

Statistical Machine Learning s Data Storytelling

spacing = 3 tab

1. Part 1 Essential Mathematical Foundations (Deep Live)

Chapter 1. Descriptive Statistics

1-1. Introduction To Descriptive Statics



Apa Itu Statistik Deskriptif

01

Definisi

- Cabang statistik yang fokus pada penyajian, pengorganisasian, dan peringkasan data

fisikamodern00-2625220

02

Objektif

- Digunakan untuk memahami karakteristik dasar dari suatu kumpulan data.

Apa Itu Statistik Deskriptif



Tidak digunakan untuk

Membuat kesimpulan atau generalisasi terhadap populasi yang lebih luas

Peran Statistik Deskriptif



Langkah awal dalam eksplorasi data



Membantu mengidentifikasi pola, tren, dan anomali

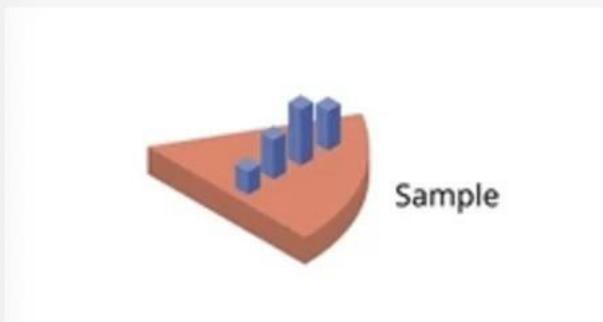


Menyediakan ringkasan numerik dan visual dari data



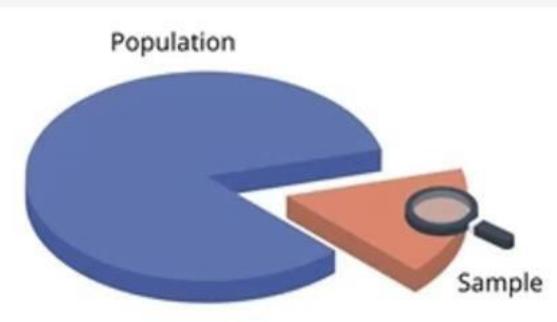
Dasar untuk analisis statistic lanjutan dan machine learning

Statistik Deskriptif vs Inferensial



Deskriptif:

- Fokus pada data yang tersedia
- Tidak membuat prediksi atau generalisasi



Inferensial:

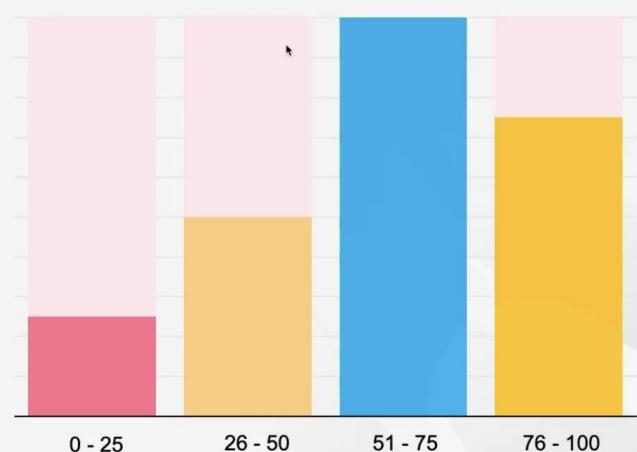
- Menggunakan sampel untuk menyimpulkan tentang populasi.
- Melibatkan estimasi dan pengujian hipotesis

Contoh Aplikasi Statistik Deskriptif



No	Nilai
1	75
2	73
3	50
4	90
5	75
6	45
7	60
8	80
9	76
10	15

Mean	63,9
Median	74
Standard Deviasi	22,0426355
Minimum	15
Maximum	90
First Quartile	52,5



1-2. Measures Of Central Tendency

01

Ukuran Pemusatan

02

Mean, Median, Interpretasi Modus

fisikamodem00-2625220

03

Ukuran Pemusatan

04

Contoh Aplikasi

05

Penutup

Ukuran Pemusatan

- Ukuran pemusatan menggambarkan nilai tengah atau tipikal dari suatu kumpulan data.
- Digunakan untuk meringkas data numerik menjadi satu nilai representatif.
- Tiga ukuran utama: Mean (rata-rata), Median, dan Mode (modus).

Mean (Rata-rata)

$$\bar{x} = \frac{5+7+6+2+1+9}{6} + 10$$

$$= \frac{25}{6} \rightarrow \frac{65}{7} = 9,14\ldots$$

$$= 9,16666 \approx 9,17$$

Definisi: Jumlah seluruh nilai dibagi jumlah data.

Formula:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n}$$

Catatan:

Kelebihan: Menggunakan semua data, mudah dihitung.

Kekurangan: Sangat sensitif terhadap outlier.

Mean (Rata-rata)

The diagram shows an array of six numbers: 5, 7, 6, 2, 1, 4. Above the first element, 5, there is a red arrow pointing up with the label "data" next to it. To the left of the array, there is a red "x" above a red arrow pointing right, indicating the direction of iteration. Below the array, there is a red bracket under the first five elements, labeled "n=5". To the right of the array, there is a red circle containing the number 40, which is connected by a red arrow to the last element, 4.

$$\begin{aligned}
 \bar{x} &= \frac{5+7+6+2+1+9}{6} + 10 \\
 &= \frac{25}{6} \rightarrow \frac{65}{7} = 9,14\ldots \\
 &= 9,16666 \approx \boxed{9,17}
 \end{aligned}$$

Definisi: Jumlah seluruh nilai dibagi jumlah data.

Formula:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

Catatan:

Kelebihan: Menggunakan semua data, mudah dihitung.

Kekurangan: Sangat sensitif terhadap outlier.

Modus (Mode)

$X \rightarrow 1 \underline{222} 3 4$
↓
modus = 2

$X \rightarrow 1 \underline{222} 3 \underline{444} 5$
 122234445666
3 3 3
Bimodal.
multimodal

Definisi: Nilai yang sering muncul.

Formula:

- Frekuensi / kemunculan data tertinggi
- Dapat memiliki lebih dari satu modus (bimodal/multimodal)

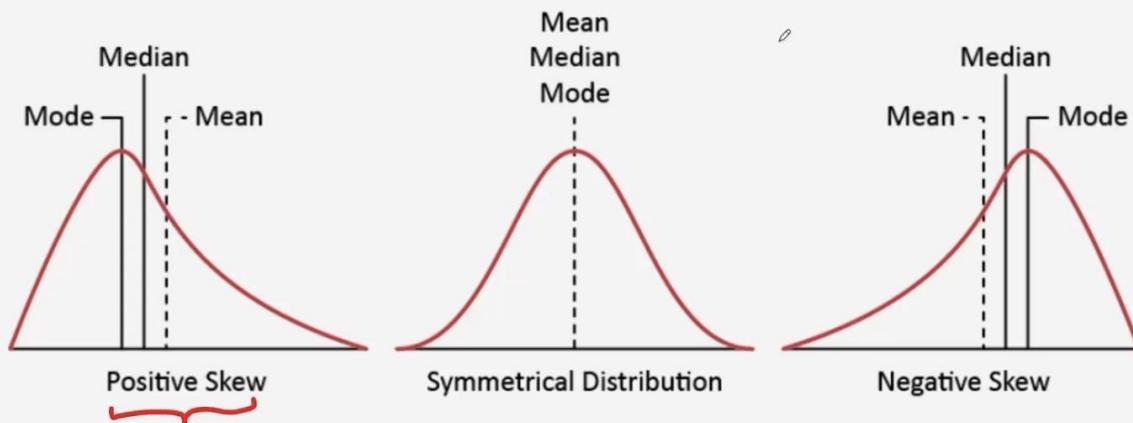
Catatan:

Kelebihan: Lebih cocok untuk data kategorikal.

Kekurangan: Tidak selalu ada atau tidak unik.

fisikamodern00-262

Perbandingan Mode, Median & Mean



Contoh Aplikasi Mean, Median & Modus



Data gaji karyawan: gunakan median untuk menghindari bias dari gaji ekstrem.



Nilai ujian siswa: mean untuk melihat performa umum.



Preferensi produk: mode untuk mengetahui pilihan terbanyak.

Penutup

- **Mean:** rata-rata aritmatika, sensitif terhadap outlier.
- **Median:** nilai tengah, robust terhadap outlier.
- **Mode:** nilai paling sering muncul, cocok untuk data kategorikal.
- Pilih ukuran pemusatan sesuai konteks data.

1-3. Measures Of Dispersion

01

Apa itu ukuran persebaran data?

02

Range (Jangkauan)

03

Variance (variansi)

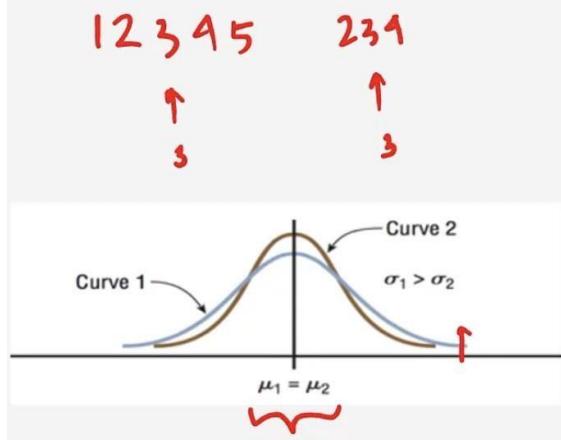
04

Standard Deviation (Simpangan Baku)

05

Interquartile Range (IQR)

Apa itu ukuran persebaran data



- Definisi:** Ukuran penyebaran menggambarkan seberapa tersebar data dalam suatu distribusi.
- Tujuan:**
 - Digunakan untuk memahami variabilitas dan konsistensi data.
 - Deteksi outlier
 - Normalisasi data
 - Evaluasi model prediktif
- Contoh:** dua dataset dengan rata-rata sama bisa memiliki penyebaran yang berbeda.

Range (Jangkauan)

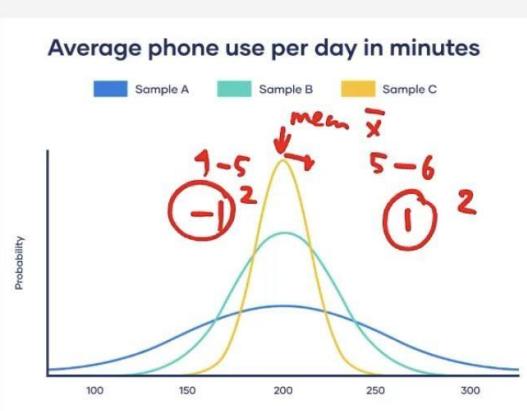
No	Nilai
1	75
2	73
3	50
4	90
5	75
6	45
7	60
8	80
9	76
10	15

Handwritten notes on the table:

- Handwritten "115" is at the top left.
- Handwritten circled "max" points to the value 90.
- Handwritten circled "min" points to the value 15.
- Handwritten formula: $range = max - min$
 $= 90 - 15$
 $= 75$

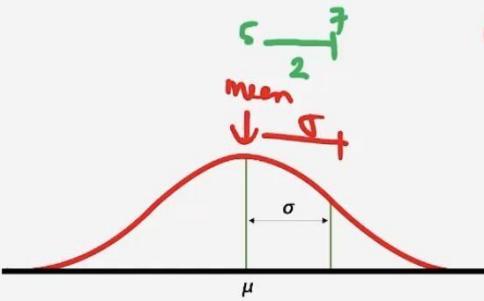
- Definisi:** selisih antara nilai maksimum dan minimum dalam dataset.
- Formula:**
$$range = max - min$$
- Kelebihan:** Mudah dihitung
- Kekurangan:** Sangat dipengaruhi oleh outlier

Variance (Variansi / Ragam)



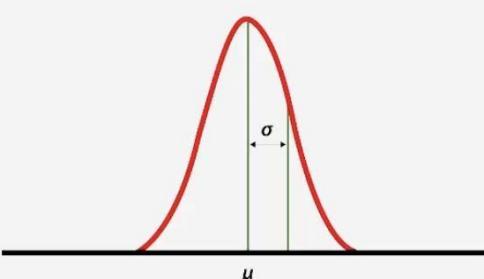
- Definisi:** mengukur rata-rata kuadrat deviasi dari mean
- Formula:**
$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum (x_i - \mu)^2$$
- Kelebihan:** Menggunakan semua data
- Kekurangan:** Satuan kuadrat, sulit diinterpretasi langsung

Standard Deviation (Simpangan Baku)



- **Definisi:** akar kuadrat dari variance
- **Formula:**

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \mu)^2}{n}}$$



- **Kelebihan:** Satuan sama dengan data asli.
- **Kekurangan:** Masih dipengaruhi oleh outlier

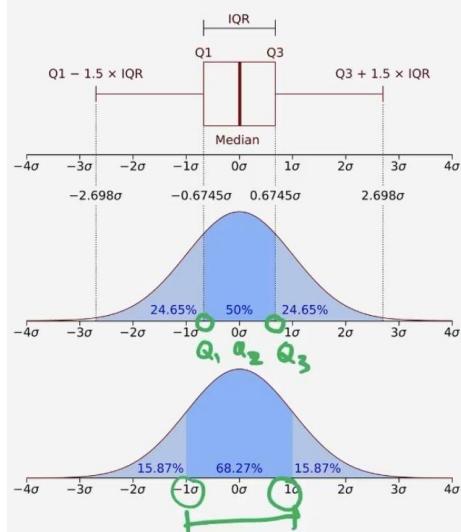


Interquartile Range (IQR)

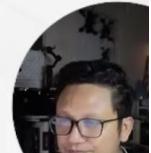
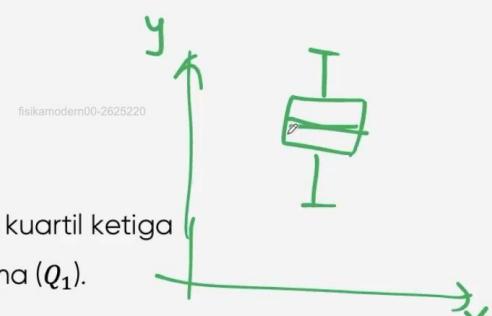


- **Definisi:** selisih antara kuartil ketiga (Q_3) dan kuartil pertama (Q_1).
- **Formula:**
$$IQR = Q_3 - Q_1$$
- **Kelebihan:** Robust terhadap outlier.
- **Kekurangan:** Tidak menggunakan semua data

Interquartile Range (IQR)



- **Definisi:** selisih antara kuartil ketiga (Q_3) dan kuartil pertama (Q_1).
- **Formula:**
$$IQR = Q_3 - Q_1$$
- **Kelebihan:** Robust terhadap outlier.
- **Kekurangan:** Tidak menggunakan semua data



Perbandingan

Range	Mudah Sangat sensitive terhadap outlier
Variance	Menggunakan semua data Satuan kuadrat
Standard Deviation	Menggunakan semua data Interpretasi lebih mudah
Interquartile Range	Robust (Tegar) Terhadap Outlier

Aplikasi dalam Data Science dan Statistics

01 Menilai Variabilitas Fitur	Ukuran pemasaran seperti mean hanya memberi tahu kita nilai rata-rata, tetapi tidak memberi tahu apakah data homogen atau heterogen. Measures of dispersion seperti standard deviation dan IQR menunjukkan seberapa jauh data menyebar dari pusatnya.
02 Mendeteksi Outlier	Ukuran seperti range dan IQR membantu mengidentifikasi nilai ekstrem yang bisa mempengaruhi analisis.
03 Menentukan Stabilitas dan Risiko	Dalam konteks bisnis atau keuangan, standard deviation sering digunakan untuk mengukur risiko atau volatilitas.
04 Membantu Pemilihan Metode Statistik	Distribusi data yang skewed atau memiliki penyebaran tinggi mungkin tidak cocok untuk metode yang mengasumsikan distribusi normal.
05 Meningkatkan Interpretasi Visualisasi	Visualisasi seperti boxplot dan histogram menjadi lebih bermakna jika kita memahami ukuran penyebaran
06 Dasar untuk Normalisasi dan Standarisasi	Dalam machine learning, data sering perlu dinormalisasi agar model bekerja optimal. Measures of dispersion digunakan untuk Z-score normalization : menggunakan mean dan standard deviation Min-max scaling : menggunakan range

1-4. Understanding Data Distribution Shapes

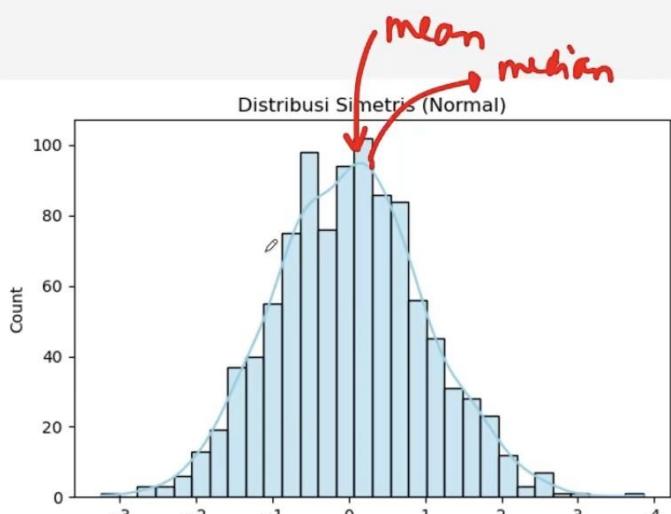
01 Definisi	02 Jenis-jenis distribusi data	03 Skewness & Kurtosis	04 Perbandingan Penutup	05
------------------------------	---	---	--	-----------

Bentuk Distribusi Data

- Bentuk distribusi data menggambarkan bagaimana nilai-nilai dalam dataset tersebar.
- Distribusi dapat menunjukkan pola
 - simetris,
 - miring (skewed),
 - seragam,
 - atau memiliki lebih dari satu puncak (bimodal).

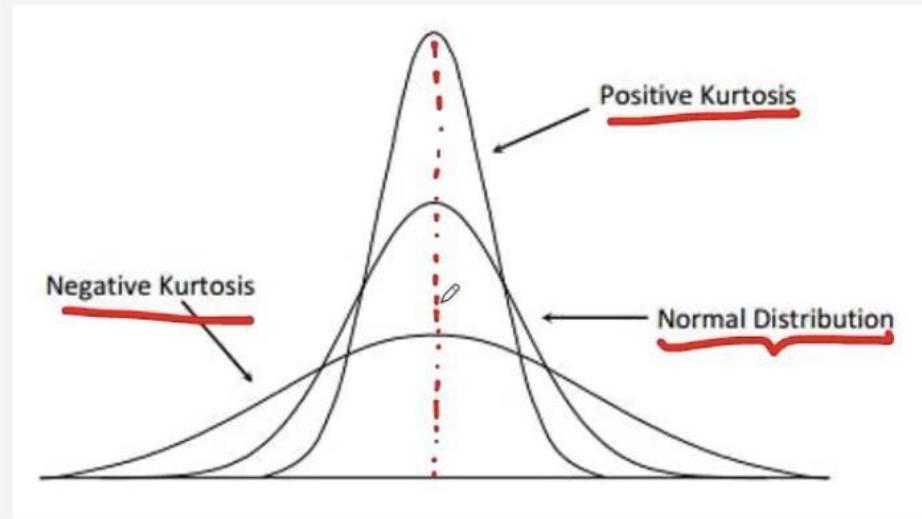
fisikamodern00-2625220

Distribusi Simetris



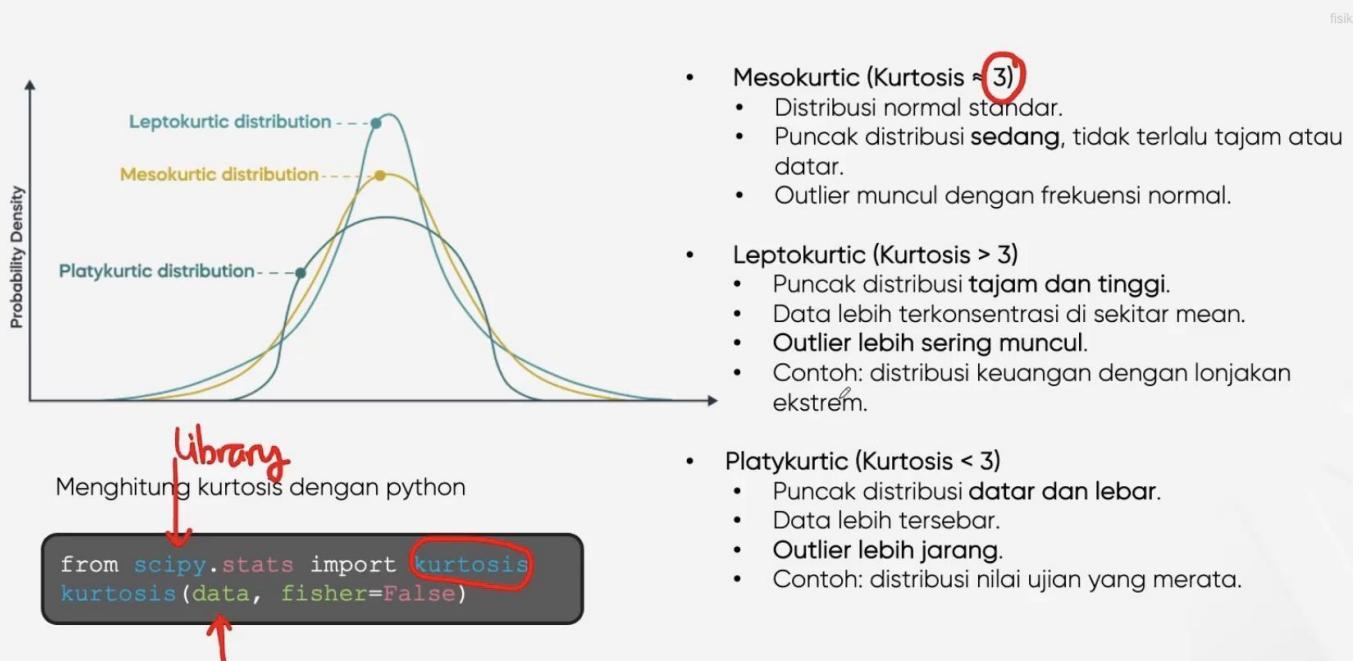
- Distribusi yang tersebar dengan titik median dan mean saling berdekatan.
- Contoh dari distribusi ini adalah **distribusi normal**

Kurtosis

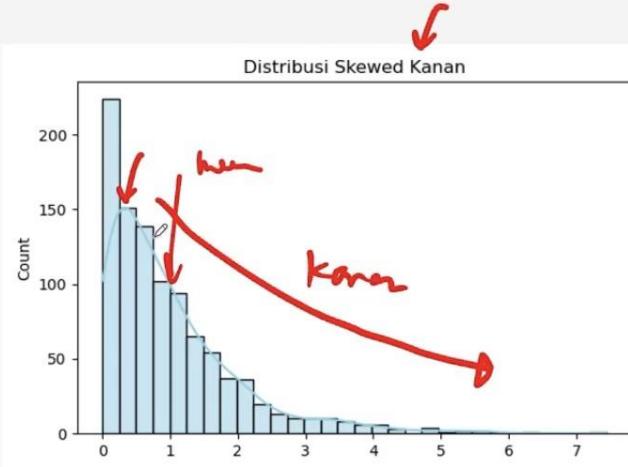


Kurtosis mengukur derajat konsentrasi data di sekitar mean dan frekuensi outlier. Secara teknis, kurtosis adalah momen keempat dari distribusi yang dinormalisasi.

Kurtosis



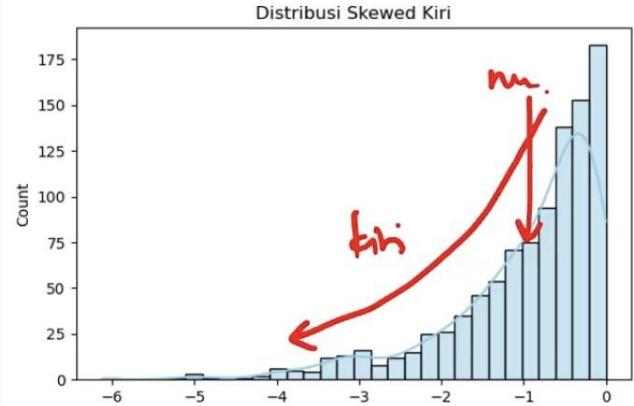
Distribusi Miring (Skewed)



Skewness > 0: miring ke kanan

$$skewness = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3}{(n-1)\sigma^3}$$

\bar{x} = nilai mean,
 x_i = Nilai data ke- i ,
 σ = Standard Deviation,
 n = jumlah data

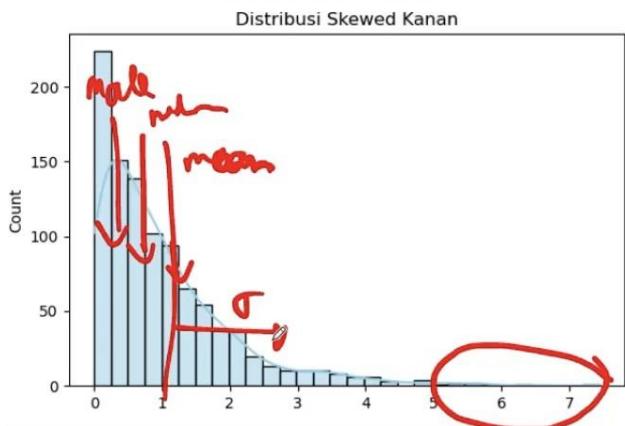


Skewness < 0: miring ke kiri

fisikamodern00-2625220

Distribusi Miring (Skewed)

fisikamodern00-2625220

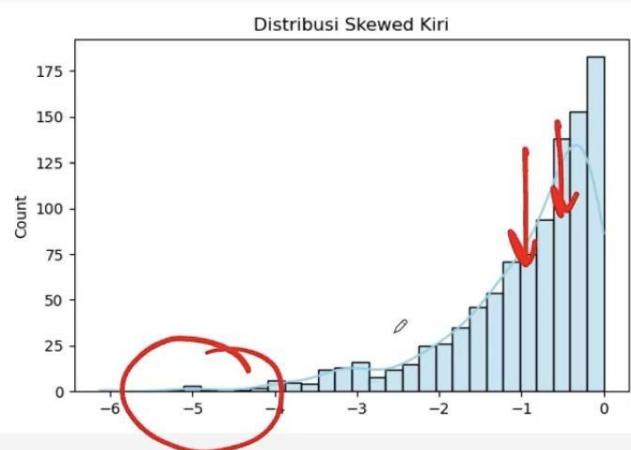


Skewness > 0: miring ke kanan

Karakteristik:

- Ekor Panjang di kanan
- Mean > Median > Mode
- Contoh:
 - Pendapatan Individu: selegintir orang berpenghasilan sangat tinggi
- Warning:
 - Nilai Mean dapat menyesatkan karena dipengaruhi oleh outliers
 - Median lebih representatif untuk pusat data
 - Standard Deviasi yang sangat besar karena terdapat nilai ekstrem di kanan

Distribusi Miring (Skewed)

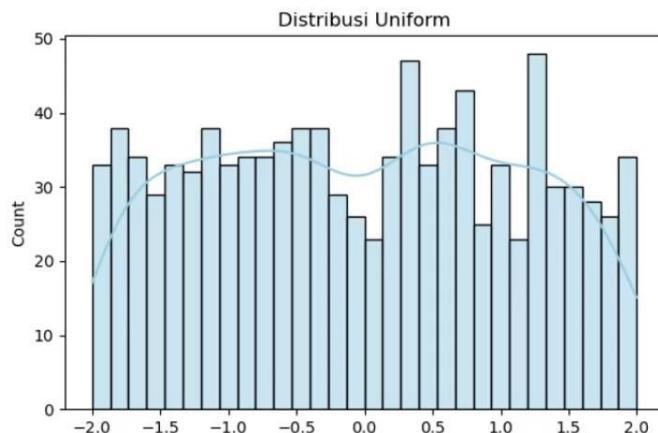


Skewness < 0: miring ke kiri

Karakteristik:

- Ekor Panjang di kiri
- Mean < Median < Mode
- Contoh:
 - Skor ujian dengan nilai tinggi yang banyak dan sedikit yang bernilai rendah
- Warning:
 - Nilai Mean dapat menyesatkan karena dipengaruhi oleh outliers ekstrem minimum
 - Median lebih representatif untuk pusat data
 - Standard Deviasi yang sangat besar karena terdapat nilai ekstrem di kiri

Distribusi Uniform



Skewness < 0: miring ke kiri

Karakteristik:

- Semua nilai memiliki probabilitas yang mirip
- Mean ≈ Median
- Contoh:
 - Hasil lemparan dadu fair → setiap angka memiliki probabilitas 1/6
 - Digunakan untuk menggenerasi nilai random pada nilai awal bobot machine learning.
- Warning:
 - Semakin besar rentang data, semakin besar variansnya.
 - $Var(x) = \frac{(b-a)^2}{12}$, dengan a dan b adalah rentang distribusi

Penutup

- Bentuk distribusi mempengaruhi analisis data
- Skewness dan kurtosis membantu memahami karakteristik data
- Visualisasi sangatlah penting untuk eksplorasi awal sebaran data dan deteksi outliers.

1-5. Summary And Practice Problems

Ringkasan Konsep Utama

- Mean: Rata-rata dari sekumpulan data
- Median: Nilai tengah dari data yang diurutkan
- Mode: Nilai yang paling sering muncul
- Range: Selisih antara nilai maksimum dan minimum
- Variance: Ukuran penyebaran data dari rata-rata
- Standard Deviation: Akar dari variance, menunjukkan sebaran data



Latihan 1 – Ukuran Pemusatan

Diberikan data: [4, 8, 6, 5, 3, 4, 1, 7]

fisikamodern00-2625220

Hitung mean, median, modus, dan range

$$\text{mean} \rightarrow \bar{x} = \frac{4+8+6+5+3+9+9+7}{8} = \frac{41}{8} = 5,125$$

modus = 4

$$\text{range} = 8 - 3 = 5$$
$$\text{median} \rightarrow 3 \ 4 \ 4 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8$$
$$\frac{4+5}{2} = 4,5$$

Latihan 2 – Ukuran Penyebaran

Diberikan data: [10, 12, 23, 23, 16, 23, 21, 16]

Hitung variance, standard deviation dan skewness

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

$$= (10-18)^2 + (12-18)^2 + \dots$$

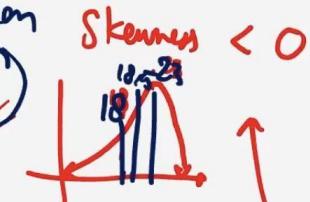
$$= \frac{8^2 + 6^2 + 5^2 + 5^2 + 2^2 + 5^2 + 3^2 + 2^2}{8} = 24\sqrt{5}$$

modus = 23

median

mean

$$\bar{x} = \frac{141}{8} = 18$$



Skewness < 0

$$\text{skewness} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n \left(\frac{(x_i - \bar{x})^3}{s^3} \right) = -0,3$$



Tips

- Gunakan mean untuk data simetris tanpa outlier
- Gunakan median jika data memiliki outlier atau skewed
- Mode berguna untuk data kategorikal
- Standard deviation menunjukkan sebaran data dari rata-rata
- Visualisasi seperti histogram membantu memahami distribusi
- Perhatikan bentuk distribusi sebelum memilih ukuran statistik

Chapter 2. Probability Theory

2-1. What Is Probability

01

**Definisi
Probability**

02

**Sample Space
Dan
Event**

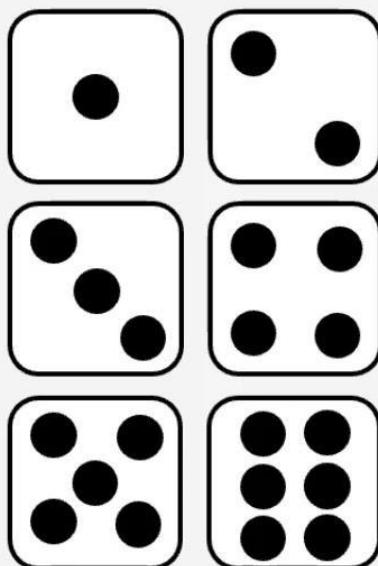
03

**Classical
vs
Empirical**

Apa Itu Probabilitas?

- | | |
|-----------|---|
| 01 | • Probabilitas adalah ukuran kemungkinan suatu kejadian terjadi |
| 02 | • Bernilai 0 saat tidak terjadi.
• Bernilai 1 saat terjadi. |
| 03 | • Digunakan dalam pengambilan keputusan berbasis data |

Contoh



Berapa probabilitas / kemungkinan dadu berangka 2 muncul saat dilempar?

[1, 2, 3, 4, 5, 6]
↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓
○ 1 ○ ○ ○ ○

$$P(2) = \frac{1}{6}$$
$$P(1) = \frac{1}{6}$$
$$P(6) = \frac{1}{6}$$

Contoh

angka
↓

gambar
↓



Berapa probabilitas / kemungkinan gambar muncul saat sekali tos?

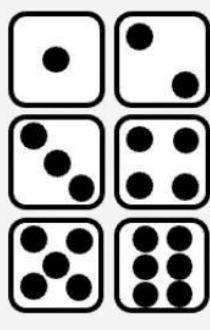
$$p(\text{gambar}) = \frac{1}{2}$$

$$\underline{p(\text{angka}) = \frac{1}{2}} +$$

(1)

Sample Space / Ruang Sampel

- Sample Space adalah himpunan semua kemungkinan hasil



Sample Space nya adalah:

$$\begin{bmatrix} 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ \underbrace{\hspace{1cm}}_6 \end{bmatrix}$$



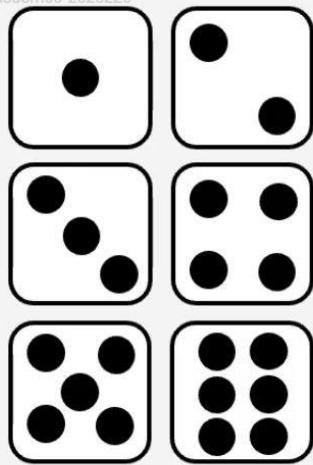
Sample Space nya adalah:

$$\begin{bmatrix} \text{angka}, \text{gambar} \\ \underbrace{\hspace{1cm}}_2 \end{bmatrix}$$

Event / Kejadian

- Event atau kejadian adalah subset dari sample space

fisikamodern00-2625220



Sample Space nya adalah:

[1, 2, 3, 4, 5, 6]

Event → Angka Ganjil:

[1, 3, 5]

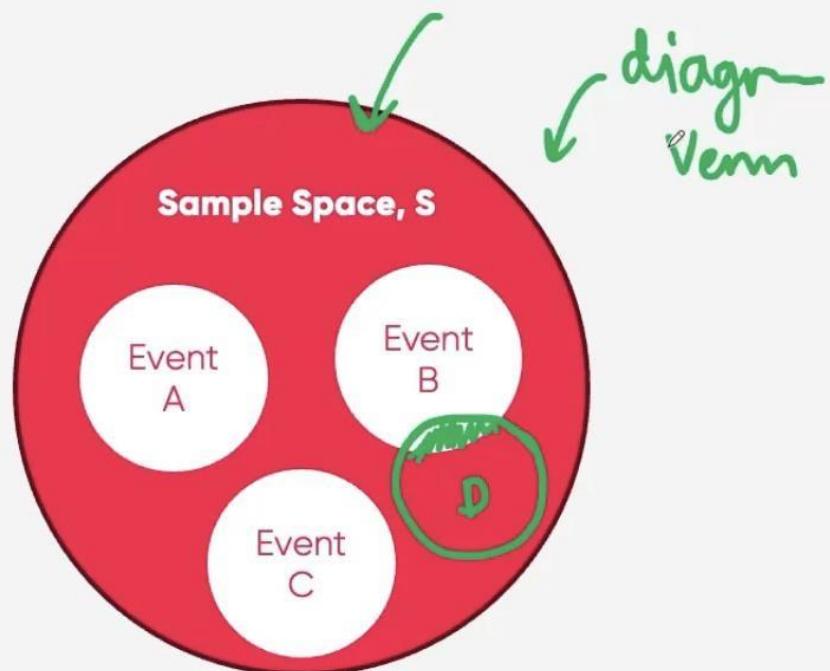
Event → Angka Genap:

[2, 4, 6]

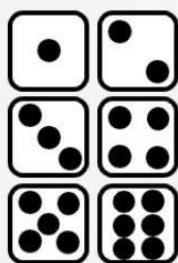
Event → Bilangan Prima:

[2, 3, 5]

Sample Space dan Event



Classical VS Empirical



Jumlah sampel adalah 6

Kemungkinan angka 3 muncul adalah?

Classical / Theoretical:

$$P(3) = \frac{\text{kemungkinan } 3}{\text{total kemungkinan}} \\ = \frac{1}{6}$$

Empirical / Experiment:

$$1 \ 3 \ 1 \ 4 \ 5 \ 6 \\ P(1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Kenapa Berbeda?

Probabilitas Teoritical akan sama dengan Probabilitas Empirical saat

~~Jumlah eksperimen~~
~~sangatlah~~
BESAR!



Jika nilai probabilitas teoritical tidak diketahui, jumlah observasi yang sangat banyak akan meningkatkan akurasi nilai probabilitas

Ringkasan

- **Sample Space:** semua kemungkinan outcome dari eksperimen
- **Eksperimen:** proses yang menghasilkan hasil acak
- **Outcome:** hasil dari satu percobaan

Kejadian saling lepas (mutually exclusive)

- Kejadian yang tidak mungkin terjadi bersama-sama:
 - Pelemparan satu dadu menghasilkan angka 2 dan 5
 - Pelemparan coin satu kali menghasilkan gambar dan angka

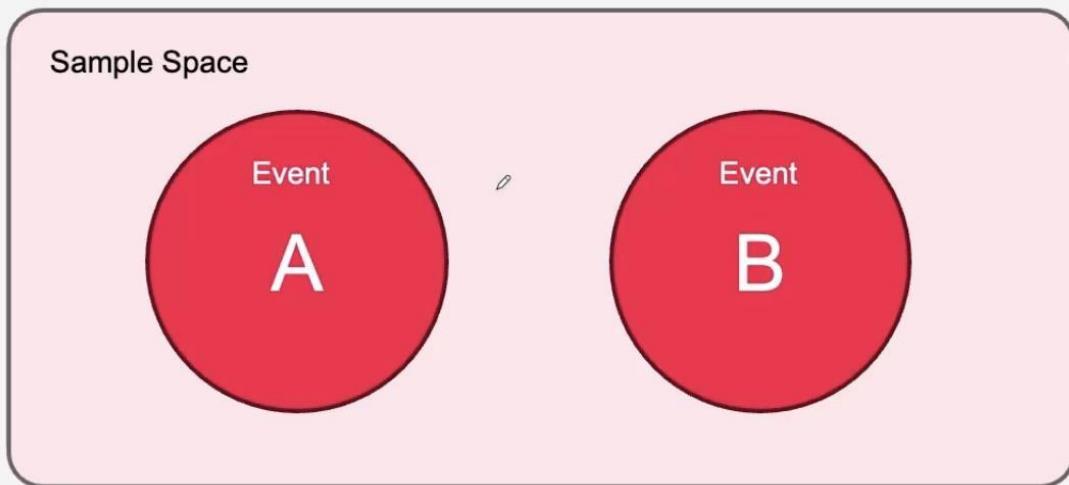


Diagram Venn

fisikamodern00-2625220

Kejadian tidak saling lepas (Non mutually exclusive)

- Kejadian yang mungkin terjadi bersama-sama:
 - Siswa yang suka fisika dan matematika
 - Siswa yang memakai kacamata dan keriting

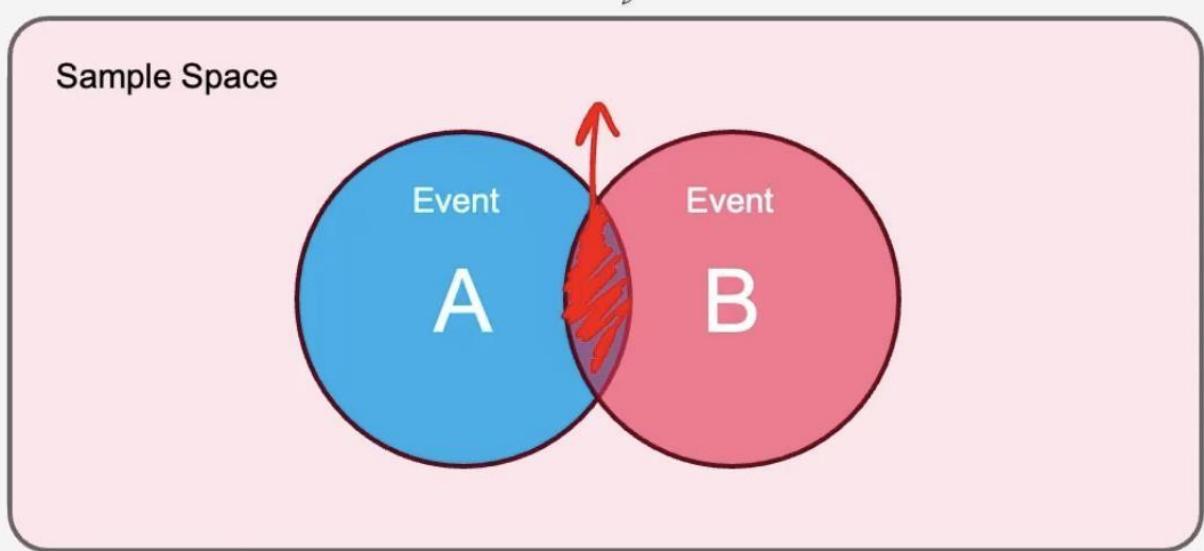
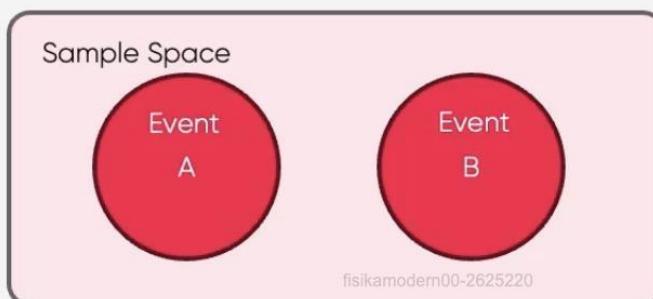


Diagram Venn

Aturan Penjumlahan (Mutually Exclusive)

- Berapa probabilitas kejadian A atau B. contohnya dalam 1 lempar dadu, muncul angka 1 atau 6 *atau 3*



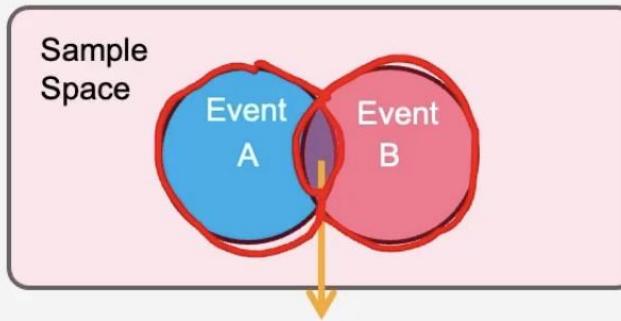
$$\begin{aligned}P(A \text{ atau } B) &= P(A) + P(B) \\P(1 \text{ atau } 6) &= P(1) + P(6) \\&= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \\&= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

- Formulasi:

$$P(A \text{ atau } B) = P(A \text{ or } B) = P(A \cup B) = P(\bar{A}) + P(B)$$

Aturan Penjumlahan (Mutually Exclusive)

- Berapa probabilitas kejadian A atau B. contohnya siswa berkacamata atau keriting



$$P(A \text{ dan } B) = P(A \text{ and } B) = P(A \cap B)$$

- Formulasi:

$$\begin{aligned}P(A \text{ atau } B) &= P(A \text{ or } B) = P(A \cup B) \\&= P(A) + P(B) - P(A \cap B)\end{aligned}$$

union .

Dependent vs Independent Events

Dependent

Kejadian yang hasilnya mempengaruhi kejadian selanjutnya

Contoh:

- Pengambilan kartu pada dek kartu tanpa dikembalikan, mempengaruhi pengambilan selanjutnya

Independent

Kejadian yang hasilnya tidak mempengaruhi kejadian selanjutnya

Contoh:

- Pelemparan coin pertama tidak mempengaruhi pelemparan kedua, dan seterusnya

Aturan Perkalian (Mutually Exclusive)



- Akan selalu bernilai nol, karena kejadian A dan B terjadi bersamaan tidak ada

Sample Space

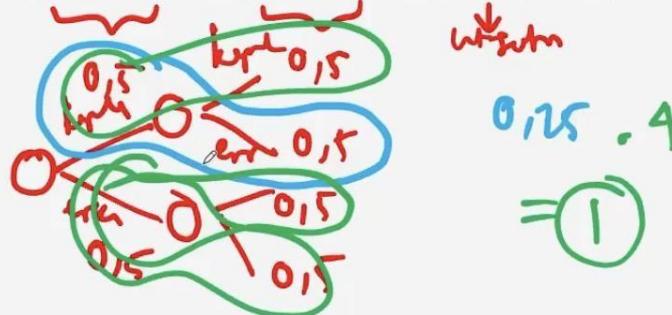
Event
A

Event
B

$$P(A \cap B) = 0$$
$$P(A) \times P(B) = 0$$

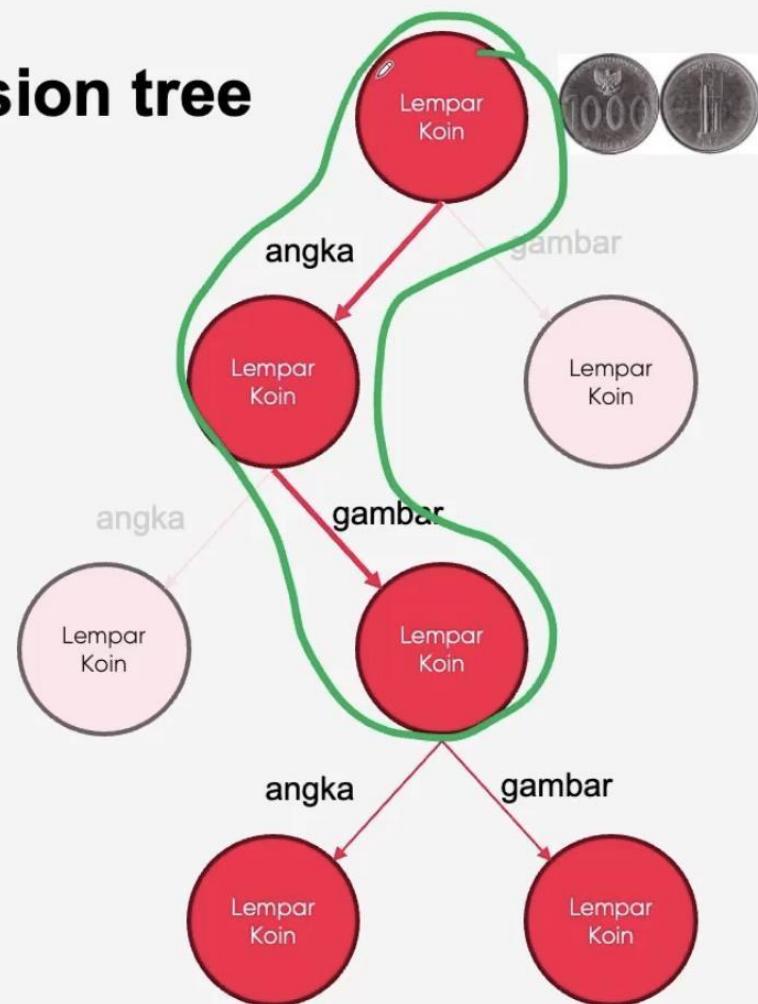
Aturan Perkalian (Independent)

- Aturan perkalian digunakan untuk menemukan probabilitas bahwa dua atau lebih kejadian saling bebas terjadi secara berurutan atau bersamaan
- Contoh: Melempar koin dua kali
 - Kejadian A: Mendapatkan "Kepala" pada lemparan pertama. $P(A) = 0.5$
 - Kejadian B: Mendapatkan "Ekor" pada lemparan kedua. $P(B) = 0.5$
 - Probabilitas mendapatkan kepala lalu ekor:
 - $P(A \text{ dan } B) = P(A \text{ and } B) = P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0.5 \times 0.5 = 0.25$



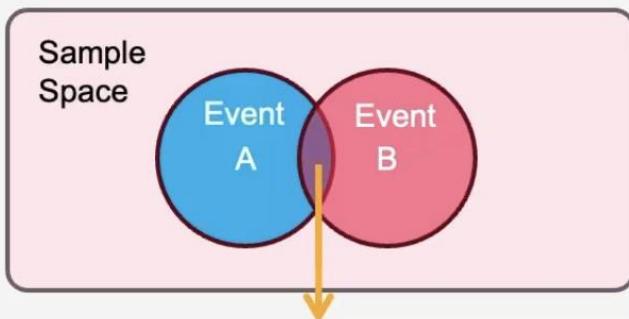
fisikamodem00-2625220

Ilustrasi decision tree Independent



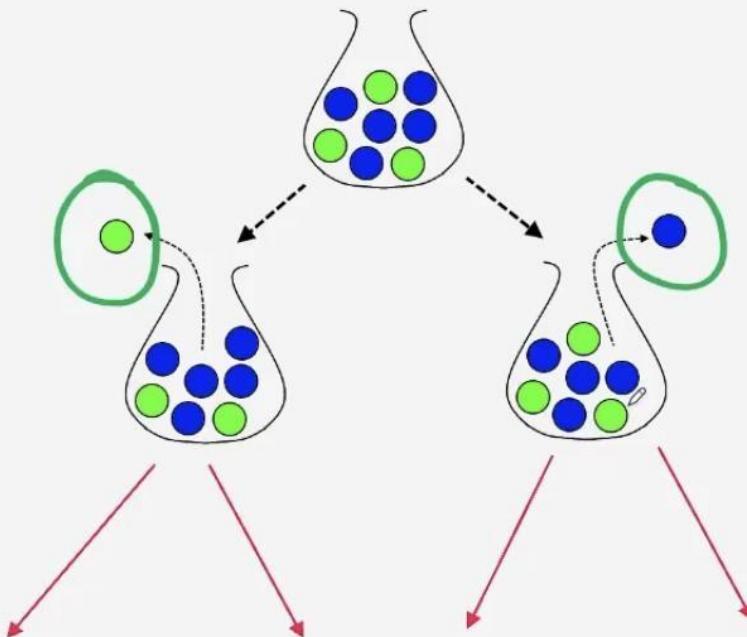
Aturan Perkalian (Non Mutually Exclusive)

- Akan bernilai tidak nol, karena kejadian A dan B dapat terjadi dalam waktu bersamaan, misal mengambil kartu no 5 dan berwarna merah.



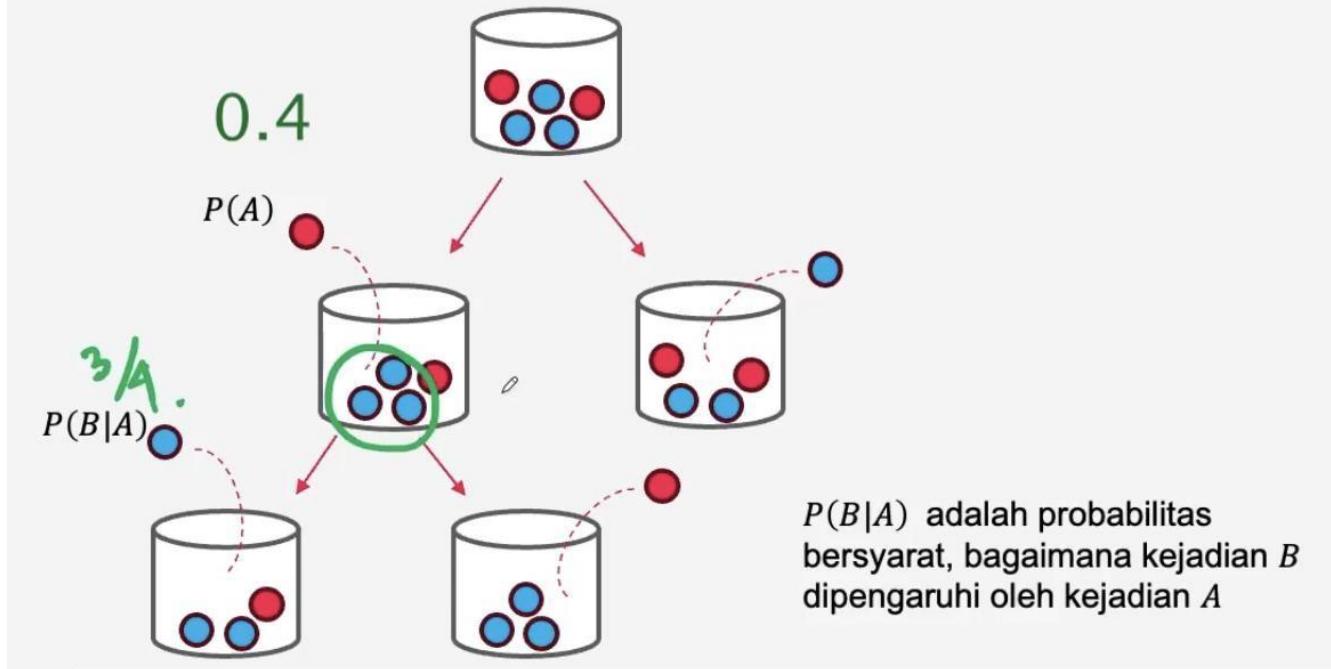
$$P(A \text{ dan } B) = P(A \text{ and } B) = P(A \cap B) \neq 0$$

Ilustrasi decision tree - Dependent



Probabilitas Bersyarat

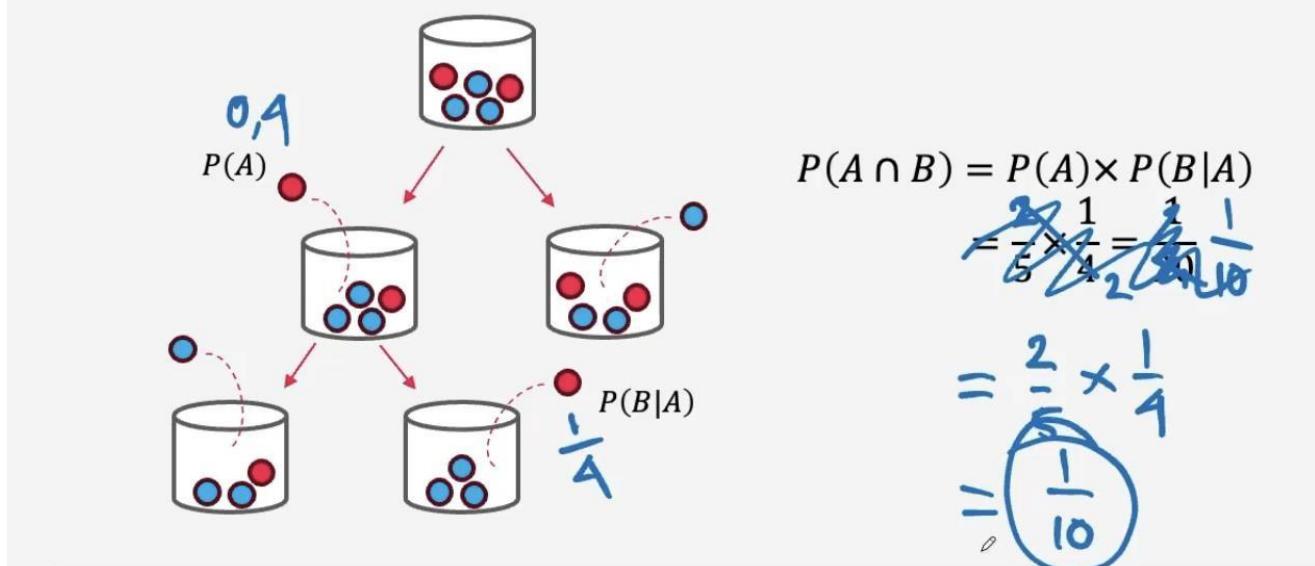
- Sebuah kantong berisi 2 kelereng merah dan 3 kelereng biru
- Kejadian A : Mengambil kelereng merah pada pengambilan pertama
 - $P(A) = \frac{2}{5} = 0.4$
- Kejadian B : Mengambil kelereng biru pada pengambilan kedua
 - $P(B|A) = \frac{\text{jumlah biru}}{\text{kelereng sisa}} = \frac{3}{4}$



$P(B|A)$ artinya peluang B dengan syarat A sudah diketahui (atau terjadi). Urutannya: A diketahui dulu, baru B dihitung.

Aturan Perkalian - dependent

- Sebuah kantong berisi 2 kelereng merah dan 3 kelereng biru
- Kejadian A : Mengambil kelereng merah pada pengambilan pertama
 - $P(A) = \frac{2}{5} = 0.4$
- Kejadian B : Mengambil kelereng merah pada pengambilan kedua
 - $P(B|A) = \frac{\text{jumlah merah}}{\text{kelereng sisa}} = \frac{1}{4}$



2-3. Conditional Probability's Independence

01

Memahami konsep conditional probability

02

Menghitung probabilitas bersyarat menggunakan rumus

03

Mengidentifikasi kejadian independen

04

Menggunakan tabel kontingensi dan diagram pohon untuk visualisasi

Apa itu Conditional Probability?

- Probabilitas suatu kejadian terjadi dengan asumsi bahwa kejadian lain telah terjadi.
- Notasi diberikan oleh:

$P(A|B)$ = Probabilitas A terjadi jika B telah terjadi

- Contoh: Probabilitas seseorang sakit flu jika ia demam

Conditional Probability Formula

- Ingat bahwa probabilitas kejadian A terjadi dan kejadian B terjadi adalah :

$$= P(A) \times P(B|A)$$

$$P(A \cap B) = P(B) \times P(A|B)$$



- Kita bisa menggabarkan bahwa $P(A|B)$ sebagai seberapa mungkin A terjadi di antara kejadian B

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- Contoh: Probabilitas seseorang sakit flu jika ia demam

$$P(\text{flu|demam}) = \frac{P(\text{flu dan demam})}{P(\text{demam})}$$

Contoh

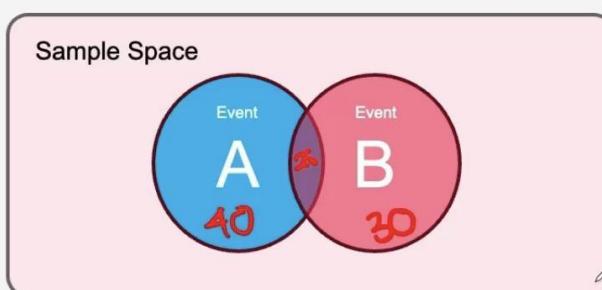
- Dari 100 pasien, 40 demam, 30 sakit flu, dan 25 keduanya

$$P(\text{Demam}) = \frac{40}{100} = 0.4$$

$$P(\text{flu}) = \frac{30}{100} = 0.3$$

$$P(\text{Sakit} \cap \text{Demam}) = \frac{25}{100} = 0.25$$

$$P(\text{Sakit} | \text{Demam}) = \frac{0.25}{0.4} = 0.625$$



$$\begin{aligned} P(\text{Sakit} | \text{demam}) &= \frac{P(\text{sakit} \cap \text{demam})}{P(\text{demam})} \\ &= \frac{0.25}{0.4} \\ P(\text{demam} | \text{sakit}) &= \frac{P(\text{flu} \cap \text{demam})}{P(\text{sakit})} \\ &= \frac{0.25}{0.3} = 0.833 \end{aligned}$$

Contingency Table

- Tabel kontingensi membantu menghitung probabilitas bersyarat
- Dari 100 pasien, 40 demam, 30 sakit flu, dan 25 keduanya

$$P(\text{Sakit} | \text{Demam}) = \frac{15}{60} = 0,1\ldots$$
$$P(\text{Sakit} | \text{Demam}) = \frac{P(\text{Sakit} \cap \text{Demam})}{P(\text{Demam})}$$
$$= \frac{25}{40}$$
$$= 0,625$$

	Sakit	Tidak Sakit	Total
Demam	25	15	40
Tidak Demam	5	55	60
Total	30	70	100

$$P(\text{Demam} | \text{Sakit}) = \frac{25}{30} = 0,1\ldots$$

fisikamodern00-2625220

Mendeteksi Kejadian Independent

fisikamodern00-2625220

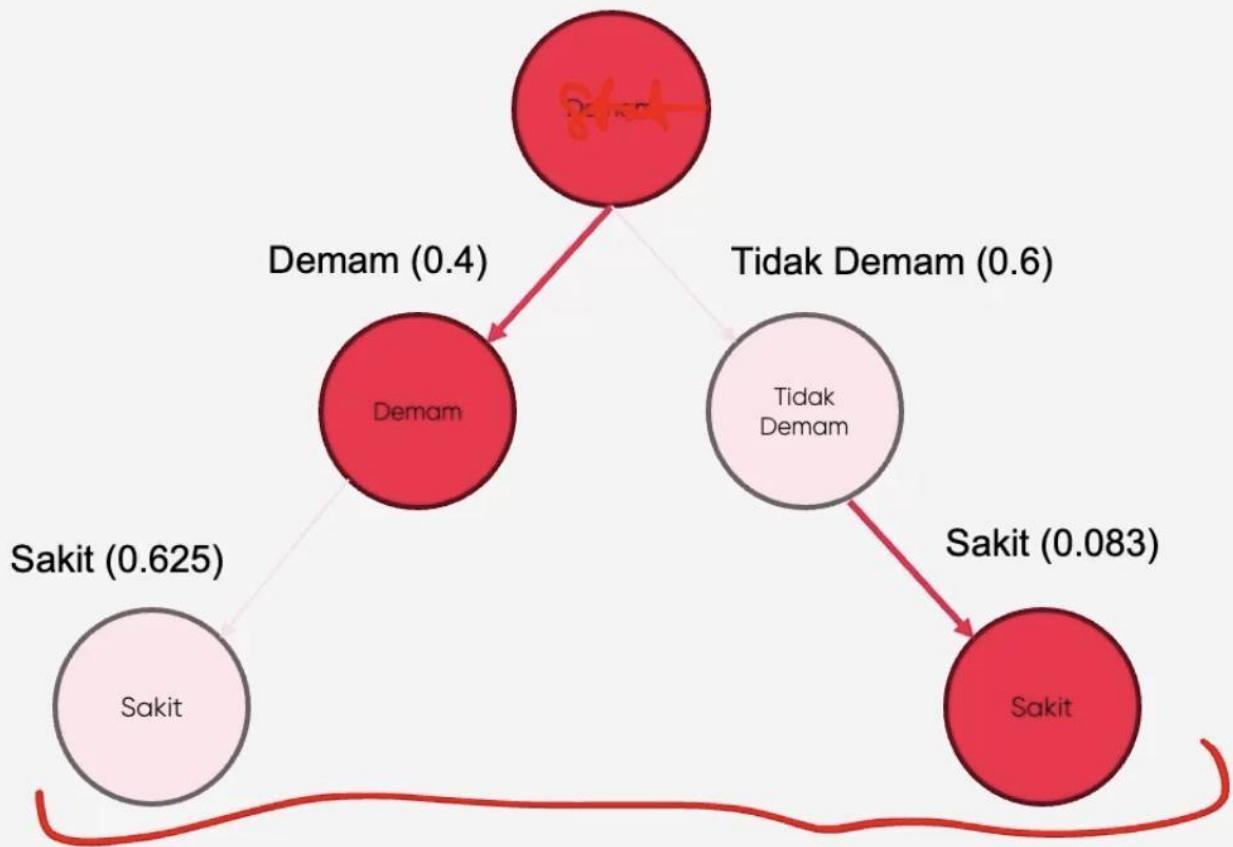
- Dua kejadian A dan B dinyatakan independent jika

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

- Atau secara ekuivalen

$$P(A|B) = P(A) \text{ dan } P(B|A) = P(B)$$

Ilustrasi decision tree



$$\text{Probabilitas total sakit} = (0.4 \times 0.625) + (0.6 \times 0.083) = 0.25 + 0.05 = 0.30$$

Ringkasan

- Conditional probability memperhitungkan informasi tambahan.
- Kejadian independen tidak saling mempengaruhi.
- Tabel kontingensi dan diagram pohon membantu visualisasi.
- Konsep ini penting dalam model prediktif dan inferensi statistik.

01

Memahami konsep dasar teorema Bayes

02

Menginterpretasikan rumus Bayes dalam konteks nyata

03

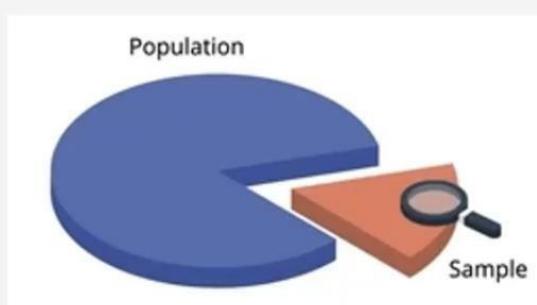
Menerapkan Teorema Bayes pada kasus nyata

04

Menghubungkan Teorema Bayes dengan algoritma machine learning

Pengantar

- Bayes Theorem adalah alat penting dalam inferensi statistik

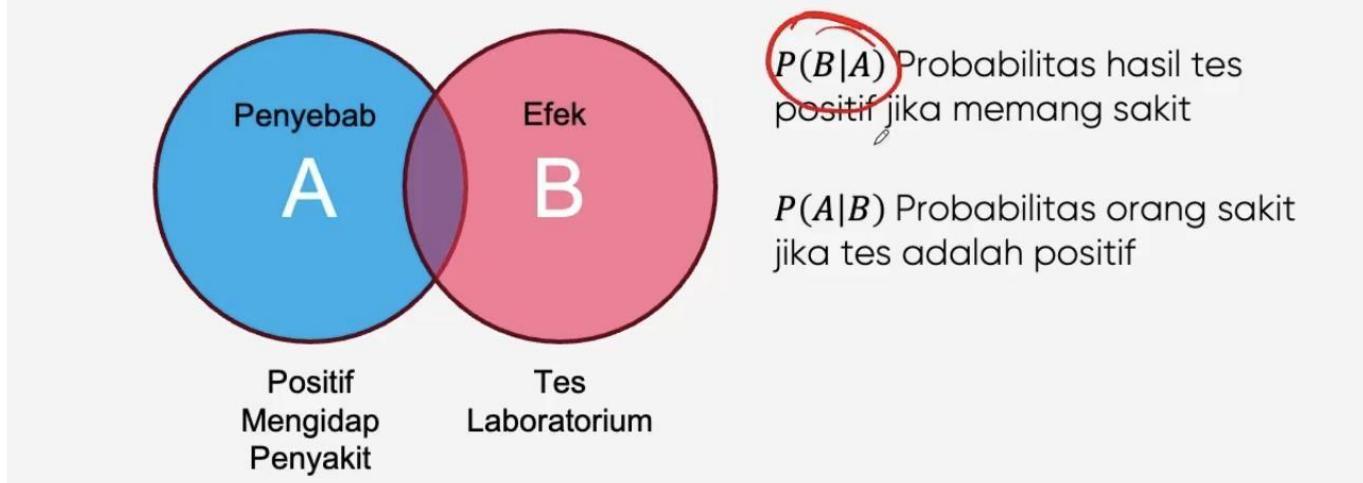


Inferensial:

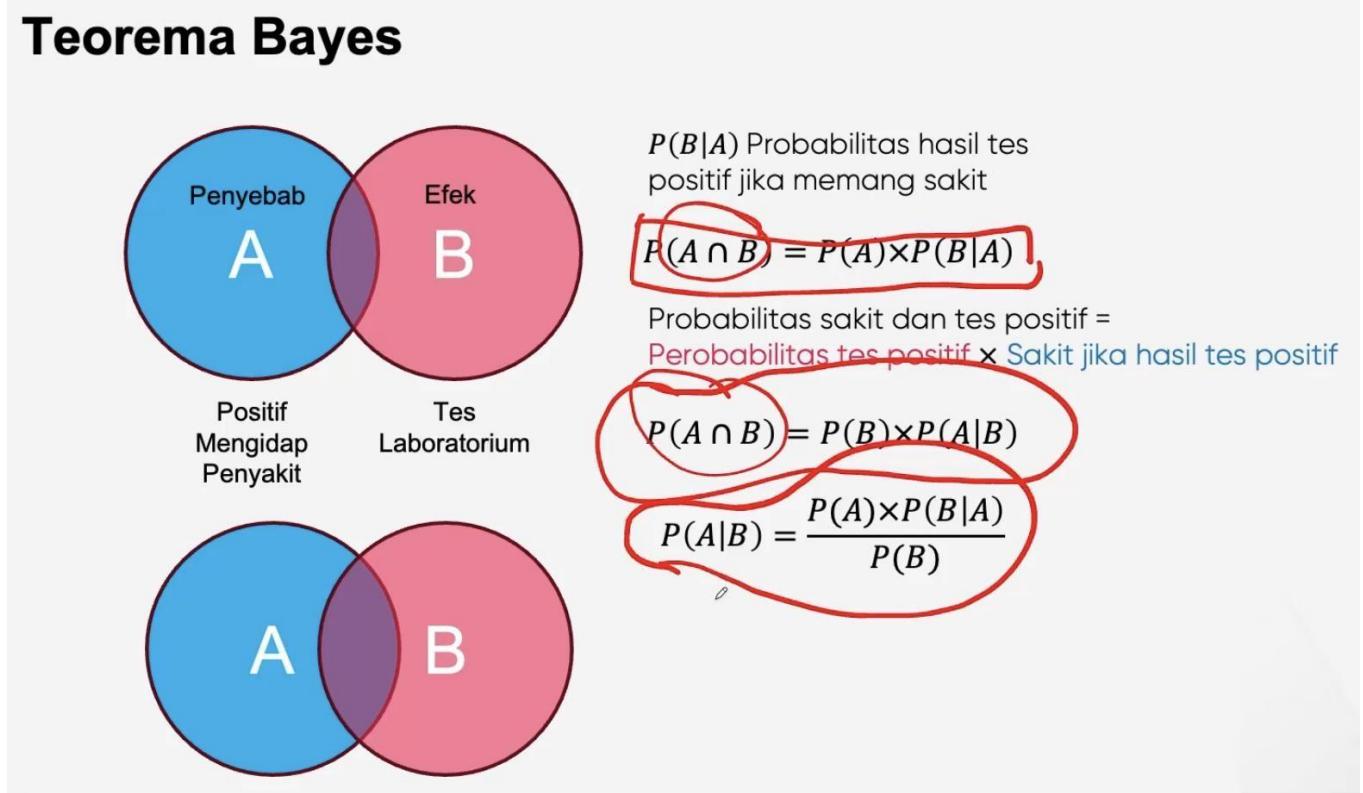
- Menggunakan sampel untuk menyimpulkan tentang populasi
- Melibatkan estimasi dan pengujian hipotesis
- Probabilitas diperbaharui setiap ada informasi baru

Pengantar

- Secara sederhana. Teorema Bayes memberikan cara matematis untuk membalikkan probabilitas bersyarat.
- Memungkinkan untuk menemukan probabilitas suatu "penyebab" (A) jika kita mengetahui "efek" (B) telah terjadi.

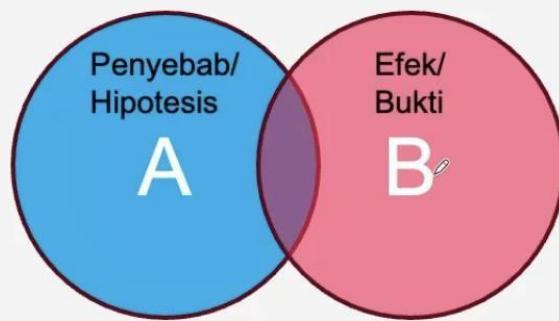


Teorema Bayes



example: orang di test PCR misal hasilnya positif, berapa probabilitas dia untuk terjadinya sakit

Teorema Bayes



$$P(A|B) = \frac{P(A) \times P(B|A)}{P(B)}$$

Inor ↓
 bukti.
 kew.
 banting.

- $P(B|A)$: **Likelihood** : Probabilitas bukti/terjadi B jika diberikan terjadi A
- $P(A)$: **Prior** : Probabilitas terjadi A / probabilitas awal
- $P(B)$: **Bukti/Evidence** : Probabilitas dari bukti B
- $P(A|B)$: **Posterior** : Probabilitas Hipotesis A atau Penyebab A diberikan bukti/terjadi B

misal ada kendaraan dan waktu tempuh

B = sebab = kendaraan

A = akibat = waktu tempuh

$P(A | B)$ = peluang tiba cepat jika naik kendaraan tertentu

$P(B | A)$ = peluang naik kendaraan tertentu jika tiba cepat

Essential Mathematical Foundation – Probability Theory – Bayes' Theorem Explained

Contoh: Diagnosis Medis

$P(\text{Positif Sakit}) = P$
 $P(\text{Tes}) = T$

- 1% populasi mengidap penyakit P
- Tes memiliki sensitivitas 99% dan
- Spesifikitas 95%

$$\begin{aligned}
 P(P|T) &= \frac{P(T|P) \cdot P(P)}{P(T)} \\
 &= \frac{99\% \cdot 1\%}{0,0599} \\
 &= 0,16667 \rightarrow 16,67\%
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(P) &= 1\% = 0,01 \\
 P(P_c) &= 99\% = 0,99 \\
 P(T) &= P(T|P) \cdot P(P) + P(T|P_c) \cdot P(P_c) \\
 &= 0,99 \cdot 0,01 + 0,05 \cdot 0,99 \\
 &= 0,06 \cdot 0,99 = 0,0594
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(T|P) &= 99\% \rightarrow P(T_c|P) = 1\% \\
 P(T_c|P_c) &= 95\% \rightarrow P(T|P_c) = 5\%
 \end{aligned}$$

Contoh Teorema Bayes

Diketahui Kotak :

1. Kotak A berisi 10 cokelat manis dan 5 cokelat pahit
2. Kotak B berisi 4 cokelat manis dan 16 cokelat pahit

Diketahui Kebiasaan Kamu :

1. 3 dari 5 kali, kamu memilih Kotak A. $P(\text{manis} \mid A) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$
2. 2 dari 5 kali, kamu memilih Kotak B. $P(\text{manis} \mid B) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$

Pertanyaan :

1. berapa peluang bahwa cokelat manis itu berasal dari Kotak A

Jawaban

1. Peluang Dasar (dari isi kotak) :

$$* P(\text{manis} \mid A) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

$$* P(\text{manis} \mid B) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

2. Hitung total probabilitas dapat cokelat manis $P(\text{manis})$:

$$* P(\text{manis}) = P(\text{manis} \mid A) \cdot P(A) + P(\text{manis} \mid B) \cdot P(B)$$

$$* P(\text{manis}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{12}{25}$$

3. Sekarang hitung $P(A \mid \text{manis})$ pakai teorema bayes :

$$* P(A \mid \text{manis}) = \frac{P(\text{manis} \mid A) \cdot P(A)}{P(\text{manis})}$$

$$* P(A \mid \text{manis}) = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{12}{25}} = \frac{50}{60} = \frac{5}{6} = 0.833 = 83.3\%$$

4. Kesimpulan :

setelah kamu tahu cokelat manis, peluang besar bahwa kamu ambil dari kotak A adalah $\frac{5}{6}$ atau sekitar 83.3%

Langkah-langkah



Tentukan Prior $P(A)$



Hitung likelihood $P(B|A)$



Hitung Evidence $P(B)$



Gunakan rumus bayes untuk mendapatkan posterior $P(A|B)$

Naive Bayes Classifier (Machine Learning)

- Algoritma naïve Bayes memanfaatkan teorema Bayes untuk tugas klasifikasi. Dengan Asumsi penyederhanaan yang NAÏVE!

$$P(A|B) = \frac{P(A) \times P(B|A)}{P(B)} \quad \leftarrow \text{teorema Bayes}$$

- Jika bukti yang ingin dipakai banyak, atau bukti ini biasanya disebut fitur.

$$P(A|b_1, b_2, \dots, b_n) = \frac{P(A) \times P(b_1, b_2, \dots, b_n | A)}{P(b_1, b_2, \dots, b_n)}$$

class
fitur

- Naïve Bayes mengasumsikan fitur-fitur ini independent, maka dapat disederhanakan:

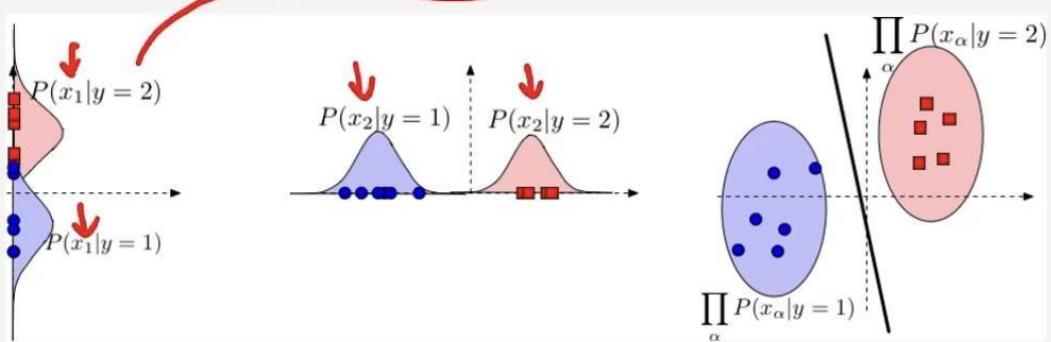
$$\begin{aligned} P(b_1, b_2, \dots, b_n | A) &= P(b_1 | A) \times P(b_2 | A) \times P(b_3 | A) \times \dots \times P(b_n | A) \\ &= \prod_{i=1}^n P(b_i | A) \end{aligned}$$

Naive Bayes Classifier (Machine Learning)

- Naïve Bayes mengasumsikan fitur-fitur ini independent, maka dapat disederhanakan:

$$P(b_1, b_2, \dots, b_n | A) = \prod_{i=1}^n P(b_i | A)$$

$$P(A_m | b_1, b_2, \dots, b_n) = \frac{P(A_m) \times \prod_{i=1}^n P(b_i | A_m)}{P(b_1, b_2, \dots, b_n)}$$



Contoh

Email ID	Teks Email	Label
1	Beli obat murah	Spam
2	Diskon besar sekarang	Spam
3	Halo apa kabar	Bukan Spam
4	Pertemuan tim besok	Bukan Spam
5	Obat terlaris diskon	Spam

Prediksi email baru: "Murah Sekarang"

A = Label / Kelas

- Jumlah total email: 5
- Jumlah email "Spam": 3
- Jumlah email "Bukan Spam": 2

$$P(\text{spam}) = P(A_1) = \frac{\text{jumlah spam}}{\text{total email}} = \frac{3}{5} = 0.6$$

$$P(\text{Bukan spam}) = P(A_2) = \frac{\text{jumlah bukan spam}}{\text{total email}} = \frac{2}{5} = 0.4$$

Contoh

Tabel Fitur/likelihood kata pada kelas spam

$$\begin{aligned} P(\text{kata|spam}) &= P(\text{kata}|A_1) = \frac{\text{Jumlah kemunculan kata} + 1}{\text{Total kata di kelas spam} + \text{total kosakata}} \\ &= \frac{\text{jumlah kemunculan kata}}{9 + 13} \end{aligned}$$

Kata	Jumlah di spam	$P(\text{kata spam})$
beli	1	$\frac{(1+1)}{22} = 0.0909$
obat	2	0.1364
murah	1	0.0909
diskon	2	0.1364
besar	1	0.0909
Sekarang	1	0.0909
Terlaris	1	0.0909
(kata lain)	0	0.0455

Contoh

Tabel Fitur/likelihood kata pada kelas bukan spam

$$P(\text{kata|bukan spam}) = P(\text{kata}|A_2) = \frac{\text{Jumlah kemunculan kata} + 1}{\text{Total kata di kelas bukan spam} + \text{total kosakata}}$$

$$= \frac{\text{jumlah kemunculan kata}}{6 + 13}$$

Kata	Jumlah di bukan spam	$P(\text{kata bukan spam})$
halo	1	$\frac{(1+1)}{19} = 0.1053$
apa	1	0.1053
kabar	1	0.1053
pertemuan	1	0.1053
tim	1	0.1053
besok	1	0.1053
(kata lain)	0	0.0526

Contoh

Prediksi email baru: "Murah Sekarang"

$$P(\text{spam}) = P(A_1) = \frac{\text{jumlah spam}}{\text{total email}} = \frac{3}{5} = 0.6$$

$$P(\text{Bukan spam}) = P(A_2) = \frac{\text{jumlah bukan spam}}{\text{total email}} = \frac{2}{5} = 0.4$$

$$P(\text{Spam|email baru}) > P(\text{Bukan Spam|email baru})$$

$$0.004958 \times \frac{1}{P(\text{semua kata})} > 0.001107 \times \frac{1}{P(\text{semua kata})}$$

$$0.004958 > 0.001107$$

SPAM!

$$P(\text{Spam|email baru}) = \frac{P(\text{Spam}) \cdot P(\text{murah|spam}) \cdot P(\text{sekarang|spam})}{P(\text{semua kata})}$$

$$= 0.6 \times \frac{2}{22} \times \frac{2}{22} \times \frac{1}{P(\text{semua kata})}$$

$$= 0.004958 \times \frac{1}{P(\text{semua kata})}$$

$$P(\text{Bukan Spam|email baru}) = \frac{P(\text{Bukan Spam}) \cdot P(\text{murah|bukan spam}) \cdot P(\text{sekarang|bukan spam})}{P(\text{semua kata})}$$

$$= 0.4 \times \frac{1}{19} \times \frac{1}{19} \times \frac{1}{P(\text{semua kata})}$$

$$= 0.001107 \times \frac{1}{P(\text{semua kata})}$$



Naïve Bayes



Naïve Bayes Classifier menggunakan teorema Bayes



Fitur bersifat independen



Cepat dan efektif untuk klasifikasi teks



Contoh: `sklearn.naive_base.GaussianNB.MultinomialNB`

Ringkasan

- Teorema Bayes menggabungkan informasi baru dengan pengetahuan awal
- Digunakan dalam banyak aplikasi nyata dan algoritma Machine Learning
- Penting untuk memahami asumsi dan interpretasi hasil

Chapter 3. Random Variables Probability Distribution

3-1. What are random variables

01

Memahami konsep Random Variable

02

Membedakan antara fenomena diskrit dan kontinu

03

Memahami pentingnya Random Variable untuk pemodelan

Apa Itu Variables/Variabel?

Simbol yang mewakili kuantitas yang dapat berubah

Contoh: Suhu, Jumlah_penjualan, Usia



Apa Itu Random Variables?

Dalam Probabilitas, nilai dari variable ditentukan oleh **proses acak** atau **eksperimen**

Contoh:

- Jika kita melempar koin, hasilnya bisa "Heads" (H) atau "Tails" (T). Ini bukan angka.
- Bagaimana jika kita ingin menganalisis hasilnya secara matematis? Kita perlu mengubahnya menjadi angka.

CONTOH!

Percobaan: Melempar sebuah koin satu kali

Ruang Sampel (S): {Angka, Gambar}



↓ ↓
1 0

Tantangan: Analisis secara kuantitatif

Solusi:

definisi:

$$\begin{aligned} X=1 &\rightarrow \text{hasil} \rightarrow \text{angka} \\ X=0 &\rightarrow \text{hasil} \rightarrow \text{gambar} \\ P(X=1) = ? & \frac{1}{2} \quad P(X=0) = ? \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\text{angka}) &\rightarrow P(X=1) \\ P(\text{gambar}) &\rightarrow P(X=0). \end{aligned}$$

CONTOH!

Percobaan: Melempar sebuah koin **dua** kali

Ruang Sampel (S): {AA, AG, GA, GG}



$$\begin{aligned} P(X=1) &= P(AG) + P(GA) \\ &= 0,25 + 0,25 \\ &= 0,5 \end{aligned}$$

Tantangan: Analisis secara kuantitatif

Solusi:

definisi ~~R~~ $\rightarrow X = \text{jumlah angka yg muncul}$

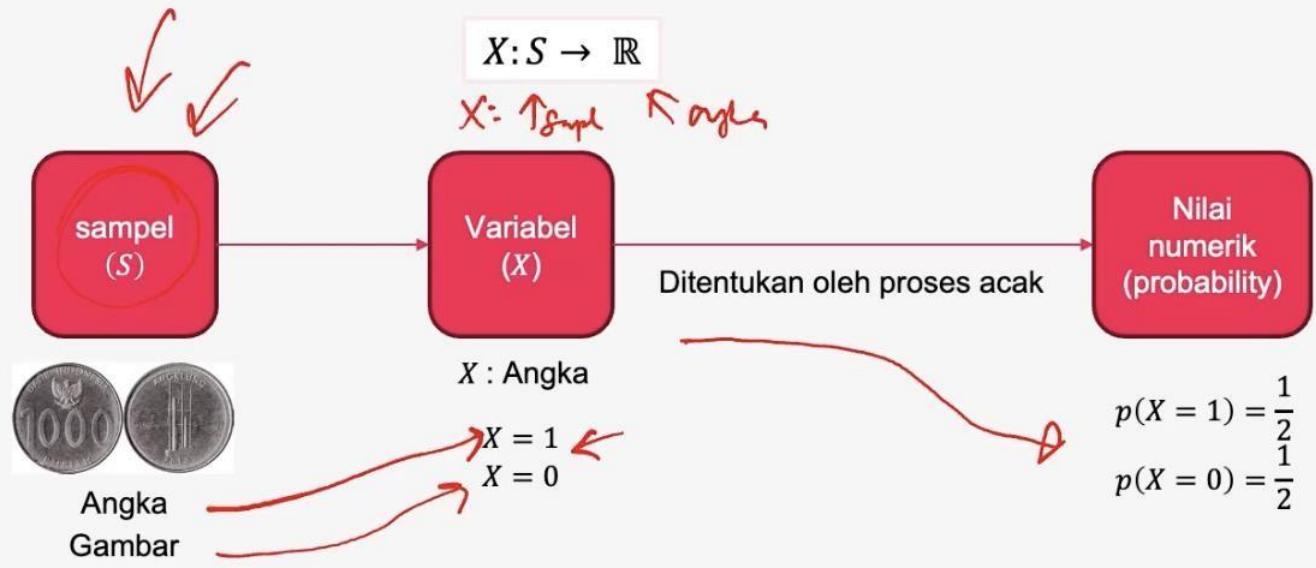
$$\begin{aligned} X=0 &\rightarrow \text{Angka } 0 \\ X=1 &\rightarrow \text{Angka } 1 \text{ kali} \\ X=2 &\rightarrow \text{Angka } 2 \text{ kali muncul.} \end{aligned}$$

$$X = \{0, 1, 2\}$$



Definisi Formal?

Dilambangkan dengan huruf kapital misalkan X, Y atau Z , yang memetakan sample (S) ke bilangan real (\mathbb{R})



Diskrit VS Kontinu

fisikamodern00-2625220

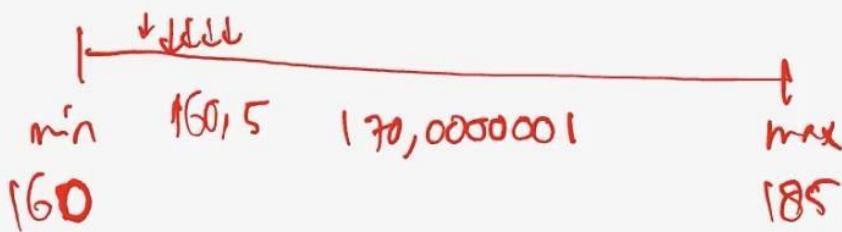
Discrete Random Variable (Variabel Acak Diskrit)

- Mengambil nilai-nilai yang dapat dihitung atau terpisah.
- Jumlah terbatas atau tak terhingga, tapi masih bisa dihitung (misalnya 1, 2, 3, ...)
- Contoh: Jumlah anak di sebuah keluarga, jumlah mobil yang lewat di persimpangan

1, 2, 3, 4, ...

Continuous Random Variable (Variabel Acak Kontinu)

- Mengambil nilai dalam sebuah interval yang tak terhitung jumlahnya.
- Nilai-nilai diukur, bukan dihitung.
- Contoh: Tinggi badan seseorang, suhu ruangan, waktu yang dibutuhkan untuk menyelesaikan sebuah tugas



Let's Differentiate!

Diskrit/Kontinu

Waktu yang dibutuhkan sebuah baterai untuk habis

Kontinu

Jumlah kecelakaan mobil dalam sehari di Bandung

Diskrit

Tingkat gula darah seseorang

Kontinu

Jumlah buku yang terjual di sebuah toko dalam sehari

Diskrit

RECAP

Apa itu random variables: Sebuah fungsi yang mengubah hasil non-numerik dari sebuah percobaan acak menjadi nilai numerik

Tujuannya: Memungkinkan kita untuk menggunakan alat-alat matematika dan statistic untuk menganalisa dan memodelkan fenomena acak

Dua tipe utama:

- Diskrit: Nilai yang dapat dihitung (count)
- Kontinu: Nilai yang diukur dalam sebuah interval

Next up: Kita akan membahas lebih dalam tentang distribusi probabilitas untuk variable acak diskrit dan kontinu

01

Memahami dan menginterpretasikan Probability Mass Function (PMF) untuk menghitung probabilitas

02

Mengidentifikasi dan menerapkan model distribusi binomial dan distribusi poisson dalam masalah nyata

03

Menghitung Expected Value (nilai harapan) dan Variance (varians) untuk distribusi binomial dan poisson)

Pengantar Probability Mass Function (PMF)

$$F(x) = \dots$$

Apa itu PMF?

- PMF adalah sebuah fungsi yang memberikan probabilitas bahwa sebuah variabel acak diskrit akan sama dengan nilai tertentu.
- Singkatnya, ini adalah peta yang menunjukkan seberapa sering setiap nilai yang mungkin muncul.

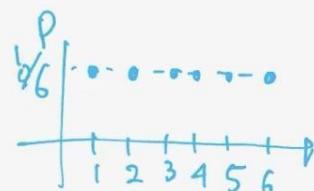
Definisi

- Untuk variabel acak diskrit X , PMF diambangkan sebagai
- $$P(X = x)$$
- nsikamodern00-2625220
- Probabilitas untuk setiap nilai harus non-negative: $P(X = x) \geq 0$
 - Total semua probabilitas: $\sum_x P(X = x) = 1$

Contoh never dies!

Percobaan

Melempar sebuah dadu standar enam sisi



Hitung

- Variabel acak X : hasil lemparan dadu
- Sampel S : $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- PMF untuk setiap hasil (asumsi dadu adil):

$$P(X=x) = ? \quad \text{total probabilitas.}$$

$$P(X=1) = \frac{1}{6} \quad \sum P(X=x) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \\ + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$$

$$P(X=6) = \frac{1}{6} \quad = \frac{6}{6}$$

Distribusi Binomial

Digunakan ketika kita memiliki percobaan dengan jumlah pengulangan yang tetap (n), di mana setiap percobaan hanya memiliki dua hasil yang mungkin (sukses atau gagal)

Syarat Percobaan Binomial:

1. Ada n percobaan yang independen.
2. Setiap percobaan memiliki dua hasil: Sukses atau Gagal.
3. Probabilitas sukses (p) tetap konstan di setiap percobaan.

sukses atau gagal



$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Di mana $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

jumlah berhasil
jumlah percobaan
probabilitas

Distribusi Binomial

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$n=1$ $k=1$ $p=0,5$

1 percobaan, 1 berhasil

$$P(X = 1) = \frac{1!}{1!(1-1)!} (0,5)^1 (1-0,5)^{1-1} = 0,5$$

$n=1$ $k=0$ $p=0,5$

1 percobaan, 1 gagal

$$P(X = 0) = \frac{1!}{0!(1-0)!} (0,5)^0 (1-0,5)^{1-0} = 0,5$$

$\cancel{0,5} \cdot 0,5 (0,5)^0 = 0,5$



Distribusi Binomial

$$n=2, k=1, p=0.5$$

2 percobaan, 1 berhasil ~~dan~~ 1 gagal

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$P(X = 1) = \frac{2!}{1!(2-1)!} (0.5)^1 (1-0.5)^{2-1} = 0.5$$

$$n=2, k=2, p=0.5$$

2 percobaan, 2 berhasil

$$P(X = 2) = \frac{2!}{2!(2-2)!} (0.5)^2 (1-0.5)^{2-2} = 0.25$$

$$n=2, k=0, p=0.5$$

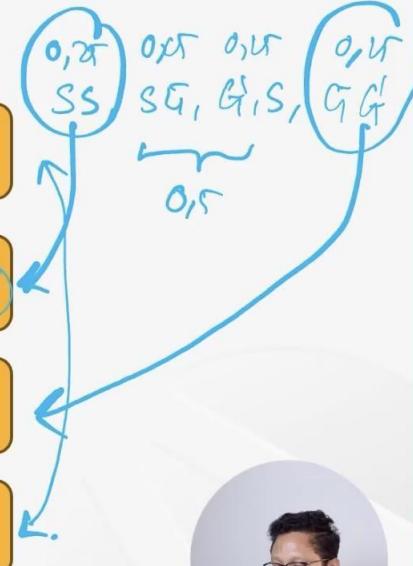
2 percobaan, 2 gagal

$$P(X = 0) = \frac{2!}{0!(2-0)!} (0.5)^0 (1-0.5)^{2-0} = 0.25$$

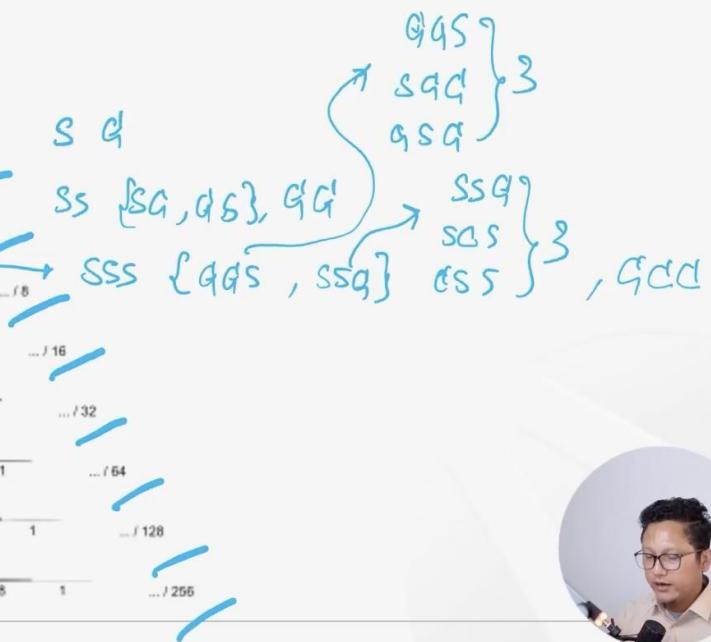
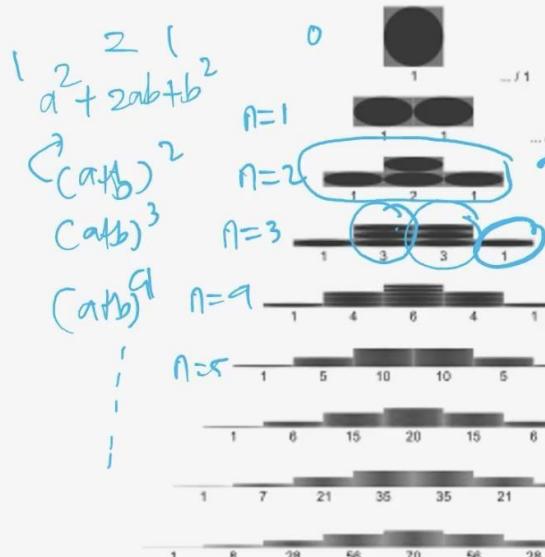
$$n=2, k=1, p=0.5$$

2 percobaan, 1 gagal ~~dan~~ 1 berhasil

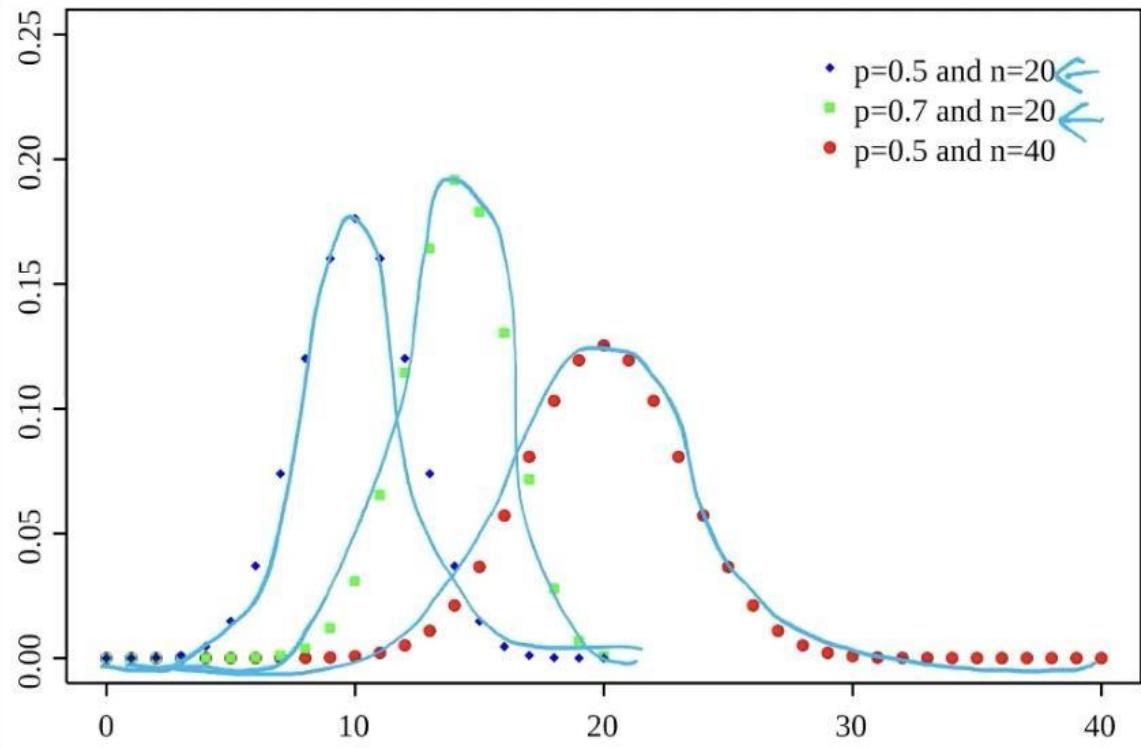
$$P(X = 1) = \frac{2!}{1!(2-1)!} (0.5)^1 (1-0.5)^{2-1} = 0.5$$



Distribusi Binomial

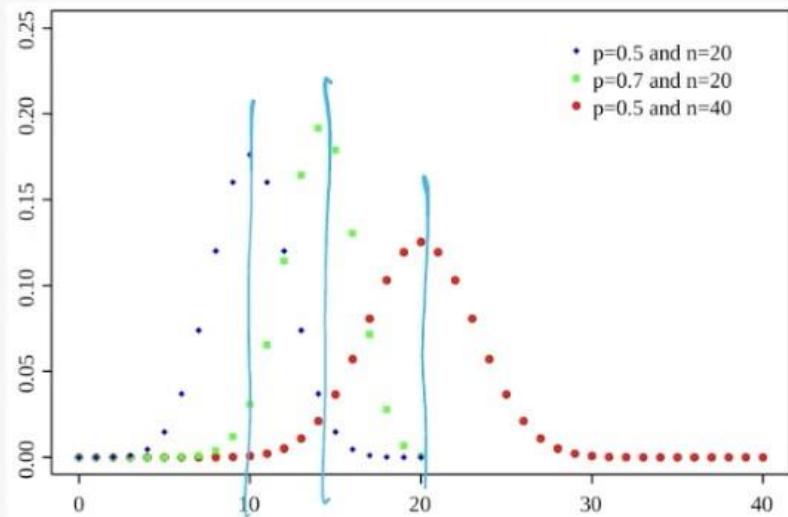


Distribusi Binomial



Expected Value

Expected Value ($E[X]$): Rata-rata atau nilai yang diharapkan dari variable acak jika percobaan diulang berkali-kali



$$E[X] = n \cdot p$$

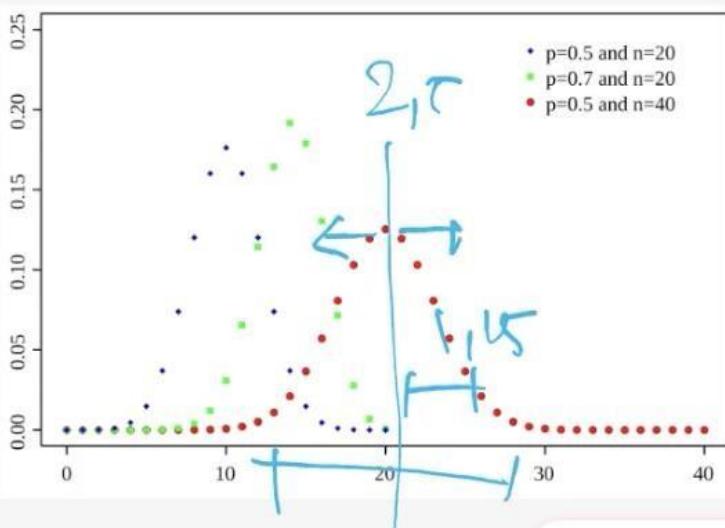
n: Jumlah percobaan
p: Probabilitas

Contoh: Melempar koin 5 kali

$$E[X] = 0.5 \cdot 5 = 2.5$$

Variance

Variance ($Var[X]$): Mengukur seberapa jauh nilai-nilai yang mungkin tersebar dari nilai harapan.



$$Var[X] = n \cdot p \cdot (1 - p)$$

n : Jumlah percobaan
 p : Probabilitas

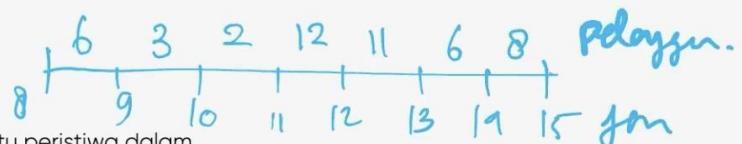
Contoh: Melempar koin 5 kali

$$\begin{aligned} Var(X) &= 2\pi \cdot (1 - 0.5) \\ &= 1.25 \end{aligned}$$

3-3. Discrete Probability Distribution - 2

Distribusi Poisson

Digunakan ketika kita menghitung jumlah kejadian suatu peristiwa dalam interval waktu atau ruang yang tetap, dengan asumsi kejadian-kejadian terjadi secara independent pada Tingkat rata-rata yang konstan (λ)



Parameter (λ): Rata-rata jumlah kejadian dalam interval yang diberikan

Contoh: Rata-rata 3 pelanggan tiba di sebuah toko per jam

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

Di mana

$$e \approx 2.71828$$

Distribusi Poisson

Jika probabilitas sukses untuk setiap percobaan adalah $p = \frac{\lambda}{n}$, di mana λ adalah rata-rata (mean) dan n adalah jumlah percobaan

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

Karena percobaan pada domain kontinu maka n berjumlah tak hingga

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!} \right] \left[\frac{\lambda^k}{n^k} \right] \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\lambda^k}{k!} \right] \left[\frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{n^k} \right] \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \end{aligned}$$

Distribusi Poisson

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!} \right] \left[\frac{\lambda^k}{n^k} \right] \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\lambda^k}{k!} \right] \left[\frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{n^k} \right] \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\lambda^k}{k!} \right] \left[\frac{n \cdot n-1 \cdot \dots \cdot n-k+1}{n^n} \right] \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\lambda^k}{k!} \right] \left[\frac{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k} \right] \\ P(X = k) &= \left[\frac{\lambda^k}{k!} \right] e^{-\lambda} \end{aligned}$$

Distribusi Poisson

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

$e \approx 2.71828$

Skenario: Rata-rata 4 pelanggan tiba di sebuah toko per jam

Tantangan: Berapa probabilitas tepat 2 pelanggan tiba dalam jam berikutnya

Parameter:

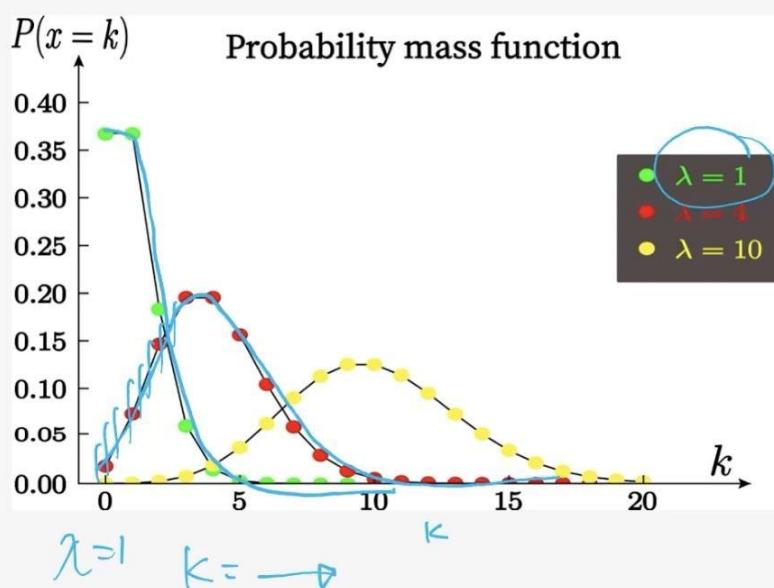
- $\lambda = 4$ (rata-rata pelanggan per jam)
- $k = 2$ (jumlah kejadian yang diinginkan)

Perhitungan:

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

$$P(X = 2) = \frac{e^{-4} \cdot 4^2}{2!} = \frac{e^{-4} \cdot 16}{2 \cdot 1} = 0,224 \quad 22,4\%$$

Distribusi Poisson



Distribusi Poisson menunjukkan bahwa semakin tinggi nilai lambda (rata-rata) maka distribusi akan bergeser ke kanan.

Mean $E[X] = \text{Variance } Var[X] = \lambda$

Recap

- **Probability Mass Function** : Fungsi untuk menghitung probabilitas nilai spesifik dari variable acak
- **Binomial**: Digunakan untuk percobaan dengan n tetap, dua hasil (sukses/gagal), dan probabilitas sukses yang konstan.
- **Poisson**: Digunakan untuk menghitung jumlah kejadian dalam interval dengan rata-rata konstan

Next Up:

Setelah memahami distribusi diskrit, selanjutnya kita akan menyelami dunia Continuous Probability Distributions, termasuk Cumulative Distribution Function (CDF).

3-4. Continuous Probability Distribution

01

 **Memahami bagaimana Probability Density Function (PDF) menggambarkan variabel acak kontinu**

02

Mengaplikasikan distribusi normal dan distribusi uniform dalam konteks praktis

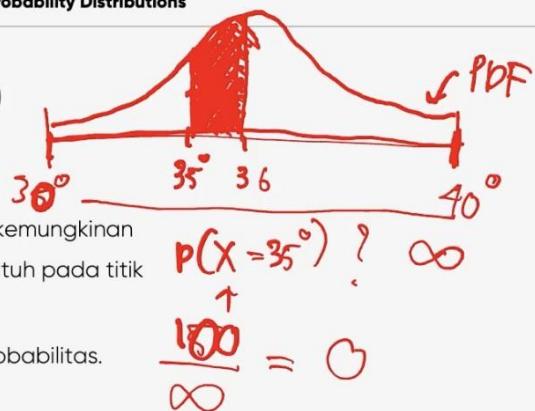
03

Menginterpretasikan area di bawah kurva sebagai probabilitas dan memahami konsep probabilitas total

Pengantar Probability Density Function (PDF)

Apa itu PDF?

- PDF adalah sebuah fungsi yang menggambarkan kemungkinan relatif bahwa sebuah variabel acak kontinu akan jatuh pada titik tertentu.
- Berbeda dengan PMF, nilai PDF ($f(x)$) bukanlah probabilitas. Probabilitas dihitung untuk sebuah rentang nilai



Penting!

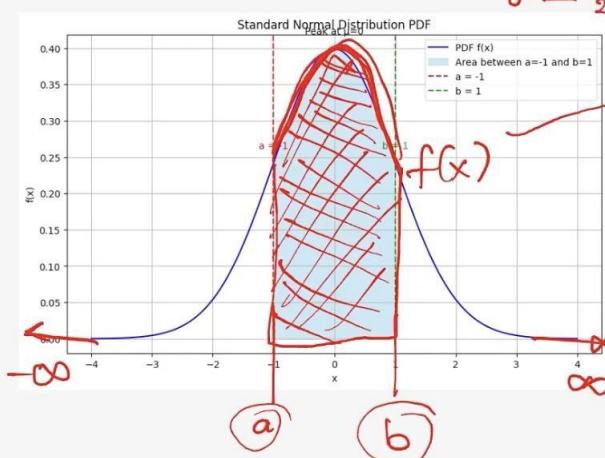
- Untuk variabel acak kontinu, probabilitas bahwa X sama dengan nilai tertentu adalah nol

$$P(X = x) = 0$$



- Ini karena ada jumlah tak terhingga dari nilai yang mungkin dalam sebuah interval

Area di Bawah Kurva

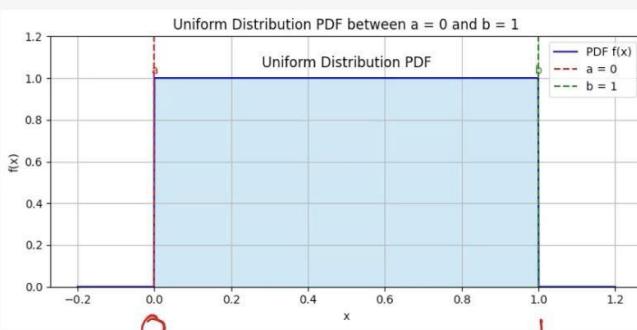


$$\text{Luas} = \int_{-2}^2 y \cdot dx = \int_{-2}^2 1 \cdot dx = x \Big|_{-2}^2 = 2 - (-2) = 4$$

- Probabilitas X berada dalam interval $[a, b]$ dihitung sebagai area di bawah kurva PDF dari a hingga b
- Probabilitas Total adalah luas area seluruh kurva PDF $f(x)$ dari minus tak hingga ke plus tak hingga

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = 1$$

Distribusi Uniform (Seragam)



- Kapan digunakan?** Ketika setiap nilai dalam sebuah interval memiliki probabilitas yang sama untuk terjadi.

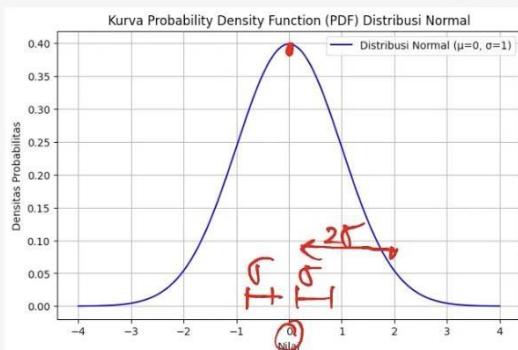
- Ciri-ciri:**

- PDF-nya berbentuk persegi panjang atau "datar" $a \leq x \leq b$
- $f(x) = \frac{1}{b-a}$ untuk $a \leq x \leq b$ $\rightarrow f(x) = \frac{1}{b-a}$
- $f(x) = 0$ di luar interval

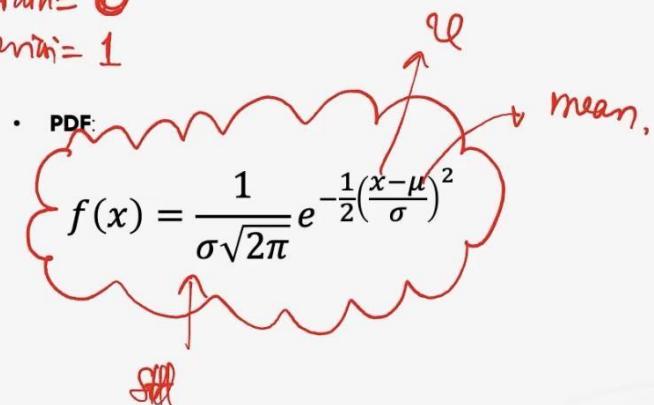
- Contoh:** Waktu tunggu untuk bus yang datang setiap 10 menit. Waktu tunggu antara 0 dan 10 menit memiliki probabilitas yang sama



Distribusi Normal (Gaussian)

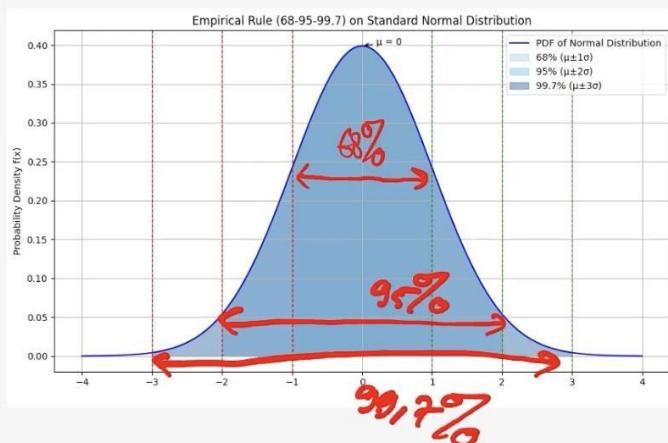


Rata-rata = 0
Standar deviasi = 1



- Kapan digunakan?** Ini adalah distribusi paling umum dalam statistik dan data science. Banyak fenomena alami mengikuti pola ini.
- Ciri-ciri:**
 - Bentuk kurva lonceng (bell curve)
 - Simetris sekitar nilai rata-rata atau mean μ .
 - Ditentukan oleh dua parameter: mean μ dan standard deviasi σ

Aturan Empiris (68 – 95 – 99.7)



Dalam distribusi Normal, probabilitas suatu nilai jatuh dalam rentang tertentu dari rata-rata dapat diestimasi dengan mudah:

- Sekitar 68% data berada dalam 1 standar deviasi dari rata-rata ($\mu \pm 1\sigma$).
- Sekitar 95% data berada dalam 2 standar deviasi dari rata-rata ($\mu \pm 2\sigma$).
- Sekitar 99.7% data berada dalam 3 standar deviasi dari rata-rata ($\mu \pm 3\sigma$).

Aturan ini adalah cara cepat untuk memahami sebaran data.

Ringkasan

- PDF** mendeskripsikan probabilitas untuk variabel acak kontinu, di mana probabilitas dihitung sebagai area di bawah kurva.
- Distribusi Uniform** memiliki probabilitas yang sama di seluruh interval, dengan bentuk persegi panjang.
- Distribusi Normal** adalah distribusi berbentuk lonceng yang sangat umum, ditentukan oleh **mean (μ)** dan **standard deviation (σ)**.
- Area di bawah kurva PDF** adalah representasi visual dari probabilitas. Total area selalu 1.

NEXT UP → Cumulative Distribution Function (CDF).

3-5. Cummulative Distribution Function (CDF)

01

Menggunakan Cumulative Distribution Function (CDF) untuk menghitung probabilitas

02

Memvisualisasikan dan menginterpretasikan probabilitas kumulatif melalui grafik

Pengantar Cumulative Distribution Function (CDF)

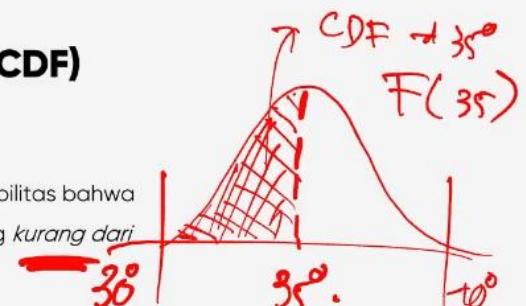
Apa itu CDF?

- CDF adalah sebuah fungsi yang memberikan probabilitas bahwa sebuah variabel acak (X) akan mengambil nilai yang kurang dari atau sama dengan nilai tertentu (x).
- CDF dilambangkan sebagai ($F(x)$)

Formulasi

$$F(x) = P(X \leq x)$$

$$F(x) = P(X \leq x)$$



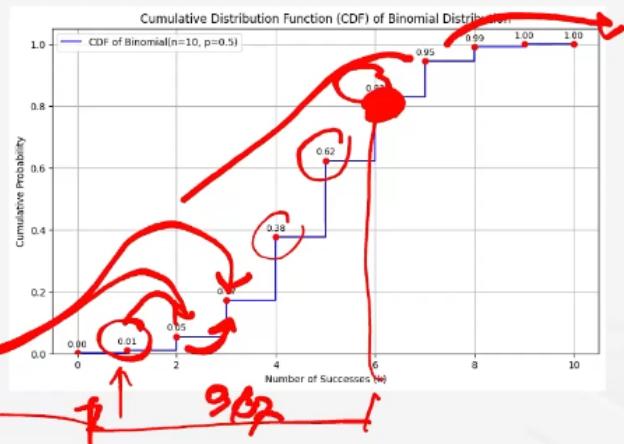
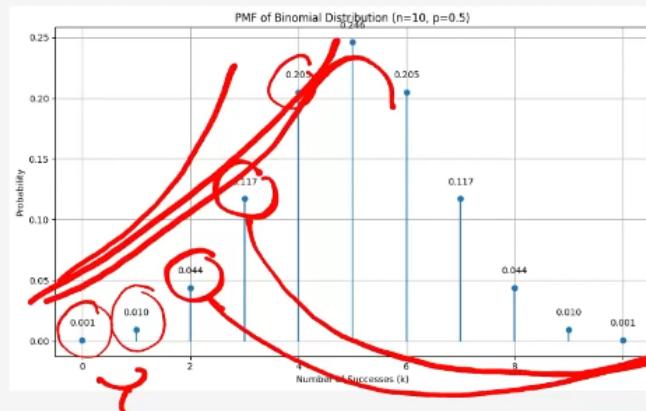
- CDF memberitahu kita total probabilitas yang "terakumulasikan" hingga titik tertentu.
- Nilai CDF selalu berada di antara 0 dan 1
- Fungsi CDF selalu non-turun (Monotonically non-decreasing)

Variabel Diskrit PMF dan CDF

↓ PMF

↓ CDF

fsikamodern00-2825220

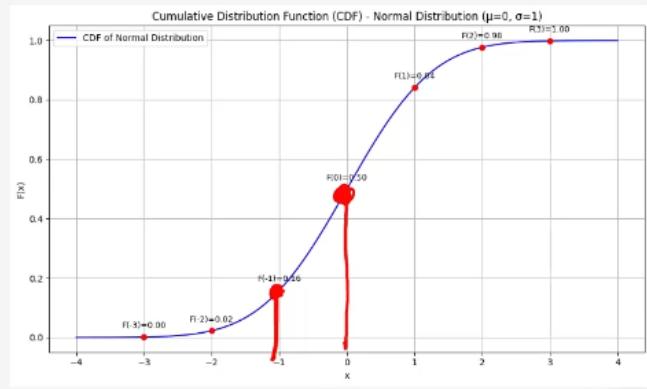
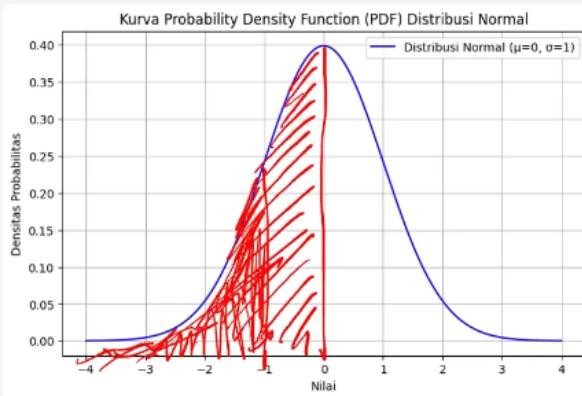


- Hubungan antara PMF dan CDF Adalah bahwa CDF merupakan jumlah dari semua nilai PMF hingga titik x

$$F(x) = \sum_{k \leq x} P(X = k)$$

$$F(6) = \sum_{k \leq 6} P(X = k) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + \dots + P(X=6)$$

Variabel Kontinu PDF dan CDF



- Hubungan antara PDF dan CDF Adalah bahwa CDF merupakan integral fungsi PDF hingga titik x dari $-\infty$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(k)dk$$

fisikamodern00-2626220

Kenapa CDF?



- Dengan CDF kita dengan mudah menghitung probabilitas di antara dua nilai

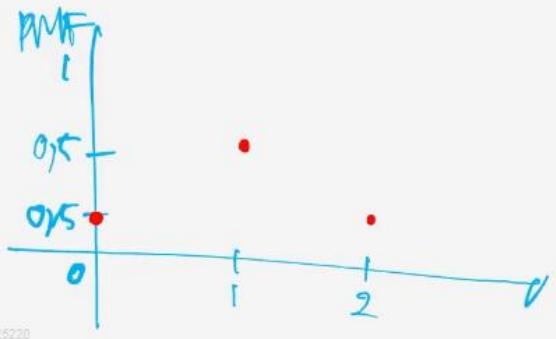
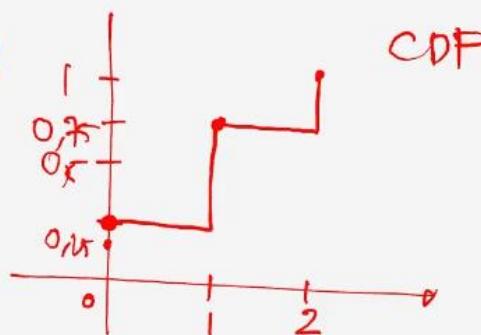
$$\begin{aligned} P(a \leq X \leq b) &= F(b) - F(a) \\ &= F(b) - F(a). \end{aligned}$$

- Berlaku untuk distribusi diskrit maupun kontinu

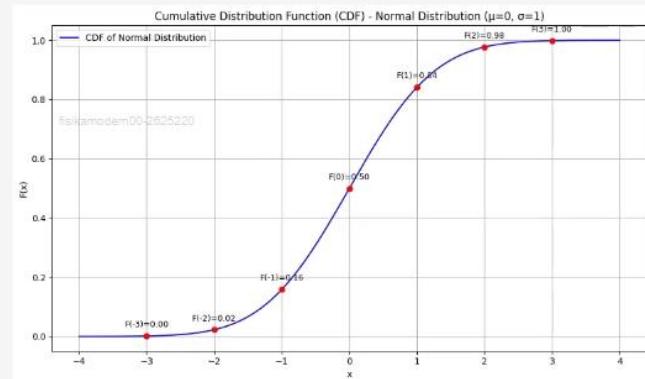
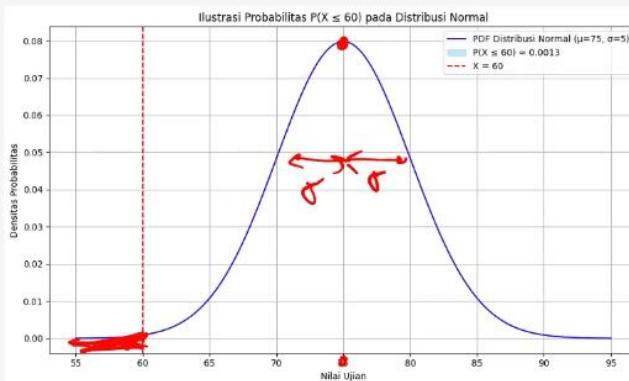
Contoh diskrit:

- Skenario:** Melempar dua koin, A = jumlah Angka
- Nilai yang mungkin:** $a = \{0,1,2\}$
- PMF:** $P(A = 0) = 0.25, P(A = 1) = 0.5, P(A = 2) = 0.25$
- CDF ($F(a)$):**

$\text{AA } \text{AG } \text{GA } \text{GG}$
 $P(A=0) = 0,25$
 $P(A=1) = 0,5$
 $P(A=2) = 0,25$



Contoh kontinu:



- Seorang mahasiswa ingin mengetahui probabilitas bahwa nilai ujian statistiknya (yang mengikuti distribusi normal standar dengan rata-rata $\mu = 75$ dan standar deviasi $\sigma = 5$) ~~lebih~~ dari 60.

$$P(X \leq 60) = \int_{-\infty}^{60} f(x) dx$$

- Seorang mahasiswa ingin mengetahui probabilitas bahwa nilai ujian statistiknya (yang mengikuti distribusi normal standar dengan rata-rata $\mu = 75$ dan standar deviasi $\sigma = 5$) kurang dari 60.

- Z-score: Mengubah distribusi normal umum menjadi distribusi normal standar (dengan $\mu = 0, \sigma = 1$)

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{60 - 75}{5} = -3$$

↓ ↓ ↗
-15 5

- Sehingga

$$P(X \leq 60) = P(Z \leq -3) = 0.0013$$

$$= 0,13\%$$

Z	CDF P(Z ≤ z)	Z	CDF P(Z ≤ z)
-3.4	0.0003	0.1	0.5398
-3.3	0.0005	0.2	0.5793
-3.2	0.0007	0.3	0.6179
-3.1	0.0010	0.4	0.6554
-3.0	0.0013	0.5	0.6915
-2.9	0.0019	0.6	0.7257
-2.8	0.0026	0.7	0.7580
-2.7	0.0035	0.8	0.7881
-2.6	0.0047	0.9	0.8159
-2.5	0.0062	1.0	0.8413
-2.4	0.0082	1.1	0.8643
-2.3	0.0107	1.2	0.8849
-2.2	0.0139	1.3	0.9032
-2.1	0.0179	1.4	0.9192
-2.0	0.0228	1.5	0.9332
-1.9	0.0287	1.6	0.9452
-1.8	0.0359	1.7	0.9554
-1.7	0.0446	1.8	0.9641
-1.6	0.0548	1.9	0.9713
-1.5	0.0668	2.0	0.9772
-1.4	0.0808	2.1	0.9821
-1.3	0.0968	2.2	0.9861
-1.2	0.1151	2.3	0.9893
-1.1	0.1357	2.4	0.9918
-1.0	0.1587	2.5	0.9938
-0.9	0.1841	2.6	0.9953
-0.8	0.2119	2.7	0.9965
-0.7	0.2420	2.8	0.9974
-0.6	0.2743	2.9	0.9981
-0.5	0.3085	3.0	0.9987
-0.4	0.3446	3.1	0.9990
-0.3	0.3821	3.2	0.9993
-0.2	0.4207	3.3	0.9995
-0.1	0.4602	3.4	0.9997
0.0	0.5000		

Contoh CDF untuk PDF normal dengan Z-score:

- Seorang mahasiswa ingin mengetahui probabilitas bahwa nilai ujian statistiknya (yang mengikuti distribusi normal standar dengan rata-rata $\mu = 75$ dan standar deviasi $\sigma = 5$) kurang dari 80 dan lebih besar dari 70
- Z-score: Mengubah distribusi normal umum menjadi distribusi normal standar (dengan $\mu = 0, \sigma = 1$)

$$Z_1 = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{80 - 75}{5} = 1$$

$$Z_2 = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{70 - 75}{5} = -1$$

- Sehingga

$$P(70 \leq X \leq 80) = P(X \leq 80) - P(X \leq 70)$$

~~68%~~

$$= P(Z \leq 1) - P(Z \leq -1)$$

$$= 0,8413 - 0,1587 = 0,6827$$

Z	CDF P(Z ≤ z)	Z	CDF P(Z ≤ z)
-3.4	0.0003	0.1	0.5398
-3.3	0.0005	0.2	0.5793
-3.2	0.0007	0.3	0.6179
-3.1	0.0010	0.4	0.6554
-3.0	0.0013	0.5	0.6915
-2.9	0.0019	0.6	0.7257
-2.8	0.0026	0.7	0.7580
-2.7	0.0035	0.8	0.7881
-2.6	0.0047	0.9	0.8159
-2.5	0.0062	1.0	0.8413
-2.4	0.0082	1.1	0.8643
-2.3	0.0107	1.2	0.8849
-2.2	0.0139	1.3	0.9032
-2.1	0.0179	1.4	0.9192
-2.0	0.0228	1.5	0.9332
-1.9	0.0287	1.6	0.9452
-1.8	0.0359	1.7	0.9554
-1.7	0.0446	1.8	0.9641
-1.6	0.0548	1.9	0.9713
-1.5	0.0668	2.0	0.9772
-1.4	0.0808	2.1	0.9821
-1.3	0.0968	2.2	0.9861
-1.2	0.1151	2.3	0.9893
-1.1	0.1357	2.4	0.9918
-1.0	0.1587	2.5	0.9938
-0.9	0.1841	2.6	0.9953
-0.8	0.2119	2.7	0.9965
-0.7	0.2420	2.8	0.9974
-0.6	0.2743	2.9	0.9981
-0.5	0.3085	3.0	0.9987
-0.4	0.3446	3.1	0.9990
-0.3	0.3821	3.2	0.9993
-0.2	0.4207	3.3	0.9995
-0.1	0.4602	3.4	0.9997
0.0	0.5000		

Ringkasan

- **CDF:** Fungsi esensial yang mengukur probabilitas kumulatif $P(X \leq x)$, berperan sebagai "total berjalan" probabilitas dari sebuah variabel acak.
- **Korelasi PMF/PDF:** CDF adalah bentuk terintegrasi dari PMF (untuk diskrit) atau PDF (untuk kontinu), menghubungkan keduanya dalam satu kerangka kerja.
- **Perhitungan Interval:** Memudahkan perhitungan probabilitas untuk suatu rentang, $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$, dengan mengurangi probabilitas kumulatif.
- **Grafik CDF:** Visualisasi fundamental yang menunjukkan perbedaan antara distribusi Diskrit (grafik tangga) dan Kontinu (kurva halus berbentuk S).

fisikamodern00-2625220

3-6. Comparing And Choosing Distribution

01

Mengidentifikasi dan memilih distribusi probabilitas yang sesuai untuk skenario yang berbeda berdasarkan sifat data.

02

Memahami perbedaan utama dalam bentuk, nilai rata-rata (mean), dan varians di antara distribusi diskrit dan kontinu yang umum.

Perbedaan Kunci: Diskrit vs. Kontinu

Kriteria	Distribusi Diskrit	Distribusi Kontinu
Variabel Acak	Mengambil nilai yang dapat dihitung (count), terpisah. Contoh: jumlah mobil di tempat parkir, jumlah pelanggan.	Mengambil nilai dalam rentang yang tak terhitung jumlahnya (measured). Contoh: tinggi badan, suhu, waktu tempuh.
Probabilitas	Diberikan oleh PMF ($P(X = x)$). Probabilitas untuk satu titik bisa lebih besar dari nol. Total probabilitas dihitung dengan menjumlahkan PMF.	Diberikan oleh PDF ($f(x)$). Probabilitas untuk satu titik adalah nol: $P(X = x) = 0$. Total probabilitas dihitung dengan mengintegrasikan PDF.
Grafik PDF	Grafik berbentuk tangga.	Kurva halus dan berkelanjutan.
Contoh	Binomial, Poisson	Uniform, Normal

Kapan Menggunakan Distribusi Diskrit

- Distribusi Binomial:
 - Gunakan ketika Anda menghitung jumlah sukses dalam jumlah percobaan tetap (n) yang independen. Setiap percobaan memiliki dua hasil yang mungkin (sukses/gagal), dan probabilitas sukses (p) harus konstan. Empat asumsi ini harus dipenuhi untuk menerapkan model Binomial.
- Contoh:
 - Perusahaan e-commerce menguji tampilan website baru. Dari 1000 pengunjung ($n = 1000$), berapa probabilitas tepat 50 orang ($k = 50$) melakukan pembelian jika probabilitas pembelian rata-rata adalah 4% ($p = 0.04$)?
- Properti:
 - Rata-rata (μ) dari distribusi ini adalah $n \cdot p$. Varians (σ^2), yang mengukur sebaran data, adalah $n \cdot p \cdot (1 - p)$.

Kapan Menggunakan Distribusi Diskrit

- Distribusi Poisson:
 - Gunakan ketika Anda menghitung jumlah kejadian dalam interval waktu atau ruang tetap, dengan tingkat rata-rata kejadian yang konstan (λ). Asumsi utamanya adalah kejadian-kejadian tersebut bersifat independen.
- Contoh:
 - Rata-rata 7 mobil melewati tol per menit ($\lambda = 7$). Berapa probabilitas bahwa akan ada tepat 5 mobil yang lewat dalam menit berikutnya? Contoh lain: Menghitung jumlah cacat per meter persegi pada lembaran baja.
- Properti:
 - Karakteristik unik dari distribusi Poisson adalah nilai rata-rata (μ) dan varians (σ^2) yang sama, yaitu λ .

- Distribusi Uniform (Seragam):
 - Gunakan ketika setiap nilai dalam sebuah rentang tertentu memiliki probabilitas yang sama untuk terjadi. PDF-nya berupa garis datar di antara batas bawah (a) dan batas atas (b).
- Contoh:
 - Sebuah sistem pembangkit bilangan acak menghasilkan angka antara 0 dan 10. Probabilitas untuk mendapatkan angka apa pun di antara 0 dan 10 adalah sama. Contoh lain adalah waktu tunggu untuk bus, di mana waktu tunggu bisa di mana saja dalam interval kedatangan.
- Properti:
 - Rata-rata (μ) berada tepat di tengah interval, yaitu $\frac{a+b}{2}$. Variansnya dihitung sebagai $\frac{(b-a)^2}{12}$.

Kapan Menggunakan Distribusi Kontinu

- Distribusi Normal:
 - Ini adalah distribusi paling umum dalam statistik. Gunakan ketika data memiliki bentuk lonceng yang simetris di sekitar nilai rata-rata (μ). Banyak fenomena alami, sosial, dan teknis mengikuti pola ini. Penting untuk dicatat bahwa peran vital distribusi Normal akan dijelaskan secara rinci dalam bab **Central Limit Theorem**.
- Contoh:
 - Tinggi badan populasi dewasa, skor tes standar, atau error pengukuran pada eksperimen ilmiah. Kurva lonceng yang terbentuk menunjukkan bahwa sebagian besar data berkumpul di sekitar rata-rata.
- Properti:
 - Ditentukan oleh dua parameter utama: Mean (μ) yang menunjukkan pusat distribusi, dan Standard Deviation (σ) yang mengukur seberapa jauh data menyebar dari pusat.

Perbedaan Kunci: Diskrit vs. Kontinu

Distribusi	Tipe	Parameter Kunci	Mean $E[X]$	Variance $Var[X]$
Binomial	Diskrit	n (jumlah percobaan), p (probabilitas sukses)	np	$np(1 - p)$
Poisson	Diskrit	λ (rata-rata kejadian per interval)	λ	λ
Uniform	Kontinu	a (batas bawah), b (batas atas)	$\frac{a + b}{2}$	$\frac{(b - a)^2}{12}$
Normal	Kontinu	μ (rata-rata), σ^2 (varians)	μ	σ^2

Rekap

- Pilihan distribusi yang tepat adalah seni dan sains. Ini bergantung pada sifat variabel acak (diskrit vs. kontinu) dan jenis pertanyaan yang Anda ajukan.
- Proses berpikir dalam memilih distribusi:
 1. Tentukan apakah variabel Anda merupakan hasil hitungan (diskrit) atau pengukuran (kontinu).
 2. Jika diskrit, apakah Anda menghitung sukses dari jumlah percobaan tetap (Binomial) atau kejadian dalam interval tertentu (Poisson)?
 3. Jika kontinu, apakah probabilitasnya seragam (Uniform) atau terkonsentrasi di sekitar rata-rata (Normal)?
- Distribusi adalah bahasa untuk menceritakan kisah data Anda. Memilih distribusi yang tepat berarti Anda menggunakan model yang paling akurat untuk "menceritakan" apa yang terjadi.

Chapter 4. Central Limit Theorem (CLT)

4-1. What Is Central Limit Theorem

01

Memahami konsep dasar Teorema Limit Pusat (CLT) dan mengapa ini begitu penting.

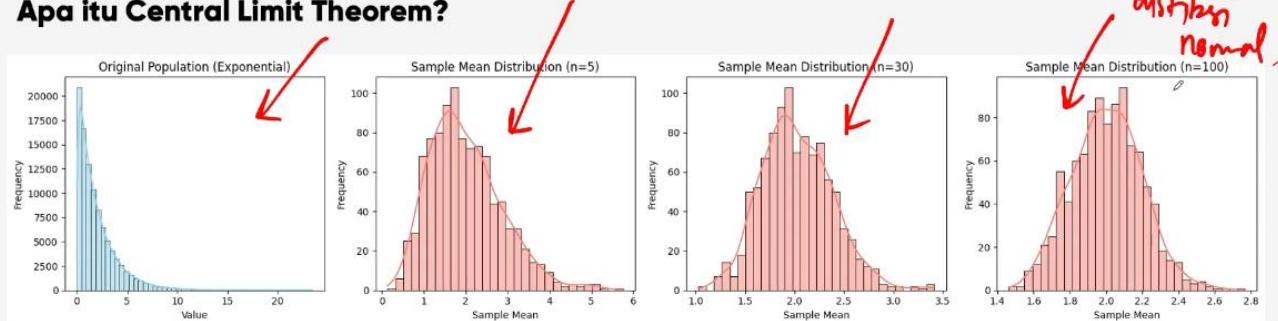
02

Membedakan antara distribusi populasi dan distribusi sampel.

03

Menggunakan CLT untuk membuat kesimpulan yang akurat tentang populasi dari sampel.

Apa itu Central Limit Theorem?



Central Limit Theorem (CLT) adalah pilar fundamental dalam statistika modern. Secara formal, CLT menyatakan bahwa jika Anda mengambil sampel acak yang cukup besar ($n \geq 30$) dari populasi mana pun, distribusi rata-rata sampelnya akan mendekati distribusi Normal (kurva lonceng).

Apa itu Central Limit Theorem?

- **Mengapa Ini Luar Biasa?** Teorema ini berlaku meskipun populasi aslinya tidak berdistribusi normal—bisa saja sangat miring (skewed), seragam (uniform), atau bentuk apa pun yang tidak terduga. CLT seperti sebuah "*konverter ajaib*" yang selalu menghasilkan kurva lonceng, selama Anda memberinya sampel yang cukup besar.
- **Makna Praktis:** Ini adalah kunci yang memungkinkan kita bekerja dengan rata-rata sampel seolah-olah mereka berasal dari distribusi normal yang dapat diprediksi. Ini sangat penting karena sifat-sifat distribusi normal sangat dipahami dan mudah untuk dianalisis secara matematis.

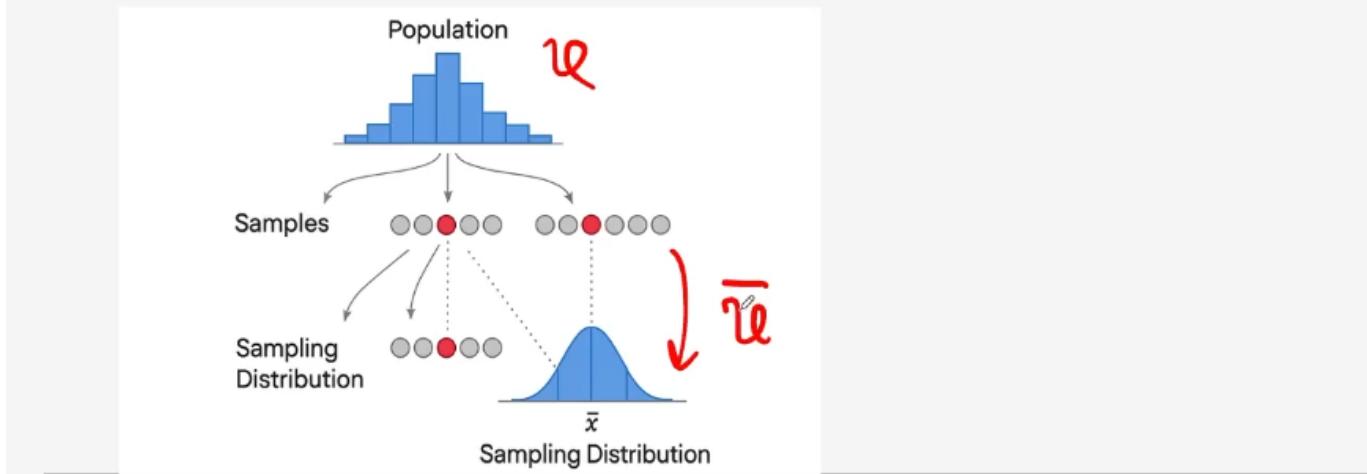
Distribusi Sampel

$$\begin{array}{l} K=1 \\ N=5 \\ M=? \end{array}$$

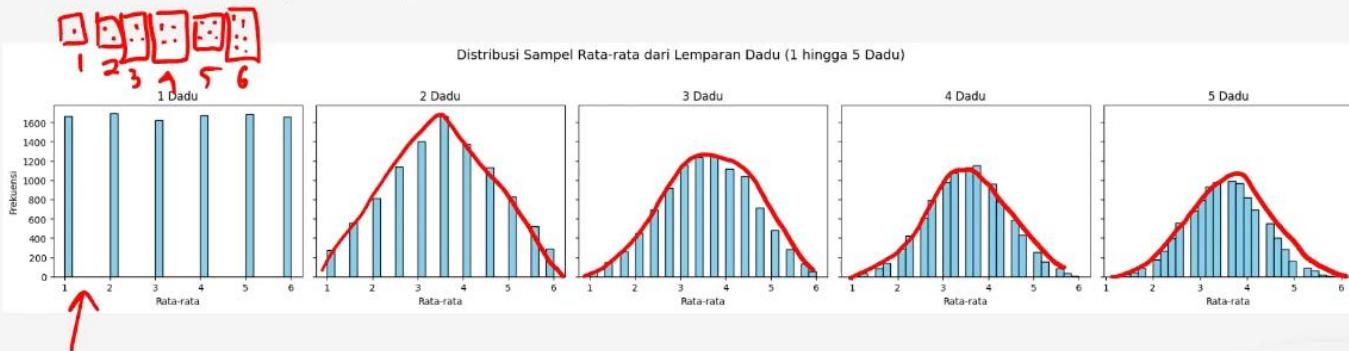
$$\begin{array}{l} k=2 \\ N=5 \\ M=7 \end{array}$$

$$\begin{aligned}k &= L \\N &= 5 \\ \mu &= ?\end{aligned}$$

- Distribusi sampel adalah konsep penting dalam statistik inferensial yang menggambarkan distribusi probabilitas dari suatu statistik (seperti rata-rata, proporsi, atau varians) yang dihitung dari banyak sampel acak yang diambil dari populasi yang sama.
 - Distribusi sampel (sampling distribution) adalah distribusi dari nilai-nilai statistik (misalnya rata-rata sampel \bar{x}) yang diperoleh dari berulang kali mengambil sampel acak dari suatu populasi.

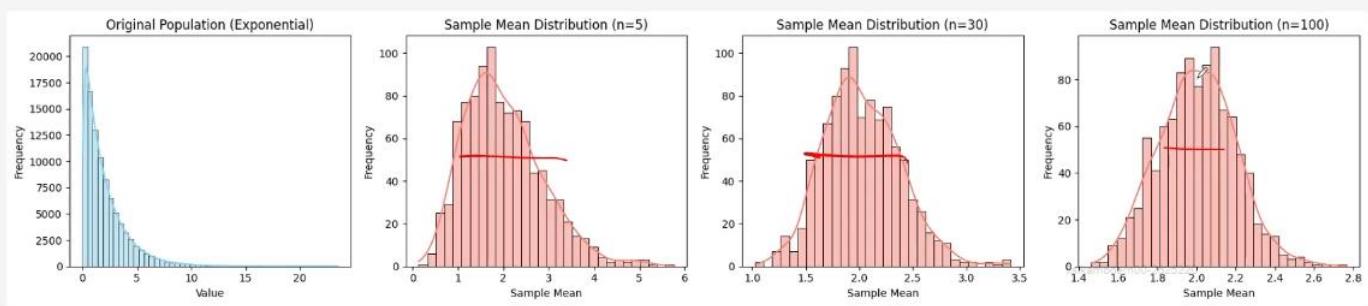


Distribusi Sampel (Contoh)



- Setiap panel menunjukkan histogram rata-rata hasil lemparan dari ribuan sampel.
 - Semakin banyak dadu yang dilempar (semakin besar n), distribusi rata-rata hasilnya menjadi:
 - Lebih simetris ✓
 - Lebih mendekati distribusi normal ✓
 - Lebih sempit (variasi lebih kecil) ↗

Distribusi Sampel (Contoh)



- Panel tengah dan kanan menunjukkan distribusi rata-rata sampel dari populasi tersebut untuk ukuran sampel:
 - n=5: distribusi masih mirip populasi asli, tapi mulai terlihat lebih simetris.
 - n=30: distribusi rata-rata sampel mulai menyerupai distribusi normal.
 - n=100: distribusi rata-rata sampel sangat mendekati distribusi normal.



Proses membangun distribusi sampel

1. Ambil Sampel: Ambil sebuah sampel acak berukuran n dari populasi.
2. Hitung Rata-rata: Hitung rata-rata sampel pertama (\bar{x}_1). Catat nilai ini.
3. Ulangi Proses: Kembalikan sampel ke populasi. Ulangi langkah 1-2 berkali-kali (misalnya 1000 kali) untuk mendapatkan serangkaian rata-rata sampel: $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{1000}$.
4. Visualisasikan: Plot semua rata-rata sampel ini dalam sebuah histogram. Histogram inilah yang secara visual mewakili distribusi sampel.

Properti Kunci Distribusi Sampel

Ketika CLT berlaku, distribusi rata-rata sampel (yang berdistribusi Normal) akan memiliki properti-properti yang sangat spesifik dan dapat diprediksi:

- Mean (Rata-rata): Rata-rata dari semua rata-rata sampel ($\mu_{\bar{x}}$) akan sama persis dengan rata-rata populasi aslinya (μ)

$$\mu_{\bar{x}} = \mu$$

- Standard Error: Standar deviasi dari distribusi rata-rata sampel disebut Standard Error ($\sigma_{\bar{x}}$). Nilainya lebih kecil dari standar deviasi populasi aslinya (σ).

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$
$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{5}{\sqrt{10}}$$
$$\sigma = 5$$
$$n = 10$$

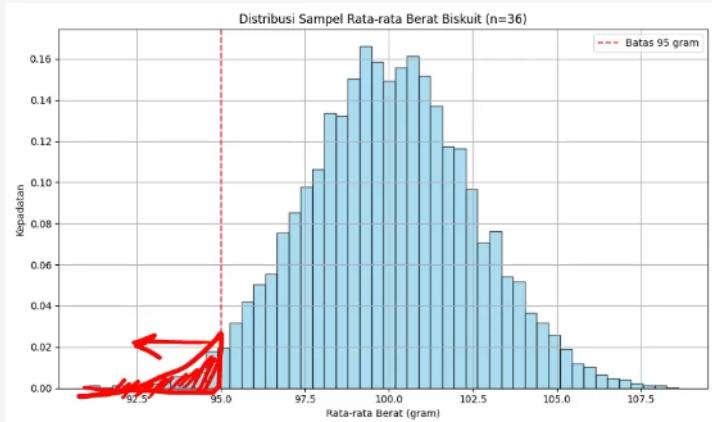
Contoh BVAANG!!!:

$$\sigma = 15 \text{ gram}, n = 36, \mu = 100 \text{ gram}$$

Sebuah pabrik makanan memproduksi biscuit dalam kemasan kecil. Berat biscuit dalam satu kemasan bervariasi dan mengikuti distribusi tidak normal, dengan berat rata-rata Adalah 100 gram, dan standar deviasi populasi Adalah 15 gram. Lalu seorang quality control engineer mengambil sampel acak 36 kemasan setiap jam untuk memantau kualitas produksi.

1. Mengapa engineer dapat menggunakan distribusi normal untuk menganalisis rata-rata berat sampel meskipun distribusi populasi tidak normal? $n > 30$
2. Hitung standar deviasi dari distribusi rata-rata sampel (standard error)
3. Berapa probabilitas bahwa rata-rata berat dari 36 kemasan biscuit kurang dari 95 gram $P(\bar{X} < 95)$?
4. Jika probabilitas pada soal nomor 3 sangat kecil, apa yang bisa disimpulkan?

Contoh BVAANG!!!:



- Diambil 10.000 sampel acak, masing-masing berukuran 36 kemasan.
- Histogram menunjukkan distribusi rata-rata berat dari tiap sampel.
- Garis merah menunjukkan batas 95 gram.

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{15}{\sqrt{36}} = \frac{15}{6} = 2.5 \text{ gram}$$

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{95 - 100}{2.5} = -2$$

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{95 - 100}{2.5} = -2$$

Probabilitas bahwa rata-rata berat sampel kurang dari 95 gram adalah sekitar:

$$P(\bar{X} < 95) = P(Z < -2) \approx 0.0228 = 2.28\%$$

Jika probabilitas pada soal nomor 3 sangat kecil, apa yang bisa disimpulkan

- Jika proses berjalan dengan normal, kejadian ini sangat jarang terjadi
- Jika rata-rata sample diambil, misal rata-ratanya bisa dibawah 95, berarti kemungkinan berarti ada kesalahan produksi

Rasionalisasi

- CLT berfungsi sebagai jembatan logis, memungkinkan kita membuat kesimpulan yang andal tentang populasi dari sampel yang terbatas, karena sulit untuk mengumpulkan data dari seluruh populasi. Ini adalah fondasi teoritis untuk teknik statistika inferensial.
- CLT adalah dasar untuk metode penting seperti Uji Hipotesis (menguji klaim populasi dari data sampel) dan Interval Kepercayaan (memperkirakan ⁵²²⁰ rentang parameter populasi).
- Keunggulan utamanya adalah fleksibilitasnya; teorema ini tetap berlaku meskipun distribusi populasi asalnya tidak diketahui atau tidak normal, asalkan ukuran sampelnya cukup besar (umumnya n ≥ 30),

- 01 Menerapkan Central Limit Theorem pada masalah statistik di dunia nyata.
- 02 Mengidentifikasi kapan asumsi CLT valid dan dapat digunakan dengan tepat.
- 03 Memahami bagaimana CLT menjadi dasar untuk Interval Kepercayaan (Confidence Intervals) dan Uji Hipotesis (Hypothesis Testing).

Menggunakan CLT untuk inferensi

Ide Utama: Karena CLT menjamin bahwa distribusi rata-rata sampel akan normal, kita dapat menggunakan alat-alat statistik yang dirancang untuk distribusi normal (seperti z-score dan tabel z) untuk membuat kesimpulan tentang populasi.

Proses:

1. Ambil sampel dari populasi. ✓
2. Hitung rata-rata sampel (\bar{x}). ✓
3. Dengan CLT, kita tahu bahwa \bar{x} berasal dari distribusi normal.
4. Kita bisa menggunakan sifat-sifat distribusi normal untuk menghitung probabilitas atau mengestimasi parameter populasi.

z-score

Aplikasi 1: Interval Kepercayaan

Apa itu?

- Interval kepercayaan adalah rentang nilai yang kemungkinan besar berisi parameter populasi yang sebenarnya (misalnya, rata-rata populasi, μ).

Bagaimana CLT membantunya?

- CLT memberi tahu kita bahwa distribusi rata-rata sampel adalah normal.
- Kita tahu 95% dari semua rata-rata sampel akan berada dalam ± 1.96 standard error dari rata-rata populasi.
- Ini memungkinkan kita untuk membangun interval di sekitar rata-rata sampel kita untuk mengestimasi lokasi μ yang tidak diketahui.

$\pm 1.96 \sigma$ ↑ z-score

Aplikasi 1: Interval Kepercayaan

Contoh:

- Misalkan Anda adalah manajer kualitas di sebuah pabrik yang memproduksi botol air 500 ml. Anda ingin menaksir rata-rata volume air yang sebenarnya diisi ke dalam botol, tetapi Anda tidak dapat memeriksa setiap botol. Anda mencurigai bahwa proses pengisian tidak terdistribusi secara normal.
- Pengambilan data sampel sebanyak 100 botol dalam sehari.
- Rata-rata sampel Adalah 498 ml, dengan simpangan baku 5 ml
- Anda menginginkan Tingkat kepercayaan 95%

$$n = 100 \text{ botol}$$

$$\bar{x} = 498 \text{ ml}$$

$$\sigma = 5 \text{ ml}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\bar{x}} &= \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ &= \frac{5 \text{ ml}}{\sqrt{100}} \\ &= 0.5 \text{ ml}\end{aligned}$$

$$\text{Interval kepercayaan} = \bar{x} \pm 1.96 \sigma_{\bar{x}}$$

$$= 498 \pm 1.96 \times 0.5$$

$$= 498 \pm 0.98$$

batas atas $\rightarrow 498,98$

batas bawah $\rightarrow 497,02$

$497,02 \leq \mu \leq 498,98$

Aplikasi 2: Uji Hipotesis

Apa itu?

- Uji hipotesis adalah metode statistik untuk membuat keputusan tentang populasi berdasarkan data sampel.

Bagaimana CLT membantunya?

- CLT memungkinkan kita menghitung probabilitas untuk mendapatkan rata-rata sampel tertentu jika hipotesis nol (klaim awal) itu benar.
- Jika probabilitas ini sangat rendah (misalnya, kurang dari 5%), kita dapat menolak hipotesis nol dan menyimpulkan bahwa efek yang kita amati pada sampel kemungkinan besar nyata di populasi.

Aplikasi 2: Uji Hipotesis

Contoh:

- Misalkan ada sebuah universitas yang mengklaim bahwa rata-rata berat badan mahasiswanya adalah 65 kg. Anda sebagai peneliti tidak yakin dengan klaim tersebut dan ingin menguji hipotesis ini. Sampel diambil acak sebanyak 100 Mahasiswa, didapatkan rata-rata sampel adalah 67 kg dengan simpangan baku Adalah 10 kg. Dipilih kepercayaan hipotesis nol Adalah 95%.

- Hipotesis 0 $\rightarrow \mu = 65 \text{ kg} \rightarrow 95\%$
- Hipotesis 1 $\rightarrow \mu \neq 65 \text{ kg} \rightarrow 5\%$

$$n = 100$$

$$\bar{x} = 66 \text{ kg}$$

$$\sigma_{\bar{x}} = 10 \text{ kg}$$

$$\bar{x} \pm 1,96 \sigma_{\bar{x}}$$

statistik uji z.

$z_{\text{hitung}} < z_{\text{kritis}}$

$$z_{\text{hitung}} = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}}$$

$z_{\text{hitung}} < 1,96$

$$= \frac{66 - 65}{10}$$

~~1 < 1,96~~

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$= \frac{10}{\sqrt{100}} = 1 \text{ kg}$$

$$|z| = 1$$

Contoh Nyata dalam Berbagai Bidang

Bisnis dan Ekonomi:

- Mengukur rata-rata kepuasan pelanggan dari survei sampel untuk memprediksi kepuasan populasi.
- Menguji apakah kampanye iklan baru meningkatkan rata-rata penjualan secara signifikan.

Sains dan Medis:

- Mengukur efektivitas obat baru dengan menguji sampel pasien dan menguji hipotesis bahwa obat tersebut memiliki efek yang signifikan.
- Mengestimasi rata-rata tinggi tanaman setelah perlakuan pupuk.

Penelitian Sosial:

- Menggunakan survei sampel untuk memprediksi hasil pemilu atau mengukur rata-rata pendapatan populasi.

Ringkasan & Kapan CLT Valid?

- CLT adalah jembatan antara sampel dan populasi, memungkinkan kita menggunakan distribusi normal untuk inferensi.
- CLT Valid jika:
 - Sampel diambil secara acak.
 - Sampel memiliki ukuran yang cukup besar, biasanya $n \geq 30$.
- Peringatan: Jika ukuran sampel sangat kecil ($n < 30$), distribusi rata-rata sampel mungkin tidak normal, terutama jika populasi asalnya tidak normal. Dalam kasus ini, teknik lain seperti t-distribution mungkin lebih sesuai.

Next Up

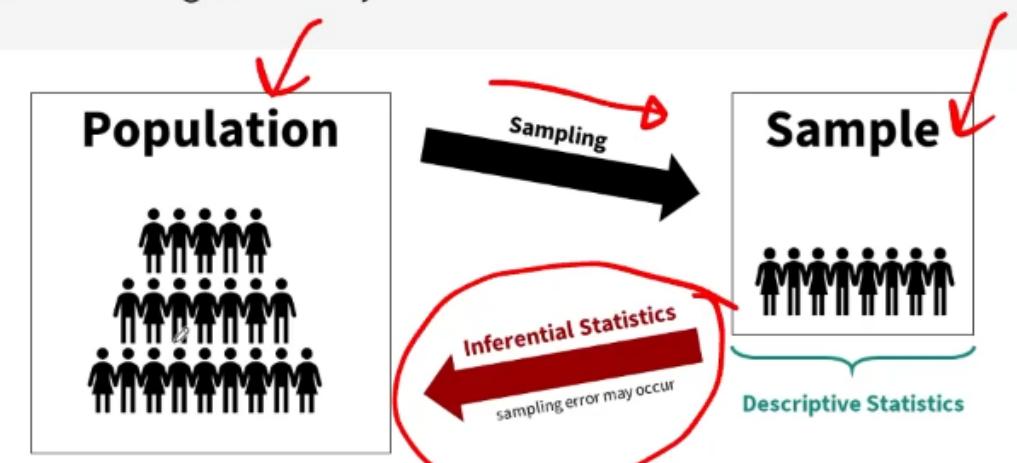
Pemahaman tentang CLT adalah fondasi penting untuk seluruh statistika inferensial. Bab selanjutnya dari kursus ini akan membahas lebih rinci tentang Inferential Statistics dan bagaimana konsep ini digunakan dalam model machine learning.

Chapter 5. Inferential Statistics

5-1. What Is Inferential Statistics

Pengantar: Apa itu Statistika Inferensial?

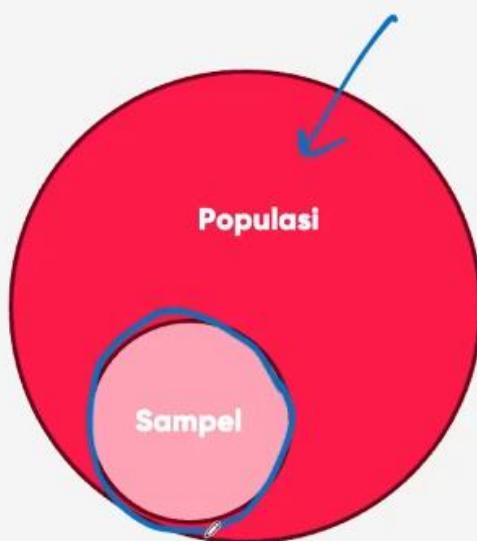
Statistika Inferensial adalah cabang statistika yang memungkinkan kita untuk membuat **kesimpulan**, **prediksi**, atau **generalisasi** tentang suatu **populasi** berdasarkan data yang hanya diambil **dari sampel**. Ini adalah alat untuk "membaca pikiran" populasi yang lebih besar hanya dengan mengamati sebagian kecilnya.



Statistika Deskriptif vs. Inferensial: Perbedaan Mendasar

Kriteria	Statistik Deskriptif	Statistik Inferensial
Tujuan	Menggambarkan dan meringkas karakteristik data yang sudah ada dalam sampel atau populasi	Membuat kesimpulan, prediksi, atau generalisasi tentang populasi berdasarkan data dari sampel.
Fokus	Data yang diamati (sampel itu sendiri) ↪	Parameter populasi yang tidak diketahui ↪
Pertanyaan Khas	"Berapa rata-rata usia pelanggan kami di survei ini?"	"Berapa rata-rata usia semua pelanggan kami?"
Metode	Mean, median, modus, standar deviasi, frekuensi, histogram, grafik batang ↪	Uji hipotesis, interval kepercayaan, regresi, ANOVA. ↪
Contoh	"Rata-rata tinggi badan siswa di kelas ini Adalah 165 cm."	"Berdasarkan sampel, kami menyimpulkan bahwa rata-rata tinggi badan semua siswa di sekolah ini kemungkinan besar antara 163 cm dan 167 cm"

Populasi vs. Sampel: Mengapa Inferensi Diperlukan?



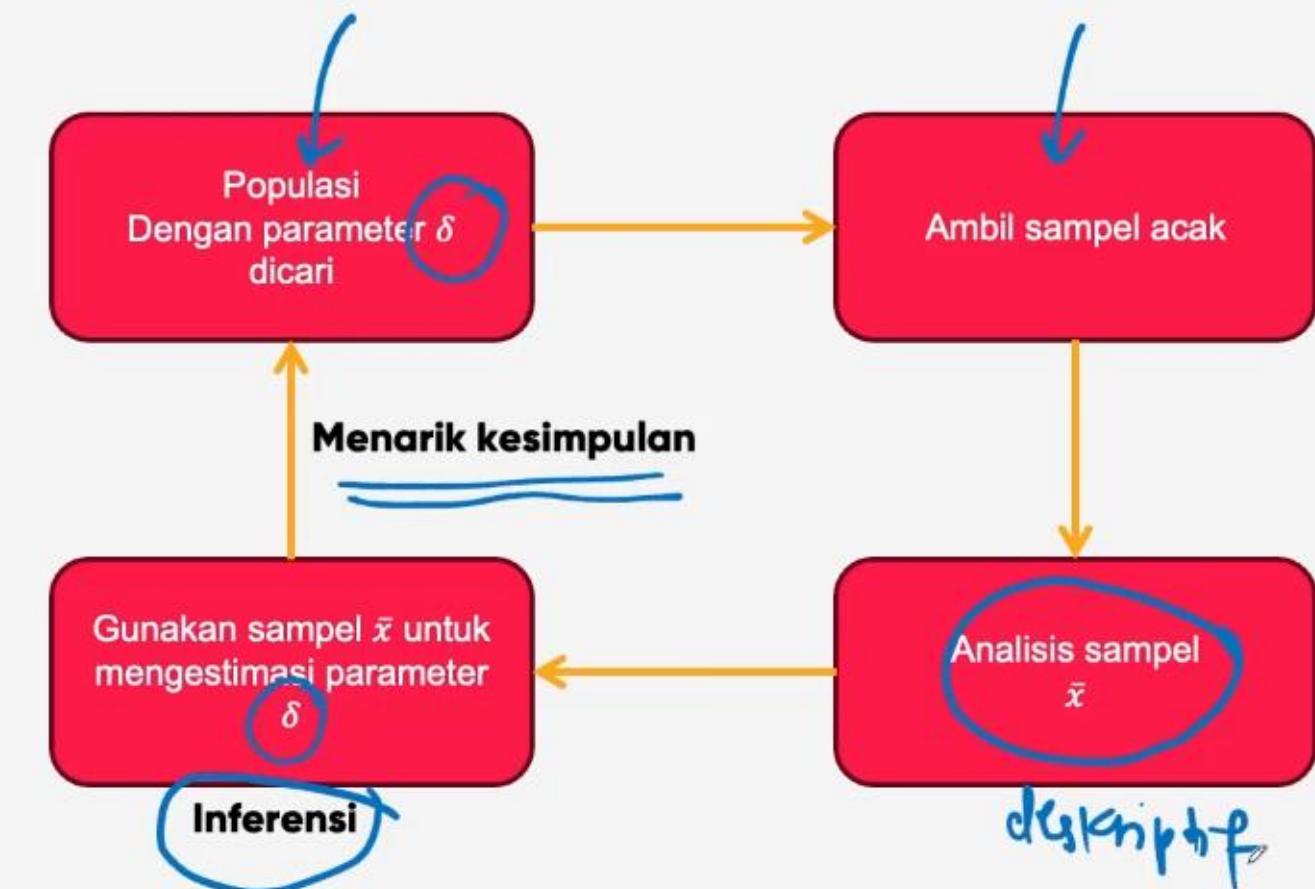
- **Populasi:** Seluruh kelompok individu atau objek yang ingin Anda pelajari. Ini adalah target utama penelitian Anda. (Contoh: semua pemilih di suatu negara, semua bola lampu yang diproduksi oleh suatu pabrik).
- **Sampel:** Sebagian kecil, sub-kelompok dari populasi yang dipilih untuk analisis. Sampel harus representatif agar kesimpulan inferensial valid.

Populasi vs. Sampel: Mengapa Inferensi Diperlukan?

Kebutuhan Inferensi:

- Keterbatasan Sumber Daya: Seringkali tidak mungkin secara fisik, finansial, atau waktu untuk mengumpulkan data dari seluruh populasi.
- Efisiensi: Mengumpulkan dan menganalisis data dari sampel jauh lebih efisien.
- Generalisasi: Inferensi memungkinkan kita untuk mengambil temuan dari sampel kecil dan menggeneralisasikannya ke populasi yang lebih besar dengan tingkat kepercayaan tertentu.

Proses Statistika Inferensial



Pentingnya Inferensi dalam Data Science

- Pengambilan Keputusan Berbasis Data
- Prediksi & Pemodelan ✓
- Validasi Hipotesis ✓
- Peran Central Limit Theorem (CLT)

Rangkuman

- **Statistika Inferensial** adalah tentang membuat kesimpulan yang valid dan dapat diandalkan tentang populasi yang besar, hanya dari data sampel yang terbatas.
- Ini adalah perbedaan kunci dari **Statistika Deskriptif**, yang hanya meringkas data yang ada.
- **Inferensi** diperlukan karena keterbatasan praktis dalam mengumpulkan data populasi penuh dan untuk memungkinkan generalisasi temuan.
- **CLT** adalah kunci yang memungkinkan inferensi ini, dengan menjamin normalitas distribusi rata-rata sampel.
- **Next Up:** Di sub-bab berikutnya, kita akan menyelami salah satu aplikasi utama statistika inferensial: Interval Kepercayaan (Confidence Intervals), yang merupakan cara untuk mengestimasi parameter populasi dengan rentang nilai.

01

Membangun dan menginterpretasi interval kepercayaan (confidence intervals).

02

Memahami peran ukuran sampel dan variabilitas dalam interval kepercayaan.

03

Mengidentifikasi perbedaan antara margin of error dan tingkat kepercayaan.

Apa itu Interval Kepercayaan?

Ide Utama:

Dalam statistika inferensial, tujuan kita adalah membuat kesimpulan tentang parameter populasi

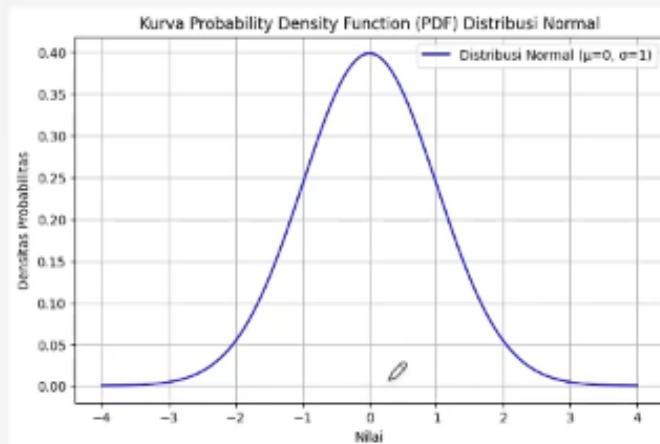
- seperti rata-rata populasi μ ,
- proporsi populasi p , atau
- standar deviasi populasi σ

menggunakan data yang kita kumpulkan dari sampel. Namun, rata-rata sampel (\bar{x}) yang kita hitung hanyalah satu perkiraan titik (point estimate). Sangat kecil kemungkinannya rata-rata sampel ini akan sama persis dengan rata-rata populasi yang sebenarnya.



Apa itu Interval Kepercayaan?

Mengapa Perkiraan Titik Saja Tidak Cukup?



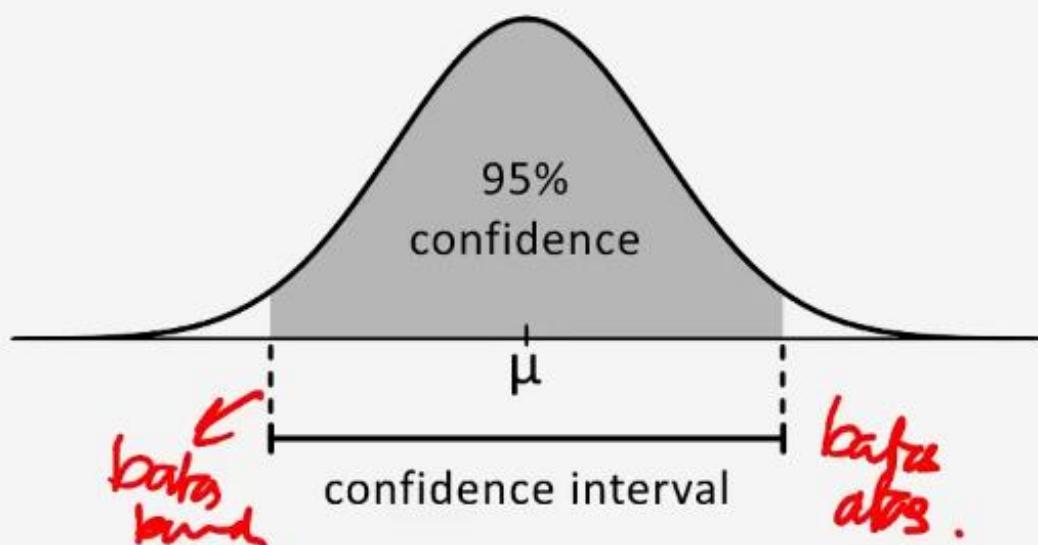
Sampel 1

Sampel 2

Sampel 3

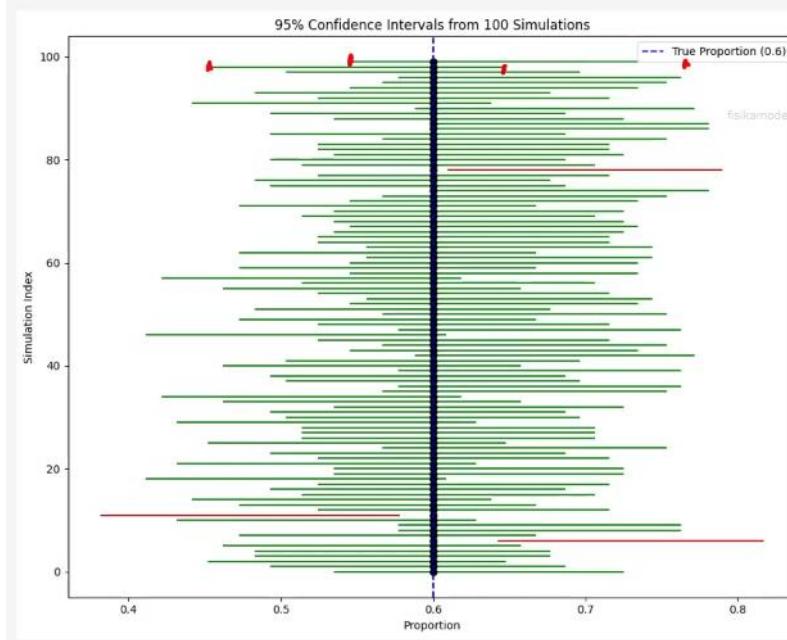
Apa itu Interval Kepercayaan?

Interval Kepercayaan (Confidence Interval - CI)



"Kami tidak tahu persis berapa nilai parameter populasi, tapi kami cukup yakin nilainya ada di antara X dan Y."

Ilustrasi Confidence Interval

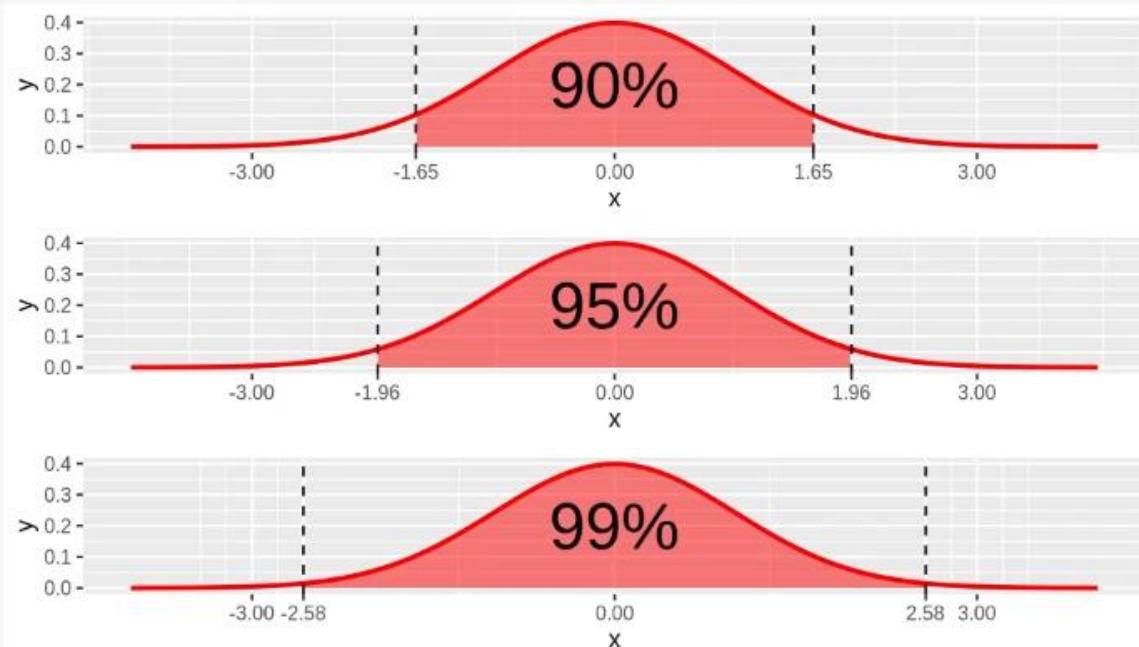


Penjelasan Grafik:

- Setiap garis horizontal mewakili satu interval kepercayaan dari satu simulasi.
- Garis hijau menunjukkan interval yang mencakup nilai proporsi sebenarnya (0.6).
- Garis merah menunjukkan interval yang tidak mencakup nilai sebenarnya.
- Garis biru putus-putus adalah proporsi sebenarnya dari populasi (0.6).
- Titik hitam menunjukkan posisi nilai sebenarnya pada setiap simulasi.

Confidence Level

Tingkat kepercayaan yang paling sering digunakan adalah 90%, 95%, dan 99%. Pilihan tingkat kepercayaan bergantung pada konsekuensi kesalahan; untuk aplikasi medis atau keuangan yang berisiko tinggi, tingkat kepercayaan yang lebih tinggi (misalnya 99%) mungkin diperlukan.



Komponen Utama: Margin of Error (Batas Kesalahan)

Margin of Error (MoE) adalah jumlah yang ditambahkan dan dikurangkan dari perkiraan titik untuk membentuk interval kepercayaan. Ini secara langsung mengukur presisi perkiraan kita. Semakin kecil MoE, semakin sempit intervalnya, dan semakin presisi estimasi kita.

$$\text{Margin of Error (MoE)} = \text{Nilai Kritis} \times \underline{\text{Standard Error}}$$

Confidence Level (CL)	α (significance Level)	$Z_{\alpha/2}$ (Nilai Kritis)
90%	0.10	1.645
95%	0.05	1.960
99%	0.01	2.576

Jika standar deviasi populasi diketahui

$$\text{Standard Error} = \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow z-tot.$$

Jika standar deviasi populasi tidak diketahui, gunakan standar deviasi sampel s

$$\text{Standard Error} = \sigma_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} \rightarrow t-tot$$

Komponen Utama: Confidence Interval (Interval Kepercayaan)

$$\text{Interval Kepercayaan} = \bar{x} \pm \text{Margin of Error}$$

$$CI = \bar{x} \pm Z_{\alpha/2} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Confidence Level (CL)	α (significance Level)	$Z_{\alpha/2}$ (Nilai Kritis)
90%	0.10	1.645
95%	0.05	1.960
99%	0.01	2.576

Formula ini digunakan ketika standard deviasi populasi atau deviasi sampel diketahui atau ketika ukuran sampel sangat besar > 30 , sehingga CLT dipenuhi.

dpt, bkt
normal

Contoh

Sebuah perusahaan e-commerce ingin mengestimasi rata-rata waktu yang dihabiskan pelanggan di situs mereka per hari. Mereka mengambil sampel acak 200 pelanggan dan menemukan rata-rata waktu yang dihabiskan adalah 35 menit, dengan standar deviasi populasi 10 menit. Mereka menghitung interval kepercayaan 95% untuk rata-rata waktu yang dihabiskan populasi dan mendapatkan hasil

$$\begin{aligned} n &= 200 \\ \bar{x} &= 35 \text{ menit} \\ \sigma &= 10 \text{ menit} \\ CL &= 95\% \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} CI &= \bar{x} \pm Z_{\alpha/2} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ &= 35 \pm 1.96 \times \frac{10}{\sqrt{200}} \\ &= 35 \pm 1.96 \times \frac{10}{14.14} \\ &= 35 \pm 1.96 \times 0.7 \\ &= 35 \pm 1.372 \end{aligned}$$

Kami 95% yakin bahwa interval (33.62 menit, 36.37 menit) berisi rata-rata waktu yang dihabiskan oleh seluruh populasi pelanggan yang sebenarnya.

Ringkasan

- **Interval Kepercayaan** memberikan rentang perkiraan yang andal untuk parameter populasi yang tidak diketahui, bukan hanya satu titik.
- **Tingkat Kepercayaan** adalah probabilitas jangka panjang bahwa metode kita akan berhasil "menangkap" parameter populasi.
- **Margin of Error** menentukan lebar interval, dipengaruhi oleh tingkat kepercayaan, Standard Error, dan pada akhirnya, ukuran sampel dan variabilitas data.
- Untuk mendapatkan interval kepercayaan yang lebih sempit, kita membutuhkan ukuran sampel yang lebih besar dan variabilitas yang lebih rendah



Next Up: Setelah memahami Interval Kepercayaan, kita akan melanjutkan ke konsep kunci lainnya dalam statistika inferensial: Uji Hipotesis (Hypothesis Testing), yang memungkinkan kita membuat keputusan formal tentang klaim populasi.

5-3. Hypothesis Testing Basics

01

Memformulasikan hipotesis untuk pengujian statistik.

02

Memahami konsep kesalahan Tipe I dan kesalahan Tipe II.

03

Menentukan dan menginterpretasi tingkat signifikansi (alpha).

Apa itu Uji Hipotesis?

Ide Utama: Uji hipotesis adalah metode formal untuk membuat keputusan tentang populasi berdasarkan data dari sampel. Ini adalah proses sistematis untuk menentukan apakah ada cukup bukti untuk mendukung suatu klaim atau teori.

Proses: Uji hipotesis membandingkan dua pernyataan yang saling bertentangan tentang suatu parameter populasi: **Hipotesis Nol** dan **Hipotesis Alternatif**.

Contoh Sederhana: Apakah rata-rata waktu yang dihabiskan siswa di media sosial lebih dari 2 jam per hari? Uji hipotesis akan membantu kita menjawabnya.



Null and Alternative Hypotheses

Setiap uji hipotesis dimulai dengan formulasi dua hipotesis:

Hipotesis Nol (H_0): Pernyataan awal yang diasumsikan benar.

- Contoh: Rata-rata waktu yang dihabiskan siswa di media sosial sama dengan 2 jam per hari
- $H_0: \mu = 2$ jam

Tujuan kita adalah mengumpulkan bukti statistik (dari sampel) untuk memutuskan apakah akan menolak H_0 atau tidak.

Hipotesis Alternatif (H_a atau H_1): Pernyataan yang bertentangan dengan Hipotesis Nol.

- Contoh: Rata-rata waktu yang dihabiskan siswa di media sosial lebih dari 2 jam per hari
- $H_0: \mu > 2$ jam



Kesalahan Tipe I dan Tipe II

Dalam uji hipotesis, selalu ada risiko membuat keputusan yang salah. Ada dua jenis kesalahan:

Keputusan	H_0 Sebenarnya Benar	H_0 Sebenarnya Salah
Menolak H_0	Kesalahan tipe I (False Positive)	Keputusan Tepat
Tidak Menolak H_0	Keputusan Tepat	Kesalahan tipe II (False Negative)

Kesalahan Tipe I (False Positive): Menolak hipotesis nol padahal sebenarnya benar.

- Contoh: Menyimpulkan bahwa obat baru lebih efektif, padahal sebenarnya tidak.

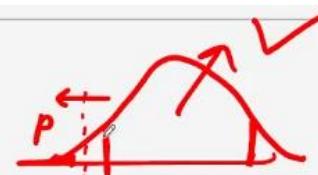
↑
Tentu

Kesalahan Tipe II (False Negative): Tidak menolak hipotesis nol padahal sebenarnya salah.

- Contoh: Menyimpulkan bahwa obat baru tidak efektif, padahal sebenarnya efektif.

↑
Tidak nyata .

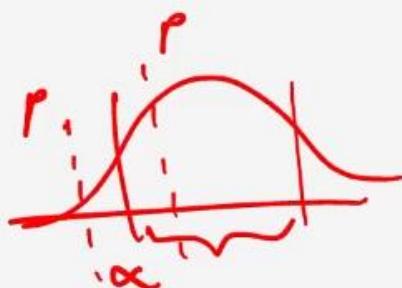
Tingkat Signifikansi (α)



- Definisi: Tingkat signifikansi, dilambangkan dengan α (alpha), adalah probabilitas maksimum untuk membuat Kesalahan Tipe I. Ini adalah ambang batas yang kita tetapkan sebelum pengujian untuk menentukan seberapa banyak risiko yang kita bersedia ambil.
 $\downarrow 95\%$ $\downarrow 99\%$ $\downarrow 90\%$
- Nilai Umum: Nilai α yang paling umum adalah 0.05 (5%), 0.01 (1%), atau 0.1 (10%).
- Hubungan dengan H_0 : Jika nilai p (probabilitas hasil sampel) yang kita hitung lebih kecil dari α , kita memiliki bukti yang cukup untuk menolak H_0 . Sebaliknya, jika nilai p lebih besar dari α , kita tidak memiliki bukti yang cukup untuk menolak H_0 .
- Trade-off: Menurunkan α (misalnya, dari 0.05 ke 0.01) mengurangi kemungkinan Kesalahan Tipe I, tetapi meningkatkan kemungkinan Kesalahan Tipe II.

Proses Uji Hipotesis

- Formulasikan Hipotesis: Tulis H_0 dan H_a .
- Pilih Tingkat Signifikansi: Tentukan α (misalnya, 0.05).
- Hitung Statistik Uji: Kumpulkan data sampel dan hitung statistik uji (misalnya, z-score atau t-score) dan nilai p (p -value).
- Ambil Keputusan: Bandingkan nilai p dengan α .
 - o Jika $p \leq \alpha$: Tolak H_0 . Ada bukti yang signifikan.
 - o Jika $p > \alpha$: Tidak menolak H_0 . Tidak ada bukti yang signifikan.



Contoh

fsikamodem00-2025220

Skenario: Sebuah perusahaan mengklaim bahwa rata-rata waktu yang dihabiskan pengguna di aplikasi mereka adalah 30 menit per hari.

Tantangan: Sebagai analis, Anda menduga rata-rata waktu sebenarnya lebih dari 30 menit. Anda mengambil sampel acak 100 pengguna dan menemukan rata-rata waktu yang dihabiskan adalah 32 menit. (Asumsi: standar deviasi populasi, $\sigma = 9.76$)

$$H_0: \mu = 30 \text{ menit}, \quad n = 100$$

$$H_a: \mu > 30 \text{ menit.} \quad \bar{U} = 32$$

$$\sigma = 9.76$$

Jawab

Langkah 1: Formulasikan Hipotesis:

- H_0 (Hipotesis Nol) : Rata-rata waktu yang dihabiskan Adalah 30 menit ($\mu = 30$) ✓

- H_a (Hipotesis Alternatif) : Rata-rata waktu yang dihabiskan lebih dari 30 menit ($\mu > 30$) ✓

Langkah 2: Pengujian dan Tingkat Signifikansi *Tingkat 5%*

- Kita memilih Tingkat signifikansi $\alpha = 0.05$ ↙

Langkah 3: Detail Perhitungan Statistik Uji

- Standar Error (SE): Mengukur seberapa banyak rata-rata sampel kita bervariasi

$$SE = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{9.76}{\sqrt{100}} = 0.976$$

std dev
populasi

Fast campus

Jawab

Langkah 3: Detail Perhitungan Statistik Uji

- Standar Error (SE): Mengukur seberapa banyak rata-rata sampel kita bervariasi

$$SE = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{9.76}{\sqrt{100}} = 0.976$$

✓
SE

- Z-score: Mengukur seberapa jauh rata-rata sampel kita (32) dari rata-rata yang diklaim (30) dalam satuan Standard Error

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{SE} = \frac{32 - 30}{0.976} = \frac{2}{0.976} \approx 2.05$$

Z	CDF P(Z ≤ z)
...	...
-2.1	0.0179
2.0	0.0228 (nilai p)
-1.9	0.0287
-1.8	0.0359
-1.7	0.0446
-1.6	0.0548
...	...

- Gunakan $\alpha = 0.05$ untuk uji satu sisi.

- Nilai kritis $Z_{0.05} = 1.645$, Karena $Z = 2.05 > 1.645$, maka cukup bukti untuk menolak H_0 .

- Nilai p dengan $\alpha: 0.02 \leq 0.05$, Karena nilai p lebih kecil dari α , maka cukup bukti untuk menolak H_0 .



Kesimpulan: Ada bukti yang signifikan (pada tingkat signifikansi 5%) untuk menyimpulkan bahwa rata-rata waktu yang dihabiskan pengguna di aplikasi adalah lebih dari 30 menit.

Rekap

- Uji Hipotesis adalah metode untuk membuat keputusan tentang populasi dari sampel.
 - Hipotesis Nol (H_0) adalah pernyataan awal yang kita uji, sementara Hipotesis Alternatif (H_a) adalah klaim yang ingin kita buktikan.
 - Kesalahan Tipe I (False Positive) adalah menolak H_0 yang benar, dan probabilitasnya dikendalikan oleh Tingkat Signifikansi (α).
 - Kesalahan Tipe II (False Negative) adalah tidak menolak H_0 yang salah.
-
- Next Up: Di sub-bab berikutnya, kita akan menerapkan konsep ini secara praktis dengan mempelajari Z-test dan T-test, yang merupakan metode uji hipotesis yang paling umum.

5-4. Z-test And T-test In Practice

01

Memahami T-Test

02

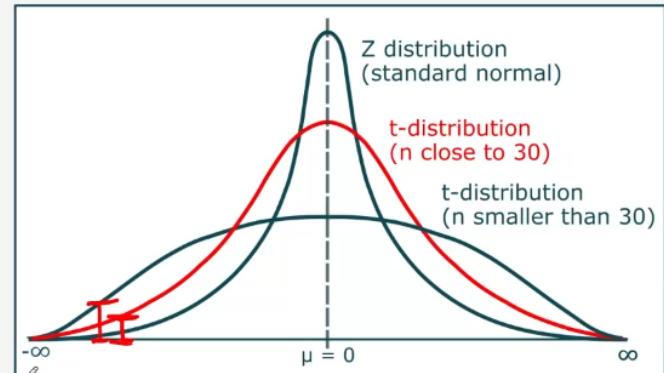
Mengidentifikasi kapan harus menggunakan Z-test versus T-test.

03

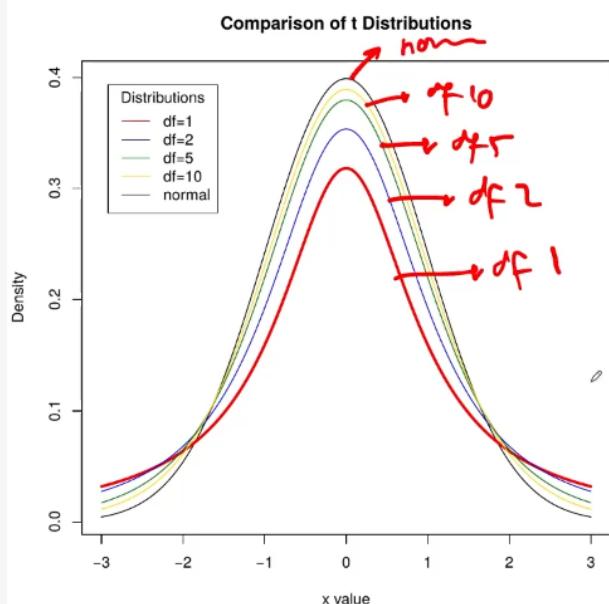
Menginterpretasi hasil uji statistik dan nilai p (p-value).

T-test: Penjelasan Detail

- Ide Utama: T-test adalah uji hipotesis yang digunakan ketika standar deviasi populasi (σ) tidak diketahui. Dalam situasi ini, kita harus menggunakan standar deviasi sampel (s) sebagai estimasi.
- Distribusi T-Student: Karena menggunakan estimasi dari sampel, T-test menggunakan Distribusi T-Student daripada distribusi Normal. Distribusi t-Student memiliki "ekor" yang lebih tebal, yang mencerminkan ketidakpastian tambahan yang muncul dari estimasi σ .



T-test: Penjelasan Detail



degree of freedom
↓ dof

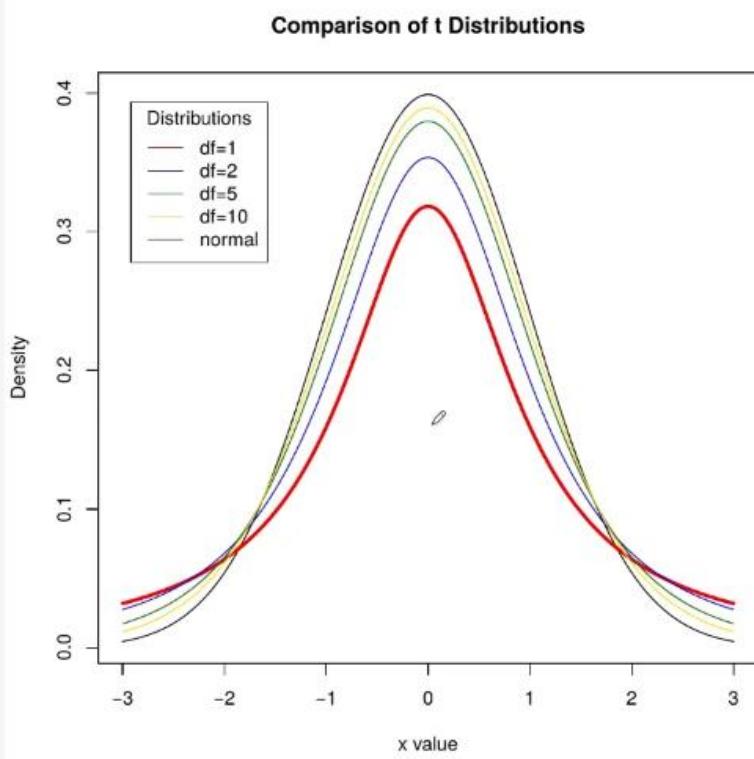
- Derajat Kebebasan (df): Bentuk distribusi t-Student dipengaruhi oleh derajat kebebasan (df), yang dihitung sebagai $df = n - 1$. Semakin besar df (artinya semakin besar ukuran sampel), semakin mirip distribusi t-Student dengan distribusi Normal.

$\alpha = 10\%$ $\alpha = 5\%$ $\alpha = 1\%$

Tabel T

df	$t_{0.10}$	$t_{0.05}$	$t_{0.01}$
1	3.078	6.314	31.821
2	1.886	2.920	6.965
5	1.476	2.015	3.365
10	1.372	1.812	2.764
15	1.341	1.753	2.602
20	1.325	1.725	2.528
25	1.316	1.708	2.485
30	1.310	1.697	2.457
40	1.303	1.684	2.423
60	1.296	1.671	2.390
∞	1.282	1.645	2.326

$n=1000$ $n=100$



Jenis-jenis T-Test

1. T-test Satu Sampel: Membandingkan rata-rata sampel dengan rata-rata populasi yang diklaim.
1. T-test Dua Sampel Independen: Membandingkan rata-rata dari dua kelompok yang tidak berhubungan.
1. T-test Berpasangan: Membandingkan rata-rata dari kelompok yang sama di dua waktu yang berbeda (misalnya, sebelum dan sesudah perlakuan).

T-test Satu Sampel

Seorang dosen ingin mengetahui apakah rata-rata nilai ujian mahasiswa lebih tinggi dari nilai standar kelulusan yaitu 70. Dengan Data Sampel:

- $n = 25$ mahasiswa
- Rata-rata nilai sampel: $\bar{x} = 73$
- Simpangan baku sampel: $s = 8$

✓ Langkah-langkah Uji Hipotesis:

1. Rumusan Hipotesis:

- H_0 (Hipotesis nol): $\mu = 70$ (rata-rata nilai sama dengan standar)
- H_1 (Hipotesis alternatif): $\mu > 70$ (rata-rata nilai lebih tinggi dari standar)

2. Statistik Uji: Gunakan rumus uji-t satu sampel

$$SE = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \quad t = \frac{73 - 70}{8/\sqrt{25}} = 1.875$$

T-test Satu Sampel

Seorang dosen ingin mengetahui apakah rata-rata nilai ujian mahasiswa lebih tinggi dari nilai standar kelulusan yaitu 70. Dengan Data Sampel:

- $n = 25$ mahasiswa
- Rata-rata nilai sampel: $\bar{x} = 73$
- Simpangan baku sampel: $s = 8$

✓ Langkah-langkah Uji Hipotesis:

3. Keputusan:

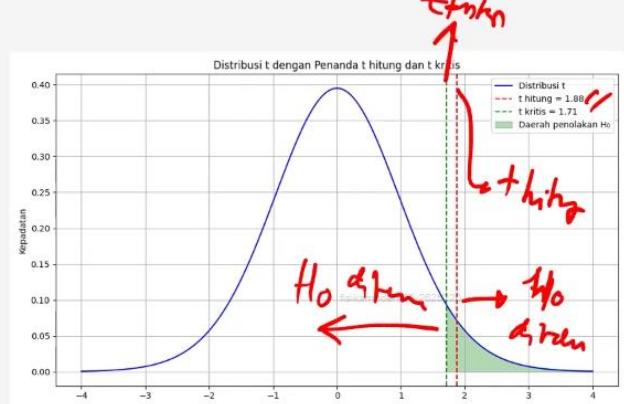
- Derajat kebebasan $df = n - 1 = 24$
- Nilai kritis untuk $\alpha = 0.05$ (Uji satu sisi $t_{0.05}$) dan $df = 24$ adalah 1.711

4. Kesimpulan:

- Karena $t = 1.875 > 1.711$, maka tolak H_0

$$t = \frac{73 - 70}{8/\sqrt{25}} = 1.875$$

Ada cukup bukti untuk menyatakan bahwa rata-rata nilai mahasiswa lebih tinggi dari standar kelulusan 70 pada tingkat signifikansi 5%.



Memilih Uji yang Tepat

Kriteria	Z-test	T-test
Kapan digunakan	Standar deviasi populasi (σ) diketahui atau n sangat besar ($n \geq 30$)	Standar deviasi populasi (σ) tidak diketahui
Distribusi	Distribusi Normal (CLT Valid)	Distribusi t-student (dengan derajat kebebasan, $df = n - 1$)
Penerapan	Skenario yang lebih jarang di dunia nyata di mana σ diketahui	Sangat umum di dunia nyata, di mana kita hampir selalu menggunakan standar deviasi sampel

Menginterpretasi Hasil Uji dan Nilai p

Apa itu Nilai p (p-value)?

- Nilai p adalah probabilitas untuk mendapatkan hasil sampel (atau hasil yang lebih ekstrem) yang kita amati, jika Hipotesis Nol (H_0) benar.
- Nilai p yang kecil menunjukkan bahwa hasil sampel kita sangat tidak mungkin terjadi secara kebetulan jika H_0 benar, sehingga memberikan bukti yang kuat untuk menolak H_0 .

$$\begin{array}{l} z > z_{\text{kritis}} \\ t > t_{\text{kritis}} \end{array}$$

Aturan Keputusan:

- Jika $p\text{-value} \leq \alpha$ (tingkat signifikansi): Hasilnya signifikan secara statistik. Kita menolak Hipotesis Nol (H_0). Ini berarti ada cukup bukti untuk mendukung Hipotesis Alternatif (H_a).
- Jika $p\text{-value} > \alpha$: Hasilnya tidak signifikan secara statistik. Kita tidak menolak Hipotesis Nol (H_0). Ini berarti tidak ada cukup bukti dari sampel untuk menolak H_0 .

Next Up

Apa itu Nilai p (p-value)?

- Nilai p adalah probabilitas untuk mendapatkan hasil sampel (atau hasil yang lebih ekstrem) yang kita amati, jika Hipotesis Nol (H_0) benar.
- Nilai p yang kecil menunjukkan bahwa hasil sampel kita sangat tidak mungkin terjadi secara kebetulan jika H_0 benar, sehingga memberikan bukti yang kuat untuk menolak H_0 .

Aturan Keputusan:

- Jika $p\text{-value} \leq \alpha$ (tingkat signifikansi): Hasilnya signifikan secara statistik. Kita menolak Hipotesis Nol (H_0). Ini berarti ada cukup bukti untuk mendukung Hipotesis Alternatif (H_a).
- Jika $p\text{-value} > \alpha$: Hasilnya tidak signifikan secara statistik. Kita tidak menolak Hipotesis Nol (H_0). Ini berarti tidak ada cukup bukti dari sampel untuk menolak H_0 .