Algorithmen und Lernverfahren

Kay Förster

13. Dezember 2015

1. Berechnen Sie die Laufzeit des folgenden Algorithmuses:

$$\sum_{m=0}^{k} a_m n^m \text{ mit } a_k > 0, a_m \geq 0$$

Lösung:

$$\begin{aligned} LZ &\leq \sum_{m=0}^{k} a_m n^m \\ &\leq a_0 n^0 + \cdots + a_k n^k \\ &\leq a_k n^k \in \mathcal{O}(n^k) \end{aligned}$$

2. Zeigen Sie:
   (a) $\log(n!) \in \mathcal{O}(n \log n)$
   (b) $\binom{n}{k} \in \mathcal{O}(n^k)$
   (c) $2^{n+\mathcal{O}(1)} \in \mathcal{O}(2^n)$

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(\log(n!)) &\subseteq \mathcal{O}(n \log n) \\ \mathcal{O}(\log(n \cdot n-1 \cdot \ldots \cdot n-(n-1))) &\subseteq \\ \mathcal{O}(\log(n^n)) &\subseteq \end{aligned}$$

(b)

(c)

$$2^{n+\mathcal{O}(1)} \subseteq 2^{n+c} = 2^n \cdot 2^c \in \mathcal{O}(2^n)$$

3. Zeigen Sie das $\frac{n(n+1)}{2} \in \Theta(n^2)$ gilt.

Lösung:

$$\mathcal{O}(\frac{n(n+1)}{2}) = \mathcal{O}(n(n+1)) = \mathcal{O}(n) \cdot \mathcal{O}(n+1) = \mathcal{O}(n) \cdot \mathcal{O}(n) = \mathcal{O}(n^2)$$
$$\frac{n(n+1)}{2} \geq \frac{n^2}{2} \in \Theta(n^2)$$
$$\curvearrowright \mathcal{O}(n^2) \cap \Omega(n^2) = \Theta(n^2)$$

4. Zeigen Sie ob $n \in \Theta(2^n)$ gilt.

Lösung:

$$n \in \Theta(2^n) = \mathcal{O}(2^n) \cap \underbrace{\Omega(2^n)}_{\text{Verletzt}}$$

2^n wächst schneller als n, somit kann die untere Schranke nicht eingehalten werden.

5. Berechnen Sie die Entropie einer
   (a) Gleichverteilung
   (b) Verteilung mit $p_1 = 1, p_k = 0 (k \neq 1)$

Lösung:

(a) $-[\frac{1}{n} \log \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n} \log \frac{1}{n}] = \log(\frac{1}{n})$

(b) Die Entropie beträgt 0, da immer nur p_1 ausgeben wird und nie ein anderes Zeichen.

6. Gegeben sei die folgende Verteilung. Erstellen Sie eine Huffman-Codierung für das Wort "Betriebssysteme"

Zeichen	b	e	i	m	r	s	t	y
Wahrscheinlichkeit	0,02	0,17	0,08	0,03	0,07	0,07	0,06	0,00