Домашнее задание по теории вероятностей от 15.11.2016

Алексей Хачиянц

Задача 1. *Случайные величины X, Y независимы, X имеет распределение $U(0,2)$, а Y — экспоненциальное с параметром 1. Найдите вероятность того, что существует треугольникс длинами сторон X, Y, 1.*

Решение. Посчитаем обратную вероятность. Треугольника со сторонами X, Y и 1 не существует, если верна следующая система:

$$\left[\begin{aligned} &X+Y\leqslant 1\\ &X+1\leqslant Y\\ &Y+1\leqslant X\end{aligned}\right.$$

Заметим, что одновременно с ненулевой может выполняться только одно событие из трёх. Действительно, пусть выполнены первое и второе условие. Тогда $Y=1$. Но это происходит с нулевой вероятностью. Тогда можно сказать (по формуле включений-исключений), что

$$\mathsf{P}(\triangle\text{ не существует}) = \mathsf{P}(X+Y\leqslant 1)+\mathsf{P}(Y-X\geqslant 1)+\mathsf{P}(Y-X\leqslant -1).$$

Преобразуем, пользуясь тем, что для непрерывных распределений $\mathsf{P}(\xi\geqslant x)=1-\mathsf{P}(\xi\leqslant x)$:

$$\mathsf{P}(\triangle\text{ не существует}) = \mathsf{P}(X+Y\leqslant 1)+1-\mathsf{P}(Y-X\leqslant 1)+\mathsf{P}(Y-X\leqslant -1).$$

Посчитаем плотности случайных величин $X+Y$ и $Y-X$. Для этого вспомним, что $p_{-X}(t)=p_X(-t)=\frac{1}{2}\,\mathbf{I}\{t\in[-2,0]\}$. Тогда по формуле свёртки:

$$\begin{aligned} p_{Y-X}(t) &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}\,\mathbf{I}\{t-y\in[-2,0]\}\,e^{-y}\,\mathbf{I}\{y\in[0,+\infty)\}\,\mathrm{d}y\\ &= \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-y}\,\mathbf{I}\{y\in[t,t+2],y\in[0,+\infty)\}\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

Если $t\leqslant -2$, то $p_{X+Y}(t)=0$. Если $t\in[-2,0]$, то

$$p_{Y-X}(t)=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{t+2} e^{-y}\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\left(1-e^{-(t+2)}\right).$$

Если же $t\geqslant 0$, то

$$p_{Y-X}(t)=\frac{1}{2}\int\limits_{t}^{t+2} e^{-y}\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\left(e^{-t}-e^{-(t+2)}\right).$$

Теперь приступим к подсчёту плотности для $Y - X$:

$$
\begin{aligned}
p_{X+Y}(t) &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}\,\mathbf{I}\{t - y \in [0,2]\}\, e^{-y}\,\mathbf{I}\{y \in [0,+\infty)\}\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-y}\,\mathbf{I}\{y \in [t-2,t], y \in [0,+\infty)\}\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

Опять же, есть три случая. Если $t \leqslant 0$, то $p_{X+Y}(t) = 0$. Если $t \in [0,2]$, то

$$
p_{Y+X}(t) = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{t} e^{-y}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-t}\right).
$$

Если же $t \geqslant 2$, то

$$
p_{Y+X}(t) = \frac{1}{2}\int\limits_{t-2}^{t} e^{-y}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\left(e^{-t+2} - e^{-t}\right).
$$

Осталось посчитать вероятности, пользуясь плотностями:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{P}(Y - X \leqslant 1) &= \frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{0}\left(1 - e^{-(t+2)}\right)\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1}\left(e^{-t} - e^{-(t+2)}\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2}\left(1 - e^{-t}\right)\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e^2}\right)\int\limits_{0}^{1} e^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\left(2 - 1 + \frac{1}{e^2}\right) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e^2}\right)\left(1 - \frac{1}{e}\right) = \frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{e} + \frac{1}{e^3}\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{P}(Y - X \leqslant -1) &= \frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{-1}\left(1 - e^{-(t+2)}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1}\left(1 - e^{-t}\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - 1 + \frac{1}{e}\right) = \frac{1}{2e}.
\end{aligned}
$$

$$
\mathsf{P}(Y + X \leqslant 1) = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1}\left(1 - e^{-t}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(1 - 1 + \frac{1}{e}\right) = \frac{1}{2e}.
$$

Тогда получаем, что

$$
\mathsf{P}(\triangle \text{ не существует}) = 1 + \frac{1}{e} - \frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{e} + \frac{1}{e^3}\right) = \frac{3}{2e} - \frac{1}{2e^3}.
$$

Следовательно,

$$
\mathsf{P}(\triangle \text{ существует}) = 1 - \frac{3}{2e} + \frac{1}{2e^3}. \qquad \square
$$

Задача 2. *Случайные величины X, Y, Z — независимые с равномерным распределением на $[0,1]$. Вычислите плотность случайной величины $W = (XY)^Z$.*

Решение. Посчитаем функцию распределения $F_W(x)$. Заметим, что $W \in [0,1]$. Тогда, если $x < 0$, то $F_W)(x) = 0$, а если $x > 1$, то $F_W(x) = 1$. Далее будем считать, что $x \in [0,1]$.

$$\mathsf{P}\big((XY)^Z \leqslant x\big) = \mathsf{P}(Z \ln XY \leqslant \ln x) = \mathsf{P}(-Z \ln XY \geqslant -\ln x) = 1 - \mathsf{P}(-Z \ln XY \leqslant -\ln x).$$

Тогда, дифференицируя, получаем, что

$$p_W(x) = \frac{1}{x} p_{-Z\ln XY}\left(-\ln x\right).$$

Посчитаем плотность случайной величины $-Z \ln XY$. Разобъём это вычисление в несколько шагов:

1. Начнём с того, что посчитаем плотность XY по формуле свёртки:
$$\begin{aligned} p_{XY}(t) &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|y|} \mathbf{I}\left(\frac{t}{y} \in [0,1]\right) \mathbf{I}(y \in [0,1]) \,\mathrm{d}y \\ &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|y|} \mathbf{I}(y \in [t, +\infty)) \,\mathbf{I}(y \in [0,1]) \,\mathrm{d}y \end{aligned}$$
Если вышло так, что $t \notin (0,1]$, то плотность уходит в 0. Иначе же она равна
$$\int\limits_t^1 \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\ln t.$$
В итоге получаем, что $p_{XY}(t) = -\ln t\, \mathbf{I}(t \in (0,1])$.

2. Теперь посчитаем плотность случайной величины $-\ln XY$. Сделаем это через функцию распределения:
$$\mathsf{P}(-\ln XY \leqslant x) = \mathsf{P}(\ln XY \geqslant -x) = 1 - \mathsf{P}\big(XY \leqslant e^{-x}\big).$$
Тогда
$$p_{-\ln XY}(x) = p_{XY}(e^{-x}) e^{-x} = x e^{-x}\, \mathbf{I}\big(e^{-x} \in [0,1]\big) = x e^{-x}\, \mathbf{I}(x \in [0, +\infty)).$$

3. Осталось посчитать плотность случайной величины $-Z \ln XY$. По формуле свёртки
$$\begin{aligned} p_{-Z\ln XY}(t) &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|y|} y e^{-y}\, \mathbf{I}(y \in [0, +\infty))\, \mathbf{I}\left(\frac{t}{y} \in [0,1]\right) \mathrm{d}y \\ &= \int\limits_0^{+\infty} e^{-y}\, \mathbf{I}(y \in [t, +\infty)) \,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$
Однако $t \geqslant 0$, так как $-Z \ln XY \geqslant 0$. Тогда
$$p_{-Z\ln XY}(t) = \int\limits_t^{+\infty} e^{-y} \,\mathrm{d}y = e^{-t}$$
Следовательно, $p_{-Z\ln XY} = e^{-t}\, \mathbf{I}(t \in [0, +\infty))$.

Отсюда получаем, что

$$p_W(x) = \frac{1}{x} e^{-(-\ln x)} \, \mathbf{I}(-\ln x \in [0, +\infty)) = \mathbf{I}(x \in [0, 1]) \, .$$

Получили весьма неожиданный результат: $(XY)^Z \sim \mathrm{U}(0, 1)$. $\square$