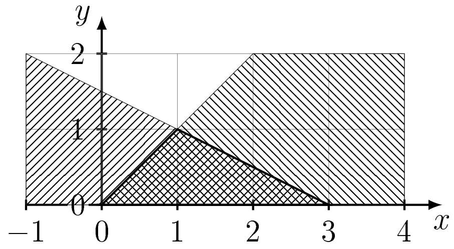
Домашнее задание по теории вероятностей от 15.11.2016

Алексей Хачиянц

Задача 1. *Пусть* (ξ, η) *— случайная точка из области* $D \subseteq \mathbb{R}^2$. *Найдите* $\mathsf{E}[\xi]$ *и* $\mathsf{E}[\eta]$, *если*

1. $D = \{(x, y) \mid y \geqslant 0, x \geqslant y, x + 2y \leqslant 3\}$ *— треугольник,*
2. $D = \{(x, y) \mid y \geqslant 0, (x-1)^2 + y^2 \leqslant 1\}$ *— полукруг.*

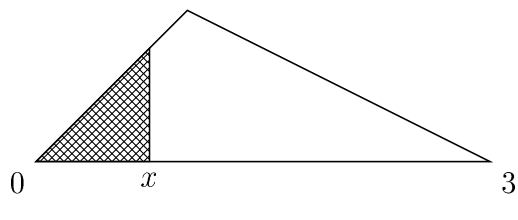
Решение. Начнём с треугольника. Изобразим допустимую область следующим образом: заштрихуем разными способами множества решений неравенств $y \leqslant x$ и $y \leqslant \frac{3}{2} - \frac{x}{2}$. Фигура с двойной штриховкой и будет задавать нужный треугольник.



Посчитаем плотности распределения для обеих сулчайные величин:

1. Для начала заметим, что ξ может принимать значения только от 0 до 3. Тогда, если $x < 0$, то $F_\xi(x) = 0$, а если $x > 3$, то $F_\xi(x) = 1$. Далее будем рассматривать $x \in [0, 3]$.

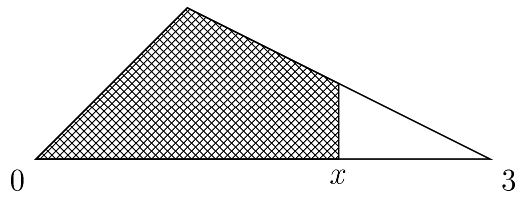
   В данном случае будет удобней разбить подсчёт функции распределения на два случая: $x \in [0, 1]$ и $x \in [1, 3]$. Изобразим, какие точки подойдут для первого случая:

   Тогда понятно, что

   $$\mathsf{P}(\xi \leqslant x) = \frac{\frac{x^2}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{x^2}{3}.$$

   Теперь изобразим нужную область для второго случая:



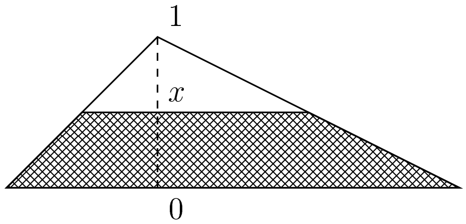
Заметим, что незаштрихованный треугольник подобен большому прямоугольному треугольнику с коэффициентом подобия $(3-x)/2$. В таком случае

$$\mathsf{P}(\xi \leqslant x) = \frac{\frac{3}{2} - 1 \cdot \left(\frac{3-x}{2}\right)^2}{\frac{3}{2}} = 1 - \frac{2}{3}\left(\frac{3-x}{2}\right)^2 = x - \frac{x^2}{6} - \frac{1}{2}.$$

Отсюда получаем, что

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0,3] \\ \frac{2}{3}x, & x \in [0,1] \\ 1 - \frac{1}{3}x, & x \in [1,3] \end{cases}$$

2. Теперь перейдём к вертикальной координате. Для начала заметим, что η принимает значения от 0 до 1. Тогда, если $x < 0$, то $F_\eta(x) = 0$, а если $x > 1$, то $F_\eta(x) = 1$. Теперь рассмотрим $x \in [0,1]$. Изобразим графически подходящую область:



Заметим, что незаштрихованный треугольник подобен большому треугольнику с коэффициетом подобия $1-x$. Отсюда получаем, что

$$\mathsf{P}(\eta \leqslant x) = \frac{\frac{3}{2} - \frac{3}{2}(1-x)^2}{\frac{3}{2}} = 2x - x^2.$$

Тогда

$$p_\eta(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0,1] \\ 2 - 2x, & x \in [0,1] \end{cases}$$

Теперь можно приступать к подсчёту матожиданий:

$$\mathsf{E}[\xi] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x p_\xi(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \frac{2}{3}x^2\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^3 x\left(1 - \frac{x}{3}\right)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{9} + \int\limits_1^3 x\,\mathrm{d}x - \frac{1}{3}\int\limits_1^3 x^2\,\mathrm{d}x$$

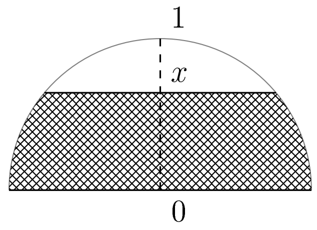
$$= \frac{2}{9} + \left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{27}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9} + 4 - 3 + \frac{1}{9} = \frac{4}{3}.$$

$$\mathsf{E}[\eta] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x p_\eta(x)\,\mathrm{d}x = 2\int\limits_0^1 x(1-x)\,\mathrm{d}x = 2\int\limits_0^1 x\,\mathrm{d}x - 2\int\limits_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Теперь приступим к случаю полукруга. Для начала покажем, что $\mathsf{E}[\xi] = 1$. Для этого заметим, что ξ и $2-\xi$ имеют одинаковое распределение. Тогда их матожидания совпадают. Следовательно, $\mathsf{E}[\xi] = 2 - \mathsf{E}[\xi]$ и $\mathsf{E}[\xi] = 1$.

Для вертикальной координаты же будем считать матожидание по-честному. Найдём её функцию распределения и плотность.

Опять же, заметим, что η принимает значения от 0 до 1. Тогда, если $x < 0$, то $\mathsf{P}(\eta \leqslant x) = 0$, а если $x > 1$, то $\mathsf{P}(\xi \leqslant x) = 1$. Далее будем рассмтаривать $x \in [0,1]$. Изобразим допустимую область:



Тогда $\mathsf{P}(\eta \leqslant x)$ равна отношению площади заштрихованной фигуры к площади всего полукруга. Тогда выразим левую и правую границы для заштриованной фигуры:

$$(x-1)^2 + y^2 = 1 \iff x = 1 \pm \sqrt{1-y^2} \implies \begin{cases} f_1(x) = 1 + \sqrt{1-y^2} \\ f_2(x) = 1 - \sqrt{1-y^2} \end{cases}$$

Тогда по теореме Фубини площадь заштрихованной фигуры равна

$$\int\limits_0^x \int\limits_{f_1(t)}^{f_2(t)} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}t = 2\int\limits_0^x \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Отсюда получаем, что

$$\mathsf{P}(\eta \leqslant x) = \int\limits_0^x \frac{4}{\pi}\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t \implies p_\eta(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0,1] \\ \frac{4}{\pi}\sqrt{1-x^2}, & x \in [0,1] \end{cases}$$

Теперь посчитаем матожидание:

$$\mathsf{E}[\eta] = \frac{4}{\pi}\int\limits_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \left\{ \begin{matrix} t = x^2 \\ \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x \end{matrix} \right\} = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^1 \sqrt{1-t}\,\mathrm{d}t$$

$$= \left\{ \begin{matrix} u = 1-t \\ \mathrm{d}t = -\mathrm{d}u \end{matrix} \right\} = -\frac{2}{\pi}\int\limits_1^0 \sqrt{u}\,\mathrm{d}u = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^1 \sqrt{u}\,\mathrm{d}u = \frac{2}{\pi}\frac{u^{3/2}}{3/2}\bigg|_0^1 = \frac{4}{3\pi}. \qquad \square$$

Задача 2. *Студент Иванов собирается поехать на экзамен на одной из двух электричек. Электрички начинают ходить в момент времени 0, но на станцию, где собирается их ждать Иванов, приходят в независимые случайные времена ξ_1, ξ_2. Известно, что$\xi_1 \sim \mathrm{Exp}(2)$, а случайная величина ξ_2 имеет плотность $f(x) = xe^{-x}I\{x > 0\}$. Ивановприходит на станцию в фиксированный момент времени $t > 0$. Пусть η — время его опоздания, разница между t и временем приезда последней электрички (считаем, что $\eta = 0$, если хотя бы одна электричка приедет после момента времени t). Вычислите $\mathsf{E}[\eta]$.*

Решение. Для начала заметим следующее: случайная величина η может быть записана следующим образом:

$$\eta = \begin{cases} t - \max(\xi_1, \xi_2), & \max(\xi_1, \xi_2) \leqslant t \\ 0, & \max(\xi_1, \xi_2) > t \end{cases}$$

Попробуем посчитать её функцию распределения. Для начала заметим, что η принимает значения из $[0, t]$, так как обе величины ξ_1 и ξ_2 принимают значения из $[0, +\infty)$. Тогда, если $x < 0$, то $F_\eta(x) = 0$, а если $x > t$, то $F_\eta(x) = 1$. Далее будем считать, что $x \in [0, t]$.

Покажем, что $F_\eta(x) = \mathsf{P}(\max(\xi_1, \xi_2) \geqslant t - x)$. Действительно, если $\max(\xi_1, \xi_2) \leqslant t - x$, то $\eta = t - \max(\xi_1, \xi_2) \geqslant x$. Если же $\max(\xi_1, \xi_2) \geqslant t - x$, то есть два случая:

- $t - x \leqslant \max(\xi_1, \xi_2) \leqslant t$. Тогда $\eta = t - \max(\xi_1, \xi_2) \leqslant x$.
- $\max(\xi_1, \xi_2) > t$. Тогда $\eta = 0 \leqslant x$.

Тогда по абсолютной непрерывности распределения $\max(\xi_1, \xi_2)$ (так как обе случайные величины абсолютно непрерывны) получаем, что

$$F_\eta(x) = 1 - \mathsf{P}(\max(\xi_1, \xi_2) \leqslant t - x) = 1 - \mathsf{P}(\xi_1 \leqslant t - x)\mathsf{P}(\xi_2 \leqslant t - x) = 1 - F_{\xi_1}(t - x)F_{\xi_2}(t - x).$$

Выпишем функции распределения для ξ_1 и ξ_2 для $x \in [0, t]$:

$$F_{\xi_1}(x) = 1 - e^{-2x}$$
$$F_{\xi_2}(x) = \int\limits_0^x te^{-t}\,\mathrm{d}t = \left(-e^{-t}(t+1)\right)\Big|_0^x = 1 - e^{-x}(x+1).$$

Тогда

$$\begin{aligned} F_\eta(x) &= 1 - (1 - e^{-2(t-x)})(1 - e^{-(t-x)}(t - x + 1)) \\ &= 1 - 1 + e^{-(t-x)}(t - x + 1) + e^{-2(t-x)} - e^{-3(t-x)}(t - x + 1) \\ &= e^{-(t-x)}(t - x + 1) + e^{-2(t-x)} - e^{-3(t-x)}(t - x + 1). \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что

$$p_\eta(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0, t] \\ e^{-(t-x)}(t - x) - e^{-3(t-x)}(3t - 3x + 2) + 2e^{-2(t-x)}, & x \in (0, t) \end{cases}$$

Заметим, что данная функция распределения разрывна в нуле, и величина её разрыва равна $\mathsf{P}(\max(\xi_1, \xi_2) \geqslant t)$.

Приступим к подсчёту матожидания. Оно равно

$$\int\limits_0^t x\left(e^{-(t-x)}(t - x) - e^{-3(t-x)}(3t - 3x + 2) + 2e^{-2(t-x)}\right)\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{e^{-3t}}{18}\left(-6t + 9e^t + 18e^{2t}(t + 2) + e^{3t}(18t - 37) - 8\right). \qquad \square$$