09.04.03 Прикладная информатика

Профиль «Машинное обучение и анализ данных»

Дисциплина «Математические основы анализа данных»

Лекция 4

Методы решения систем линейных уравнений

План лекции

- Постановка задачи решения СЛУ*
- Матричные методы:
    - метод Крамера
    - метод обратной матрицы
    - метод Гаусса
    - метод Гаусса с выбором главного элемента
- Метод простых итераций

*СЛУ = система линейных уравнений

- Огромное количество задач из всех разделов математики сводится к решению систем линейных уравнений.
- **Прямые (конечные) методы решения СЛУ** позволяют найти решение за определённое число операций.

К прямым методам относятся:

  - метод Крамера,
  - метод обратной матрицы,
  - метод Гаусса.

- **Итерационные методы решения линейных алгебраических систем** основаны на использовании повторяющегося (циклического) процесса и позволяющие получить решение в результате последовательных приближений.

Постановка задачи

- Требуется найти решение системы m линейных уравнений, которая записывается в общем виде как

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m. \end{cases}$$

- При известных A и B требуется найти такие $X(x_1, \ldots, x_m)$, при подстановке которых в систему уравнений она превращается в тождество.

Матричная форма записи системы

Эту систему уравнений можно записать также в матричном виде:

$$AX = B,$$

где A – матрица системы,
X – вектор неизвестных, B – вектор свободных членов.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Метод Крамера

- Метод Крамера основан на использовании определителей.
- Число уравнений должно быть равно числу неизвестных переменных и определитель основной матрицы системы отличен от нуля, то есть, $|A| \neq 0$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & b_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{x_n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}.$$

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta},$$

$$x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta},$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta}$$

- <u>Пример 1</u>: $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 2+6+12+1-16+9 = $$
$$= 14 \neq 0.$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 14,$$

$$x_1 = \frac{14}{14} = 1,$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$x_2 = \frac{0}{14} = 0,$$

$$x_3 = \frac{-14}{14} = -1.$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -14.$$

Метод обратной матрицы

- Условие применимости матричного метода - невырожденность матрицы коэффициентов при неизвестных или $|A| \neq 0$.

$$AX = B$$

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B$$

A^{-1} – обратная к A матрица

- <u>Пример 2</u>: Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ -2x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Проверим, не является ли матрица коэффициентов при неизвестных вырожденной. Находим определитель

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \bullet \begin{pmatrix} -4 & 4 & 4 \\ 6 & -7 & -4 \\ 6 & -5 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$x_1 = 1; \quad x_2 = -2; \quad x_3 = -1$$

$$X = \frac{1}{4} \bullet \begin{pmatrix} -4 & 4 & 4 \\ 6 & -7 & -4 \\ 6 & -5 & -4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} 2 \bullet 1 - (-2) + 3 \bullet (-1) = 1 \\ -2 \bullet (-2) + 2 \bullet (-1) = 2 \\ 3 \bullet 1 + (-2) + (-1) = 0 \end{cases}$$

Метод Гаусса

- Метод Гаусса, называемый также методом последовательного исключения неизвестных, состоит в следующем:
- При помощи элементарных преобразований систему линейных уравнений приводят к такому виду, чтобы её матрица из коэффициентов оказалась трапециевидной (то же самое, что треугольной или ступенчатой) или близкой к трапециевидной
- Этот этап называют ***прямым ходом метода Гаусса***, (или просто прямой ход).
- В такой системе последнее уравнение содержит только одну переменную и её значение можно однозначно найти.
- На ***обратном ходе метода Гаусса*** значение этой переменной подставляют в предыдущее уравнение, из которого находят предыдущую переменную, и так далее.

Преимущества метода Гаусса

- Для матриц ограниченного размера менее трудоёмкий по сравнению с другими методами.
- Позволяет однозначно установить, совместна система или нет, и если совместна, найти её решение.
- Позволяет найти максимальное число линейно независимых уравнений — ранг матрицы системы.

- Система линейных уравнений может:

1) Иметь единственное решение.
2) Иметь бесконечно много решений.
3) Не иметь решений (быть *несовместной*).

Прямой ход метода Гаусса

- С помощью элементарных преобразований над строками, основную матрицу системы можно привести к ступенчатому виду (эти же преобразования нужно применять к столбцу свободных членов):

$$\begin{cases} \alpha_{1j_1}x_{j_1} + \alpha_{1j_2}x_{j_2} + \ldots + \alpha_{1j_r}x_{j_r} + \ldots + \alpha_{1j_n}x_{j_n} & = & \beta_1 \\ \alpha_{2j_2}x_{j_2} + \ldots + \alpha_{2j_r}x_{j_r} + \ldots + \alpha_{2j_n}x_{j_n} & = & \beta_2 \\ & \ldots & \\ \alpha_{rj_r}x_{j_r} + \ldots + \alpha_{rj_n}x_{j_n} & = & \beta_r \\ 0 & = & \beta_{r+1} \\ & \ldots & \\ 0 & = & \beta_m \end{cases},$$

где $\alpha_{1j_1}, \ldots, \alpha_{rj_r} \neq 0.$

После прямого хода могут обнулиться строки. Из этого следует:

1. Если в совместной системе все переменные главные (коэффициент при них не равен нулю), то такая система является определённой.

2. Если количество переменных в системе превосходит число уравнений, то такая система является либо неопределённой, либо несовместной.

- **Теорема Кронекера-Капелли**. Система совместна тогда и только тогда, когда ранг её основной матрицы равен рангу её расширенной матрицы.

Следствия:

- Количество главных переменных равно рангу системы и не зависит от её решения.
- Если ранг совместной системы равен числу переменных данной системы, то она определена.

- Пример 3: Решить методом Гаусса систему уравнений $\begin{cases} 3x+2y-5z=-1 \\ 2x-y+3z=13 \\ x+2y-z=9 \end{cases}$

- Запишем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right)$$

- Нужно обнулить элементы

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right)$$

- Нужно ко второй строке прибавить первую строку, умноженную на –2,
- к третьей строке прибавить первую строку, умноженную на –3.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right)$$

- И так далее

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 14 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 12 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

- В результате элементарных преобразований получена эквивалентная исходной система линейных уравнений:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 9 \\ \quad\quad y - z = 1 \\ \quad\quad\quad z = 4 \end{cases}$$

$$z = 4 \qquad \begin{array}{l} y - 4 = 1 \\ y = 5 \end{array} \qquad \begin{array}{l} x + 2 \cdot 5 - 4 = 9 \\ x + 6 = 9 \\ x = 3 \end{array}$$

Ответ: $x = 3, y = 5, z = 4$

- <u>Пример 4</u>. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 8 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 7 \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 - 8x_4 = 1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & -3 & 2 & -1 & 8 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & 7 \\ 5 & -3 & 1 & -8 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & 7 & 7 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & 7 \\ 5 & -3 & 1 & -8 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & 7 & 7 \\ 0 & -2 & 4 & 18 & 28 \\ 0 & -3 & 6 & 27 & 36 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & 7 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & 9 & 14 \\ 0 & 1 & -2 & -9 & -12 \end{array}\right) \xrightarrow{(4)} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & 7 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & 9 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

- Перепишем полученную матрицу обратно в систему линейных уравнений

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 + 7x_4 = 7 \\ -x_2 + 2x_3 + 9x_4 = 14 \\ 0 = 2 \end{cases}$$

- **Ответ: система несовместна (не имеет решений).**

- Пример 5. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+x_4=1 \\ 8x_1+12x_2-9x_3+8x_4=3 \\ 4x_1+6x_2+3x_3-2x_4=3 \\ 2x_1+3x_2+9x_3-7x_4=3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 8 & 12 & -9 & 8 & 3 \\ 4 & 6 & 3 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 9 & -7 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & -8 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

- Перепишем соответствующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+x_4=1 \\ \qquad\qquad 5x_3-4x_4=1 \end{cases}$$

- Система имеет бесконечно много решений.
- Бесконечное множество решений системы коротко записывают в виде так называемого **общего решения системы**.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 5x_3 - 4x_4 = 1 \end{cases}$$

- **Базисные переменные** находятся строго на главной диагонали матрицы.
- В данном примере базисными переменными являются x_1 и x_3.
- Свободные переменные – это все оставшиеся переменные (x_2 и x_4).
- Теперь нужно все базисные переменные выразить только через свободные переменные.

$$5x_3 - 4x_4 = 1 \Rightarrow 5x_3 = 4x_4 + 1 \Rightarrow x_3 = \frac{4}{5}x_4 + \frac{1}{5}$$

$$2x_1 + 3x_2 - \frac{4}{5}x_4 - \frac{1}{5} + x_4 = 1$$

$$2x_1 = 1 - 3x_2 + \frac{4}{5}x_4 + \frac{1}{5} - x_4$$

$$2x_1 = -3x_2 - \frac{1}{5}x_4 + \frac{6}{5}$$

$$x_1 = -\frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{10}x_4 + \frac{3}{5}$$

- Ответ: $\left(-\frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{10}x_4 + \frac{3}{5};\ x_2;\ \frac{4}{5}x_4 + \frac{1}{5};\ x_4\right)$

Метод Гаусса с выбором главного элемента

- Заметим, что в методе последовательного исключения Гаусса вычисления возможны только, если ведущие элементы системы $a_{ij} \neq 0$.
- Добиться выполнения этого условия можно, переставляя элементы строк и столбцов матрицы.
- Но среди ведущих могут оказаться элементы, очень маленькие по абсолютной величине. При делении на такие ведущие элементы получается большая погрешность округления (вычислительная погрешность).
- Чтобы избежать сильного влияния вычислительной погрешности на решение, применяется метод Гаусса с выбором главного элемента.

- Среди элементов матрицы a_{ij} выберем наибольший по модулю, называемый **главным**, элемент.
- Например, пусть им будет элемент a_{mj}.
- Строка с номером m, содержащая главный элемент, называется **главной строкой**.
- Далее вычисляем множители $\mu_i = - a_{ij} / a_{mj}$ для всех строк $i \neq m$.
- Затем матрица преобразуется так:
  к каждой i -й, неглавной строке, прибавим почленно главную строку, умножив её на μ_i.
- В результате получим матрицу, у которой все элементы j-го столбца, за исключением a_{mj}, равны 0.

- После некоторой перестановки строки образуют треугольную матрицу, эквивалентную исходной.
- На этом заканчивается прямой ход метода Гаусса с выбором главного элемента.
- Далее находим решения системы с треугольной матрицей. Это будет обратный ход.

- Пример 6. Решить систему методом Гаусса с выбором главного элемента
- $AX = b$, где

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & -9 & 5 \\ -15 & -12 & 50 & -16 \\ -27 & -36 & 73 & 8 \\ 9 & 12 & -10 & -16 \end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix} -14 \\ 44 \\ 142 \\ -76 \end{pmatrix}$$

- 1 шаг . Максимальный по модулю элемент 1-го столбца -27. Переставим 1-ое и 3-е уравнения местами:

$$A=\begin{pmatrix} -27 & -36 & 73 & 8 \\ -15 & -12 & 50 & -16 \\ 3 & 4 & -9 & 5 \\ 9 & 12 & -10 & -16 \end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix} 142 \\ 44 \\ -14 \\ -76 \end{pmatrix}$$

- Вычислим масштабирующие множители

$$\mu_{21} = \frac{-15}{-27} = \frac{5}{9} \qquad \mu_{31} = \frac{3}{-27} = -\frac{1}{9} \qquad \mu_{41} = \frac{9}{-27} = -\frac{1}{3}$$

- Выполним преобразование матрицы и вектора:

$$A1=\begin{pmatrix}-27 & -36 & 73 & 8\\ 0 & 8 & \frac{85}{9} & -\frac{184}{9}\\ 0 & 0 & -\frac{8}{9} & \frac{53}{9}\\ 0 & 0 & \frac{43}{3} & -\frac{40}{3}\end{pmatrix}\quad b1=\begin{pmatrix}142\\ -\frac{314}{9}\\ \frac{16}{9}\\ -\frac{86}{3}\end{pmatrix}$$

- 2 шаг. Главный элемент уже находится во 2 строке.
- 3 шаг. Максимальный по модулю элемент 3 столбца 43/3. Переставим 3 и 4 уравнения местами.

$$A2=\begin{pmatrix}-27 & -36 & 73 & 8\\ 0 & 8 & \frac{85}{9} & -\frac{184}{9}\\ 0 & 0 & \frac{43}{3} & -\frac{40}{3}\\ 0 & 0 & -\frac{8}{9} & \frac{53}{9}\end{pmatrix}\quad b2=\begin{pmatrix}142\\ -\frac{314}{9}\\ -\frac{86}{3}\\ \frac{16}{9}\end{pmatrix}$$

- Вычислим масштабирующие множители

$$\mu_{43} = -\frac{8\cdot 3}{9\cdot 43} = -\frac{8}{129}$$

$$A3 = \begin{pmatrix} -27 & -36 & 73 & 8 \\ 0 & 8 & \frac{85}{9} & -\frac{184}{9} \\ 0 & 0 & \frac{43}{3} & -\frac{40}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{653}{129} \end{pmatrix} \quad b3 = \begin{pmatrix} 142 \\ -\frac{314}{9} \\ -\frac{86}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

- *Обратный ход*
- Из последнего уравнения находим $x_4 = 0$.
- Из третьего уравнения системы $x_3 = -\frac{86\cdot 3}{43\cdot 3} = -2$
- Из второго уравнения $x_2 = \frac{1}{8}\left(-\frac{314}{9} - \frac{85\cdot(-2)}{9}\right) = -2$.
- Наконец

$$x_1 = -\frac{1}{27}\left(142 + 36\cdot(-2) - 73\cdot(-2) - 8\cdot 0\right) = -8$$

Оценка погрешности решения

- Существуют две величины, характеризующие степень отклонения полученного решения от точного:

\- **погрешность** Δx, равная норме разности этих значений:

\- **невязка** E, равная разности между левой и правой частями уравнений при подстановке в них полученного решения x^*:

$$E = Ax^* - b$$

Итерационные методы: метод простой итерации

Рассмотрим метод простой итерации на примере системы из трёх уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Выразим x_1, x_2 и x_3 соответственно из 1-го, 2-го и 3-го уравнений:

$$\begin{cases} x_1 = 1/a_{11}\,(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3) \\ x_2 = 1/a_{22}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3) \\ x_3 = 1/a_{33}(b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2) \end{cases}$$

Перепишем последнюю систему в виде:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n + \beta_1 \\ x_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n + \beta_2 \\ \ldots \\ x_n = \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \ldots + \alpha_{nn}x_n + \beta_n \end{cases}$$

- Правая часть последней системы определяет отображение

$$F: y_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\, x_j, i = 1,2, \dots, n,$$

преобразующее точку $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ n-мерного векторного пространства в точку $M'(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ того же пространства.

Зададим **начальные (нулевые) приближения** для неизвестных:

$$x_1^0, x_2^0, x_3^0$$

И подставим их в правую часть соотношений, в результате последовательно получим первое приближение:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 1/a_{11}\,(b_1 - a_{12}x_2^{(0)} - a_{13}x_3^{(0)}) \\ x_2^{(1)} = 1/a_{22}(b_2 - a_{21}x_1^{(0)} - a_{23}x_3^{(0)}) \\ x_3^{(1)} = 1/a_{33}(b_3 - a_{31}x_1^{(0)} - a_{32}x_2^{(0)}) \end{cases}$$

Используя x_1^1, x_2^1, x_3^1, также найдём вторые приближения и так далее.

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = 1/a_{11}\,(b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - a_{13}x_3^{(k-1)}) \\ x_2^{(k)} = 1/a_{22}(b_2 - a_{21}x_1^{(k-1)} - a_{23}x_3^{(k-1)}) \\ x_3^{(k)} = 1/a_{33}(b_3 - a_{31}x_1^{(k-1)} - a_{32}x_2^{(k-1)}) \end{cases}$$

Итерационный процесс продолжаем, пока $x_i^{(k)}$ не станут близки с заданной погрешностью к $x_i^{(k-1)}$.

Достаточным (**но не необходимым!**) условием сходимости итерационного процесса в этом методе является преобладание диагональных элементов:

$$|a_{ii}| \geq \sum_{i \neq j} |a_{ij}|, i = 1,2,\ldots,n.$$

При этом хотя бы для одного уравнения неравенство должно выполняться строго.

- На практике наличие сходимости и достижение требуемой точности обычно определяют приближённо:

при малом (с заданной допустимой погрешностью) изменении X на двух последовательных итерациях, т.е. при малом отличии $X^{(k)}$ от $X^{(k-1)}$, процесс прекращается, и происходит вывод значений неизвестных, полученных на последней итерации.

Достаточное условие сходимости итерационного процесса

- При практическом применении метода простой итерации удобно рассматривать систему линейных уравнений в пространстве с одной из следующих трёх метрик:

$$\rho_1(M, M') = \max_{1 \le i \le n} |x_i - x'_i|$$

$$\rho_2(M, M') = \sum_{i=1}^{n} |x_i - x'_i|$$

$$\rho_3(M, M') = \sqrt{\sum_{i=1}^{i} (x_i - x'_i)^2}$$

- Если система не является плохо обусловленной, то в качестве критерия окончания итерационного процесса можно использовать условие малости невязки: $\left|E^{(k)}\right| < \varepsilon$

Для того чтобы отображение *F*, заданное в метрическом пространстве, заданное системой

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n + \beta_1 \\ x_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n + \beta_2 \\ \ldots \\ x_n = \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \ldots + \alpha_{nn}x_n + \beta_n \end{cases}$$

было сжимающим отображением, достаточно выполнения одного из следующих условий:

1) в пространстве с метрикой ρ_1: $\alpha = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1$
2) в пространстве с метрикой ρ_2: $\alpha = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1$
3) в пространстве с метрикой ρ_3: $\alpha = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}^2} < 1$

Таким образом, получаем формулу, позволяющую установить момент прекращения итерационного процесса при достижении заданной точности результата ε:

$$\rho(M^{(k-1)}, M^{(k)}) \le \varepsilon \cdot \frac{1-\alpha}{\alpha}$$

где ρ – метрика, по которой была установлена сходимость и получено соответствующее значение α.

Пример 7: Решить систему методом простой итерации с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$.

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 10x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{5}x_2 + \frac{1}{5}x_3 + \frac{1}{5} \\ x_2 = -\frac{1}{10}x_1 - \frac{1}{10}x_3 + \frac{2}{10} \\ x_3 = -\frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_2 + \frac{3}{5} \end{cases}$$

Проверим, является ли полученное отображение сжимающим:

1) в пространстве с метрикой ρ_1:

$$\alpha = \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}\left|\alpha_{ij}\right| = \max\left(\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right);\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10}\right);\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right)\right) = \frac{2}{5} < 1;$$

2) в пространстве с метрикой ρ_2:

$$\alpha = \max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}\left|\alpha_{ij}\right| = \max\left(\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{5}\right);\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right);\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{10}\right)\right) = \frac{2}{5} < 1;$$

3) в пространстве с метрикой ρ_3:

$$\alpha = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}^{2}} = \sqrt{\frac{1}{25}+\frac{1}{25}+\frac{1}{100}+\frac{1}{100}+\frac{1}{25}+\frac{1}{25}} = \frac{1}{10} < 1.$$

В данном случае можно взять любую из метрик. Возьмём, например, третью ($\alpha = 0{,}1$) и организуем итерационный процесс. Условием окончания этого процесса является выполнение неравенства:

$$\rho(M^{(k-1)}, M^{(k)}) \le 10^{-4} \cdot \frac{1-0{,}1}{0{,}1}$$

Примем в качестве начального приближения точку с координатами $M^{(0)}(0, 0, 0)$ и подставим её в полученную систему.

Итерация	
0	(0.00000, 0.00000, 0.00000)
1	(0.20000, 0.20000, 0.60000)
2	(0.36000, 0.12000, 0.60000)
3	(0.34400, 0.10400, 0.55200)
4	(0.33120, 0.11040, 0.55200)
5	(0.33248, 0.11168, 0.55584)
	(0.33350, 0.11117, 0.55584)

Итерационные методы: метод Гаусса-Зейделя

- *Метод Гаусса-Зейделя (метод Зейделя, метод последовательных замещений)* представляет собой некоторую модификацию метода простой итерации.
- Основная его идея заключается в том, что при вычислении $(k+1)$-го приближения неизвестной x_i учитываются уже вычисленные ранее $(k+1)$-е приближения неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}$

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = 1/a_{11}\,(b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - a_{13}x_3^{(k-1)}) \\ x_2^{(k)} = 1/a_{22}(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k-1)}) \\ x_3^{(k)} = 1/a_{33}(b_3 - a_{31}x_1^{(k)} - a_{32}x_2^{(k)}) \end{cases}$$

Пример 8:

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{4}(3 - x_2 + x_3) \\ x_2 = -\frac{1}{2}(1 - 2x_1 - x_3) \\ x_3 = \frac{1}{2}(5 - x_1 + x_2) \end{cases}$$

В качестве начальных приближений возьмем нули, т.е. примем $x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = \mathbf{0}$.

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{4}(3 - x_2^{(0)} + x_3^{(0)}) = \frac{1}{4}(3 - 0 + 0) = 0{,}75 \\ x_2^{(1)} = -\frac{1}{2}(1 - 2x_1^{(1)} - x_3^{(0)}) = -\frac{1}{2}(1 - 2 \cdot 0{,}75 - 0) = 0{,}25 \\ x_3^{(1)} = \frac{1}{2}(5 - x_1^{(1)} + x_2^{(1)}) = \frac{1}{2}(5 - 0{,}75 + 0{,}25) = 2{,}25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \frac{1}{4}(3 - x_2^{(1)} + x_3^{(1)}) = \frac{1}{4}(3 - 0{,}25 + 2{,}25) = 1{,}25 \\ x_2^{(2)} = -\frac{1}{2}(1 - 2x_1^{(2)} - x_3^{(1)}) = -\frac{1}{2}(1 - 2 \cdot 1{,}25 - 2{,}25) = 1{,}875 \\ x_3^{(2)} = \frac{1}{2}(5 - x_1^{(2)} + x_2^{(2)}) = \frac{1}{2}(5 - 1{,}25 + 1{,}875) = 2{,}8125 \end{cases}$$

Последовательность приближений:

$$x_1^{(3)} = 0{,}984;\ x_2^{(3)} = 1{,}981;\ x_3^{(3)} = 2{,}953;$$
$$x_1^{(4)} = 1{,}015;\ x_2^{(4)} = 1{,}992;\ x_3^{(4)} = 2{,}988;$$
$$x_1^{(5)} = 0{,}999;\ x_2^{(4)} = 1{,}993;\ x_3^{(3)} = 2{,}997.$$

Рекомендации по выбору метода решения СЛАУ

- Метод Гаусса удобно применять для систем маленькой и средней размерности (до порядка 10^4). Для больших же размерностей или разреженных матриц более эффективными представляются итерационные методы.
- Рекомендуется использовать метод Гаусса с выбором главного элемента по столбцу, как более устойчивый к ошибкам, но при этом не требующий больших дополнительных затрат.
- В этом плане метод выбора главного элемента по строке и столбцу представляется менее эффективным, так как требует гораздо больше вычислительных затрат, но даёт небольшую прибавку в точности.