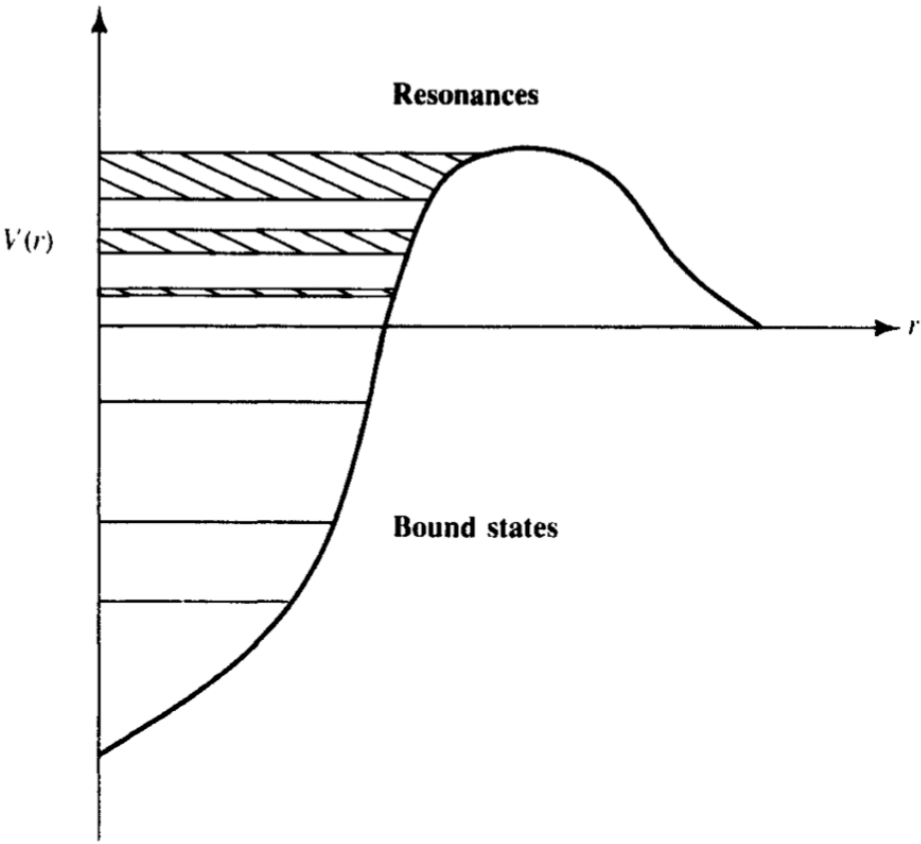


# 共振现象

## 一.背景

理解共振现象是理解稳定核与奇异核的核现象的基本条件。当我们接近质子或者中子滴线时，即使是奇异核的低能激发态也是连续的，即与粒子衰变无关，此时称为共振。最终在滴线外，甚至连基态本身也是共振态。显然，共振对于奇异核都有着特别重要的作用。

由于存在库仑势垒我们可以将其势函数看作这样的形状，在这种条件下，系统存在以下的几种相对状态。在这里我们观察这张图，可以发现，在 $E$ 为负数的时候存在单能级的束缚态，而 $E$ 为正数的时候存在一定展宽连续态的能级，我们称这种状态为共振态。



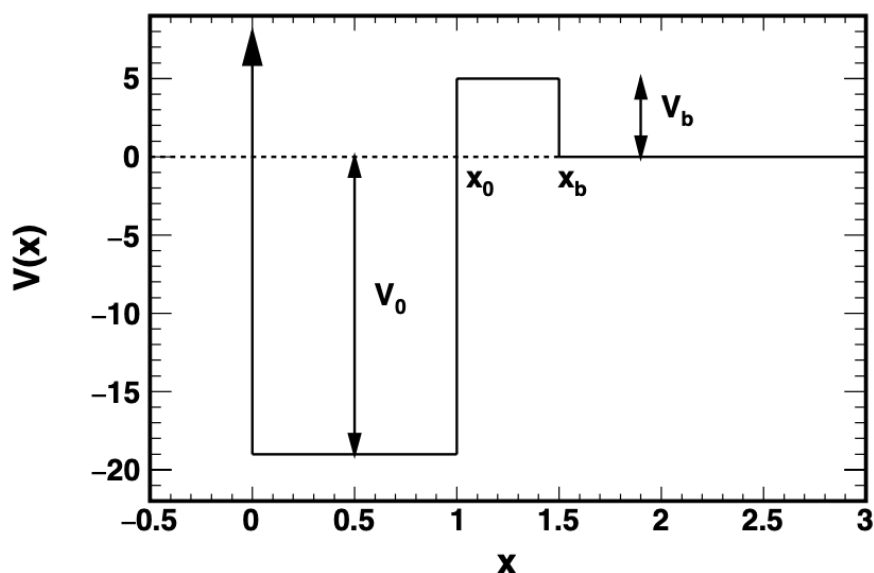
## 二.基础共振模型

### 2.1 一维单粒子模型

我们可以将上面的那个势看作是简化成以下模型，将其抽象成最简单的平均场模型：

- (1) 势阱深度为 $V_0$ ；
- (2) 将势阱与自由的连续态分开的势垒，高度为 $V_b$ ；
- (3) 连续态，即在 $x \rightarrow \infty$ 时，势为0。

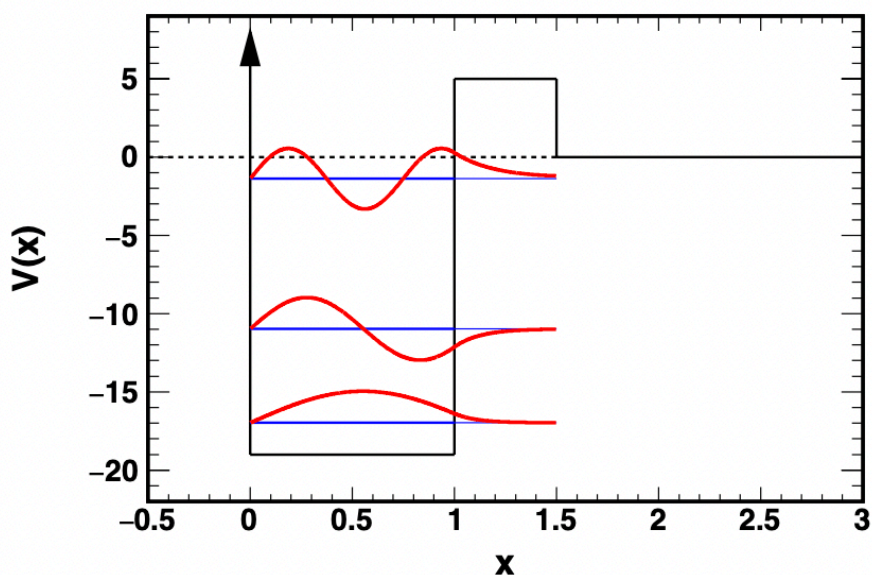
即如下图所示。我们从最简单的状态。



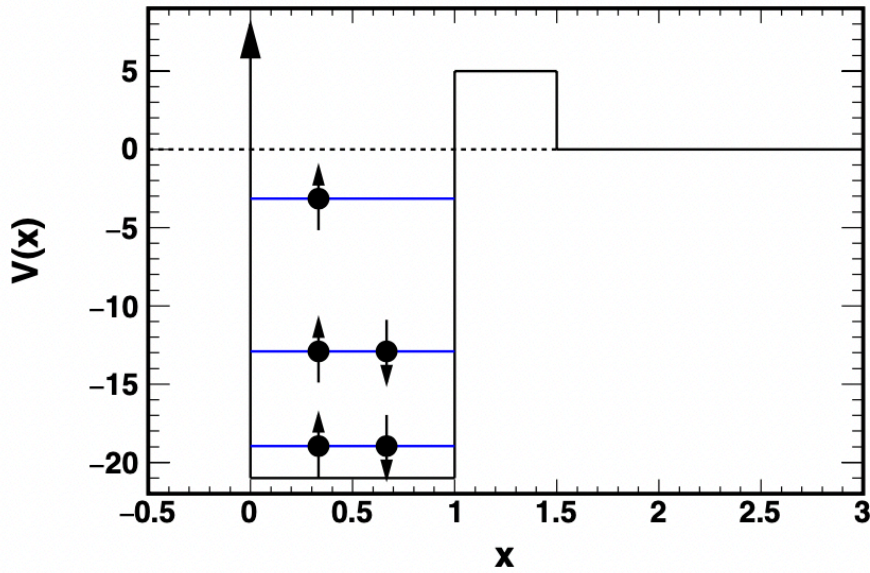
在  $E < 0$  时，通过解薛定谔方程，与边界条件，可以得到解

$$\psi = \begin{cases} A \sin(k_1 x) & \text{for } x < x_0 \\ Ce^{k_2 x} + De^{-k_2 x} & \text{for } x_0 < x < x_b \\ Fe^{-k_3 x} & \text{for } x > x_b \end{cases}$$

其中  $k_1 = \sqrt{\frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2}}$ ,  $k_2 = \sqrt{\frac{2m(V_b-E)}{\hbar^2}}$ ,  $k_3 = \sqrt{\frac{2m(-E)}{\hbar^2}}$ , 通过在  $x_0$  与  $x_b$  处的连续性条件，我们能够得到这里 C, D, F 关于 A 的表达式，其波函数类似于下图所示



对于核子（质子）这样的费米子来说，每个能级可填充填充2个自旋相反核子（质子）。对于5个核子的一维原子核可以作以下填充方式。



如果我们减小势井的深度，可以想象的是，由于势垒 $V_b$ 的存在，最终最小束缚能将会大于0，我们将这种状态称之为共振态，然后我们考虑当 $E_b > E > 0$ 的情况，上面的通解形式可以写成

$$\psi = \begin{cases} A \sin(k_1 x) & \text{for } x < x_0 \\ Ce^{k_2 x} + De^{-k_2 x} & \text{for } x_0 < x < x_b \\ Fe^{ik_3 x} + Ge^{-ik_3 x} & \text{for } x > x_b \end{cases}$$

其中 $k_1 = \sqrt{\frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2}}$ ,  $k_2 = \sqrt{\frac{2m(V_b-E)}{\hbar^2}}$ ,  $k_3 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ 在 $x > x_b$ 外我们添加了两项，这是由于这时存在隧穿效应，当入射波打入势垒中，一部分进入到势井内部，但在内部不断的来回的反射，每次到达势垒位置都会发生隧穿，也就是一部分的粒子透射出去成为出射波。因此每当粒子到达势垒位置内部的概率密度就会按照恒定的比例减少，也就是说，概率密度随时间呈指数下降。如果该系统在共振态具有寿命 $\tau$ ，那么从不确定关系我们可以知道，该状态并不需要单一能级，而是在范围 $\Gamma \approx \hbar/\tau$ 内的任意能量均可以满足共振态条件。这样我们设

$$E = E_r - i\Gamma/2$$

将其带入到含时薛定谔方程中我们可以得到

$$|\Psi(x, t)|^2 = \exp\left(\frac{-\Gamma t}{\hbar}\right) |\psi(x)|^2$$

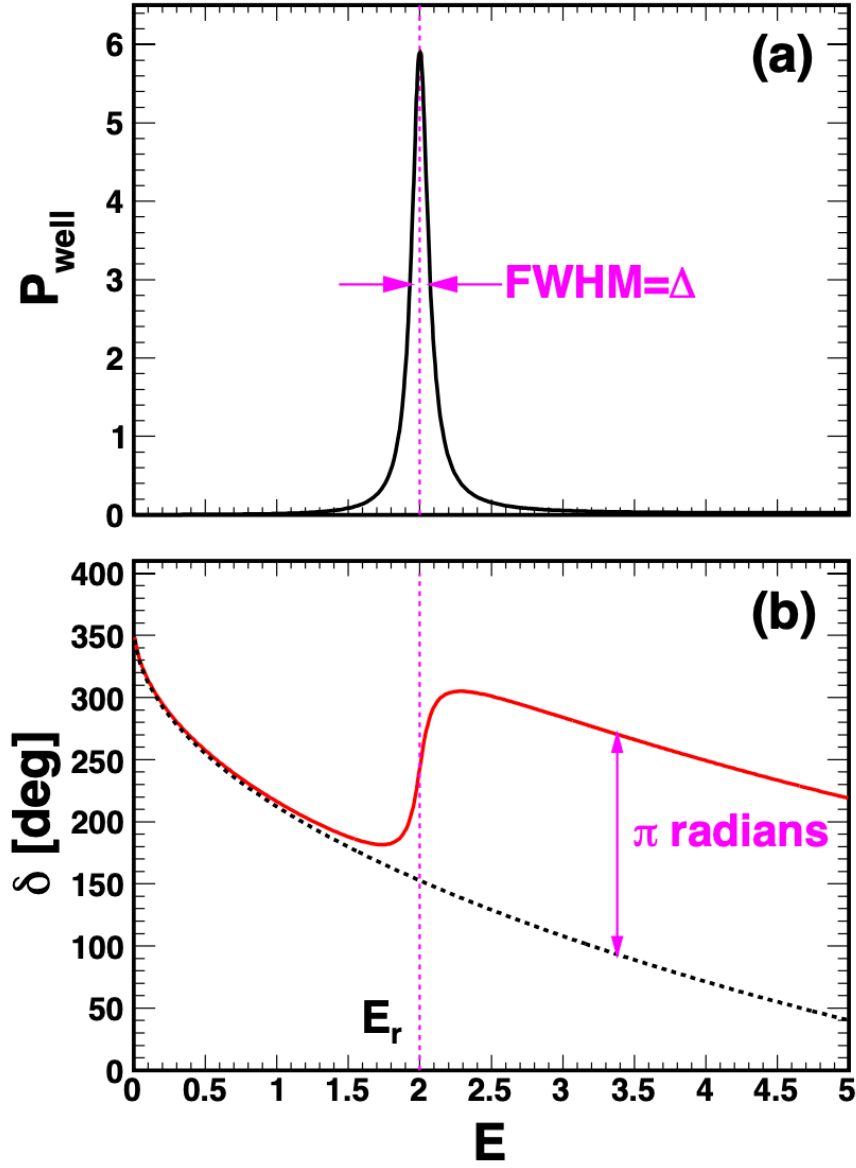
在上面通式的下，我们给出在势垒内部的概率

$$P_{well} = \int_0^{x_0} |\psi(x)|^2 dx$$

而对于势垒外面，即 $x > x_b$ 时我们可以将形式改写成以下形式

$$\begin{aligned} \psi(x) &= F \sin(k_3 x) + G \cos(k_3 x) \\ &= \sqrt{F^2 + G^2} \sin(k_3 x + \delta) \\ &= \frac{\sqrt{F^2 + G^2}}{2i} \exp(-\delta) [\exp(ik_3 x + 2\delta) - \exp(-ik_3 x)] \end{aligned}$$

其中 $\tan \delta = G/F$ ，我们不难发现入射波与出射波的相移为 $2\delta$ 。相移与 $P_{well}$ 变化图像可以由下图获得



从另外一个角度来看待这个问题，由于相移在  $E_r$  附近变化的很快，相移必须在这个  $\Gamma$  的能量范围内迅速增加  $\pi$ ，因此，在  $E_r$  前后相移分别增加了  $\pi/2$ ，那么我们可以假设相移有着以下的这种形式，

$$\delta_{\ell_0}(E) = \bar{\delta}_{\ell_0}(E) + \delta_{\ell_0}^{(R)}(E)$$

$$\tan \delta_{\ell_0}^{(R)}(E) = -\frac{1}{2} \frac{\Gamma}{E - E_R}$$

即将相移考虑成两部分，一部分为共振相移，另一部分为非共振相移。而非共振相移相对于共振相移要远小于  $\pi/2$ ，所以这样我们忽略非共振相移，则  $\sin^2 \delta_{\ell_0}(E)$  可以表示为，

$$\sin^2 \delta_{\ell_0}(E) = \frac{\tan^2 \delta_{\ell_0}(E)}{1 + \tan^2 \delta_{\ell_0}(E)} = \frac{\Gamma^2/4}{(E - E_R)^2 + \Gamma^2/4},$$

则截面可以近似表达为

$$\sigma_{\text{scat}} \simeq \frac{\pi (2\ell_0 + 1)}{k^2} \frac{\Gamma^2}{(E - E_R)^2 + \Gamma^2/4}.$$

上面这个形式被称为Breit-Wigner形式。

我们从这个简单的一维单粒子模型获得了共振现象的3个重要的特征。

- (1) 若原子核处于共振态，它将以指数形式衰减，寿命为 $\Gamma/\hbar$
- (2) 共振也可以在散射实验中探测，其中散射截面（与 $P_{well}$ 相关）在共振能量处达到峰值，半高宽为 $\Gamma$
- (3) 散射波函数外部区域的非共振相移相对于变化较慢的，共振相移在 $E_r$ 处发生 $\pi$ 的跃变。

这三个特征非常普遍，同样适用于我们简单的一维单粒子模型无法充分描述的更复杂的共振。

## 2.2 三维单粒子模型

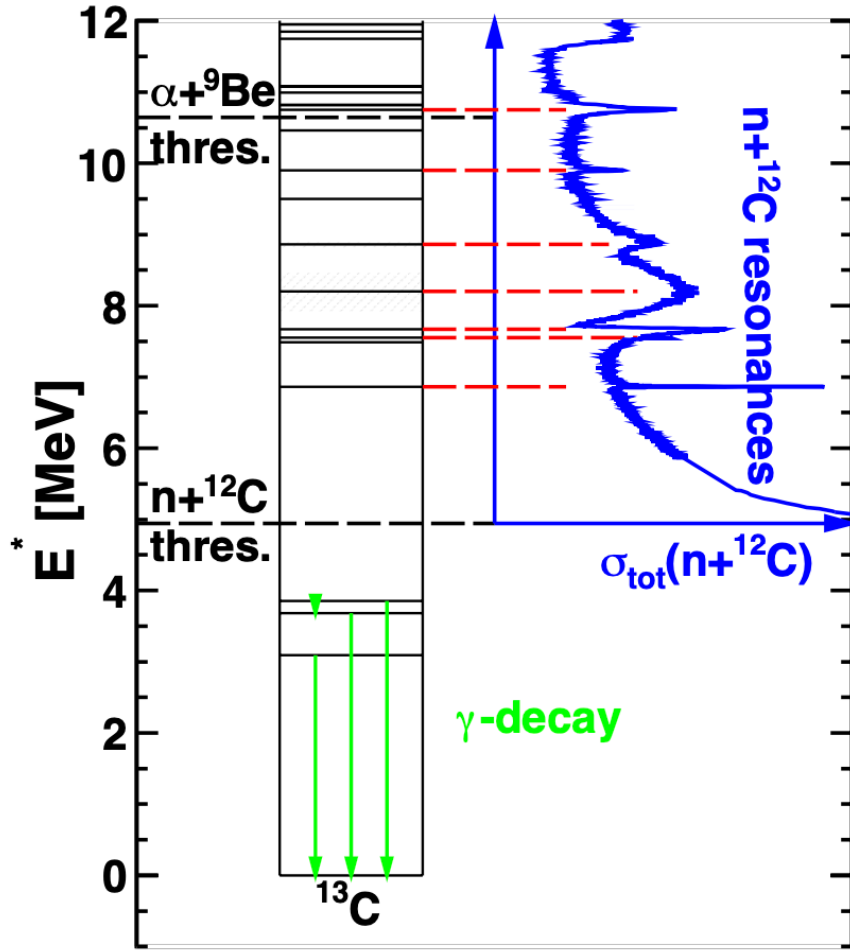
我们知道在三维下散射波函数在 $r \rightarrow \infty$ 时，可以写成以下形式

$$\psi \rightarrow \exp(ik_{\infty}z) + \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{2\ell+1}{2ik_{\infty}r} (S_{\ell,j} - 1) \exp(ik_{\infty}r) P_{\ell}(\cos\theta)$$

其中 $S_{\ell,j} = \exp(2i\delta_{\ell,j})$ 。请注意，在共振时，粒子进入势垒内的可能性较大，如第2.1节所示。当这些粒子最终穿过势垒返回时，它们会向各个方向发射。因此，实验上通常使用这两种方法来观测共振现象：

- (1) 观察远离粒子束轴特定角度的散射。检测的出射粒子必须与入射粒子的能量相同（弹性散射），以此来区别其他过程
- (2) 观察粒子束轴线方向上的粒子损失，该吸收强度与总截面有关。但总截面仅对中子散射有用。由于库仑势的长程性质，这个总截面对于带电粒子散射来说是无限的，所以它只对中子散射有用。

我们以一个真实核为例子，以非奇异核的 $^{13}\text{C}$ 为例子，他的能级结构如图所示，



其中最低的三个能级是稳定的束缚态，并以 $\gamma$ 衰变的形式衰变到基态。 $^{13}\text{C}$ 的中子分离能为4.94MeV，这也是 $n + ^{12}\text{C}$ 破裂反应道的阈值。高于这个能量的所有的能级都是共振态的。 $^{13}\text{C}$ 的 $\alpha$ 粒子分离能为10.64MeV，这是 $\alpha + ^9\text{Be}$ 破裂反应道的阈值。所以当能量介于两者之间，复合核的衰变模式只有中子发射这一种。而在10.64MeV与17.53MeV之间，中子发射与 $\alpha$ 衰变均是可能的衰变模式（质子的分离能为17.53MeV）。我们可以看到在总截面上有很多峰，基本上与 $^{13}\text{C}$ 的激发态一一对应。但并非所有高于中子发射阈值的激发态都有相关的共振态。这些峰并没有很强的单粒子结构。

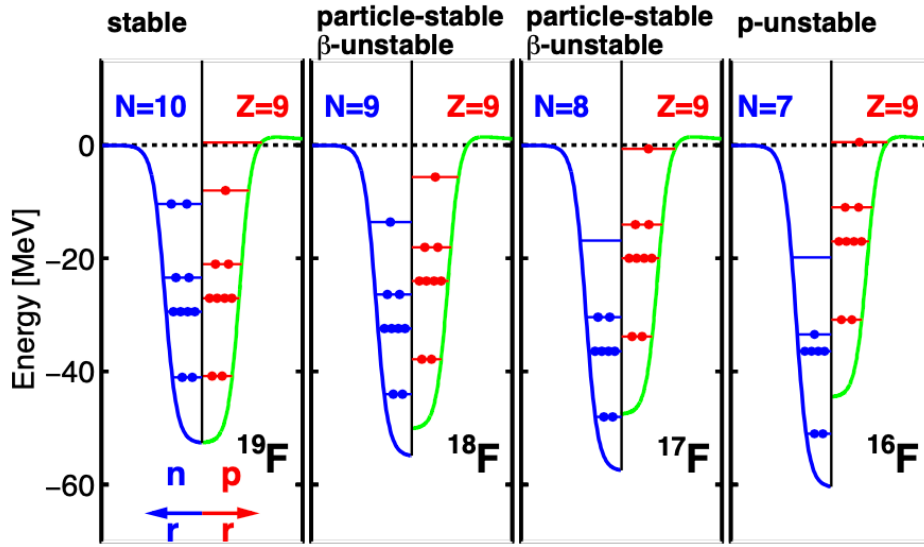
## 2.3 平均场势的对称依赖

之前的我们并没有对核子的种类进行区分，我们假设一个核子收到的相互作用是其他核子的平均势产生的，但若假设质子-中子相互作用比质子-质子相互作用或中子-中子相互作用要强，那么即使我们选取相同的核子，但改变中子与质子的比例，两种核子收到的相互作用也会改变。而他们的势井深度有着以下的关系：

$$\begin{aligned} V_0 &= V' + v_{\text{sym}} \frac{N - Z}{A} \text{ protons} \\ &= V' - v_{\text{sym}} \frac{N - Z}{A} \text{ neutrons.} \end{aligned}$$

其中 $V'$ 与 $v_{\text{sym}}$ 为常数，对于丰中子系统，当对称参数 $\frac{N-Z}{A}$ 较大时，质子被更多的中子包围，因此平均场的深度更深；反之亦然。在用于拟合与预测原子核结合能的半经典质量公式中，平均场大约贡献了50%的对称能

$$E_{\text{binding}}(Z, A) = a_{\text{vol}} A - a_{\text{sur}} A^{2/3} - a_{\text{Coul}} \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{\text{asy}} \frac{(N - Z)^2}{A}.$$



$^{19}\text{F}$ 是氟元素唯一的稳定的同位素，由于对称依赖，平均场的这种变化使得中子与质子的分离能有着显著的差别，若差别足够大，则系统有着向更稳定的方向演化的趋势，即对于氟18、17、16来说就是 $\beta$ 衰变质子发射。同样在氟16中我们可以看到它的一个质子处于共振态中（p不稳定性）。

### 三.超越单粒子模型

在单粒子的模型中，原子核共振态现象是通过将一个或者多个核子置于单粒子共振态产生的。为了产生单粒子共振，我们需要一个势垒来长时间约束里面的核子。所以在这个模型中，当 $l = 0$ 时的中子是不可能产生共振的（没有库仑势垒与离心势垒）。因此使用中子轰击自旋为0的靶核时，我们不应该看到任何 $J = 1/2^+$ 共振态，而实际的实验中，这种共振态是相当常见的。

此外，即使存在势垒，在单粒子模型中是不可能在高激发能下产生共振的。然而实际上，共振在较高的能级上依然是存在的。这显然也是单粒子模型中的一个失败。

而这是由于在真实原子核的内部可能存在多个单粒子模型，这些单粒子系统混合构成了真实的核态，如果对于一个核态来说，一个单粒子或者是几个单粒子系统占主导的话，那么这个核态就会表现出较强的单粒子特性。考虑核子散射过程，我们可以将其看作是当核子与靶核开始接触时，这个初始的单粒子系统，有可能继续耦合成为更加复杂的构型，在这些单粒子系统的内部核子收到势垒的约束。

同时这种混合构形也允许共振有着多种的衰减路径。比如共振态C耦合到开放反应道 $a + b$ ,  $d + e$ 我们可以观察到散射相关截面

$$\begin{aligned}
 a + b \rightarrow C \rightarrow a + b, \quad \sigma &= G \frac{\Gamma_{a+b}^2}{(E - E_r^{a+b})^2 + (\Gamma_{tot}/2)^2} \\
 a + b \rightarrow C \rightarrow d + e, \quad \sigma &= G \frac{\Gamma_{a+b}\Gamma_{d+e}}{(E - E_r^{a+b})^2 + (\Gamma_{tot}/2)^2} \\
 d + e \rightarrow C \rightarrow a + b, \quad \sigma &= G \frac{\Gamma_{d+e}\Gamma_{a+b}}{(E - E_r^{d+e})^2 + (\Gamma_{tot}/2)^2} \\
 d + e \rightarrow C \rightarrow d + e, \quad \sigma &= G \frac{\Gamma_{d+e}^2}{(E - E_r^{d+e})^2 + (\Gamma_{tot}/2)^2}
 \end{aligned}$$

(具体过程在Lectures on Quantum Mechanics by Steven Weinberg 8.5节) 其中  
 $G = \pi/k_{\infty}^2 (2J_C + 1) / (2J_1 + 1) / (2J_2 + 1)$ ,  $J_C$ 为共振态C的自旋, 每个衰减通道都有一个衰变的宽度  
 $\Gamma_{d+e}, \Gamma_{a+b}, \Gamma_{tot} = \Gamma_{a+b} + \Gamma_{d+e}$ .

在R矩阵中, 对于反应道 $\lambda$ 的衰变宽度可以表示为

$$\Gamma_{\lambda} = 2k_{\infty} R P_{\ell} \Theta_{\lambda}^2 \gamma_{\lambda}^2$$

R是反应道半径,  $P_{\ell}$ 是与角动量有关的透射率,  $\gamma_{\lambda}^2 = 3\hbar^2 / 2MR^2$ 为简化的单粒子宽度,  $\Theta_{\lambda}^2$ 是分数缩减宽度(?) )。对于纯单粒子模型,  $\Theta_{\lambda}^2 = 1$ 。对于混合态来说 $\Theta_{\lambda}^2 < 1$ 。

## 四.实验技术与测量奇异核共振

## 五.三体共振

在上面我们考虑都是两体问题中的共振现象(出射通道与入射通道均为两体)。然而, 在共振现象中其实反应道中可以存在更多的粒子。在实验中, 目前没办法做到三粒子散射, 我们需要其他的反应机制来创造这些共振态, 然后观测多粒子的出射反应道。

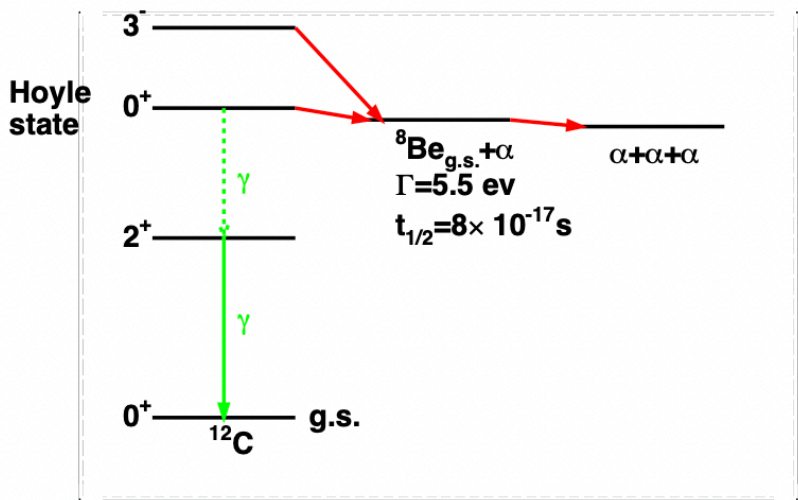
三体共振通常分为以下两种:

- (1) ‘快速’或‘真实’的三体衰变, 所有的碎片均在同一共振态衰变中产生
- (2) 连续, 首先衰变成两个碎片, 其中一个碎片处于共振态发生再次衰变

这里只要中间的碎片共振态寿命较长就可以认为两个过程之间不存在相互作用。

### 5.1 连续衰变

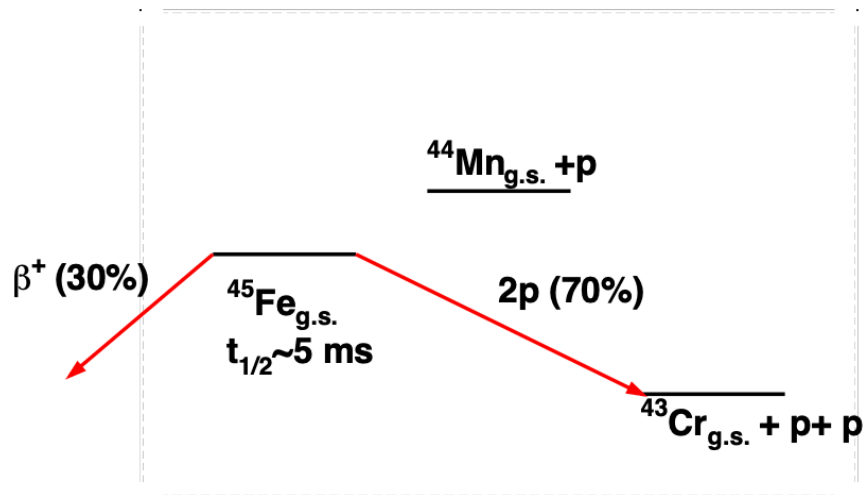
连续三体衰变, 如 $^{12}\text{C}$ 首先衰变成 $^8\text{Be}_{g.s.} + \alpha$ 再衰变成 $3\alpha$ 。在中间的半衰期中第一个发射的 $\alpha$ 粒子已经离开了370000fm, 而 $^{12}\text{C}$ 的半径仅为3fm。所以两步之间可以看作是没有相互作用的。



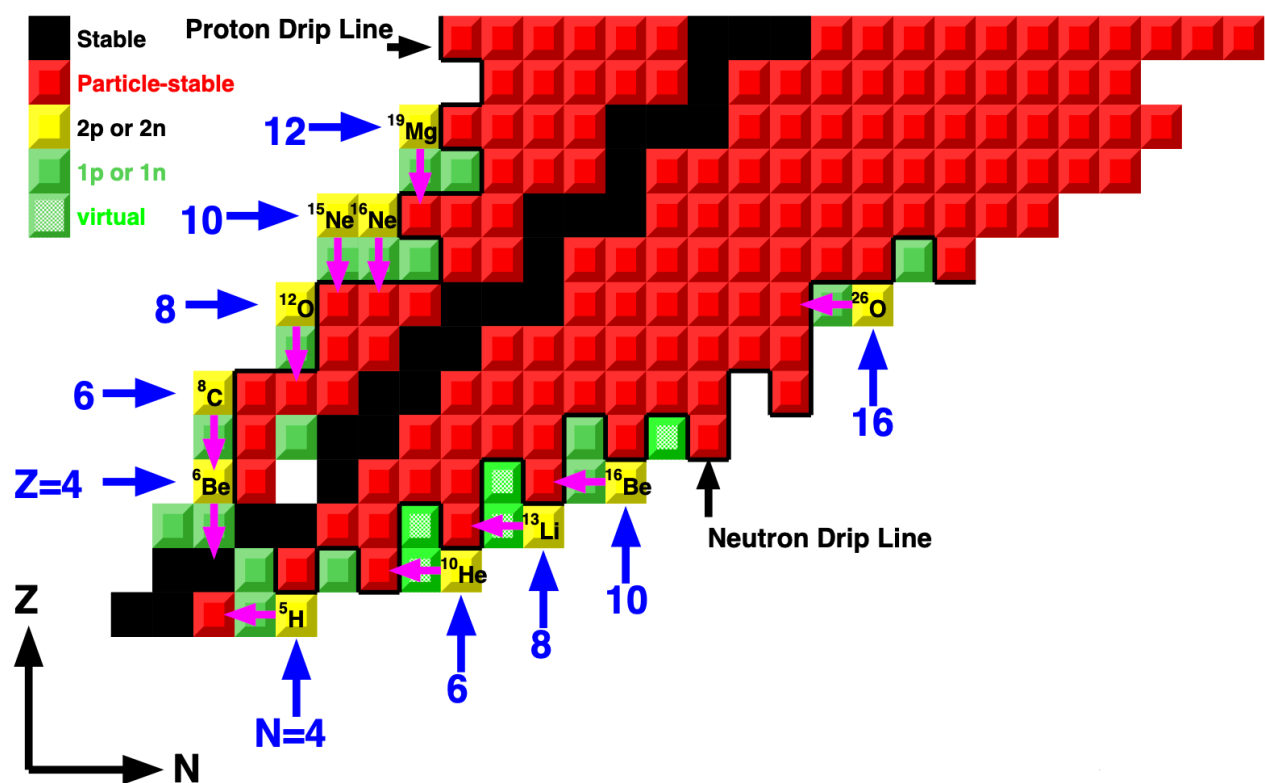


## 5.2 双核子衰变

Goldansky于1960年首次考虑从奇异核基态迅速发射两个核子的可能。基态的不可能变成 $^{44}\text{Mn}_{g.s.} + p$ ，所以仅有这一种可能。在基态两个质子发射体的出现是配对相互作用的结果，使得偶数Z核相对于奇数Z核更受束缚。因此，如图19所示的情况，其中一个质子通道不可访问，而两个质子可用，仅适用于质子滴线以外的偶Z核基态。除 $^{45}\text{Fe}$ 外，还发现 $^{48}\text{Ni}$ 的基态具有这种性质。（还有一种democratic type）



## 5.3 滴线外单核子和双核子衰变的研究



在图中表示了在滴线外的核衰变的方式。