Petri-Netze

Zusammenfassung

Inhalt

1 Literatur

[Bal1] Balzert Helmut, *Lehrbuch der Software-Technik (Band 1) : Software-Entwicklung* Spektrum Akademischer Verlag 1996 (S. 298-322)
[PW]Priese Lutz, Wimmel Harro: *Theoretische Informatik Petri-Netze*, Springer-Verlag 2003.
[Jen]Jensen Kurt: *An Introduction to the Theoretical Aspects of Coloured Petri-Nets*.

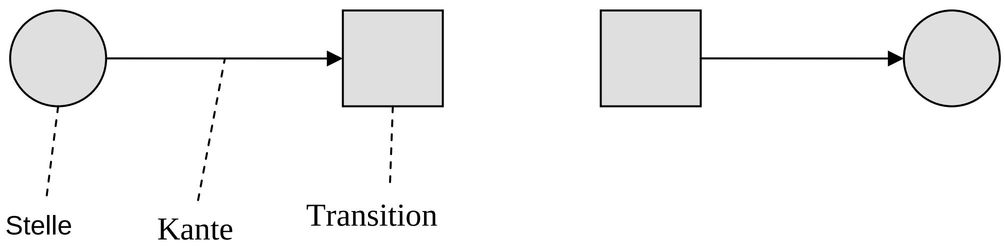
2 Begriff des Petri-Netzes

Petri-Netze wurden 1962 von Carl Adam Petri im Rahmen seiner Dissertation an der TH Darmstadt eingeführt. Sie dienen zur Beschreibung und Simulation von dynamischen Systemen mit nebenläufigen und nichtdeterministischen Abläufen (s.u. für ein Beispiel).

2.1 Petri-Netz (ohne Kapazitäten)

2.1.1 Petri-Netz, Stellen, Transitionen

Ein **Petri-Netz** ist ein gerichteter Graph, der aus zwei verschiedenen Sorten von Knoten besteht: **Stellen** (auch **Plätze** - engl. **places -** genannt) und **Transitionen** (auch **Zustandsübergänge -** engl. **transitions -** genannt). Eine Stelle entspricht dabei einer Zwischenablage von Information und wird durch einen Kreis dargestellt, eine Transition beschreibt eine Verarbeitung von Information und wird durch ein Rechteck oder einen Balken dargestellt. Die (gerichteten) Kanten dürfen jeweils nur von einer Sorte von Knoten zur anderen Sorte führen – erlaubt sind also:

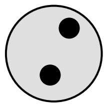


Nicht erlaubt sind dagegen:

Die Stellen, von denen Kanten zu einer bestimmten Transition t hinführen, heißen **Eingabestellen** von t. Die Stellen, zu denen Kanten von t aus wegführen, heißen **Ausgabestellen** von t.

2.1.2 Marken (Tokens)

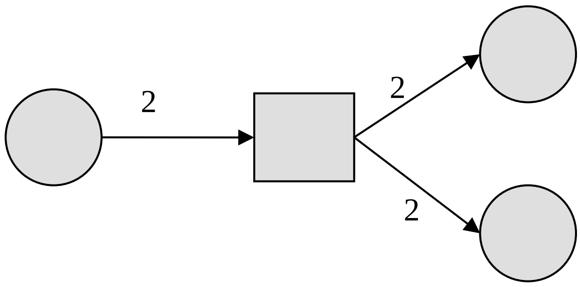
Um die in einem Petri-Netz möglichen Abläufe zu beschreiben, werden Stellen temporär mit einer bestimmten Anzahl von **Marken** (auch **Tokens** genannt) belegt. Marken werden durch kleine ausgefüllte Kreise dargestellt:



Stelle mit 2 Marken (Tokens)

2.1.3 Schalten (Feuern) von Transitionen

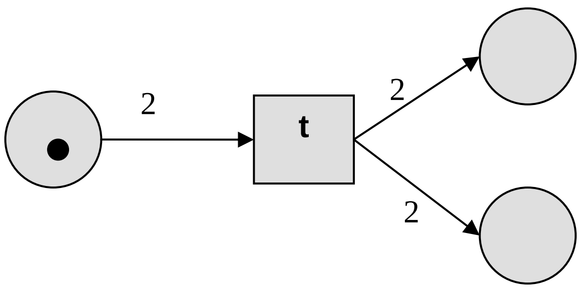
Transitionen können unter bestimmten Bedingungen **schalten** (man sagt auch **feuern**); wenn eine bestimmte Transition schaltet, dann wird von <u>jeder</u> ihrer Eingabestellen eine bestimmte Anzahl von Marken (mindestens eine) entnommen und auf <u>jeder</u> ihrer Ausgabestellen eine bestimmte Anzahl von Marken (mindestens eine) abgelegt. Die Anzahl der zu entnehmenden bzw. abzulegenden Marken wird (falls sie größer als 1 ist) an der entsprechenden Kante als **Gewicht** angegeben:

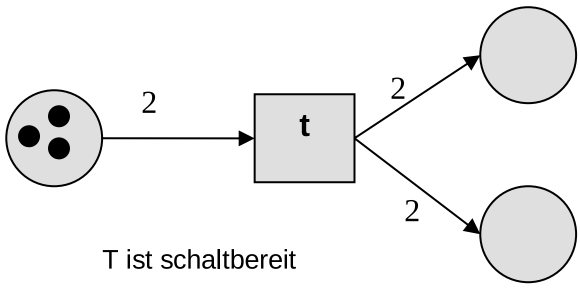


Im obigen Beispiel bezieht die Transition von ihrer Eingabestelle 2 Marken und legt insgesamt 4 Marken auf ihren beiden Eingabestellen ab; es ist also nicht so, dass eine Transition die Marken lediglich verschiebt (sonst müsste die Gesamtzahl der Marken ja konstant bleiben) – eine Transition „verbraucht" vielmehr die Marken von ihren Eingabestellen und „erzeugt neue Marken" für ihre Ausgabestellen. Eine Transition kann auch keine Marken aufbewahren, dies können nur Stellen. Marken werden auch nicht unterschieden, es geht stets nur darum, dass eine bestimmte <u>Anzahl</u> von Marken auf einer Stelle liegt oder von einer Transition verbraucht bzw. erzeugt wird.

2.1.4 Schaltbereitschaft

Eine Transition kann jedoch nur dann schalten, wenn sie **schaltbereit** (man sagt auch **aktiviert**) ist, das bedeutet, dass <u>jede</u> Eingabestelle mindestens so viele Marken enthält, wie durch das Schalten entfernt würden:

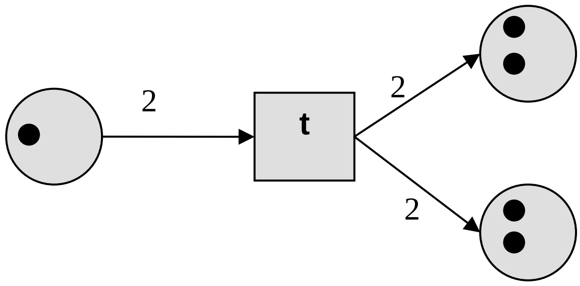




T ist schaltbereit

Zu wenig Marken auf der Eingabestelle =>
T ist nicht schaltbereit

Nach dem Schalten ergibt sich aus dem Bild rechts folgende Markenverteilung:



Situation nach dem Schalten von T

Eine Transition kann zu einem beliebigen Zeitpunkt innerhalb ihrer Schaltbereitschaft schalten – insbesondere muss sie also beim Erreichen der Schaltbereitschaft nicht zwangsläufig sofort schalten. Sind zu einem Zeitpunkt mehrere Transitionen schaltbereit, so ist nicht festgelegt, welche Transition tatsächlich schaltet (nicht-deterministisches Verhalten).

2.1.5 Zustand (Markierung), Schaltsequenz, Erreichbarkeit

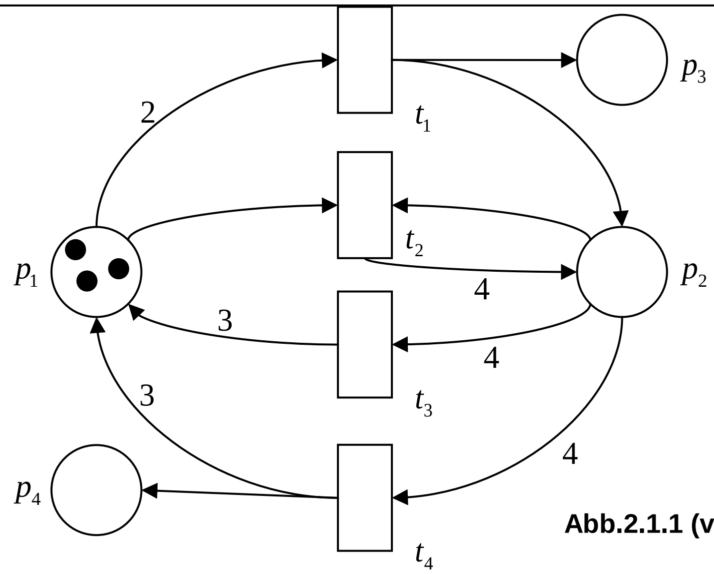
Ein sog. **Zustand** s (engl „state“ - man sagt auch **Markierung (**engl. „marking“)**)** eines Petri-Netzes N legt für jede Stelle p die Anzahl $s(p) \in \mathbb{N}_0$ der Marken fest, die gerade auf p liegen. Jeder Zustand s liefert eine gewisse Menge von schaltbereiten Transitionen. Indem eine schaltbereite Transition t schaltet, geht das Petri-Netz zu einem **Folgezustand** s' über. Wir sagen dazu kurz „t **schaltet (oder feuert) von** s **nach** s'“ und schreiben dafür $s[t > s'$ oder auch $s \xrightarrow{t} s'$.

Sind $t_1, t_2, ..., t_n$ Transitionen, so sagen wir „**die Sequenz** $\sigma := t_1 t_2 ... t_n$ **schaltet (feuert) von** s **nach** s'**“** (Schreibweise: $s[\sigma > s'$ oder $s \xrightarrow{\sigma} s'$), wenn es Zustände $s_0, s_1, ..., s_n$ gibt, so dass $s_0 \xrightarrow{t_1} s_1,\ s_1 \xrightarrow{t_2} s_2, \ldots, s_{n-1} \xrightarrow{t_n} s_n$ und $s_0 = s$, $s' = s_n$ gilt.

Oft möchte man nur ausdrücken, dass eine Sequenz $\sigma := t_1 t_2 ... t_n$ ausgehend von einem Zustand s überhaupt schalten kann; in diesem Falle schreibt man dann nur $s[\sigma >$, ohne den erreichten neuen Zustand anzugeben. Man sagt hierfür „σ **ist eine Schalt- (oder Feuer) sequenz von** s“.

Für zwei gegebene Zustände s und s' sagt man „s' **ist von** s **aus erreichbar“**, wenn es eine Sequenz $\sigma = t_1 t_2 ... t_n$ gibt, die von s nach s' schaltet. Für ein gegebenes Petri-Netz N und einen gegebenen Zustand s kann man die von s aus erreichbaren Zustände mit den zugehörigen Transitionen im sog. **Erreichbarkeitsgraphen** $EG(N,s)$ darstellen. Für ein Petri-Netz wird i. A. ein **Startzustand** s_0 vorgegeben, und man interessiert sich speziell für die von s_0 aus erreichbaren Zustände.

Ein Beispiel zu den soeben erwähnten Begriffen:

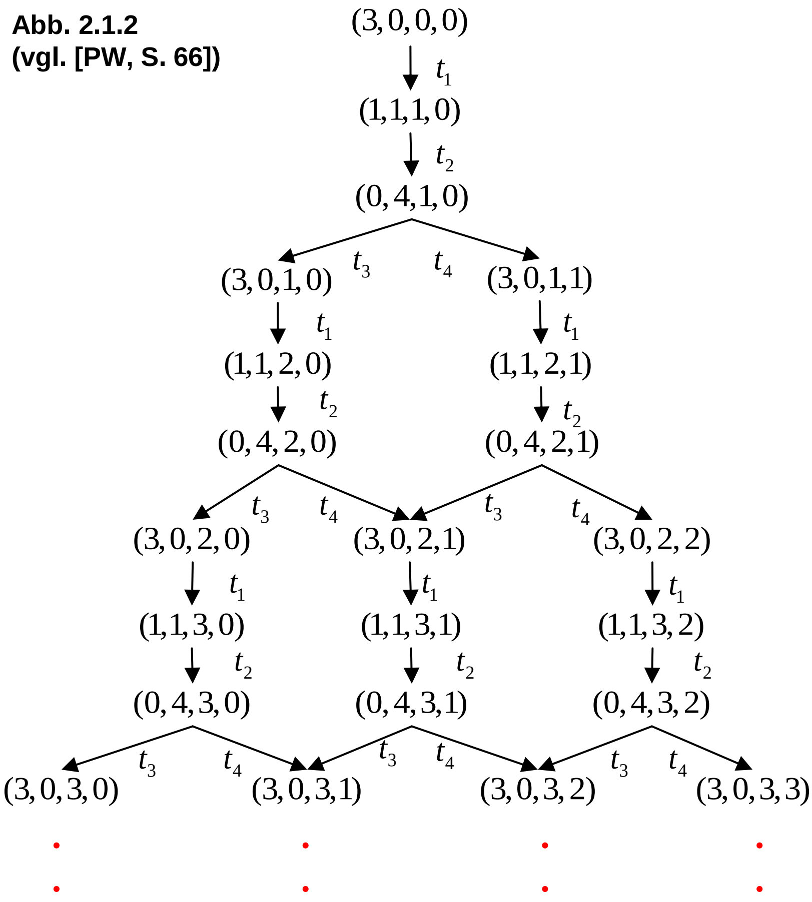


Petri-Netz mit Startzustand
$s_0(p_1)=3$
$s_0(p_2)=0$
$s_0(p_2)=0$
$s_0(p_4)=0$

Abb.2.1.1 (vgl. [PW,S.65])

Der Erreichbarkeitsgraph $EG(N) := EG(N, s_0)$ hat hier unendlich (!) viele Zustände:

Abb. 2.1.2 (vgl. [PW, S. 66])



$\sigma := t_1t_2t_3t_1t_2t_4$ ist z.B. eine Schaltsequenz vom Startzustand in den Zustand $(3,0,2,1)$. $\sigma := t_1t_2t_3t_1t_2t_1$ ist z.B. keine Schaltsequenz für den Startzustand, da die letzte Transition t_1 in dem Zustand, der von $\sigma := t_1t_2t_3t_1t_2$ hinterlassen wird, nicht schaltbereit ist!

Das **Erreichbarkeitsproblem** für Petri-Netze (vgl. [PW, S. 93ff]) behandelt die folgende Frage:

> Gegeben sei ein Petri-Netz N zusammen mit zwei Zuständen s und s'. Ist s' im Petri-Netz N von s aus erreichbar?

Das **Erreichbarkeitsmengen-Gleichheitsproblem** (vgl. [PW, S.144 ff]) ist die folgende Frage:

> Gegeben sind zwei Petri-Netze N und N' (jeweils mit Startzuständen); die Menge der (vom jeweiligen Startzustand aus) erreichbaren Zustände sei jeweils mit $\mathcal{E}(N)$ bzw. $\mathcal{E}(N')$ bezeichnet. Ist dann $\mathcal{E}(N) = \mathcal{E}(N')$?

Im Falle des Erreichbarkeitsproblems wurde bewiesen, dass ein Algorithmus[1] existiert, der für ein beliebiges Tripel (N, s, s') nach endlich vielen Schritten die Antwort liefert („das Erreichbarkeitsproblem ist entscheidbar"); im Falle des Erreichbarkeitsmengen-Gleichheitsproblem wurde dagegen bewiesen, dass kein entsprechender Algorithmus existiert („das Erreichbarkeitsmengen-Gleichheitsproblem ist nicht entscheidbar").

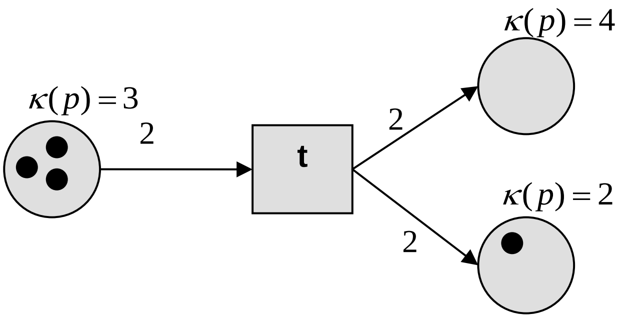
2.2 Petri-Netze mit Kapazitäten („Stellen/Transitionsnetze")

2.2.1 Kapazitäten, Petri-Netz mit Kapazitäten („Stellen/Transitionsnetze")

Ein **Petri-Netz mit Kapazitäten** (auch „**Stellen/Transitionsnetz**" genannt); ist ein Petri-Netz (mit einem Startzustand s_0), bei dem jeder Stelle p eine **Kapazität** $\kappa(p) \in \mathbb{N}$ zugewiesen ist.

Die Menge der erlaubten Zustände unterliegt hier der zusätzlichen Einschränkung, dass für jede Stelle p und jeden Zustand s die tatsächliche Anzahl $s(p)$ der Marken auf p die Kapazität $\kappa(p) \in \mathbb{N}$ nicht überschreitet; d.h. es gilt $s(p) \le \kappa(p)$ für alle Stellen p und alle Zustände s.

Die Schaltbereitschaft einer Transition t unterliegt der zusätzlichen Bedingung, dass durch das Schalten bei keiner Ausgabestelle die Kapazität überschritten werden darf:



Zu wenig freie Kapazität in einer Ausgabestelle =>
T ist nicht schaltbereit

[1] Die Frage nach der Exisitenz eines Algorithmus' wurde 1980 positiv beantwortet, nachdem sie ca. 10 Jahre lang unbeantwortet blieb.

Falls eine Stelle p zugleich Ausgabe- und Eingabestelle einer Transition t ist, so ist für die Beurteilung der Schaltbereitschaft maßgeblich, ob nach dem Verbrauchen der Marken auf p durch t noch genügend freie Kapazität für die neu erzeugten Marken vorhanden wäre.

Petri-Netze mit Kapazitäten haben übrigens die angenehme Eigenschaft, dass ihr Erreichbarkeitsgraph stets nur endlich viele Zustände hat (denn für die Anzahl der Tokens auf einer Stelle p gibt es nur die $\kappa(p)+1$ Möglichkeiten $0,1,...,\kappa(p)$; sind also $p_1, p_2, ..., p_m$ alle Stellen des Petri-Netzes, so sind höchstens $(\kappa(p_1)+1)\cdot(\kappa(p_2)+1)\cdot...\cdot(\kappa(p_m)+1)$ Zustände möglich).

2.2.2 Bedingungs/Ereignisnetze

Schreibt man für alle Stellen p die Kapazität $\kappa(p)=1$ vor, so hat man den Spezialfall eines **Bedingungs/Ereignisnetzes**; eine Transition kann hier also genau dann schalten, wenn jede Eingabestelle eine Marke enthält und jede Ausgabestelle leer ist.

2.2.3 Anwendungsbeispiel: Verhalten einer Bestückungsanlage

Die folgende Skizze zeigt ein vereinfachtes Beispiel einer Bestückungsanlage für Leiterplatten (vgl. [Bal1, S. 300]): Das Fließband A transportiert unbestückte Leiterplatten an. Ist wenigstens einer der beiden Roboter R1 und R2 frei, so nimmt er eine antransportierte Leiterplatte und bestückt sie mit elektronischen Bauelementen. Die fertig bestückte Leiterplatte legt der Roboter auf das Fließband B zum Abtransport. Beide Roboter arbeiten parallel und konkurrieren um die Entnahme bzw. Ablage einer Leiterplatte auf Fließband A bzw. B, d.h. in Situationen, wo beide Roboter zur Entnahme bzw. Ablage einer Leiterplatte bereit sind, wird nicht-deterministisch entschieden, welcher Roboter zuerst drankommt. Die Bauelemente holen beide Roboter aus einem gemeinsam benutzten Bauelementemagazin: nachdem sich ein Roboter eine Leiterplatte zum Bestücken vorbereitet hat, holt er alle benötigten Bauteile aus dem Magazin und bestückt dann die Leiterplatte. Während des Zugriffs auf das Bauelementemagazin ist der Zugriff für den anderen Roboter gesperrt:

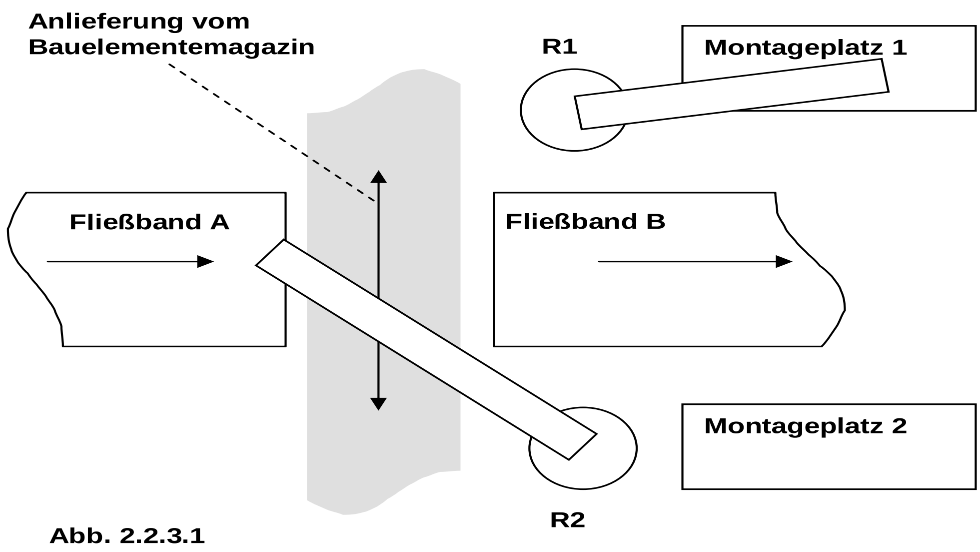


Abb. 2.2.3.1

Das folgende Bild (entnommen aus [Bal1, S. 302]) zeigt ein passendes Bedingungs/Ereignis-Netz, um das grundlegende Verhalten dieser Anlage zu beschreiben:

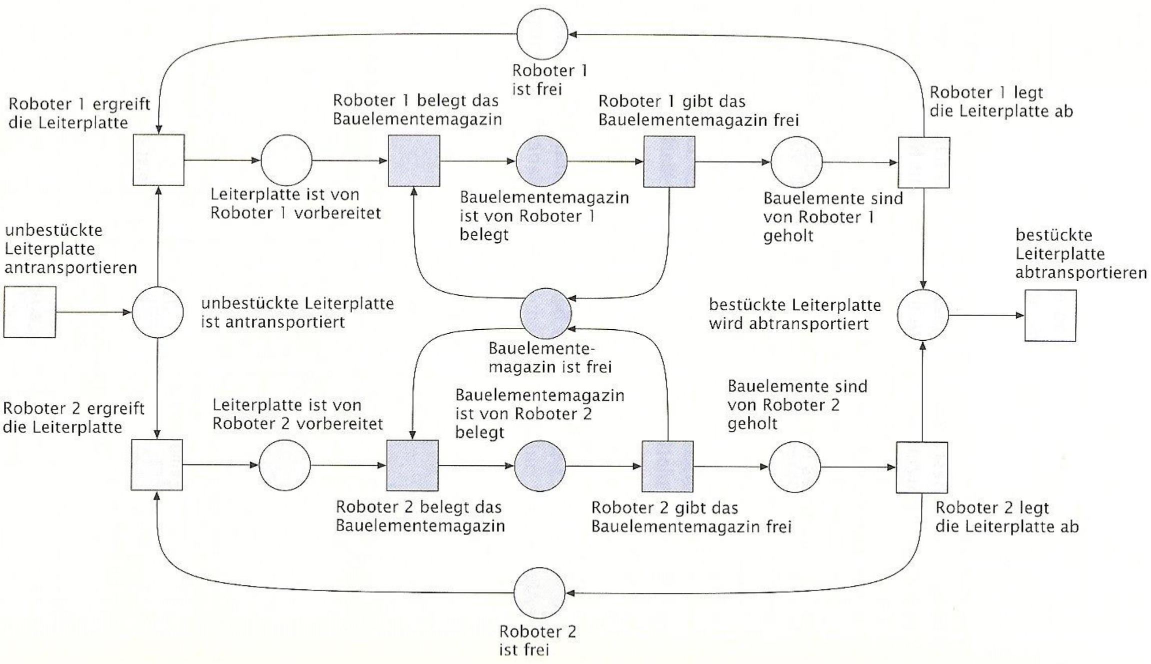


Abb. 2.17-6: B/E-Netz des Bestückungsroboters mit gemeinsamem Bauelemente-Magazin

Jede Stelle repräsentiert hierbei eine bestimmte **Bedingung**, die sich aus der Bezeichnung der Stelle ergibt; die Bedingung liefert genau dann den Wert „wahr“, wenn sich auf der Stelle eine Marke befindet. Jede Transition repräsentiert ein **Ereignis**, das sich ebenfalls aus der Bezeichnung der Transition ergibt; die Schaltbereitschaft bedeutet hier, dass das entsprechende Ereignis eintreten kann, das Schalten entspricht dem tatsächlichen Eintreten des Ereignisses. Durch die Eingabe- bzw. Ausgabestellen einer Transition t werden Vorbedingungen für das Eintreten des zu t gehörigen Ereignisses ausgedrückt: die durch die Eingabestellen repräsentierten Bedingungen müssen den Wert „wahr“ liefern (=Token auf der Eingabestelle), die durch die Ausgabestellen repräsentierten Bedingungen müssen den Wert „falsch“ liefern (=kein Token auf der Ausgabestelle).

Ein Bedingungs/Ereignisnetz ist begrifflich einfach, kann aber u.U. recht viele Plätze bzw. Transitionen erfordern; lässt man höhere Kapazitäten als 1 zu, so kann man Verhalten eleganter (mit weniger Plätzen bzw. Transitionen) beschreiben. Die Bestückungsanlage lässt sich als Stellen/Transitionsnetz wesentlich kompakter wie im folgenden Bild beschreiben (Bild entnommen aus [Bal1, S.305]). Die Kapazitäten für die Stellen sind jeweils angegeben, die Kanten haben alle das Gewicht 1.

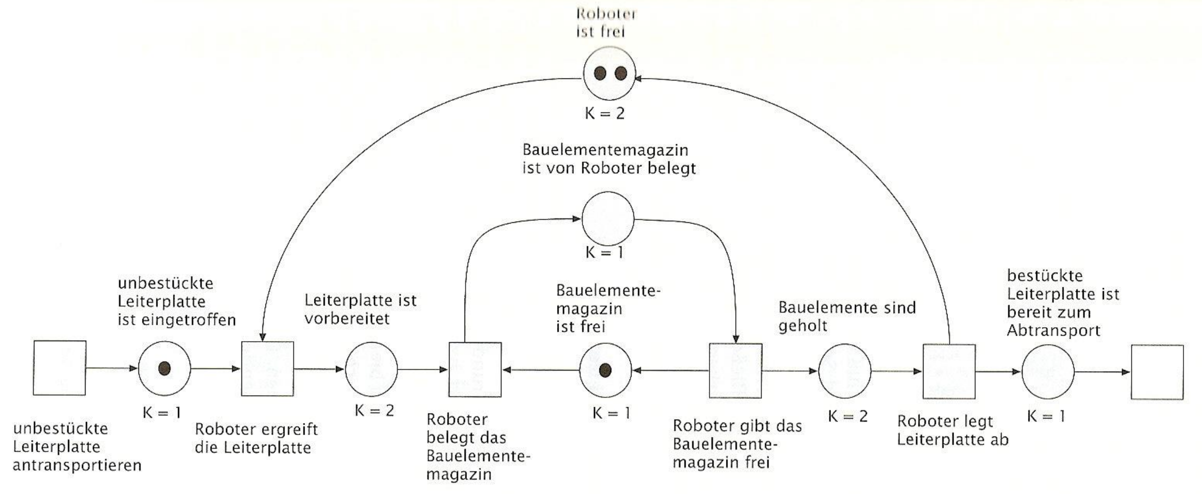


Abb. 2.17-8: S/T-Netz des Bestückungsroboters

Die beiden Beispiele zeigen auch, dass Stellen i.A. (passive) Aspekte eines Systems repräsentieren – sie beschreiben Teilmerkmale von Systemzuständen wie z.B.:

- „eine bestimmte Bedingung ist erfüllt/nicht erfüllt“
- „eine bestimmte Ressource (Daten, Material, Gerät, etc.) ist in einer bestimmten Anzahl verfügbar“

Transitionen repräsentieren dagegen i.A. (aktive) Aspekte eines Systems wie z.B.

- Ereignisse
- Teilschritte in einem Produktionsprozess

Transitionen verbrauchen Ressourcen in bestimmter Anzahl und schaffen neue.

2.2.4 Petri-Netze ohne Kapazitäten vs. Petri-Netze mit Kapazitäten

Für **praktische Anwendungen** betrachtet man meist nur Petri-Netze mit Kapazitäten (und häufig sogar Weiterentwicklungen davon wie etwa die sog. „gefärbten Petri-Netze“), weil diese Petri-Netz Klasse(n) mächtigere Mittel zur Beschreibung komplexer Systeme bieten und daher besser zu gebrauchen sind. Ist in einem Petri-Netz mit Kapazitäten für eine Stelle die Kapazität nicht explizit angegeben, so bedeutet dies i. A., dass die Kapazität 1 beträgt.

In der **theoretischen Informatik** betrachtet man dagegen häufig Petri-Netze ohne Kapazität, weil hier das Schaltverhalten einfacher ist (die von den Kapazitäten herrührende zusätzliche Einschränkung an die Schaltbereitschaft entfällt!). Bei einem Petri-Netz ohne Kapazitäten hat jede Stelle unbeschränkte Kapazität. In der Theorie der Petri-Netze hat man allerdings gezeigt, dass man jedem Petri-Netz N mit Kapazitäten ein sog. **beschränktes Petri-Netz** N' zuordnen kann, das hinsichtlich der möglichen Zustände und der Zustandwechsel in einem gewissen Sinne[2] „gleichwertiges Verhalten“ aufweist. Ein **beschränktes Petri-Netz** ist dabei ein Petri-Netz ohne Kapazitäten (also ohne zusätzliche Einschränkung an die

[2] Sog. „Isomorphie“ von Petri-Netzen

Schaltbereitschaft!), für das eine natürliche Zahl k existiert[3], so dass in allen erreichbaren Zuständen auf allen Plätzen nie mehr als k Marken liegen (daher „beschränkt“). Die theoretische Informatik ignoriert also das Verhalten der in der Praxis wichtigen Petri-Netze mit Kapazitäten nicht einfach; vielmehr studiert sie es aus einer für die Theorie etwas bequemeren Sicht.

3 Mathematische Beschreibung von Petri-Netzen

3.1 Petri-Netze (ohne Kapazitäten)

Ein Petri-Netz N (ohne Kapazitäten) kann als Tupel $N = (P, T, w^-, w^+)$ aufgefasst werden, wobei die Bestandteile folgende Bedeutung haben:

- $P = \{p_1, p_2, ..., p_m\}$ ist eine nicht-leere endliche Menge, deren Elemente die **Stellen** (engl. **P**laces) sind.
- $T = \{t_1, t_2, .., t_n\}$ ist eine nicht-leere endliche Menge (mit $P \cap T = \emptyset$), deren Elemente die **Transitionen** (engl. **T**ransitions) sind.
- $w^- \in \mathbb{N}_0^{m \times n}$ ist eine $m \times n$-Matrix mit Koeffizienten in $\mathbb{N}_0$, die die **Anzahl der verbrauchten Tokens** beim Feuern von Transitionen darstellt:
  $w_{ij}^- = k > 0$ bedeutet: „ p_i ist Eingangsstelle von t_j, und t_j verbraucht (über die zugehörige Kante) genau k Tokens“.
  $w_{ij}^- = 0$ bedeutet: „ p_i ist nicht Eingangsstelle von t_j (d.h. es führt keine Kante von p_i zu t_j)“
- $w^+ \in \mathbb{N}_0^{m \times n}$ ist eine $m \times n$-Matrix mit Koeffizienten in $\mathbb{N}_0$, die die **Anzahl der erzeugten Tokens** beim Feuern von Transitionen darstellt:
  $w_{ij}^+ = k > 0$ bedeutet: „ p_i ist Ausgangsstelle von t_j, und t_j erzeugt (über die zugehörige Kante) k Tokens in p_i“.
  $w_{ij}^+ = 0$ bedeutet: „ p_i ist keine Ausgangsstelle von t_j (d.h. es führt keine Kante von t_j zu p_i)“

Beispiel: Für das Petri-Netz aus Abb. 2.1.1 haben wir $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$, $T = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ und

$$w^- = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{array} \end{array}, \qquad w^+ = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{array} \end{array}$$

[3] in einem beschränkten Petri-Netz mit insgesamt m Stellen kann es also höchstens $(k+1)^m$ Zustände geben; der Erreichbarkeitsgraph hat also stets nur endlich viele Zustände.

Ein **Zustand** (**Markierung**) kann als Element $s = \begin{pmatrix} s_1 \\ .. \\ s_m \end{pmatrix} \in \mathbb{N}_0{}^m$ aufgefasst werden, wobei s_i die Anzahl der Marken bedeutet, die auf der Stelle p_i liegen. Der **Startzustand** für ein Petrinetz N ist also einfach ein bestimmtes vorgegebenes Element $s_0 \in \mathbb{N}_0{}^m$.

Definieren wir für beliebige Elemente $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ ... \\ a_m \end{pmatrix} \in \mathbb{N}_0{}^m$ und $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{N}_0{}^m$ die **Bedeutung von $a \le b$ als „$a_1 \le b_1$ und $a_2 \le b_2$ … und $a_m \le b_m$"**, so können wir die **Schaltbereitschaft** der Transition t_j in einem gegebenen Zustand $s \in \mathbb{N}_0{}^m$ einfach durch

$$\boxed{s \ge w_j^-} \quad \textbf{(*)}$$

ausdrücken, wobei $w_j^- \in \mathbb{N}_0{}^m$ die j-te Spalte der Matrix w^- bezeichnet (diese Spalte gibt für jede einzelne Stelle an, wie viele Tokens beim Schalten von t_j verbraucht werden).

Beispiel: Für das Petri-Netz aus Abb. 2.1.1 und $s_0 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^t$ gilt:
$s_0 \ge \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^t}_{=w_1^-}$ (d.h. t_1 ist schaltbereit) und $s_0 \not\ge \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^t}_{=w_1^-}$ (d.h. t_2 ist nicht schaltbereit).

Das **Schalten der Transition t_j vom Zustand $s \in \mathbb{N}_0{}^m$ in den Zustand $s' \in \mathbb{N}_0{}^m$** können wir wie folgt ausdrücken:

$$s \ge w_j^- \text{ (es besteht Schaltbereitschaft) und}$$
$$\boxed{s' = s - w_j^- + w_j^+} \quad \textbf{(**)}$$

Beispiel: Für das Petri-Netz aus Abb. 2.1.1 und $s_0 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^t$ und t_1 gilt:

$$\begin{aligned} s' &= s_0 - w_1^- + w_1^+ \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^t - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^t + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t \end{aligned}$$

Schaltet (statt einer einzelnen Transition) **eine Schaltsequenz von $s \in \mathbb{N}_0{}^m$ in den Zustand $s' \in \mathbb{N}_0{}^m$,** wie funktioniert dann die Berechnung von s'? Betrachten wir zuerst eine einfachere Situation: Haben wir etwa die Schaltsequenz $\sigma := t_1 t_2 t_3 t_1$ gegeben, die vom Zustand $s \in \mathbb{N}_0{}^m$ in den Zustand $s' \in \mathbb{N}_0{}^m$ schaltet, so lässt sich s' wie folgt errechnen:

$$\begin{aligned} s' &= s \underbrace{-w_1^- + w_1^+}_{\text{durch } t_1} \underbrace{-w_2^- + w_2^+}_{\text{durch } t_2} \underbrace{-w_3^- + w_3^+}_{\text{durch } t_3} \underbrace{-w_1^- + w_1^+}_{\text{durch } t_1} \\ &= s + 2\cdot\underbrace{(w_1^+ - w_1^-)}_{\substack{\text{1.Spalte der} \\ \text{Matrix } w^+ - w^-}} + \underbrace{(w_2^+ - w_2^-)}_{\substack{\text{2.Spalte der} \\ \text{Matrix } w^+ - w^-}} + \underbrace{(w_3^+ - w_3^-)}_{\substack{\text{3.Spalte der} \\ \text{Matrix } w^+ - w^-}} \\ &= s + \underbrace{(w^+ - w^-)}_{\text{Matrix } w^+ - w^-} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}^t}_{\substack{\text{Spalte mit den Häufigkeiten der} \\ \text{einzelnen Transitionen in } t_1t_2t_3t_1: \\ t_1 \text{ kommt 2-mal vor, } t_2 \text{ und } t_3 \\ \text{kommen 1-mal vor, und alle} \\ \text{anderen Transitionen 0-mal}}} \end{aligned}$$

Diese Erkenntnis lässt sich auf beliebige Schaltsequenzen verallgemeinern: Ist σ irgendeine Aneinanderreihung von Transitionen aus der Menge $T = \{t_1, \ldots t_n\}$, die eine Schaltsequenz von s nach s' darstellt, so bilden wir zunächst das Element[4] $P(\sigma) \in \mathbb{N}_0{}^n$, das für jede Transition t_j angibt, wie oft sie in σ vorkommt, und erhalten dann s' wie folgt:

$$\boxed{s' = s + (w^+ - w^-) \cdot P(\sigma)} \quad \textbf{(***)}$$

Beispiel: Für das Petri-Netz aus Abb. 2.1.1 haben wir:

$$w^+ - w^- = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & -4 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Für den Startzustand und die Schaltsequenz $\sigma := t_1t_2t_4t_1t_2$ (laut Erreichbarkeitsgraph in Abb. 2.1.2 ist das eine Schaltsequenz!) erhalten wir damit:

$$\begin{aligned} s' &= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & -4 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3.2 Petri-Netze mit Kapazitäten (Stellen/Transitionsnetze)

[4] $P(\sigma)$ heißt auch **P**arikh-Bild von σ; daher rührt die Bezeichnungsweise.

Die mathematische Beschreibung eines Petri-Netzes mit Kapazität ist zunächst wie im Fall ohne Kapazität. Hinzu kommt lediglich ein Element $\kappa \in \mathbb{N}^m$, dessen Komponente κ_i die Kapazität für die Stelle p_i angibt, und die Schaltbereitschaft einer Transition t_j in einem Zustand s (der selbstverständlich die Kapazitätseinschränkung erfüllen muss) muss nun so formuliert werden:

$s \geq w_j^-$ (auf den Eingabestellen von t_j liegen überall genügend Marken)

und

$\kappa \geq s - w_j^- + w_j^+$ (durch das Schalten von t_j wird die Kapazität auf keiner Ausgabestelle überschritten)

Auch im Falle eines Petri-Netzes mit Kapazitäten kann für eine Schaltsequenz $\sigma = t_1 t_2 ... t_r$ von s nach s' der Zustand s' gemäß der Formel (***) aus Abschnitt 3.1 berechnet werden.

4 Analyse von Petri-Netzen

Für ein gegebenes Petri-Netz N will man oft folgende Fragen untersuchen:

- Ist ein Zustand s' in N von einem Zustand s aus erreichbar?

- Ist das Netz N im Startzustand **lebendig** (genauer **4-lebendig)**? Dabei heißt eine einzelne Transition t **im Startzustand lebendig** (genauer **4-lebendig**[5]), wenn das Netz von <u>jedem</u> Zustand s, der vom Startzustand aus erreichbar ist, über eine geeignete Schaltsequenz in einen Zustand s' schalten kann, in dem t schaltbereit ist (d.h. „t kann immer wieder schaltbereit werden, unabhängig davon, welche Schaltsequenz vom Startzustand in den aktuellen Zustand geführt hat“). **Das gesamte Netz heißt im Startzustand lebendig**, wenn <u>jede</u> Transition t im Startzustand lebendig ist.

Die Lebendigkeit eines Petri-Netzes ist für die Praxis z. B. in folgender Hinsicht bedeutsam: Beschreibt ein Petri-Netz z.B. den Ablauf eines sich (mit evtl. Abweichungen) wiederholenden Produktionsprozesses, so zeigt sich die Gegenwart von Fehlerquellen, die den Prozess zum Halten bringen können, in der Nicht-Lebendigkeit des Petri-Netzes.

Viele dieser Fragen sind algorithmisch schwierig zu beantworten, daher werden Petri-Netze häufig simuliert – es gibt eine Reihe von Programmen, mit denen man Petri-Netze nicht nur in einem graphischen Editor erstellen, sondern auch simulieren kann. Der Simulator berechnet in jedem Zustand jeweils die Menge der schaltbereiten Transitionen und erlaubt dem Benutzer die Auswahl der zu feuernden Transition (interaktive Simulation) oder die zu feuernde

[5] Man unterschiedet in der Theorie der Petri-Netze genau genommen 4 Abstufungen des Lebendigkeitsbegriffs für Transitionen (vgl. [PW, S. 86 f]): 4-lebendig => 3-lebendig => 2-lebendig => 1-lebendig (die umgekehrten Schlussrichtungen gelten jeweils nicht!). „1-Lebendigkeit“ (im Startzustand) einer Transition t bedeutet dabei, dass ausgehend vom Startzustand ein Zustand s erreicht werden kann, in dem t schaltbereit ist (d.h. „t hat die Chance, wenigstens einmal schaltbereit zu sein, wenn eine geeignete Schaltsequenz aus dem Startzustand voraus geht“).

Transition wird automatisch mit Hilfe eines Zufallszahlengenerators ausgewählt. Darüber hinaus bieten solche Programme auch Analysewerkzeuge an, die bei einigen der obigen Fragen zumindest eine teilweise Unterstützung bieten. Die Berechnung von sog. „Invarianten“ (s.u.) stellt z.B. ein solches Analysewerkzeug dar: P-Invarianten (vgl. Abschnitt 4.1.) können bei Erreichbarkeitsuntersuchungen, T-Invarianten (vgl. Abschnitt 4.2.) bei Lebendigkeitsuntersuchungen helfen.

4.1 P-Invarianten

Kann ein Petri-Netz $N=(P,T,w^-,w^+)$ aus einem Zustand s durch eine Schaltsequenz σ einen anderen Zustand s' erreichen, so gilt nach Gleichung (***) aus Abschnitt 3.1:

$$s' = s + (w^+ - w^-)\cdot P(\sigma)$$

d.h. $P(\sigma)$ ist eine <u>nicht-negative</u> ganzzahlige Lösung des ganzzahligen Gleichungssystems

$$s' - s = (w^+ - w^-)\cdot x$$

Weiß man, dass dieses Gleichungssystem keine nicht-negative ganzzahlige Lösung hat, so kann man sofort schließen, dass s' von s aus nicht erreichbar sein kann.

Häufig setzt man bei Erreichbarkeitsuntersuchungen jedoch sog. P - **Invarianten** ein**:**

Ist $N=(P,T,w^-,w^+)$ ein Petri-Netz mit Stellenmenge $P=\{p_1,...,p_m\}$, so versteht man unter einer P **-Invariante von** N ein Element $I_P \in \mathbb{Z}^m$ mit folgender Eigenschaft:

$$I_P^t \cdot w^- = I_P^t \cdot w^+ \quad (\Leftrightarrow \; I_P^t\cdot(w^+ - w^-) = 0 \;\Leftrightarrow\; (w^+ - w^-)^t \cdot I_P = 0),$$

(d.h. I_P ist eine ganzzahlige Lösung des homogenen Gleichungssystems mit Matrix $(w^+ - w^-)^t \in \mathbb{Z}^{n\times m}$).

Jede P-Invariante hat die folgende wichtige Eigenschaft:

Sind s und s' Zustände und ist $\sigma = t_1 ... t_n$ eine Schaltsequenz von s nach s', so gilt $I_P^t \cdot s = I_P^t \cdot s'$.

Der Beweis für diese Aussage ergibt sich leicht aus Gleichung (***) in Abschnitt 3.1 und der definierenden Eigenschaft einer P-Invariante (Übung!)

Verdeutlichen kann man sich diese Aussage wie folgt: eine P-Invariante $I_P = \begin{pmatrix} g_1 \\ ... \\ g_m \end{pmatrix}$ gibt jeder Marke abhängig von der Stelle p_i, auf der sie liegt, ein bestimmtes Gewicht $g_i \in \mathbb{Z}$; für jeden Zustand $s = \begin{pmatrix} s_1 \\ ... \\ s_m \end{pmatrix}$ bedeutet dann die ganze Zahl

$$I_P^t \cdot s = \begin{pmatrix} g_1 & \dots & g_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ \dots \\ s_m \end{pmatrix} = \underbrace{g_1 \cdot s_1}_{\substack{\text{"Gesamtgewicht"} \\ \text{aller } s_1 \text{ Marken} \\ \text{auf der Stelle } p_1}} + \dots + \underbrace{g_m \cdot s_m}_{\substack{\text{"Gesamtgewicht"} \\ \text{aller } s_m \text{ Marken} \\ \text{auf der Stelle } p_m}} \in \mathbb{Z}$$

die gewichtete Summe über alle vorhandenen Marken. Diese gewichtete Summe ändert sich beim Schalten von Transitionen nicht (daher „Invariante").

Die typische Anwendung dieser Aussage für Erreichbarkeitsuntersuchungen läuft so: Kennt man für ein Petri-Netz eine P-Invariante I_P, und will man für zwei Zustände s und s' wissen, ob s' von s aus erreichbar ist, so berechnet man einfach die beiden ganzen Zahlen $I_P^t \cdot s$ und $I_P^t \cdot s'$; sind sie nicht gleich, so kann s' <u>nicht</u> von s aus erreichbar sein! (im Falle der Gleichheit kann man die Frage allerdings nicht entscheiden, wie das folgende Beispiel zeigt!).

Beispiel (aus [PW,S.80 ff]):

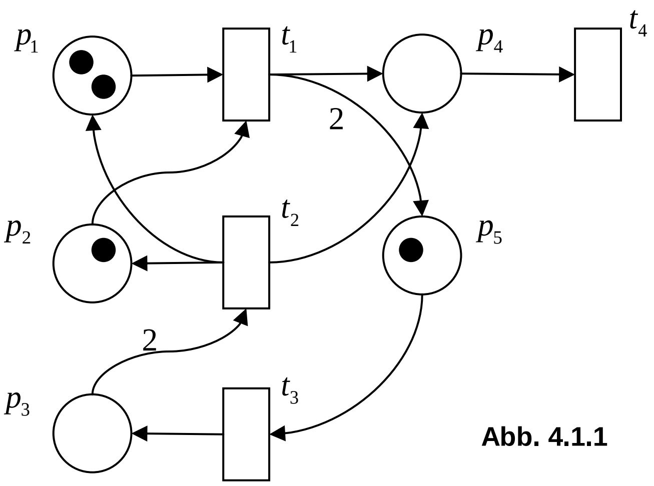


Abb. 4.1.1

Die zugehörigen Matrizen sind:

$$w^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad w^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad w^+ - w^- = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Hier ist z. B. $I_P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}^t$ eine P-Invariante. Für den Startzustand $s_0 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t$ und den Zustand $s' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ erhalten wir:

$I_P{}^t \cdot s_0 = 2 + 3 + 2 = 7$ und $I_P{}^t \cdot s' = 1 + 3 + 4 + 2 = 10$; also kann s' nicht von s_0 aus erreichbar sein.

Weiterhin ist aber auch $\overline{I}_P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t$ eine P-Invariante; hier erhalten wir für die beiden Zustände $\overline{I}_P^{\,t} \cdot s_0 = 4+1=5$ und $\overline{I}_P^{\,t} \cdot s' = 2+2+1=5$. Es ist hier also $\overline{I}_P^{\,t} \cdot s_0 = \overline{I}_P^{\,t} \cdot s'$, aber trotzdem ist s' nicht von s_0 aus erreichbar (wie wir zuvor mit Hilfe von I_P herausgefunden haben). Dies zeigt, dass man die Schlussrichtung <u>nicht</u> umkehren kann: liefert eine P-Invariante für zwei Zustände gleiche gewichtete Summen, so folgt daraus i.A. nicht die Erreichbarkeit!

4.2 T-Invarianten

Man kann auch zu den Transitionen eines Petri-Netzes sog. T-Invarianten definieren:

Ist $N = (P, T, w^-, w^+)$ ein Petri-Netz mit Transitionenmenge $T = \{t_1, ..., t_n\}$, so versteht man unter einer **T-Invariante von N** ein Element $I_T \in \mathbb{Z}^n$ mit folgender Eigenschaft:

$$w^- \cdot I_T = w^+ \cdot I_T \quad (\Leftrightarrow (w^+ - w^-) \cdot I_T = 0)$$

(d.h. I_T ist eine ganzzahlige Lösung des homogenen Gleichungssystems mit Matrix $(w^+ - w^-) \in \mathbb{Z}^{m \times n}$).

Das kann man sich wie folgt verdeutlichen: Schaltet die Transition t_j, so ruft sie die Zustands<u>änderung</u> $\Delta_j := w_j^+ - w_j^- \in \mathbb{Z}^m$ hervor. Eine T-Invariante $I_T = \begin{pmatrix} g_1 & \ldots & g_n \end{pmatrix}^t$ weist jeder Transition eine ganze Zahl $g_j \in \mathbb{Z}$ als Gewicht so zu, dass die gewichtete Zustandsänderung Null ergibt:

$$\begin{aligned} \Delta &= g_1 \cdot \underbrace{\Delta_1}_{\substack{\text{1. Spalte} \\ \text{in } w^+ - w^-}} + g_2 \cdot \underbrace{\Delta_2}_{\substack{\text{2. Spalte} \\ \text{in } w^+ - w^-}} + \ldots + g_n \cdot \underbrace{\Delta_n}_{\substack{\text{n. Spalte} \\ \text{in } w^+ - w^-}} \\ &= (w^+ - w^-) \cdot I_T = 0 \end{aligned}$$

Hat man z.B. eine Schaltsequenz $\sigma = t_{i_1} t_{i_2} ... t_{i_r}$, die von einem Zustand s wieder in den gleichen Zustand s führt (dies entspricht offensichtlich einem Kreis im Erreichbarkeitsgraphen!), so ist $P(\sigma)$ eine T-Invariante mit nicht negativen Gewichten. Dies ist leicht zu sehen, denn es gilt wegen $s[\sigma > s$ und Gleichung (***) in 3.1.:

$$s = s + (w^+ - w^-) \cdot P(\sigma)$$

Daraus folgt sofort: $0 = s - s = (w^+ - w^-) \cdot P(\sigma)$, d.h. $P(\sigma)$ ist T-Invariante. $P(\sigma)$ weist jeder Transition t_j die (nicht-negative!) Anzahl der Vorkommen in σ zu; daher sind alle Gewichte nicht-negative Zahlen.

Beispiel: Für das Petri-Netz aus Abb. 4.1.1 ist $I_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}^t$ eine T-Invariante.

Im Zusammenhang mit der Lebendigkeit gilt die folgende Aussage:

> Ist ein beschränktes(!) Petri-Netz N mit Startzustand s_0 lebendig, so existiert eine positive T-Invariante I_T von N (d.h. eine T-Invariante, bei der <u>alle</u> Gewichte <u>positive</u> ganze Zahlen sind).

Eine Anwendung dieser Aussage für Lebendigkeitsuntersuchungen läuft so: Weiß man für ein beschränktes Petri-Netz N, dass <u>keine</u> positive T-Invariante existiert, dann kann N nicht lebendig sein.

5 Weiterentwicklungen des Petri-Netzbegriffs

Die oben besprochenen Petri-Netze mit Kapazitäten reichen für viele Anwendungsfälle leider nicht aus; sog. „höhere Petri-Netze" wurden entwickelt, um noch mächtigere Ausdrucksmittel zur Verfügung zu haben, hierunter fallen:

- Gefärbte Petri-Netze, engl. „Coloured Petri-Nets" (CPNs)
- Timed Petri-Nets
- Hierarchische Petri-Netze