Домашнее задание по теории вероятностей от 23.11.2016

Алексей Хачиянц

Задача 1. *Пусть случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы. Найдите плотность случайной величины ξ_1/ξ_2, если*

1. $\xi_i \sim U(0, a)$, $a > 0$, $i = 1, 2$;
2. $\xi_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_i^2)$, $i = 1, 2$;
3. $\xi_i \sim \mathrm{Exp}(\lambda_i)$, $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2$.

Решение. Вспомним следующий факт: если независимые случайные величины ξ_1, ξ_2 абсолютно непрерывны, то плотность случайной величины ξ_1/ξ_2 равна

$$p_{\xi_1/\xi_2}(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |y| p_{\xi_1}(xy) p_{\xi_2}(y)\,\mathrm{d}x.$$

1. Заметим, что случайная величина ξ_1/ξ_2 неотрицательна. Тогда, если $x < 0$, то $p_{\xi_1/\xi_2}(x) = 0$. Далее будем рассматривать только неотрицательные x.

   Вспомним, что для равномерного распеделения плотность можно записать в следующем виде:

   $$p_{\xi_1}(x) = p_{\xi_2}(x) = \frac{1}{a} I\left\{x \in [0, a]\right\}.$$

   Тогда

   $$\begin{aligned} p_{\xi_1/\xi_2}(x) &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{|y|}{a^2} I\left\{xy \in [0, a]\right\} I\left\{y \in [0, a]\right\}\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{a^2} \int\limits_{0}^{\min(a,\, a/x)} y\,\mathrm{d}y \end{aligned}$$

   Отсюда получаем, что

   $$p_{\xi_1/\xi_2}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{1}{2}, & x \in [0, 1]; \\ \frac{1}{2x^2}, & x \in [1, +\infty). \end{cases}$$

2. Вспомним, что для нормального распределения

$$p_{\xi_i}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma_i^2}\right\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
p_{\xi_1/\xi_2}(x) &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{|y|}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left\{-\frac{x^2y^2}{2\sigma_1^2} - \frac{y^2}{2\sigma_2^2}\right\} \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |y| \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}\right)\right\} \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\pi\sigma_1\sigma_2} \int\limits_{0}^{+\infty} y \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}\right)\right\} \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\pi\sigma_1\sigma_2\left(\frac{x^2}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}\right)} \int\limits_{0}^{+\infty} y\left(\frac{x^2}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}\right) \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}\right)\right\} \mathrm{d}y \\
&= \left\{t = \frac{y^2}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}\right), \mathrm{d}t = y\left(\frac{x^2}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}\right)\mathrm{d}y\right\} \\
&= \frac{1}{\pi\sigma_1\sigma_2\left(\frac{x^2}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}\right)} \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi\sigma_1\sigma_2\left(\frac{x^2}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}\right)}.
\end{aligned}$$

Преобразуем ответ:

$$\frac{1}{\pi\sigma_1\sigma_2\left(\frac{x^2}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}\right)} = \frac{1}{\pi\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)\left(1 + \frac{x^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\right)} = \left\{\gamma = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right\} = \frac{1}{\pi\gamma\left(1 + \left(\frac{x}{\gamma}\right)^2\right)}.$$

Это есть ни что иное, как распределение Коши C $\left(0, \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)$.

3. Заметим, что случайная величина ξ_1/ξ_2 неотрицательна. Тогда, если $x < 0$, то $p_{\xi_1/\xi_2}(x) = 0$. Далее будем рассматривать только неотрицательные x.

   Вспомним, что для экспоненциального распределения

$$p_{\xi_i}(x) = \lambda_i e^{-\lambda x} I\{x \geqslant 0\}.$$

Тогда

$$p_{\xi_1/\xi_2}(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda_1\lambda_2|y| \exp\left\{-\lambda_1 xy - \lambda_2 y\right\} I\{xy \geqslant 0\} I\{y \geqslant 0\} \, \mathrm{d}y$$

$$= \int\limits_{0}^{+\infty} \lambda_1\lambda_2 y \exp\left\{-(\lambda_1 x + \lambda_2)y\right\} \, \mathrm{d}y$$

$$= \left\{ t = (\lambda_1 x + \lambda_2)y, \mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}t}{\lambda_1 x + \lambda_2} \right\}$$

$$= \frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1 x + \lambda_2)^2} \int\limits_{0}^{+\infty} t e^{-t} \, \mathrm{d}t = \frac{\lambda_1\lambda_2 \Gamma(2)}{(\lambda_1 x + \lambda_2)^2} = \frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1 x + \lambda_2)^2}. \qquad \square$$

Ответ:

a) $p_{\xi_1/\xi_2}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{1}{2}, & x \in [0,1]; \\ \frac{1}{2x^2}, & x \in [1, +\infty). \end{cases}$

b) $p_{\xi_1/\xi_2}(x) = \dfrac{1}{\pi\gamma\left(1 + (x/\gamma)^2\right)}$, где $\gamma = \dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}$

c) $p_{\xi_1/\xi_2}(x) = \dfrac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1 x + \lambda_2)^2}$

Задача 2. *Случайные величины X и Y независимы, X имеет плотность $p_X(x) = (2x)I\left\{x \in [0,1]\right\}$, а Y — распределение Лапласа с плотностью $p_Y(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$. Вычислите плотность случайной величины $Z = Y - X$.*

Решение. Пусть $X' = -X$. Найдём плотность этой случайной величины, пользуясь абсолютной непрерывностью X:

$$F_{X'}(x) = \mathsf{P}(X' \leqslant x) = \mathsf{P}(X \geqslant -x) = 1 - \mathsf{P}(X \leqslant -x) = 1 - F_X(-x).$$

Тогда

$$p_{X'}(x) = p_X(-x) = (-2x)I\left\{x \in [-1, 0]\right\}.$$

Теперь вспомним, что функции от независимых случайных величин тоже независимы. Тогда воспользуемся формулой свёртки:

$$p_{Y+X'}(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_Y(y) p_{X'}(x-y) \, \mathrm{d}y = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-|x-y|}(-2y) I\left\{y \in [-1, 0]\right\} \, \mathrm{d}y.$$

Преобразуем его:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-|x-y|}(-2y) I\left\{y \in [-1, 0]\right\} \, \mathrm{d}y = \int\limits_{0}^{1} t e^{-|x+t|} \, \mathrm{d}t$$

Для данного интеграла есть три случая:

1. $x \geqslant 0$. Тогда для любого $t \in [0,1]$ $x+t \geqslant 0$ и $|x+t| = x+t$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\int\limits_0^1 te^{-|x+t|}\,\mathrm{d}t &= e^{-x}\int\limits_0^1 te^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= e^{-x}\left(\left(-te^{-t}\right)\Big|_0^1 + \int\limits_0^1 e^{-t}\,\mathrm{d}t\right) \\ &= e^{-x}\left(-\frac{1}{e}+1-\frac{1}{e}\right) = (e-2)e^{-x-1}.\end{aligned}$$

2. $x \leqslant -1$. В этом случае для любого $t \in [0,1]$ $x+t \leqslant 0$ и $|x+t| = -x-t$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\int\limits_0^1 te^{-|x+t|}\,\mathrm{d}t &= e^{x}\int\limits_0^1 te^{t}\,\mathrm{d}t \\ &= e^{x}\left(\left(te^{t}\right)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 e^{t}\,\mathrm{d}t\right) = e^x\left(e+1-e\right) = e^x.\end{aligned}$$

3. $x \in (-1,0)$. В таком случае в точке x модуль изменяет своё поведение. Разобъём интеграл на два и посчитаем их так же, как и интегралы выше:

$$\int\limits_0^1 te^{-|x+t|}\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^{-x} te^{-|x+t|}\,\mathrm{d}t + \int\limits_{-x}^1 te^{-|x+t|}\,\mathrm{d}t.$$

В первом интеграле $0 \leqslant t \leqslant -x$, что то же самое, что $x \leqslant x+t \leqslant 0$. Тогда $-|x+t| = x+t$ и

$$\begin{aligned}\int\limits_0^{-x} te^{-|x+t|}\,\mathrm{d}t &= e^{x}\int\limits_0^{-x} te^{t}\,\mathrm{d}t \\ &= e^{x}\left(\left(te^{t}\right)\Big|_0^{-x} - \int\limits_0^{-x} e^{t}\,\mathrm{d}t\right) \\ &= e^x\left(-xe^{-x}+1-e^{-x}\right) = e^x-1-x.\end{aligned}$$

Во втором же $-x \leqslant t \leqslant 1$, что равносильно $0 \leqslant x+t \leqslant 1-x$. Следовательно, $|x+t| = x+t$ и

$$\begin{aligned}\int\limits_{-x}^1 te^{-|x+t|}\,\mathrm{d}t &= e^{-x}\int\limits_{-x}^1 te^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= e^{-x}\left(\left(-te^{-t}\right)\Big|_{-x}^1 + \int\limits_{-x}^1 e^{-t}\,\mathrm{d}t\right) \\ &= e^{-x}\left(-\frac{1}{e}-xe^{x}+e^{x}-\frac{1}{e}\right) = -x+1-2e^{-x-1}.\end{aligned}$$

Отсюда получаем, что

$$\int\limits_0^1 te^{-|x+t|}\,\mathrm{d}t = e^x - 2x - 2e^{-x-1}.$$

Следовательно,

$$p_{Y-X}(x) = \begin{cases} (e-2)e^{-x-1}, & x \geqslant 0, \\ e^x - 2x - 2e^{-x-1}, & -1 < x < 0, \\ e^x, & x \leqslant -1. \end{cases} \qquad \square$$