09.04.03 Прикладная информатика

Профиль «Машинное обучение и анализ данных»

Дисциплина «Математические основы анализа данных»

Лекция 3

Характеристики матриц

План лекции

- Ранг матрицы
- Характеристический многочлен
- Теорема Гамильтона-Кэли
- Собственные числа матрицы
- Ортогональные матрицы
- Собственные векторы

Ранг матрицы

- Ранг матрицы используется при проверке условия совместности системы линейных уравнений.

Рангом матрицы из m строк и n столбцов называется число $\boldsymbol{r}$, обладающее следующими свойствами:

- r меньше или равно наименьшему из чисел m и n.
- r равно наивысшему из порядков ненулевых миноров этой матрицы.

Другое обозначение rank A, где A – матрица.

Вычисление ранга матрицы

1. Метод окаймляющих миноров

- Окаймляющим минором называется минор большего порядка по отношению к данному, если этот минор большего порядка содержит в себе данный минор.
- Для матрицы:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

возьмем минор $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$:

- Для него окаймляющими будут

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Алгоритм нахождения ранга матрицы

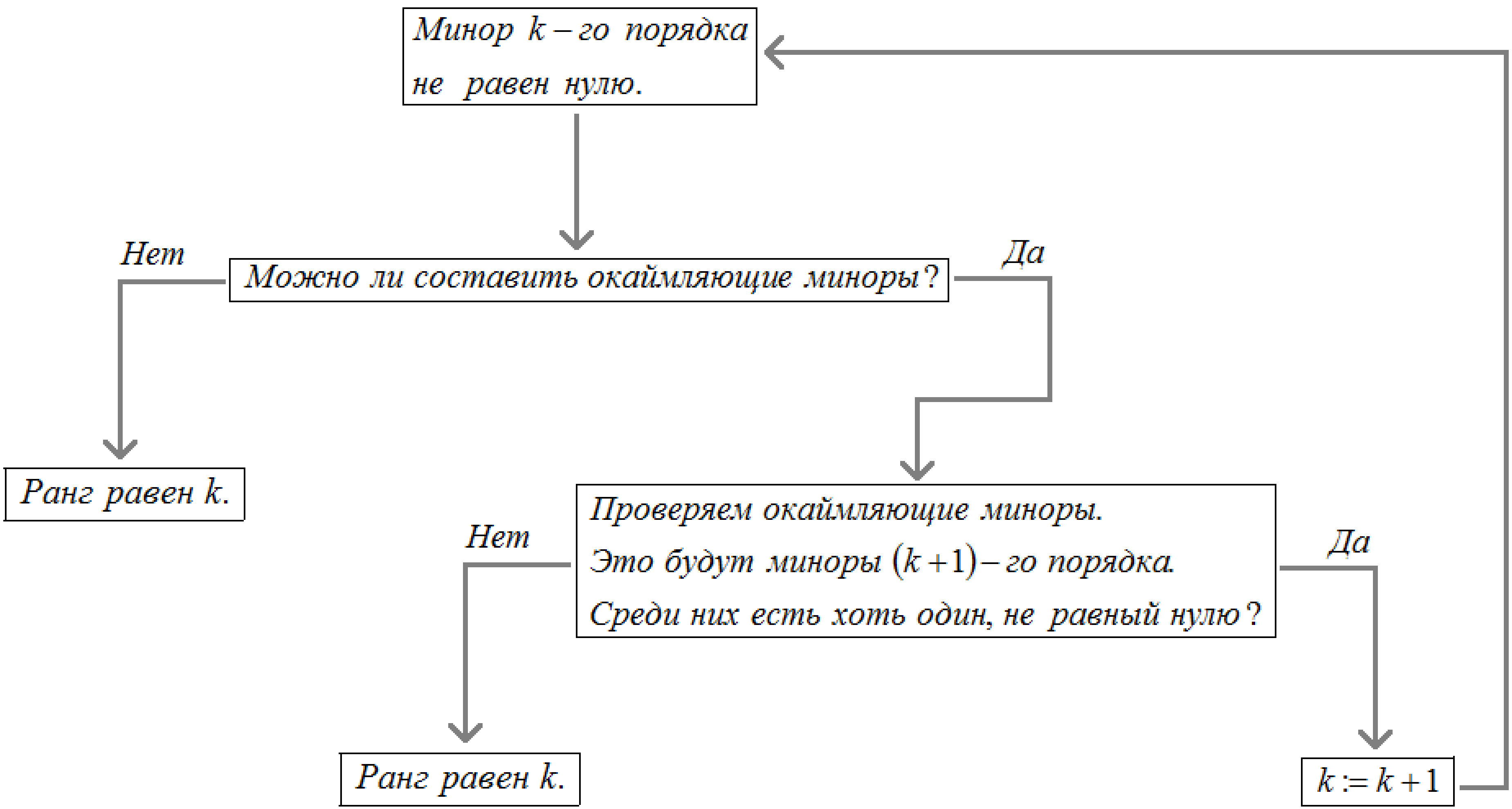
1. Находим не равные нулю миноры второго порядка. Если все миноры второго порядка равны нулю, то ранг матрицы будет равен единице ($r = 1$).

2. Если существует хотя бы один минор второго порядка, не равный нулю, то составляем окаймляющие миноры третьего порядка. Если все окаймляющие миноры третьего порядка равны нулю, то ранг матрицы равен двум ($r = 2$).

3. Если хотя бы один из окаймляющих миноров третьего порядка не равен нулю, то составляем окаймляющие его миноры. Если все окаймляющие миноры четвёртого порядка равны нулю, то ранг матрицы равен трём ($r = 3$).

4. Продолжаем так, пока позволяет размер матрицы.

Алгоритм метода окаймляющих миноров



- Пример 1: Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$

- Минор второго порядка $\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = -16 \neq 0$
- Его окаймляющие миноры:

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 10 \\ 4 & 8 & 18 \\ 10 & 18 & 40 \end{vmatrix} = 720 + 720 - 800 - 640 = 0 \qquad \begin{vmatrix} 0 & 4 & 10 \\ 4 & 8 & 18 \\ 1 & 7 & 17 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 4 & 8 & 7 \\ 10 & 18 & 17 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 4 & 8 & 7 \\ 1 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

- Таким образом, все окаймляющие миноры третьего порядка равны нулю, следовательно, ранг данной матрицы равен двум ($r = 2$).

2. Отыскание ранга матрицы способом элементарных преобразований

- Задача определения ранга матрицы способом окаймляющих миноров требует вычисления большого числа определителей.
- Существует способ, позволяющий свести объём вычислений к минимуму, основанный на использовании элементарных преобразований матриц.
- **Теорема.** При элементарном преобразовании ранг матрицы не меняется. Другими словами, если матрицы A и B – эквивалентны, то $rank\,A = rank\,B$.

- **Ведущим элементом** ненулевой строки матрицы назовём её первый (считая слева направо) ненулевой элемент.
- Матрица называется **ступенчатой**, если она удовлетворяет двум условиям:

1. Нулевые строки, если они есть, расположены ниже всех ненулевых строк.
2. Номера ведущих элементов ненулевых строк образуют строго возрастающую последовательность.

- Ступенчатую матрицу называют **трапециевидной**, если ведущими являются диагональные элементы.
- Требуется привести матрицу к трапециевидному виду.

- <u>Пример 2</u>: Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 2-\text{я строка} + 1-\text{я строка} \bullet (-2) \\ 3-\text{я строка} + 1-\text{я строка} \bullet (-1) \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 10 & -2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \left[3-\text{я строка} + 2-\text{я срока} \bullet (-2) \right] \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Матрица содержит 2 ненулевые строки. Следовательно, ранг матрицы r = 2.

Линейная зависимость строк/столбцов матрицы

Линейной комбинацией (ЛК) строк $s_1, s_2, \ldots, s_m$ матрицы A называется выражение $\lambda_1 \cdot s_1 + \lambda_2 \cdot s_2 + \ldots + \lambda_m \cdot s_m$

Здесь $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ – числовые коэффициенты.

ЛК называется **тривиальной**, если все коэффициенты λ_i равны нулю одновременно.

$$0 \cdot s_1 + 0 \cdot s_2 + 0 \cdot s_m$$

ЛК называется **нетривиальной**, если хотя бы один из коэффициентов λ_i отличен от нуля.

Нетривиальная ЛК тоже может быть равной нулевой строке.

$$1 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Система строк называется **линейно зависимой (ЛЗ)**, если существует их нетривиальная ЛК, равная нулевой строке.
- Система строк $\{s_1 = (-2\ \ 2), s_2 = (1\ \ -1)\}$, линейно зависима, так как ЛК этих строк равна нулевой строке: $1 \cdot s_1 + 2 \cdot s_2 = 0$.
- Система строк называется **линейно независимой (ЛНЗ)**, если только тривиальная ЛК равна нулевой строке.
- **Рангом матрицы будет максимальное количество ее линейно независимых строк**.
- На практике: линейная зависимость строк – это их пропорциональность.

Характеристический полином

- **Характеристический полином** определяется для произвольной <u>квадратной</u> матрицы A как

$|A - \lambda E|$, где E – единичная матрица одинакового с А порядка.

- <u>Пример 3</u>. Для $n = 2$:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21});$$

- Для $n = 3$: $\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} =$

$$= -\lambda^3 + (a_{11}+a_{22}+a_{33})\lambda^2 - \left\{ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \right\} \lambda + \det A.$$

Свойства характеристических полиномов

Теорема 1. Характеристический полином матрицы не меняется:

- при её транспонировании;
- при переходе к эквивалентной матрице.

Теорема 2. Если характеристический полином матрицы А равен

$$f(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

то характеристический полином матрицы A^{-1} равен

$$f^*(\lambda) = \frac{(-\lambda)^n}{a_n} f(1/\lambda) = \frac{(-1)^n}{a_n}\left[(-1)^n + a_1\lambda + \cdots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_n\lambda^n\right]$$

- **Теорема (Гамильтона-Кэли)** Матрица является корнем своего характеристического полинома.
- Иначе говоря, результатом подстановки в характеристический полином самой матрицы А будет нулевая матрица.
- Пример 4. Для $n = 2$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^2 - (a_{11} + a_{22}) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} +$$

$$+(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

- <u>Пример 5</u>: Найти характеристический многочлен для матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$$\left|\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 5 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}\right|,$$

- Характеристический полином:

$$-(2-\lambda)(1-\lambda)\ldots(-\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda + 2$$

- Его корни: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 0$.

- Обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ все корни характеристического многочлена.
- Каждое из чисел λ_i повторяется в этом ряду столько раз, какова его кратность как корня многочлена:

$$|A - \lambda E| = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots(\lambda - \lambda_n)$$

Собственное число

- **Собственным числом** квадратной матрицы A называют произвольный корень её характеристического полинома.
- Набор всех собственных чисел матрицы A (с учётом их кратностей) называется **спектром матрицы $Sp(A)$.**
- Таким образом спектр матрицы A порядка n всегда состоит из n чисел, часть из которых могут быть одинаковыми.
- Максимальный из модулей собственных чисел матрицы A называется её **спектральным радиусом.**
- Он иногда обозначается $\rho(A)$.

- <u>Пример 6</u>. Найти спектр матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 & 7 \\ -2 & -4 & 0 & 2 \\ -3 & -7 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 2 & 3 \\ -1 & -\lambda & 4 & 7 \\ -2 & -4 & -\lambda & 2 \\ -3 & -7 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 + 83\lambda^2$$

- Корни:

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \mathbf{i}\sqrt{83}, \lambda_3 = -\mathbf{i}\sqrt{83},$$

- Ответ: спектром матрицы A является $\{0,0,i\sqrt{83},-i\sqrt{83}\}$
- Спектральный радиус матрицы $\rho(A) = \sqrt{83}$

Свойства собственных чисел

- **Теорема**. Если $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\text{n}}\}$ — спектр матрицы A, то

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = \mathrm{Sp}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn},$$

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \times \cdots \times \lambda_n = (-1)^n \det(A) .$$

- Для того, чтобы матрица А была невырожденной необходимо и достаточно, чтобы среди её собственных чисел не было нулевого.
- **Теорема**. Собственные числа вещественной симметричной матрицы А все вещественны.

Ортогональная матрица

- **Ортогональной** называют квадратную вещественную матрицу P, удовлетворяющую равенству

$$P \cdot P^T = E$$

- Пример. Ортогональной является матрица

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

- Вообще, любая диагональная матрица, элементы диагонали которой равны либо 1 либо -1 являются ортогональными.
- Ортогональными будут и матрицы, полученные из них произвольной перестановкой столбцов (или строк).

Свойства ортогональных матриц

1. Произведение ортогональных матриц является ортогональной матрицей.
2. Определитель ортогональной матрицы равен либо 1 либо -1.
3. Для ортогональной матрицы P обратная матрица всегда существует и совпадает с транспонированной P^T.
4. Алгебраическое дополнение любого элемента ортогональной матрицы с точностью до знака совпадает с этим элементом.

Собственные векторы матрицы

- Пусть задана квадратная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Ненулевой вектор

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

называется **собственным вектором** матрицы A, если существует такое ненулевое число λ, что

$$AX = \lambda X.$$

- Число λ при этом называется **собственным значением вектора** X относительно матрицы A.

- Координаты собственного вектора X соответствующего собственному значению λ находятся из однородной системы уравнений

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)\,x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)\,x_2 + \ldots + a_2x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn}-\lambda)\,x_n = 0 \end{cases}$$

- <u>Пример 7</u>: Найти собственные числа и собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$
- Обозначим через $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ искомый собственный вектор.
- По определению

$$\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -x - 6y \\ 2x + 6y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$$

- Две матрицы равны, если равны их соответствующие элементы.
- Приравниваем соответствующие элементы векторов-столбцов и получаем однородную систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} -x - 6y = \lambda x \\ 2x + 6y = \lambda y \end{cases}$$

- Перенесём всё налево:

$$\begin{cases} -x - 6y - \lambda x = 0 \\ 2x + 6y - \lambda y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-1 - \lambda)x - 6y = 0 \\ 2x + (6 - \lambda)y = 0 \end{cases}$$

- По определению, собственный вектор <u>не может быть нулевым</u>.
- Следовательно, уравнения линейно зависимы и определитель матрицы системы равен нулю:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -6 \\ 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

- Раскроем определитель и решим квадратное уравнение:

$$(-1-\lambda)(6-\lambda) - 2\cdot(-6) = 0$$

- Собственные числа: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$.

- В данном примере получены различные собственные числа и каждому из них соответствуют свои собственные векторы.

1. Рассмотрим собственное число λ_1= 2 и подставим значение 2 в систему уравнений:

$$\begin{cases} -3x - 6y = 0 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases} \to x = -2y$$

- Если в ходе решения выяснилось, что линейной зависимости нет (т.е. получается только тривиальное решение, в данном примере $x = y = 0$) – где-то ошибка!
- Придавая переменной y *(либо x)* произвольные значения, мы получаем бесконечно много собственных векторов.

- Достаточно указать один из них. Обычно стараются выбрать «красивый» вектор.
- Возьмем $y = -1$. Тогда $x = -2\cdot(-1) = 2$.
- Обязательно проверяем, что частное решение удовлетворяет каждому уравнению системы:

$$-3x - 6y = -3\cdot 2 - 6\cdot(-1) = -6 + 6 = 0$$

$$2x + 4y = 2\cdot 2 + 4\cdot(-1) = 4 - 4 = 0$$

- Первый собственный вектор:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2. Найдём собственные векторы, соответствующие числу $\lambda_2 = 3$.

- Запишем вторую систему уравнений:

$$\begin{cases} -4x - 6y = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases} \rightarrow x = -\frac{3}{2}y$$

- Возьмём $y = -2$, тогда $x = 3$.
- Второй собственный вектор $u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$