1.(1) 中子体系，比如 np 散射，入射能量的量级是 MeV，对于实验系，动能为 E_l 的粒子，相应的相对运动波长 $\lambda = \hbar p = 6.64/\sqrt{E_L/2}$

E_L 的单位是是 MeV，λ 的单位是 fm

即,$\lambda = \hbar p = 6.64/(\sqrt{(E_L/2)}) \to fm$

已知波矢 $k = \frac{1}{\lambda} \to fm^{-1}$

$$\frac{d\sigma}{d\omega} \to \lambda^2 \to 10^{-1} fm^2 = 1mb$$

所以 k 以 fm^{-1} 为单位，$\frac{d\sigma}{d\omega}$ 以 mb 为单位

(2) 粒子体系，入射能量是 GeV 量级，与 (1) 类似，$\lambda \to 10^{-3}$ fm

$$\frac{d\sigma}{d\omega} \to \lambda^2 \to 10^{-1} fm^2 = 1mb$$

所以 $\frac{d\sigma}{d\omega}$ 以 mb 为单位，k 以 fm^{-1} 为单位

(3) 原子体系，入射能量是 GeV 量级，同理，

$$\frac{d\sigma}{d\omega} \to 9.985 * 10^6 b$$

2. 散射过程角动量守恒，$L = pb = b\hbar/\lambda$，b 为碰撞参数，对于实验而言，入射粒子的能量是统一的，即相对运动动量数值 p 是不变的，已知 $L^2 = l(l+1)\hbar^2$, 如果核力的力程是 r, 则只有 b 小于等于 r 的时候才有合力作用, 即

$$L = pb = \frac{\hbar}{\lambda} b \leq \frac{\hbar}{\lambda} r$$

且由量子力学可知

$$L^2 = (l+1)l\hbar^2$$

所以,

$$\sqrt{(l+1)l}\hbar \leq r\frac{\hbar}{\lambda}$$

以 np 散射为例，$\lambda = \hbar/p$, 中子半径 r 大约等于 5fm，入射能量大约为 10 eV 至 100 MeV, 所以入射能量为 10Mev 时，$\frac{r}{\lambda} \leq \sqrt{2}$, 只有 l=0 的 S 分波被散射。

从物理上理解,

$$\frac{(l+1)l\hbar^2}{2\mu r^2}$$

可以看作离心势垒，阻止入射粒子与靶相互作用，因此在入射能量不变且角动量守恒的情况下，小 b 更容易与靶发生散射，因此也对应着更小的 l，即只有低级分波会发生散射。

3. 已知

$$\frac{d\sigma}{d\omega} = |f(\theta)^2| = \frac{1}{k^2} e^{2\cos\theta - 2}$$

所以

$$|f(\theta)| = \frac{1}{k} e^{\cos\theta - 1}$$

4. 由光学定理可知

$$\sigma_{tot} = \frac{4\pi}{k} Imf(0)$$

设，

$$f_E(\theta) = \frac{1}{k} e^{\cos\theta - 1} e^{i\alpha} = \frac{1}{k} e^{\cos\theta - 1} (\cos\theta + i\sin\theta)$$

已知

$$Imf(0) = \frac{1}{k^2}$$

所以 $\sin(\theta) = 1$，因此

$$\theta = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$$

由于 $\cos\theta$ 的存在，实部此时等于 0，所以得到，

$$f(0) = i\frac{1}{k}$$

5. 已知 $f_E(\theta)$ 有一常相位，设其形式为，

$$f_E(\theta) = |f(\theta)| = \frac{1}{k} e^{\cos\theta - 1} e^{i\alpha} = \frac{1}{k} e^{\cos\theta - 1} ((\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

所以

$$f_E(0) = \frac{1}{k} e^{i\alpha} = \frac{1}{k} (\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

已知 $Imf_E(0) = 1/k$, 所以对应的虚部要求 $\sin\alpha = 1$, 因此 $\cos\alpha = 0$, 所以 $f_E(\theta)$ 的实部为 0，因此

$$f_E(\theta) = i\frac{1}{k} e^{\cos\theta - 1}$$

6. 这里的 $\sigma_{sc}, \sigma r$ 分别对应弹性散射截面和反应界面，总弹性散射截面可以通过计算

$$\sigma_{sc} = \int |f(\theta)|^2 d\Omega = \frac{pi}{k^2}(1 - e^{-4})$$

得到的结果与总截面 $\sigma_{tot} = 4\pi/k^2$ 不相等，还有反应截面的存在，

$$\sigma_{tot} = \sigma_{sc} + \sigma_r$$

，其中 σ_r 为反应截面，指弹性散射以外的各种截面之和，因此也叫去弹性散射截面，而且 σ_r 也可以用分波法展开进行分波分析。

7. 已知

$$f(\theta)=\sum_{l=0}(2l+1)\frac{e^{2i\delta_l}-1}{2ik}P_l(\cos\theta)$$

$$\sigma_{sc}^{el}=\frac{\pi}{k^2}\sum_{l=0}(2l+1)|\eta_l-1|^2$$

其中

$$f_l(k)=\frac{e^{2i\delta_l}-1}{2ik}$$

$$\eta_l=e^{2i\delta_l}$$

反应截面

$$\sigma_r=\frac{\pi}{k^2}\sum(2l+1)|1-\eta_l^2|$$

要求

$$|\eta_l^2|\leq 1$$

否则 σ_r 会小于零，只有当 σ_r 是复数时，才能保证这一点，比如 $\delta_r=i\beta$,$\beta>0$

$$\eta_l=e^{2\beta}$$

$$|\eta_l|^2\leq 1$$

8.

$$f_E(\theta)=i\frac{1}{k}e^{\cos\theta-1}$$

对 $f_E(\theta)$ 进行勒让德展开, 将 $\cos\theta$ 写作 x，

$$f_E(\theta)=\sum_l a_l P_l(x)$$

$$\int f_E(\theta)P_{l'}dx=\sum_l\int a_l P_l P_{l'}$$

其中

$$\frac{i}{k}\int e^{x-1}P_l(x)dx=a_l\frac{2}{2l+1}$$

对 e^{x-1} 在 $x=0$ 处泰勒展开，

$$e^{x-1}=\frac{1}{e}\sum\frac{x^n}{n!}$$

代入积分

$$\frac{i}{k}\int e^{x-1}P_l(x)dx=\frac{i}{ke}\sum\frac{1}{n!}\int x^nP_l(x)dx$$

与上节积分形式相同，RHS 结果为

$$\sum_{n=0}\frac{1}{en!}\frac{(l+2m)!}{2^l(2m)!}\frac{\Gamma(m+1/2)}{\Gamma(l+m+3/2)}$$

其中 $m=2n+l$

$$\frac{i}{ke}\sum_{n=0}\frac{1}{n!}\frac{(l+2m)!}{2^l(2m)!}\frac{\Gamma(m+1/2)}{\Gamma(l+m+3/2)}=a_l\frac{2}{2l+1}$$

所以

$$a_l=i\frac{2l+1}{2ek}\sum_{n=0}\frac{1}{n!}\frac{(l+2m)!}{2^l(2m)!}\frac{\Gamma(m+1/2)}{\Gamma(l+m+3/2)}$$

$$f_E(\theta)=i\sum_l\frac{2l+1}{2ek}\sum_{n=0}\frac{1}{n!}\frac{(l+2m)!}{2^l(2m)!}\frac{\Gamma(m+1/2)}{\Gamma(l+m+3/2)}P_l=\sum_l(2l+1)\frac{e^{2i\delta_l}-1}{2ik}P_l$$

$$\frac{e^{2i\delta_l}-1}{2ik}=i\sum_l\frac{1}{2ek}\sum_{n=0}\frac{1}{n!}\frac{(l+2m)!}{2^l(2m)!}\frac{\Gamma(m+1/2)}{\Gamma(l+m+3/2)}$$

所以 $l=0$ 时，

$$\frac{e^{2i\delta_0}-1}{2ik}=i\frac{1}{2ek}\sum_{n=0}\frac{1}{n!}\frac{\Gamma(2n+1/2)}{\Gamma(2n+3/2)}$$

$$\Gamma(2n+1/2)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n}}(4n-1)!!$$

$$\Gamma(2n+3/2)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}}(4n+1)!!$$

移相后取对数即可得到 $l=0$ 时的 δ_0

$$\delta_0=\frac{1}{2i}\ln{(1-\frac{1}{e}\sum_{n=0}\frac{2}{n!(4n+1)})}$$