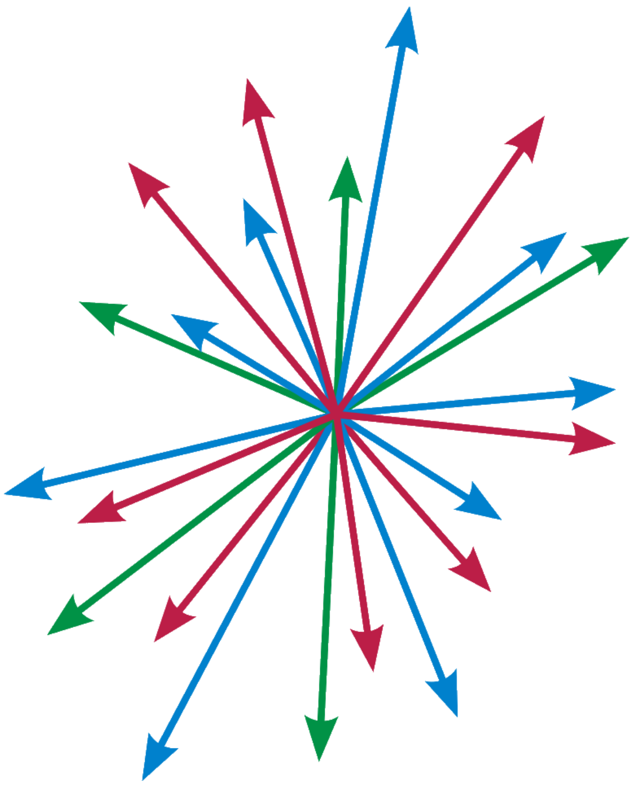
09.04.03 Прикладная информатика

Профиль «Машинное обучение и анализ данных»

Дисциплина «Математические основы анализа данных»

Лекция 1

Линейные векторные пространства



План лекции

- Понятие вектора
- Линейные векторные пространства
- Операции над векторами
- Линейная зависимость/независимость векторов
- Базис и размерность векторного пространства
- Нормированные и метрические пространства

Вектор

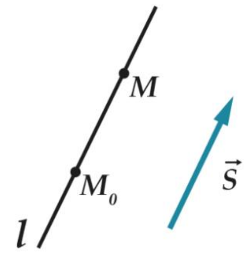
- В «школьной» математике вектор – это направленный отрезок.

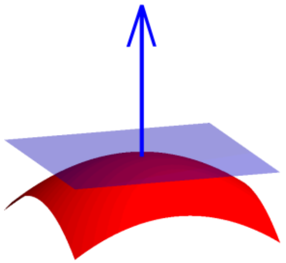
Более общее понятие:

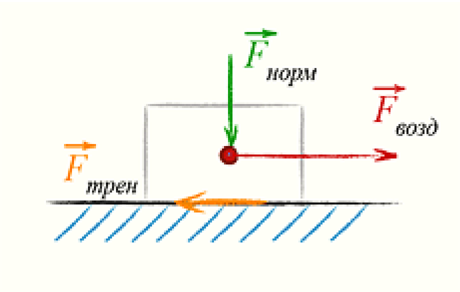
- Вектор (от лат. *vector* — «перевозчик», «переносчик», «несущий») — математический объект, характеризующийся **величиной** и **направлением.**
- Если в пространстве задана система координат, то (свободный) вектор о**днозначно задаётся набором своих координат**. Поэтому в математике, информатике и других науках **упорядоченный набор** чисел тоже называют вектором.
- В более общем смысле вектор в математике рассматривается как **элемент некоторого векторного (линейного) пространства**.

Примеры векторов

- направляющий вектор прямой,
- нормаль в точке поверхности,
- радиус-вектор орбиты планеты,
- вектор градиента,
- физическая сила,
- набор весовых коэффициентов,
- *n*-разрядное двоичное число







$$(w_1; w_2; \dots; w_n)$$

Понятие векторного пространства

- **Векторное пространство (линейное пространство)** — математическая структура, представляющая собой набор элементов, называемых векторами, для которых определены операции сложения друг с другом и умножения на число — скаляр.
- Эти операции подчинены восьми аксиомам.
- Скаляры могут быть вещественными, комплексными числами или элементами любого другого поля чисел.

Аксиомы векторного пространства

- Пусть V – множество векторов, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ – его элементы, а λ и μ – некоторые числа.
- V будет векторным пространством, если выполняются следующие аксиомы:

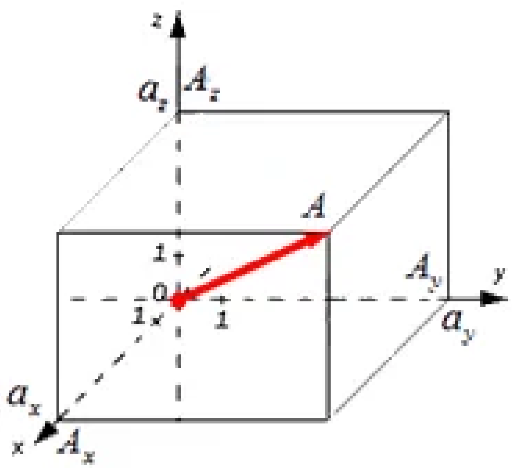
1. Пространство V содержит нулевой вектор $\boldsymbol{0}$ такой, что $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{a}$ для $\forall \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{V}$.
2. Для $\forall \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{V}$ существует противоположный ему вектор, обозначаемый $-\boldsymbol{a}$, такой, что $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$.
3. Коммутативность сложения: $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\ \forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{V}$.

Аксиомы векторного пространства

4. Ассоциативность сложения:
   $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})\ \forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \boldsymbol{V}$.
5. Наличие нейтрального элемента для умножения:
   $1 \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$ для $\forall \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{V}$.
   Дистрибутивность умножения:
6. $\lambda(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \lambda \boldsymbol{a} + \lambda \boldsymbol{b}\ \forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ и $\forall \lambda \in \boldsymbol{R}$.
7. $(\lambda + \mu)\, \boldsymbol{a} = \lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{a}$ для $\forall \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{V}$ и $\forall \lambda, \mu \in \boldsymbol{R}$.
8. $(\lambda\mu)\boldsymbol{a} = \lambda(\mu \boldsymbol{a})$ для $\forall \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{V}$ и $\forall \lambda, \mu \in \boldsymbol{R}$.

Примеры векторных пространств

- **Пример 1.** Множество всех векторов плоскости или трёхмерного пространства является линейным пространством относительно операций сложения двух векторов и умножения векторов на число.



$$\overrightarrow{OA}(a_x; a_y; a_z)$$

Примеры векторных пространств

- **Пример 2.** Набор из 8 векторов, составленных из 5-разрядных двоичных чисел
r_0 = 00000, r_1 = 10101, r_2 = 01111, r_3 = 11010,
r_4 = 00101, r_5 = 10110, r_6 = 01001, r_7 = 11100
образует векторное пространство L,
если числа $C \in \{0, 1\}$.
- Этот небольшой пример позволяет убедиться в проявлении свойств векторного пространства, включенных в его определение.
- Суммирование этих векторов выполняется **поразрядно по модулю два**, т. е. без переноса единиц в старший разряд.

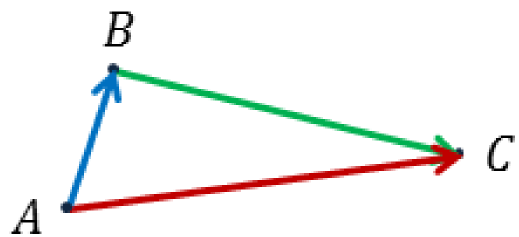
Операции над векторами

- **Сложение векторов**

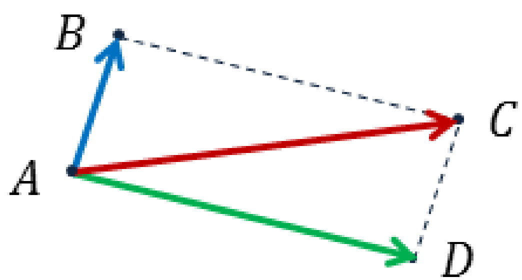
$$
+\begin{array}{l}\vec{a}(a_1; a_2; \dots; a_n)\\ \vec{b}(b_1; b_2; \dots; b_n)\end{array} =
$$

$$
= \overrightarrow{a+b}(a_1+b_1; a_2+b_2; \dots; a_n+b_n)
$$

Правило треугольника:



Правило параллелограмма:

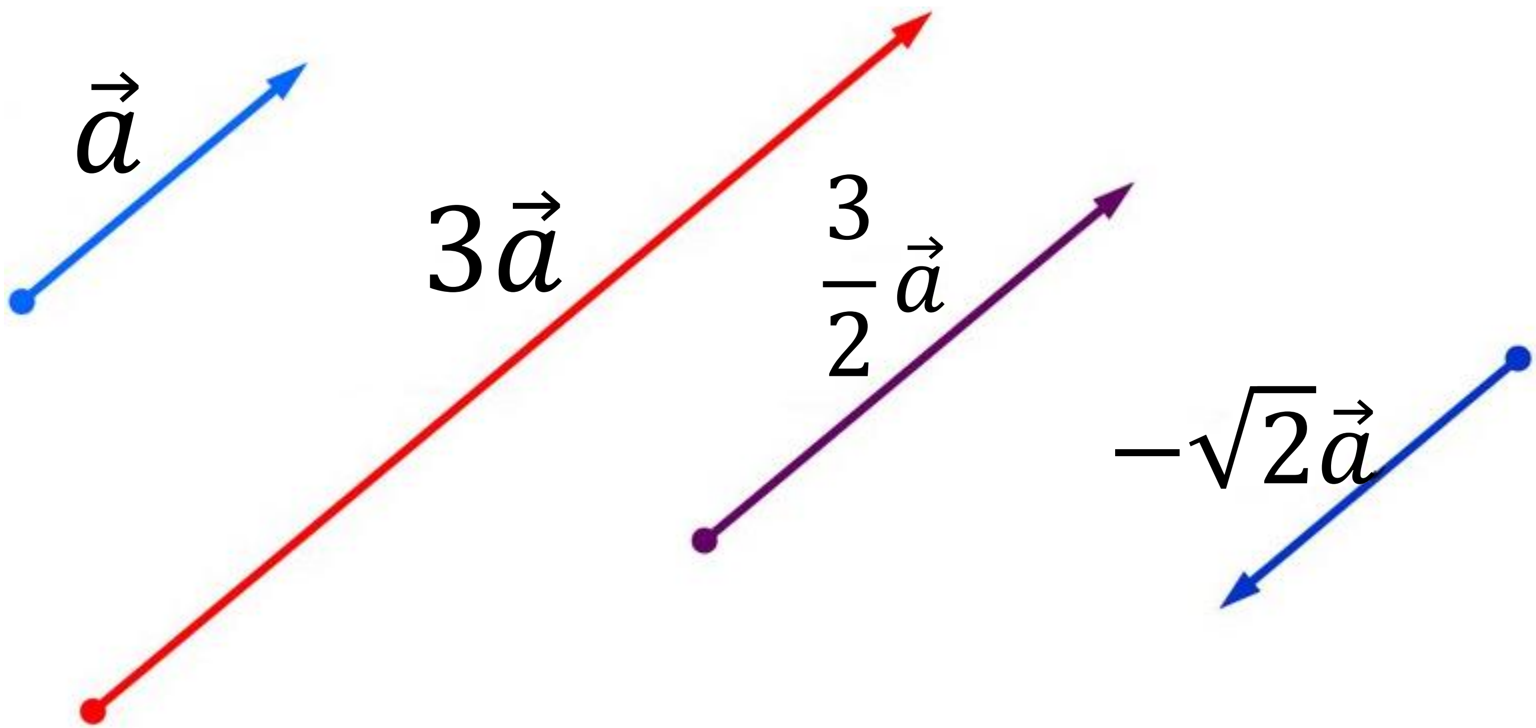


Операции над векторами

- **Умножение вектора на число (скаляр)**

$$\vec{a}(a_1; a_2; \dots; a_n), \lambda \in \boldsymbol{R}$$

$$\lambda\vec{a} = (\lambda a_1; \lambda a_2; \dots; \lambda a_n)$$



Пример 1

- Даны векторы и число. Выполнить операции

$\vec{a}(2; 1; 0; 7)$, $\vec{b}(4; 5; 5; 6)$ $\lambda = 4$

1) $\lambda\vec{a} + \vec{b}$
2) $\vec{a} + \lambda\vec{b}$
3) $\vec{a} - \vec{b}$

<u>Решение</u>

1) $\lambda\vec{a}(8; 4; 0; 28)$, $\lambda\vec{a} + \vec{b}$ = (12; 9; 5; 34)

2) $\lambda\vec{b}(16; 20; 20; 24)$, $\vec{a} + \lambda\vec{b}$ = (18; 21; 20; 31)

3) $\vec{a} - \vec{b}$(–2; –4; –5; 1)

Операции над векторами

- **Скалярное произведение двух векторов**

$\vec{a}(a_1; a_2; \dots; a_n), \vec{b}(b_1; b_2; \dots; b_n) \in V$

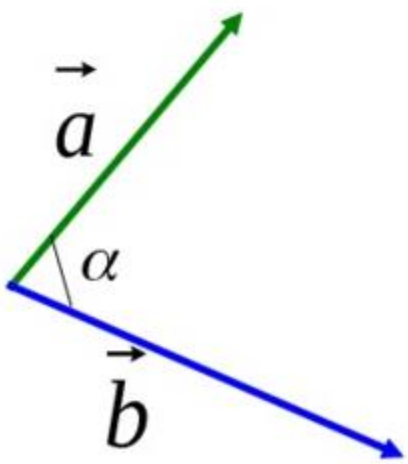
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

Скалярное произведение (иногда называемое внутренним произведением) — результат операции над двумя векторами, **являющийся скаляром**, то есть числом, **не зависящим от выбора системы координат.**

Операции над векторами

- **Скалярное произведение двух векторов: геометрическая трактовка**



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$$

Модуль вектора $\vec{a}$ находится как

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

Операции над векторами

- **Скалярное произведение двух векторов: применение**

1. **Критерий:** два ненулевых вектора перпендикулярны $\Leftrightarrow$ их скалярное произведение равно нулю.
2. Используя скалярное произведение, можно найти косинус угла между векторами:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

Пример 2

- Найти скалярное произведение векторов и угол между ними: $\vec{a}(2;1;0;7)$, $\vec{b}(4;5;5;6)$

1) Находим скалярное произведение, используя координаты векторов:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 2\cdot4+1\cdot5+0\cdot5+7\cdot6=8+5+42=55$$

2) Вычислим длины векторов:

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2+1^2+0^2+7^2} = \sqrt{4+1+49} = \sqrt{54}$$

$$\left|\vec{b}\right| = \sqrt{4^2+5^2+5^2+6^2} = \sqrt{16+25+25+36} = \sqrt{102}$$

3) Находим косинус угла:

$$\cos\alpha = \frac{55}{\sqrt{54}\cdot\sqrt{102}} = \frac{55}{6\sqrt{153}} \approx 0{,}741$$

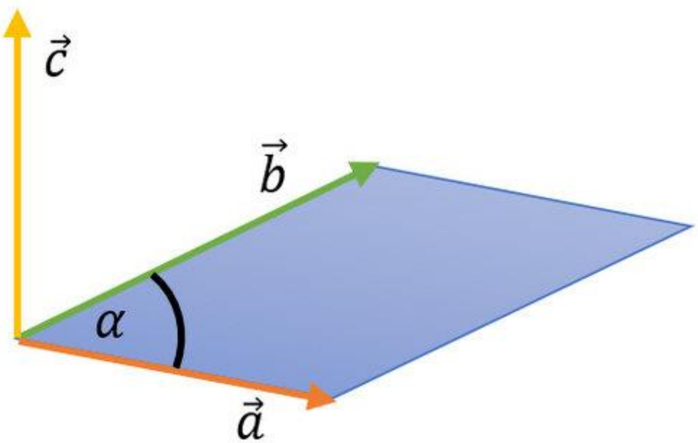
Операции над векторами

- **Векторное произведение двух векторов — вектор**, перпендикулярный обоим исходным векторам, длина которого численно равна площади параллелограмма, образованного исходными векторами, а выбор из двух направлений определяется так, чтобы тройка из по порядку стоящих в произведении векторов и получившегося вектора была правой.

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

Операции над векторами

- **Векторное произведение двух векторов**



$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$$

$$\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\alpha)$$

$$\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{\imath}(a_y b_z - a_z b_y) + \vec{\jmath}(a_z b_x - a_x b_z) + \vec{k}(a_x b_y - a_y b_x)$$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$$

Пример 3

- Найти векторное произведение двух векторов

$\vec{a}(2; 1; 7), \quad \vec{b}(4; 5; 6)$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 7 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= -29\vec{i} + 16\vec{j} + 6\vec{k}$$

Ответ: $(-29; 16; 6)$

Понятие линейной зависимости

- **Линейной комбинацией векторов** $\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$

с коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ называется вектор

$$\lambda_1\overrightarrow{a_1} + \lambda_2\overrightarrow{a_2} + \cdots + \lambda_n\overrightarrow{a_n}$$

- Вектора $\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ называются **линейно независимыми**, если не существует набора ненулевых коэффициентов, для которого линейная комбинация этих векторов равна нулевому вектору.
- В противном случае система называется **линейно зависимой.**

Понятие линейной зависимости: примеры

- Система базисных векторов $\vec{i}(1;0;0)$, $\vec{j}(0;1;0)$, $\vec{k}(0;0;1)$ является линейно независимой:

$$\alpha(1;0;0)+\beta(0;1;0)+\gamma(0;0;1)=(\alpha;\beta;\gamma),\alpha,\beta,\gamma\epsilon\boldsymbol{R};$$

- В двумерном пространстве любые 3 и более векторов линейно зависимы.
- В трёхмерном пространстве любые 4 вектора линейно зависимы.

Свойства линейно зависимых и линейно независимых систем векторов

1. Любая система векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_k$ линейного пространства, содержащая нулевой вектор, линейно зависима.

2. Любая система векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_k$ линейного пространства, содержащая пару взаимно противоположных векторов, линейно зависима.

3. Любая подсистема векторов линейно независимой системы векторов линейного пространства линейно независима.

4. Любая система векторов линейного пространства, содержащая линейно зависимую подсистему векторов, линейно зависима.

5. Система векторов линейного пространства линейно зависима тогда и только тогда, когда хотя бы один из векторов системы линейно выражается через остальные векторы системы (представлен в виде разложения по векторам системы).

6. Если система векторов линейного пространства линейно независима, то любая её подсистема также линейно независима.

7. Система векторов, состоящая из одного ненулевого вектора линейного пространства, линейно независима.

Линейная зависимость в контексте анализа данных

- Прежде чем начать построение любой модели данные следует подготовить.
- Один из таких этапов – это удаление лишних, избыточных данных.
- Если dataset разбит на векторы-столбцы, то каждый вектор хранит значения всех объектов своего одного признака.
- Один из способов сократить число признаков – найти и исключить линейно зависимые векторы.

Сколько нужно векторов?

- Каково число векторов, образующих всё пространство?
- Какова размерность пространства?
- Какой наименьший набор векторов путём применения к нему операции суммирования и умножения на число позволяет сформировать все векторы пространства?

Размерность и базис векторного пространства

- **Размерность** s пространства V определяется как наибольшее число векторов в V, образующих линейно независимый набор.
- Размерность – это не число векторов в V, которое может быть бесконечным и не число компонентов вектора!
- Пространства, имеющие конечную размерность $s \neq \infty$, называются **конечномерными**, если $s = \infty$, – **бесконечномерными**.
- Любой набор s линейно независимых векторов в пространстве V образует его **базис**. Это следует из того, что любой вектор линейного s-мерного векторного пространства V может быть представлен единственным способом в виде линейной комбинации векторов базиса.

Разложение вектора по базису

- Зафиксируем один из наборов, образующих базис пространства $\boldsymbol{V}$: $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$. Тогда произвольный вектор $\vec{a} \in \boldsymbol{V}$ можно представить в виде линейной комбинации

$$\vec{a} = a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + \cdots + a_n\overrightarrow{e_n}$$

- Числа a_i, $i = 1..n$ называются **координатами вектора** $\vec{a}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$.
- Координаты в базисе **определяются однозначно**, т.е. не существует другого разложения.

Нормированное пространство

- Пусть в линейном пространстве V определена функция, которая ставит в соответствие каждому вектору $a \subset \mathrm{V}$ вещественное число $\|a\|$.
- Будем называть $\|a\|$ **нормой вектора** a, если для этой функции выполняются **аксиомы нормы:**

1. $\|a\| \geq 0$, причём $\|a\| = 0 \Leftrightarrow a = 0$.
2. $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$ (неравенство треугольника).
3. $\|\alpha\, a\| = |\alpha| \cdot \|a\|$, где α – вещественное или комплексное число (однородность нормы).

-

- Пространство V с введённой в нём нормой называется **нормированным (линейным) пространством**.

Примеры

- Множество вещественных чисел $\boldsymbol{R}$ становится нормированным пространством, если положить $|x| = \|x\|$.
- На множестве *n*-мерных векторов $\vec{a}(a_1; a_2; \ldots; a_n)$ возможны следующие нормы:
  - евклидова норма $\|a\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$,
  - гёльдеровы нормы: $\|a\|_p = \left(a_1^p + a_2^p + \cdots + a_n^p\right)^{1/p}, p -$ натуральное число
  - частный случай – норма l_1: $\|a\|_1 = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$

Упражнение. Найти евклидову и l_1-норму для вектора $a(1; -2; 3; 4)$.

$$\|a\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2 + 4^2} \approx 5{,}48$$
$$\|a\|_1 = |1| + |-2| + |3| + |4| = 10,$$

Метрические пространства

- Пусть имеется векторное пространство V, x, y, z – его элементы.
- Функция ρ называется **функцией расстояния** или **метрикой**, если выполняются следующие условия:

  1. $\rho(x, y) \geq 0.$
  2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (аксиома симметричности).
  3. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (неравенство треугольника).

- **Метрическим пространством** называется множество, в котором определено расстояние ρ между любой парой элементов.
- В анализе данных метрикой называют функцию, используемую для определения расстояния между многомерными векторами в пространстве признаков.

Примеры метрик

- Дискретная метрика: $\rho(x, y) = 0$, если $x = y$, $\rho(x, y) = 1$ во всех остальных случаях.
- Функция расстояния для вещественных чисел: $x, y \in \boldsymbol{R}$,

$$\rho(x, y) = |x - y|.$$

- Евклидова метрика:

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

- «Манхэттенское расстояние» (расстояние городских кварталов):

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

- Любое нормированное пространство можно превратить в метрическое, определив функцию расстояния как

$$\rho(x, y) = \|x - y\|$$