 0{,}2$, получим $P(A) = 0{,}7 \cdot 0{,}1 + 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}13$
- вероятность, что наудачу взятая бракованная болванка из первого цеха $P(H_1|A)$ найдём по формуле Байеса:

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{0{,}7 \cdot 0{,}1}{0{,}13} = \frac{7}{13}$$

- Замечание. При составлении гипотез, которые поясняют все возможные ситуации для наступления интересующего нас события, нужно убедиться, что они несовместны и образуют полную группу, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1 \text{ и } H_i H_j = \varnothing \; (i \neq j).$$

Схема независимых испытаний. Формула Бернулли

- Пусть производится n независимых опытов (испытаний), в каждом из которых вероятность наступления события A одинакова и равна p.
- Требуется определить вероятность того, что событие A появится ровно k раз. Эта вероятность определяется **формулой Бернулли**:

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad (\mathrm{k} = 0,1,2,\dots,\mathrm{n})$$

Пример 9. Баскетболист бросает пять раз по кольцу. Вероятность попадания при каждом броске равна 0,9. Найти вероятности того, что он попадет ровно три раза.

Решение. Введём событие A - баскетболист попадёт ровно 3 раза.

$$\mathrm{P(A)} = P_5(3) = C_5^3 0{,}9^3 (1-0{,}9)^2 = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot 0{,}729\cdot 0{,}01 = 0{,}0729$$

Замечание. При больших n пользоваться формулой Бернулли становится неудобно, тогда используют асимптотические теоремы: локальную теорему Муавра-Лапласа, интегральную теорему Муавра-Лапласа и теорему Пуассона.

Дискретные и непрерывные случайные величины

- Часто результатом случайного эксперимента является число.
- **Случайной величиной** называется величина, принимающая в результате опыта одно из своих возможных значений, причем заранее неизвестно, какое именно.
- Математически случайная величина есть действительная функция, определённая на множестве элементарных исходов.
- Случайные величины принято обозначать заглавными латинскими буквами: X, Y, Z,..., а их возможные значения – соответствующими строчными буквами: x, y, z,...
- Случайная величина полностью определена с вероятностной точки зрения, если известен её закон распределения.
- **Законом распределения случайной величины** называется соотношение между возможными значениями этой величины и соответствующими им вероятностями.

случайные величины

- **Дискретные**

принимает отдельные, изолированные возможные значения с определёнными вероятностями

Примеры:

- число попаданий или промахов в серии выстрелов,
- число появлений герба или решки при подбрасывании монеты
- число появлений события при n испытаниях

- **Непрерывные**

множество её возможных значений целиком заполняет некоторый конечный или бесконечный промежуток

Примеры:

- отклонение размера детали от номинального,
- ресурс (время безотказной работы) системы,
- физические параметры системы (температура, давление, влажность)
- длина тормозного пути автомобиля

Способы задания случайной величины

- Закон распределения может быть задан таблично, графически или аналитически.

1. **Табличный.** Случайную величину можно задать законом распределения вероятностей.

а) Таблица, в которой перечислены возможные значения дискретной случайной величины и соответствующие им вероятности, называется **рядом распределения**:

x_i	x_1	x_2	…	x_n	…
p_i	p_1	p_2	…	p_n	…

Ряд распределения может быть построен только для дискретных случайных величин.

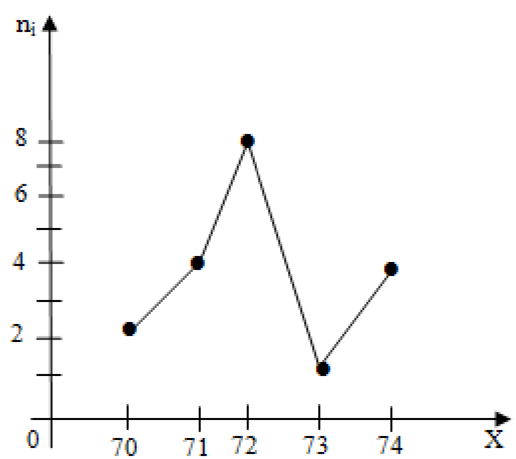
- В таблице распределения рассмотрена полная система событий, а сумма вероятностей полной системы событий равна 1, поэтому

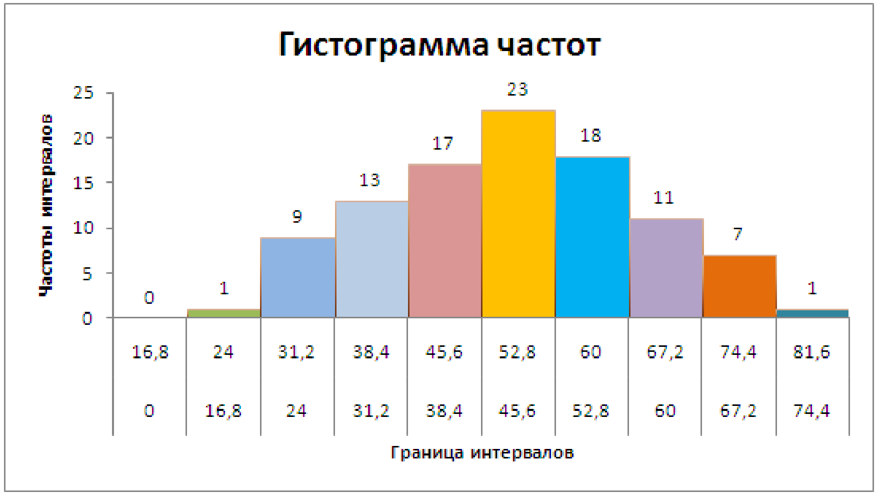
$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Способы задания случайной величины

2. **Графический.** Случайная величина может быть задана полигоном и гистограммой.

- **Полигоном** называется многоугольник, вершинами которого являются точки (x_i, p_i), взятые из закона распределения, а сторонами – отрезки, соединяющие эти точки.
- **Гистограммой** называется ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, основаниями которых являются интервалы изменения случайной величины, а высотами – соответствующие им вероятности, или частотности, или частоты.





3. Функция распределения вероятностей

- Универсальной характеристикой, пригодной для описания дискретных и непрерывных случайных величин, является **функция распределения вероятностей** F(x), определяющая вероятность того, что случайная величина X примет значение меньше некоторого числа x, т.е. $F(x) = P(X < x)$.

Основные свойства функции F(x):

1. $0 \le F(x) \le 1, -\infty < x < \infty$;
2. $F(-\infty) = 0, F(\infty) = 1$;
3. Функция F(x) непрерывна слева;
4. Функция F(x) – неубывающая функция, т.е. $F(x_1) \le F(x_2)$ если $x_1 < x_2$.

Вероятность попадания случайной величины X на произвольный интервал равна $P(x \in [x_1; x_2]) = F(x_2) - F(x_1)$.

Пример 10. По мишени производится 4 независимых выстрела с вероятностью попадания при каждом выстреле $p = 0,8$. Требуется:

а) найти закон распределения дискретной случайной величины x, равной числу попаданий в мишень;

б) найти вероятности событий: $1 \le x \le 3$; $x > 3$;

в) построить многоугольник распределения.

Решение.

а) Возможные значения случайной величины x: 0, 1, 2, 3, 4.

Соответствующие вероятности вычисляем по формуле Бернулли:

$$p_0 = p(x=0) = C_4^0\, 0,8^0 \cdot 0,2^4 = 0,0016.$$

$$p_1 = p(x=1) = C_4^1\, 0,8 \cdot 0,2^3 = 0,0256.$$

$$p_2 = p(x=2) = C_4^2\, 0,8^2 \cdot 0,2^2 = 0,1536.$$

$$p_3 = p(x=3) = C_4^3\, 0,8^3 \cdot 0,2 = 0,4096.$$

$$p_4 = p(x=4) = C_4^4\, 0,8^4 \cdot 0,2^0 = 0,4096.$$

Закон распределения дискретной случайной величины x представится таблицей:

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,0016	0,0256	0,1536	0,4096	0,4096

Проверка: 0,0016 + 0,0256 + 0,1536 + 0,4096 + 0,4096 = 1.

Пример 10. По мишени производится 4 независимых выстрела с вероятностью попадания при каждом выстреле $p = 0{,}8$. Требуется:

а) найти закон распределения дискретной случайной величины x, равной числу попаданий в мишень;

б) найти вероятности событий: $1 \le x \le 3$; $x > 3$;

в) построить многоугольник распределения.

Решение.

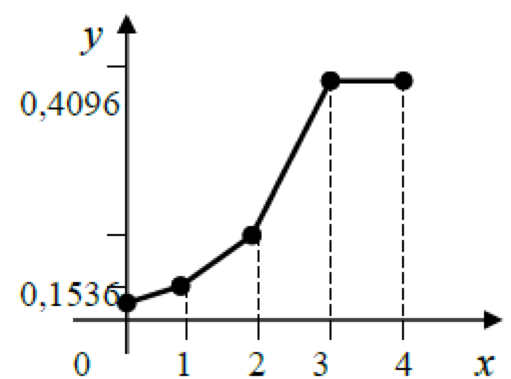
б) Найдём вероятность событий $1 \le x \le 3$ и $x > 3$:

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,0016	0,0256	0,1536	0,4096	0,4096

$$p(1 \le x \le 3) = p_1 + p_2 + p_3 = 0{,}0256 + 0{,}1536 + 0{,}4096 = 0{,}5888;$$

$$p(x > 3) = p_4 = 0{,}4096.$$

в) Полигон:



Плотность вероятности

- Непрерывная случайная величина задаётся **плотностью вероятности** $f(x)$ (дифференциальным законом распределения).

Свойства плотности вероятности:

1. $f(x) \geq 0$ для $-\infty < x < \infty$
2. Условие нормировки $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$
3. $\mathrm{P}(x_1 \leq x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$

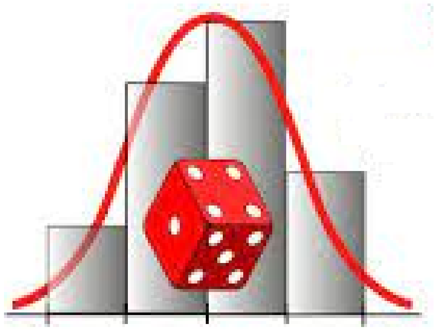
Связь между плотностью вероятностей $f(x)$ и функцией распределения вероятностей F(x) (интегральной функцией) следующая:

$$f(x) = F'(x) \text{ и } F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Замечание. Для непрерывной случайной величины функция распределения непрерывная. Это означает, что вероятность "попасть в одну точку" равна нулю, т.е. рассматривается вероятность попадания значения в отрезок.

Числовые характеристики случайных величин

- Числа, позволяющие отразить наиболее существенные особенности распределения случайной величины, называются ***числовыми характеристиками случайной величины***.
- Важнейшими из них являются <u>математическое ожидание </u>и <u>дисперсия</u>.



1. Математическое ожидание

- **Математическим ожиданием** *дискретной случайной величины* называется сумма произведений её возможных значений на соответствующие им вероятности:

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n \quad \text{или} \quad M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

- **Математическим ожиданием** *непрерывной случайной величины* X называется среднее ожидаемое значение X, определяемое формулой:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx.$$

- Если все возможные значения непрерывной случайной величины лежат в отрезке [a; b], то

$$M(X) = \int_a^b x f(x)\, dx.$$

- M(X) называют ещё **центром распределения** или характеристикой положения случайной величины на числовой оси. Это среднее значение, вокруг которого группируются остальные возможные значения случайной величины.

Свойства математического ожидания

1. Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной M(C) = C;
2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания M(CX)=CM(X);
3. Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожидании слагаемых: $$M\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)=\sum_{k=1}^{n} M(X_k)$$
4. Мат. ожидание произведения взаимно независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий сомножителей

$$M(X_1X_2\ldots X_n)=M(X_1)M(X_2)\ldots M(X_n).$$

Замечание 1. Математическое ожидание называют иногда **взвешенным средним**, так как оно приближённо равно среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины при большом числе опытов.

Замечание 2. Из определения математического ожидания следует, что его значение не меньше наименьшего возможного значения случайной величины и не больше наибольшего.

Замечание 3. Математическое ожидание дискретной случайной величины есть неслучайная (постоянная) величина. В дальнейшем увидим, что это же справедливо и для непрерывных случайных величин.

Пример 11. Найдём математическое ожидание случайной величины X – числа стандартных деталей среди трёх, отобранных из партии в 10 деталей, среди которых 2 бракованных.

Решение.

а) Составим ряд распределения для X. Из условия задачи следует, что

X может принимать значения 1, 2, 3.

$$p(1)=\frac{C_8^1\cdot C_2^2}{C_{10}^3}=\frac{1}{15},\quad p(2)=\frac{C_8^2\cdot C_2^1}{C_{10}^3}=\frac{7}{15},\quad p(3)=\frac{C_8^3}{C_{10}^3}=\frac{7}{15}.$$

X	1	2	3
p	1/15	7/15	7/15

$$M(X)=1\cdot\frac{1}{15}+2\cdot\frac{7}{15}+3\cdot\frac{7}{15}=2,4.$$

2. Дисперсия

- Для того чтобы иметь представление о поведении случайной величины, недостаточно знать только её математическое ожидание.
- Рассмотрим две случайные величины: X и Y, заданные рядами распределения вида

X	49	50	51
p	0,1	0,8	0,1

Y	0	100
p	0,5	0,5

- $M(X) = 49 \cdot 0{,}1 + 50 \cdot 0{,}8 + 51 \cdot 0{,}1 = 50,$

  $M(Y) = 0 \cdot 0{,}5 + 100 \cdot 0{,}5 = 50.$

- Как видно, математические ожидания обеих величин равны, но если для X её M(X) хорошо описывает поведение, являясь наиболее вероятным возможным значением (причём остальные значения ненамного отличаются от 50), то значения величины Y существенно отстоят от M(Y).

2. Дисперсия

- **Дисперсией (рассеянием)** случайной величины называется математическое ожидание квадрата её отклонения от её математического ожидания:

$$D(X) = M(X - M(X))^2$$

- Дисперсию удобно вычислять по формуле

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$$

- Для непрерывной случайной величины

$$D(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(x))^2 f(x)dx \qquad D(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - [M(x)]^2$$

- Замечание 1. В определении дисперсии оценивается не само отклонение от среднего, а его квадрат. Это сделано для того, чтобы отклонения разных знаков не компенсировали друг друга.
- Замечание 2. Из определения дисперсии следует, что эта величина принимает только неотрицательные значения.

Свойства дисперсии

1. Дисперсия постоянной величины С равна нулю: $D(C) = 0$.
2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возведя его в квадрат: $D(CX) = C^2D(X)$.
3. Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий:

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y).$$

Следствие 1. Дисперсия суммы нескольких взаимно независимых случайных величин равна сумме их дисперсий.

Следствие 2. Дисперсия суммы постоянной и случайной величин равна дисперсии случайной величины.

4. Дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий:

$$D(X - Y) = D(X) + D(Y).$$

3. Среднее квадратическое отклонение

- Дисперсия даёт среднее значение квадрата отклонения случайной величины от среднего (имеет размерность квадратичную); для оценки самого отклонения служит величина, называемая **средним квадратическим отклонением:**

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

Пример 12. Вычислим дисперсии случайных величин X и Y

X	49	50	51
p	0,1	0,8	0,1

Y	0	100
p	0,5	0,5

Решение.

- Мы уже знаем, что M(X) = 50, M(Y) = 50.
- $D(X) = (49^2 \cdot 0{,}1 + 50^2 \cdot 0{,}8 + 51^2 \cdot 0{,}1) - 50^2 = 2500{,}2 - 2500 = 0{,}2$.
- $D(Y) = (0^2 \cdot 0{,}5 + 100^2 \cdot 0{,}5) - 50^2 = 5000 - 2500 = 2500$.

Основные законы распределения вероятностей

- Среди всех вероятностных распределений есть такие, которые на практике используются наиболее часто. Многие из них лежат в основе целых областей знаний. Эти распределения хорошо изучены и свойства их известны.

1. Биномиальное распределение

Это одно из самых распространенных дискретных распределений.

Биномиальное распределение возникает при исследовании последовательности (схемы) независимых испытаний, в которых результатом каждого опыта испытания может быть **один из двух исходов** (например, успех и неудача), и вероятности их в каждом из опытов **неизменны** (схема Бернулли).

- Дискретная случайная величина X имеет биномиальное распределение с параметрами n и p, если закон распределения имеет вид

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}, k = 0,1, \dots, n$$

- Математическое ожидание и дисперсия: $M(x) = np$, $D(x) = np(1-p)$.

Пример 13. Из орудия произведено пять выстрелов по цели, вероятность попадания в которую при каждом выстреле равна 0,6. Для случайной величины X – количества попаданий в цель:

- записать закон распределения,
- найти M(x) и D(x);
- определить вероятность уничтожения цели, если для этого требуется не менее четырёх попаданий.

Решение.

X распределена по биномиальному закону (имеем независимые испытания) с параметрами $n = 5$ и $p = 0{,}6$.

Закон распределения имеет вид

$$P(X = k) = C_5^k 0{,}6^k (1 - 0{,}6)^{n-k}, k = 0{,}1, \dots, 5$$

$M(x) = 5 \cdot 0{,}6 = 3$ и $D(x) = 5 \cdot 0{,}6 \cdot (1 - 0{,}6) = 1{,}2$.

Пусть событие A - цель уничтожена, тогда

$$P(A) = P(X = 4) + P(X = 5) = C_5^4 0{,}6^4 0{,}4 + 0{,}6^5 = 0{,}33696.$$

2. Распределение Пуассона

Это дискретное распределение играет важную роль в ряде вопросов физики (радиоактивный распад), теории связи, теории надежности, теории массового обслуживания (телефонных вызовов, отказов оборудования, несчастных случаев, эпидемий и т.п). Распределение Пуассона имеет дело с простейшими потоками.

- Дискретная случайная величина X распределена по закону Пуассона с параметром $\lambda > 0$, если закон распределения имеет вид

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, k = 0,1,2, \dots$$

- Математическое ожидание и дисперсия: $M(x) = \lambda$, $D(x) = \lambda$.
- Замечание. ***Простейшим (пуассоновским) потоком*** называют поток событий, обладающий тремя свойствами: стационарностью, отсутствием последействия и ординарностью.

Простейший (пуассоновский) поток

- **Свойство стационарности** состоит в том, что вероятность появления k событий в любом промежутке времени зависит только от числа k и от длительности t промежутка времени и не зависит от начала его отсчёта.
- **Поток без последействия**, т.е. вероятность появления k событий в любом промежутке времени не зависит от того, появлялись или не появлялись события в моменты времени, предшествующие началу рассматриваемого промежутка. Другими словами, предыстория потока не влияет на вероятность появления событий в ближайшем будущем.
- **Поток ординарен**, т.е. вероятность появления двух и более событий за малый промежуток времени практически невозможна. Другими словами, вероятность появления более одного события за малый промежуток времени существенно меньше вероятности появления только одного события.
- Параметр λ характеризует интенсивность простейшего потока событии (среднее число событий в единицу времени).

Пример 14. Среднее число заказов такси, поступающих на диспетчерский пункт в одну минуту равно трем. Для случайной величины X – числа заказов такси за одну минуту – записать закон распределения и найти дисперсию.
Поток заказов считать простейшим.

Решение.

Число заказов такси за одну минуту имеет пуассоновское распределение с параметром $\lambda = 3$, т.е. закон распределения имеет вид

$$P(X = k) = \frac{3^k}{k!} e^{-3}, k = 0,1,2, \dots$$

$D(x) = 3$.

Пример 15. В магазин поступили 100 телевизоров, в среднем 2% среди них бракованы. Найти вероятность, что ровно три телевизора неисправны.

Решение. Случайная величина X – количество бракованных телевизоров из 100, имеет биномиальное распределение с параметрами $n = 100$ и $p = 0,02$.

Тогда $P(X = 3) = C_{100}^{3} 0,02^3 0,98^{97}$.

Так как вычислить эту величину трудно, то будем считать, что случайная величина X – количество бракованных телевизоров из 100 имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda = np = 2$. Тогда

$$P(X = 3) = \frac{2^3}{3!} e^{-2} \approx 0,182.$$

3. Геометрическое распределение

Это еще одно распределение, связанное с повторными независимыми испытаниями (схемой Бернулли). Геометрическое распределение используется в задачах контроля продукции и других практических задачах.

- Пусть производятся испытания по схеме Бернулли с вероятностью успеха в каждом из испытании, равной p.
- Испытания продолжаются до тех пор, пока не появится успех, после чего прекращаются.
- Тогда дискретная случайная величина X – число проведенных испытании до первого успеха включительно, **имеет геометрическое распределение**.
- Её закон распределения имеет вид

$$P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}, k = 1, 2, 3, \dots$$

- Математическое ожидание и дисперсия для геометрического распределения:

$$M(X) = \frac{1}{p}, D(X) = \frac{1 - p}{p^2}$$

Пример 16. Бросают игральный кубик до тех пор, пока не выпадет шестёрка. Для случайной величины X – числа произведённых бросаний кубика, найти M(x), D(x) и $P(x \le 3)$.

Решение.

Случайная величина X имеет геометрическое распределение с параметром $p = 1/6$. Сразу находим мат. ожидание и дисперсию:

$$M(X) = \frac{1}{1/6} = 6, D(X) = \frac{1 - 1/6}{(1/6)^2} = 30.$$

$$P(x \le 3) = P(x = 1) + P(x = 2) + P(x = 3) =$$

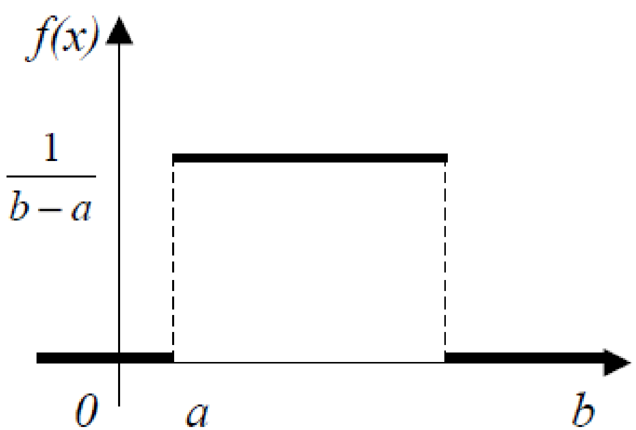
$$= 1/6 + 1/6 \cdot 5/6 + 1/6(5/6)^2 = 91/216 \approx 0{,}4213.$$

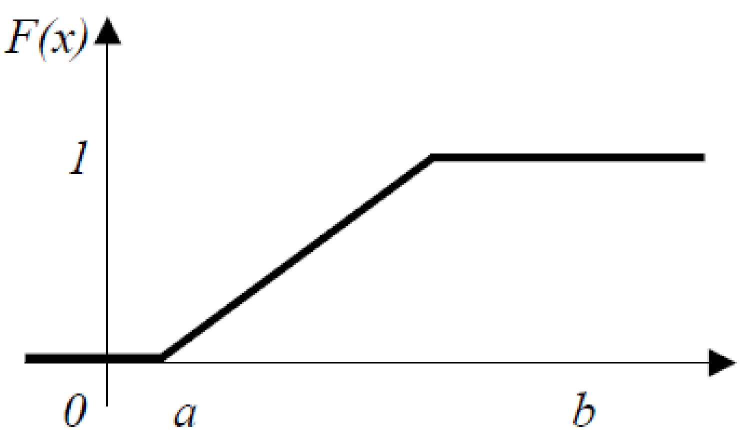
4. Закон равномерной плотности (равномерное распределение)

Данному закону может подчиняться, например, погрешность при измерениях с округлением или положение объекта в некоторой области, если ни одному из возможных положений нельзя отдать предпочтения.

- Пусть возможные значения непрерывной случайной величины X лежат в интервале $(a; b)$ и нет оснований для того, чтобы отдать предпочтение какому-либо из этих значений. Тогда непрерывная случайная величина X **имеет равномерное распределение.**
- X имеет равномерное распределение с параметрами a $и$ b, если плотность распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, \text{если } x \in (a;b), \\ 0, \text{если } x \notin (a;b). \end{cases}$$





Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение для равномерного распределения:

$$M(x) = \frac{a+b}{2};\; D(x) = \frac{(b-a)^2}{12};\; \sigma(x) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Пример 17. Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию. Интервал движения 5 мин. Найти среднее время ожидания пассажиром автобуса и вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать очередной автобус менее 3-х минут.

Решение.

- Время ожидания пассажиром очередного автобуса X – непрерывная случайная величина, которая имеет равномерное распределение на интервале (0; 5).
- Следовательно, среднее время M(X) = (0 + 5) / 2 = 2,5 (мин),
- Вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать очередной автобус меньше 3-х минут:

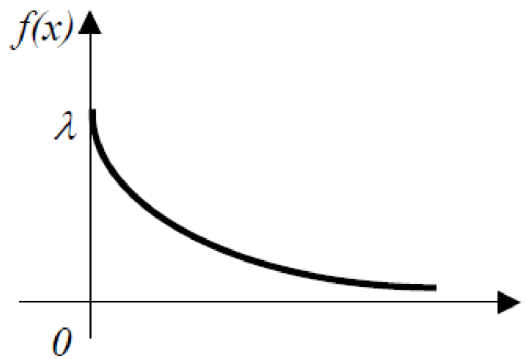
$$P(0 < x < 3) = \int_0^3 \frac{1}{5-0}\,dx = \frac{3}{5}.$$

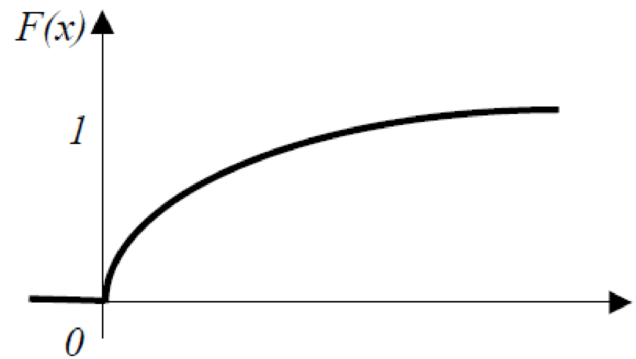
5. Показательное (экспоненциальное) распределение

Такое распределение применяется в теории надежности, задачах массового обслуживания и при решении многих других практических задач.

- Пусть рассматривается простейший **непрерывный поток однородных событии** и произвольно назначен момент начала отсчета текущего времени.
- Тогда непрерывная случайная величина X – время появления очередного события, подчиняется **закону экспоненциального распределения.**
- Непрерывная случайная величина X имеет показательное распределение с параметром λ (λ > 0), если плотность распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0; \\ \lambda e^{-\lambda x} \text{ при } x > 0. \end{cases}$$





- Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратические отклонение

$$M(x) = \frac{1}{\lambda};\; D(x) = \frac{1}{\lambda^2};\; \sigma(x) = \frac{1}{\lambda}$$

Пример 18. Время ожидания у бензоколонки АЗС является случайной величиной X, распределенной по экспоненциальному закону со средним временем ожидания, равным 2 мин. Записать плотность распределения случайной величины X и найти вероятность $P(1 < X < 3)$.

Решение.

- Плотность распределения вероятности времени ожидания у бензоколонки имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0; \\ 0{,}5e^{-0{,}5x} \text{ при } x > 0, \end{cases} \quad \text{т.к.} \quad x_0 = \frac{1}{\lambda} = 2.$$

- Искомая вероятность:

$$P(1 < X < 3) = \int_1^3 0{,}5e^{-0{,}5x}dx = e^{-0{,}5x}\Big|_1^3 \cong 0{,}3834.$$

6. Нормальный закон распределения

Нормальным называется распределение вероятностей, которое для одномерного случая задается **функцией Гаусса:**

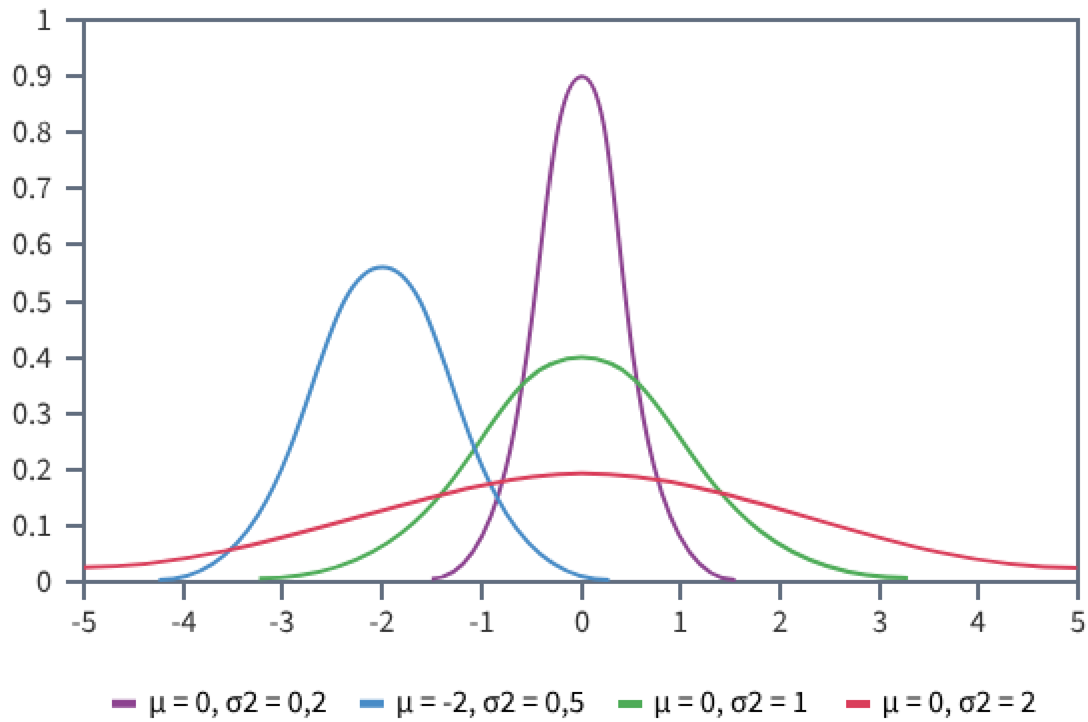
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}),$$

где μ — математическое ожидание, σ^2 — дисперсия.

Нормальное распределение зависит от 4-х параметров:

- математическое ожидание — «центр тяжести» распределения;
- дисперсия — степень разброса случайной величины относительно математического ожидания;
- коэффициент асимметрии — параметр формы распределения, определяющий его симметрию относительно математического ожидания;
- коэффициент эксцесса — параметр распределения, задающий «остроту» пика распределения.

Гауссиана – график функции Гаусса

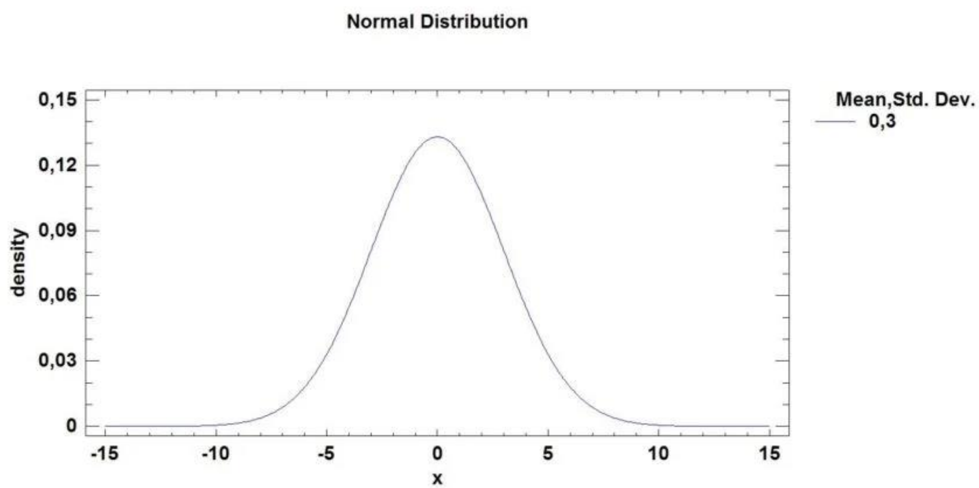


Наиболее вероятные значения случайной величины расположены вблизи его пика.

По мере удаления от него, вероятность значений уменьшается и если значение расположено в «хвосте» распределения, то оно очень маловероятно.

Свойства нормального распределения

1. Нормальная кривая имеет колоколообразную форму, симметричную относительно точки $x=\mu$, с точками перегиба, абсциссы которых отстоят от μ на $\pm\sigma$.
2. Нормальное распределение полностью определятся двумя параметрами: значением генерального среднего (μ) и генерального стандартного отклонения (σ).
3. Медиана и мода нормального распределения совпадают и равны μ.
4. Коэффициенты асимметрии и эксцесса нормального распределения равны нулю.



Пример нормального распределения