

Лабораторная работа № 4  
**Решение систем линейных уравнений**

**Указания к выполнению лабораторной работы**

Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Коэффициенты системы для каждого варианта даны в таблице 1.

Для решения можно использовать электронные таблицы, математические пакеты или собственные программы на любом языке.

Оценить точность решения с помощью невязки

$$E_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 - b_i \quad (i=1,2,3).$$

Сделать вывод, какой из рассмотренных методов оказался более точным.

Для метода Холецкого исходная система представлена в таблице 3 и в текстовом файле lab-4-Cholesky.txt (каждый вариант в отдельной строке).

Таблица 1

Вариант	$i$	$a_{i1}$	$a_{i2}$	$a_{i3}$	$b_i$
<b>1</b>	1	0,21	-0,45	-0,20	1,91
	2	0,30	0,25	0,43	0,32
	3	0,60	-0,35	-0,25	1,83
<b>2</b>	1	-3	0,5	0,5	-56,5
	2	0,5	-6	0,5	-100
	3	0,5	0,5	-3	-210
<b>3</b>	1	0,45	-0,94	-0,15	-0,15
	2	-0,01	0,34	0,06	0,31
	3	-0,35	0,05	0,63	0,37
<b>4</b>	1	0,63	0,05	0,15	0,34
	2	0,15	0,10	0,06	0,42
	3	0,03	0,34	0,63	0,32
<b>5</b>	1	-0,20	1,60	-0,10	0,30
	2	-0,30	0,10	-1,50	0,40
	3	1,20	-0,20	0,30	-0,60
<b>6</b>	1	0,30	1,20	-0,20	-0,60
	2	-0,10	-0,2	1,60	0,30
	3	0,05	0,34	0,10	0,32
<b>7</b>	1	0,20	0,44	0,81	0,74

	2	0.58	-0.29	0.05	0.02
	3	0.05	0.34	0.10	0.32
<b>8</b>	1	6.36	11.75	10	-41.40
	2	7.42	19.03	11.75	-49.49
	3	5.77	7.48	6.36	-27.67
<b>9</b>	1	0,21	-0,45	-0,20	1,91
	2	0,30	0,25	0,43	0,32
	3	0,60	-0,35	-0,25	1,83
<b>10</b>	1	-0,20	1,60	-0,10	0,30
	2	-0,30	0,10	-1,50	0,40
	3	1,20	-0,20	0,30	-0,60

## Задание на лабораторную работу

### Задание 1. Матричные методы решения СЛУ

Найти решение СЛУ с помощью обратной матрицы и методом Крамера. Оценить точность решения с помощью невязки.

### Задание 2. Метод Гаусса

Написать программу решения СЛУ методом Гаусса. При выводе результата должны различаться случаи, когда система несовместна и имеет бесконечно много решений (таблица 2).

Таблица 2

Исходные данные для тестирования

Система на входе	Ожидаемый результат
$5,2 x_1 + 3,7 x_2 + 1,5 x_3 = 0,5$ $8,1 x_1 + 9,3 x_2 + 1,2 x_3 = 0,75$ $3,6 x_1 + 8,1 x_2 + 6,23 x_3 = 12,5$	Единственное решение
$4 x_1 + 5 x_2 + x_3 = 15$ $6 x_1 + 8 x_2 + 2 x_3 = 24$ $3 x_1 + 4 x_2 + x_3 = 12$	Бесконечное количество решений
$4,1 x_1 + 5,2 x_2 + 3,7 x_3 + 1,5 x_4 = 15$ $4,1 x_1 + 5,2 x_2 + 3,7 x_3 + 1,5 x_4 = 0,5$ $8, x_1 + 1 9,3 x_2 + 16 x_3 + 1,2 x_4 = 0,75$ $3,6 x_1 + 8,1 x_2 + 6,23 x_3 + 4,8 x_4 = 12,5$	Система несовместна

### Задание 3. Итерационные методы решения СЛУ

- Привести систему своего варианта к виду, допускающему использование метода простой итерации (см. достаточное условие сходимости итерационной последовательности).
- Найти коэффициент сжатия.
- Найти решение с точностью до 0.0001 методом простой итерации. Проверить ответ подстановкой. Сравнить ответ с полученными при использовании других методов.
- Найти решение с точностью до 0.0001 методом Зейделя. Проверить ответ подстановкой. Сравнить ответ с ответами, полученными при использовании других методов.

#### Задание 4. Решение СЛУ с помощью LU-разложения

Найти LU-разложение матрицы системы своего варианта и с его помощью найти решение. Сравнить с предыдущими результатами.

#### Задание 5. Метод Холецкого

Для системы своего варианта (таблица 3) проверить условие положительной определённости матрицы системы<sup>1</sup>. Если условие выполняется, найти решение системы методом Холецкого.

Таблица 3

Вар.	Коэффициенты системы										
1	$a_{i1}$	$a_{i2}$	$a_{i3}$	$a_{i4}$	$a_{i5}$	$a_{i6}$	$a_{i7}$	$a_{i8}$	$a_{i9}$	$a_{i10}$	$b_i$
	1	0,43	0,5	0	0	0	0,79	0,09	0	0	0,24
	0,43	0,25	0,1	0	0	0	0,02	0,05	0	0	0,11
	0,5	0,1	0,5	0,3	0	0	0,87	0	0	0	0,79
	0	0	0,3	3,3	0,34	0	0,37	0	0	0	0,82
	0	0	0	0,34	0,55	0	0	0	0	0	0,35
	0	0	0	0	0	0,5	0	0	0	0	0,03
	0,79	0,02	0,87	0,37	0	0	3,2	0	0	0,08	0,8
	0,09	0,05	0	0	0	0	0	0,83	0	0,37	0,28
	0	0	0	0	0	0	0	0	0,27	0,15	0,42
	0	0	0	0	0	0	0,08	0,37	0,15	3,1	0,56
2	0,35	1,2	0,79	0,31	0,91	0,78	0,37	0,16	0,95	0,52	0,06
	1,2	0,56	0,76	0,61	0,97	0,45	0,99	0,91	0	0,21	0,47
	0,79	0,76	0,55	0,29	0,84	0,2	0,69	0,91	0,28	0,19	0,08
	0,31	0,61	0,29	0,77	0,74	0,74	0,14	0,05	0,88	0,64	0,73
	0,91	0,97	0,84	0,74	0,02	0,31	0,77	0,83	0,68	0,97	0,71

<sup>1</sup> Симметричная матрица положительно определена тогда и только тогда, когда все её главные миноры положительны.

	0,78	0,45	0,2	0,74	0,31	0,6	0,14	0	0,19	0,73	<b>0,21</b>
	0,37	0,99	0,69	0,14	0,77	0,14	0,9	0,02	0,47	0,3	<b>0,23</b>
	0,16	0,91	0,91	0,05	0,83	0	0,02	0,79	0,37	0,39	<b>0,28</b>
	0,95	0	0,28	0,88	0,68	0,19	0,47	0,37	0,36	0,7	<b>0,37</b>
	0,52	0,21	0,19	0,64	0,97	0,73	0,3	0,39	0,7	0,76	<b>0,29</b>
<b>3</b>	0,35	0,5	0,4	0,69	0,29	0,8	0,6	0,26	0,38	0,97	<b>0,08</b>
	0,5	0,31	0,1	0,45	0,56	0,4	0,36	0,64	0,05	0,85	<b>0,94</b>
	0,4	0,1	0,4	0,14	0,74	0,39	0,03	0,4	0,45	0,35	<b>0,29</b>
	0,69	0,45	0,14	0,68	0,41	0,9	0,36	0,52	0,37	0,6	<b>0,26</b>
	0,29	0,56	0,74	0,41	0,4	0,92	0,39	0,75	0,65	0,49	<b>0,56</b>
	0,8	0,4	0,39	0,9	0,92	0,39	0,11	0,24	0,88	0,81	<b>0,13</b>
	0,6	0,36	0,03	0,36	0,39	0,11	0,33	0,16	0,24	0,36	<b>0,24</b>
	0,26	0,64	0,4	0,52	0,75	0,24	0,16	0,4	0,03	0,22	<b>0,54</b>
	0,38	0,05	0,45	0,37	0,65	0,88	0,24	0,03	0,34	0,21	<b>0,85</b>
	0,97	0,85	0,35	0,6	0,49	0,81	0,36	0,22	0,21	0,24	<b>0,52</b>
<b>4</b>	0,7	0,5	0,66	0,62	0,32	0,81	0,5	0,81	0,98	0,72	<b>0,93</b>
	0,5	0,98	0,9	0,99	0,22	0,4	0,02	0,88	0,83	0,54	<b>0,83</b>
	0,66	0,9	0,4	0,73	0,06	0,48	0,27	0,22	0,9	0,4	<b>0,84</b>
	0,62	0,99	0,73	0,07	0,04	0,19	0,21	0,5	0,79	0,63	<b>0,54</b>
	0,32	0,22	0,06	0,04	0,6	0,59	0,08	0,28	0,95	0,3	<b>0,15</b>
	0,81	0,4	0,48	0,19	0,59	0,88	0,01	0,72	0,63	0,86	<b>0,61</b>
	0,5	0,02	0,27	0,21	0,08	0,01	0,79	0,15	0,54	0,1	<b>0,01</b>
	0,81	0,88	0,22	0,5	0,28	0,72	0,15	0,75	0,26	0,05	<b>0,39</b>
	0,98	0,83	0,9	0,79	0,95	0,63	0,54	0,26	0,72	0,74	<b>0,83</b>
	0,72	0,54	0,4	0,63	0,3	0,86	0,1	0,05	0,74	0,77	<b>0,22</b>
<b>5</b>	0,7	0,5	0,64	0,86	0,48	0,86	0,88	0,29	0,44	0,94	<b>0,79</b>
	0,5	0,07	0,64	0,3	0,16	0,26	0,99	0,78	0,35	0,07	<b>0,87</b>
	0,64	0,64	0,69	0,48	0,08	0,19	0,96	0,68	0,39	0,14	<b>0,64</b>
	0,86	0,3	0,48	0,02	0,19	0,76	0,53	0,25	0,92	0,89	<b>0,73</b>
	0,48	0,16	0,08	0,19	0,46	0,93	0,88	0,27	0,16	0,4	<b>0,4</b>
	0,86	0,26	0,19	0,76	0,93	0,05	0,15	0,78	0,72	0,82	<b>0,99</b>
	0,88	0,99	0,96	0,53	0,88	0,15	0,88	0,08	0,58	0,79	<b>0,33</b>
	0,29	0,78	0,68	0,25	0,27	0,78	0,08	0,31	0,56	0,43	<b>0,76</b>
	0,44	0,35	0,39	0,92	0,16	0,72	0,58	0,56	0,61	0,07	<b>0,37</b>
	0,94	0,07	0,14	0,89	0,4	0,82	0,79	0,43	0,07	0,24	<b>0,71</b>
<b>6</b>	0,75	0,15	0,44	0,2	0,59	0,1	0,2	0,21	0,18	0,59	<b>0,26</b>

	0,15	0,33	0,62	0,26	0,83	0,02	0,81	0	0,94	0,94	<b>0,78</b>
	0,44	0,62	0,51	0,92	0,74	0,59	0,75	0,68	0,75	0,99	<b>0,41</b>
	0,2	0,26	0,92	0,85	0,94	0,11	0,4	0,54	0,49	0,56	<b>0,71</b>
	0,59	0,83	0,74	0,94	0,83	0,46	0,25	0,79	0,24	0,15	<b>0,29</b>
	0,1	0,02	0,59	0,11	0,46	0,67	0,37	0,86	0,93	0,82	<b>0,06</b>
	0,2	0,81	0,75	0,4	0,25	0,37	0,82	0,55	0,01	0,12	<b>0,98</b>
	0,21	0	0,68	0,54	0,79	0,86	0,55	0,56	0,93	0,97	<b>0,97</b>
	0,18	0,94	0,75	0,49	0,24	0,93	0,01	0,93	0,75	0,84	<b>0,54</b>
	0,59	0,94	0,99	0,56	0,15	0,82	0,12	0,97	0,84	0,31	<b>0,98</b>
7	0,33	0,15	0,12	0,08	0,24	0,6	0,68	0,45	0,48	0,88	<b>0,55</b>
	0,15	0,43	0,23	0,19	0,31	0,46	0,86	0,23	0,02	0,46	<b>0,59</b>
	0,12	0,23	0,08	0,62	0,99	0,13	0,18	0,35	0,56	0,04	<b>0,49</b>
	0,08	0,19	0,62	0,59	0,16	0,91	0,22	0,56	0,22	0,42	<b>0,53</b>
	0,24	0,31	0,99	0,16	0,29	0,87	0,12	0,01	0,86	0,69	<b>0,47</b>
	0,6	0,46	0,13	0,91	0,87	0,54	0,08	0,7	0,63	0,75	<b>0,71</b>
	0,68	0,86	0,18	0,22	0,12	0,08	0,71	0,19	0,45	0,61	<b>0,88</b>
	0,45	0,23	0,35	0,56	0,01	0,7	0,19	0,41	0,35	0,04	<b>0,91</b>
	0,48	0,02	0,56	0,22	0,86	0,63	0,45	0,35	0,18	0,19	<b>0,41</b>
	0,88	0,46	0,04	0,42	0,69	0,75	0,61	0,04	0,19	0,8	<b>0,64</b>
8	0,78	0,15	0,69	0,96	0,37	0,93	0,91	0,85	0,06	0,05	<b>0,71</b>
	0,15	0,29	0,99	0,22	0,63	0,6	0,6	0,32	0,25	0,49	<b>0,42</b>
	0,69	0,99	0,32	0,75	0,85	0,78	0,09	0,07	0,03	0,46	<b>0,07</b>
	0,96	0,22	0,75	0,7	0,69	0,63	0,25	0,83	0,1	0,13	<b>0,78</b>
	0,37	0,63	0,85	0,69	0,89	0,07	0,57	0,19	0,52	0,93	<b>0,74</b>
	0,93	0,6	0,78	0,63	0,07	0,72	0,4	0,73	0,71	0,44	<b>0,04</b>
	0,91	0,6	0,09	0,25	0,57	0,4	0,76	0,47	0,33	0,69	<b>0,6</b>
	0,85	0,32	0,07	0,83	0,19	0,73	0,47	0,09	0,99	0,4	<b>0,29</b>
	0,06	0,25	0,03	0,1	0,52	0,71	0,33	0,99	0,96	0,62	<b>0,22</b>
	0,05	0,49	0,46	0,13	0,93	0,44	0,69	0,4	0,62	0,6	<b>0,1</b>
9	0,8	0,77	0,71	0,21	0,59	0,6	0,64	0,99	0,39	0,11	<b>0,85</b>
	0,77	0,26	0,01	0,08	0,32	0,81	0,5	0,34	0,7	0,81	<b>0,77</b>
	0,71	0,01	0,57	0,32	0,4	0,38	0,23	0,63	0,27	0,01	<b>0,72</b>
	0,21	0,08	0,32	0,71	0,21	0,79	0,87	0,16	0,91	0,75	<b>0,17</b>
	0,59	0,32	0,4	0,21	0,55	0,32	0	0,34	0,29	0,87	<b>0,2</b>
	0,6	0,81	0,38	0,79	0,32	0,56	0,43	0,91	0,45	0,51	<b>0,88</b>
	0,64	0,5	0,23	0,87	0	0,43	0,89	0,23	0,99	0,33	<b>0,48</b>

	0,99	0,34	0,63	0,16	0,34	0,91	0,23	0,72	0,27	0,56	<b>0,42</b>
	0,39	0,7	0,27	0,91	0,29	0,45	0,99	0,27	0,08	0,72	<b>0,14</b>
	0,11	0,81	0,01	0,75	0,87	0,51	0,33	0,56	0,72	0,74	<b>0,1</b>
10	0,8	1,1	0,8	0,93	0,04	0,25	0,75	0,2	0,83	0,8	<b>0,4</b>
	1,1	0,56	0,96	0,36	0,74	0,49	0,74	0,84	0,82	0,9	<b>0,28</b>
	0,8	0,96	0,85	0,36	0,65	0,2	0,48	0,42	0,85	0,59	<b>0,58</b>
	0,93	0,36	0,36	0,45	0,22	0,03	0,65	0,27	0,27	0,53	<b>0,16</b>
	0,04	0,74	0,65	0,22	0,8	0,72	0,85	0	0,96	0,01	<b>0,94</b>
	0,25	0,49	0,2	0,03	0,72	0,22	0,36	0,04	0,62	0,7	<b>0,24</b>
	0,75	0,74	0,48	0,65	0,85	0,36	0,29	0,3	0,81	0,42	<b>1</b>
	0,2	0,84	0,42	0,27	0	0,04	0,3	0,73	0,15	0,79	<b>0,81</b>
	0,83	0,82	0,85	0,27	0,96	0,62	0,81	0,15	0,5	0,67	<b>0,39</b>
	0,8	0,9	0,59	0,53	0,01	0,7	0,42	0,79	0,67	0,41	<b>0,96</b>