

spacing = 3 tab

1. Part 1 Essential Mathematical Foundations (Deep Dive)

Chapter 1. Descriptive Statistics

1-1. Introduction To Descriptive Statics



Apa Itu Statistik Deskriptif

01

Definisi

- Cabang statistik yang fokus pada penyajian, pengorganisasian, dan peringkasan data

fisikamodern00-2625220

02

Objektif

- Digunakan untuk memahami karakteristik dasar dari suatu kumpulan data.

Apa Itu Statistik Deskriptif



Tidak digunakan untuk

Membuat kesimpulan atau generalisasi terhadap populasi yang lebih luas

Peran Statistik Deskriptif



Langkah awal dalam eksplorasi data



Membantu mengidentifikasi pola, tren, dan anomali

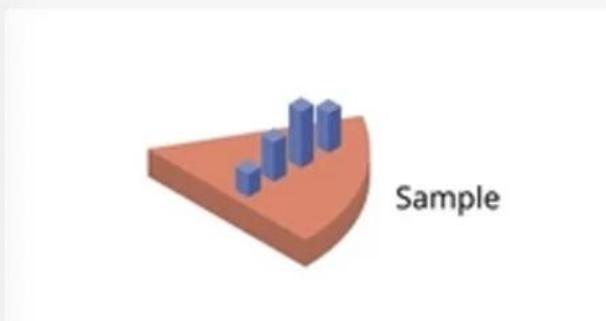


Menyediakan ringkasan numerik dan visual dari data



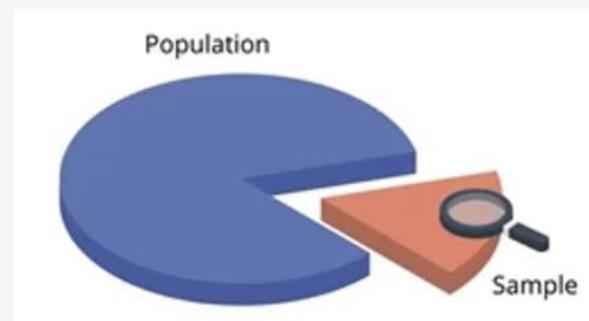
Dasar untuk analisis statistic lanjutan dan machine learning

Statistik Deskriptif vs Inferensial



Deskriptif:

- Fokus pada data yang tersedia
- Tidak membuat prediksi atau generalisasi



Inferensial:

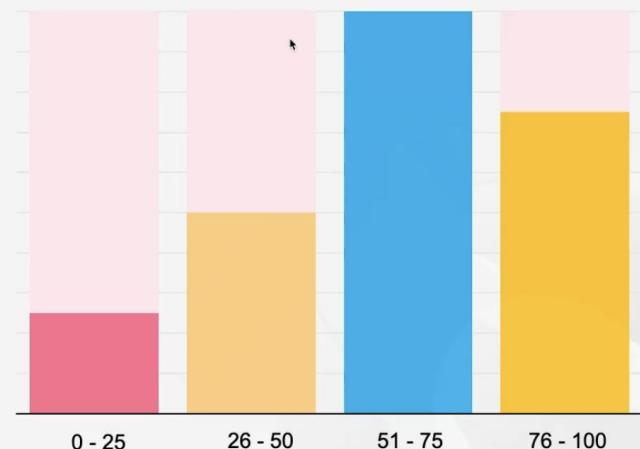
- Menggunakan sampel untuk menyimpulkan tentang populasi.
- Melibatkan estimasi dan pengujian hipotesis

Contoh Aplikasi Statistik Deskriptif



No	Nilai
1	75
2	73
3	50
4	90
5	75
6	45
7	60
8	80
9	76
10	15

Mean	63,9
Median	74
Standard Deviasi	22,0426355
Minimum	15
Maximum	90
First Quartile	52,5



1-2. Measures Of Central Tendency

01

Ukuran Pemusatan

02

Mean, Median, Modus
fisikamodem00-2625220

03

Interpretasi Ukuran Pemusatan

04

Contoh Aplikasi

05

Penutup

Ukuran Pemusatan

- Ukuran pemusatan menggambarkan nilai tengah atau tipikal dari suatu kumpulan data.
- Digunakan untuk meringkas data numerik menjadi satu nilai representatif.
- Tiga ukuran utama: Mean (rata-rata), Median, dan Mode (modus).

Mean (Rata-rata)

$$x \rightarrow 5 \ 7 \ 6 \ 2 \ 1 \ 4 \quad 40$$

\uparrow
data
 $n=6$

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{5+7+6+2+1+4}{6} + 40 \\ &= \frac{25}{6} \rightarrow \frac{65}{7} = 9,14... \\ &= 4,16666 \approx 4,17\end{aligned}$$

Definisi: Jumlah seluruh nilai dibagi jumlah data.

Formula:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

Catatan:

Kelebihan: Menggunakan semua data, mudah dihitung.

Kekurangan: Sangat sensitif terhadap outlier.

Mean (Rata-rata)

$$x \rightarrow 5 \ 7 \ 6 \ 2 \ 1 \ 4 \quad 40$$

\uparrow
data
 $n=6$

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{5+7+6+2+1+4}{6} + 40 \\ &= \frac{25}{6} \rightarrow \frac{65}{7} = 9,14... \\ &= 4,16666 \approx 4,17\end{aligned}$$

Definisi: Jumlah seluruh nilai dibagi jumlah data.

Formula:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

Catatan:

Kelebihan: Menggunakan semua data, mudah dihitung.

Kekurangan: Sangat sensitif terhadap outlier.

Modus (Mode)

$X \rightarrow 1 \underline{2} 2 2 3 4$
↓
modus=2

$X \rightarrow 1 \underline{2} 2 2 3 \underline{4} 4 4 5$
 $\begin{matrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 4 & 4 & 5 & 6 & 6 & 6 \\ \swarrow & \swarrow \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{matrix}$
Bimodal.
multimodal

Definisi: Nilai yang sering muncul.

Formula:

- Frekuensi / kemunculan data tertinggi
- Dapat memiliki lebih dari satu modus (bimodal/multimodal)

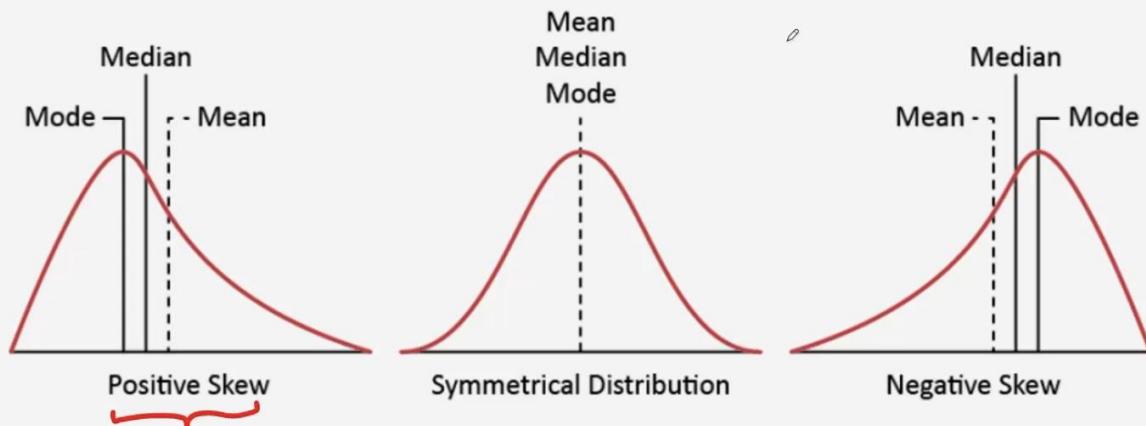
Catatan:

Kelebihan: Lebih cocok untuk data kategorikal.

Kekurangan: Tidak selalu ada atau tidak unik.

fisikamodem00-2621

Perbandingan Mode, Median & Mean



Contoh Aplikasi Mean, Median & Modus



Data gaji karyawan: gunakan median untuk menghindari bias dari gaji ekstrem.



Nilai ujian siswa: mean untuk melihat performa umum.



Preferensi produk: mode untuk mengetahui pilihan terbanyak.

Penutup

- **Mean:** rata-rata aritmatika, sensitif terhadap outlier.
- **Median:** nilai tengah, robust terhadap outlier.
- **Mode:** nilai paling sering muncul, cocok untuk data kategorikal.
- Pilih ukuran pemusatan sesuai konteks data.

1-3. Measures Of Dispersion

01

Apa itu ukuran persebaran data?

02

Range (Jangkauan)

03

Variance (variansi)

04

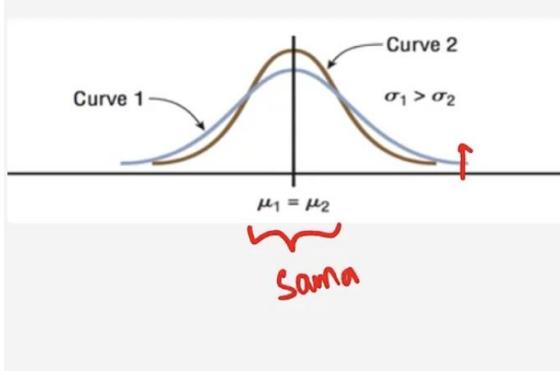
Standard Deviation (Simpangan Baku)

05

Interquartile Range (IQR)

Apa itu ukuran persebaran data

12 3 4 5 2 3 1
↑ ↑
3 3



- **Definisi:** Ukuran penyebaran menggambarkan seberapa tersebar data dalam suatu distribusi.
- **Tujuan:**
 - Digunakan untuk memahami variabilitas dan konsistensi data.
 - Deteksi outlier
 - Normalisasi data
 - Evaluasi model prediktif
- **Contoh:** dua dataset dengan rata-rata sama bisa memiliki penyebaran yang berbeda.

Range (Jangkauan)

No	Nilai
1	75
2	73
3	50
4	90
5	75
6	45
7	60
8	80
9	76
10	15

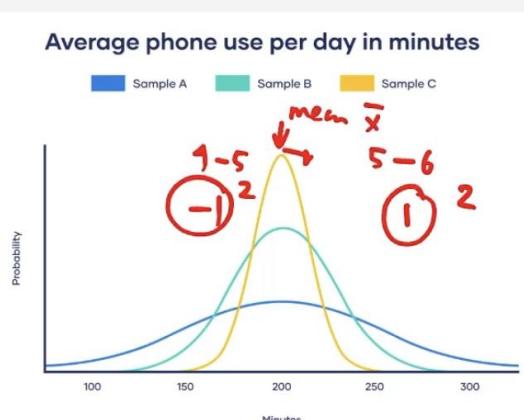
115

max →
 $range = max - min$
 $= 90 - 15$
 $= 75$

min →

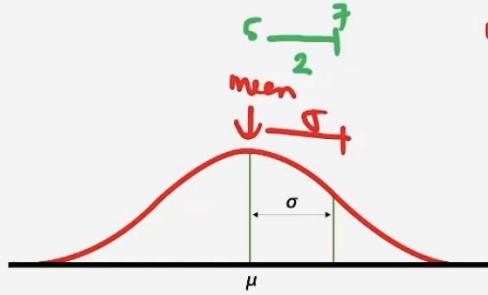
- **Definisi:** selisih antara nilai maksimum dan minimum dalam dataset.
- **Formula:**
$$range = max - min$$
- **Kelebihan:** Mudah dihitung
- **Kekurangan:** Sangat dipengaruhi oleh outlier

Variance (Variansi / Ragam)



- **Definisi:** mengukur rata-rata kuadrat deviasi dari mean
- **Formula:**
$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{n}$$
- **Kelebihan:** Menggunakan semua data
- **Kekurangan:** Satuan kuadrat, sulit diinterpretasi langsung

Standard Deviation (Simpangan Baku)



$$\text{mean} = \mu$$
$$\sigma = 2$$

- **Definisi:** akar kuadrat dari variance
- **Formula:**

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \mu)^2}{n}}$$

- **Kelebihan:** Satuan sama dengan data asli.
- **Kekurangan:** Masih dipengaruhi oleh outlier

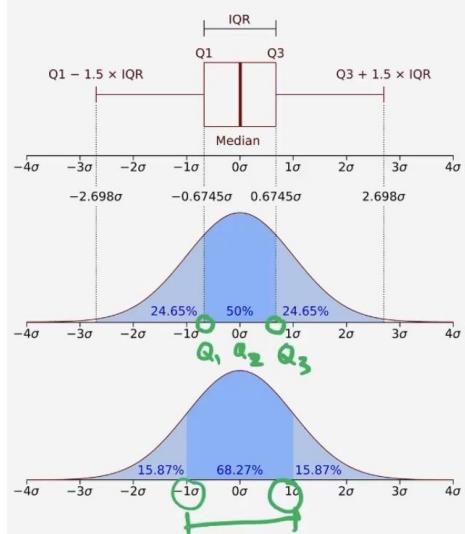


Interquartile Range (IQR)



- **Definisi:** selisih antara kuartil ketiga (Q_3) dan kuartil pertama (Q_1).
- **Formula:**
$$IQR = Q_3 - Q_1$$
- **Kelebihan:** Robust terhadap outlier.
- **Kekurangan:** Tidak menggunakan semua data

Interquartile Range (IQR)



- **Definisi:** selisih antara kuartil ketiga (Q_3) dan kuartil pertama (Q_1).
- **Formula:**
$$IQR = Q_3 - Q_1$$
- **Kelebihan:** Robust terhadap outlier.
- **Kekurangan:** Tidak menggunakan semua data



Perbandingan

Range	Mudah Sangat sensitive terhadap outlier
Variance	Menggunakan semua data Satuan kuadrat
Standard Deviation	Menggunakan semua data Interpretasi lebih mudah
Interquartile Range	Robust (Tegar) Terhadap Outlier

Aplikasi dalam Data Science dan Statistics

01 Menilai Variabilitas Fitur	Ukuran pemasatan seperti mean hanya memberi tahu kita nilai rata-rata, tetapi tidak memberi tahu apakah data homogen atau heterogen. Measures of dispersion seperti standard deviation dan IQR menunjukkan seberapa jauh data menyebar dari pusatnya.
02 Mendeteksi Outlier	Ukuran seperti range dan IQR membantu mengidentifikasi nilai ekstrem yang bisa mempengaruhi analisis.
03 Menentukan Stabilitas dan Risiko	Dalam konteks bisnis atau keuangan, standard deviation sering digunakan untuk mengukur risiko atau volatilitas.
04 Membantu Pemilihan Metode Statistik	Distribusi data yang skewed atau memiliki penyebaran tinggi mungkin tidak cocok untuk metode yang mengasumsikan distribusi normal.
05 Meningkatkan Interpretasi Visualisasi	Visualisasi seperti boxplot dan histogram menjadi lebih bermakna jika kita memahami ukuran penyebaran
06 Dasar untuk Normalisasi dan Standarisasi	Dalam machine learning, data sering perlu dinormalisasi agar model bekerja optimal. Measures of dispersion digunakan untuk Z-score normalization : menggunakan mean dan standard deviation Min-max scaling : menggunakan range

1-4. Understanding Data Distribution Shapes

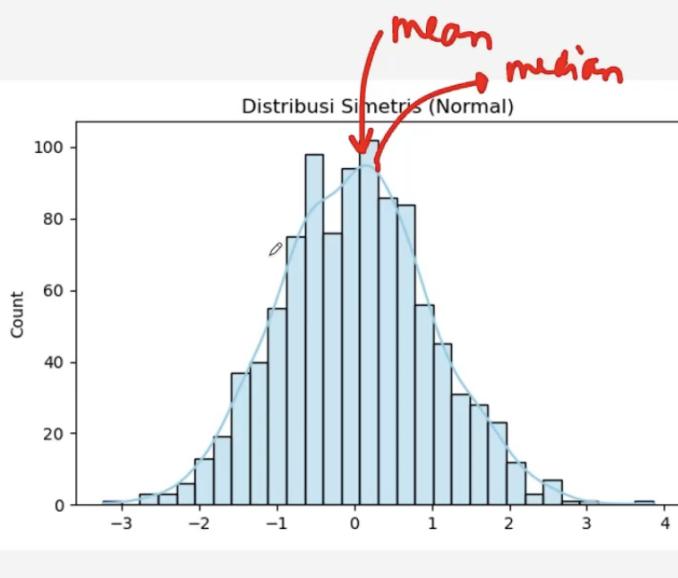
01 Definisi	02 Jenis-jenis distribusi data	03 Skewness & Kurtosis	04 Perbandingan Penutup
------------------------------	---	---	--

Bentuk Distribusi Data

- Bentuk distribusi data menggambarkan bagaimana nilai-nilai dalam dataset tersebar.
- Distribusi dapat menunjukkan pola
 - simetris,
 - miring (skewed),
 - seragam,
 - atau memiliki lebih dari satu puncak (bimodal).

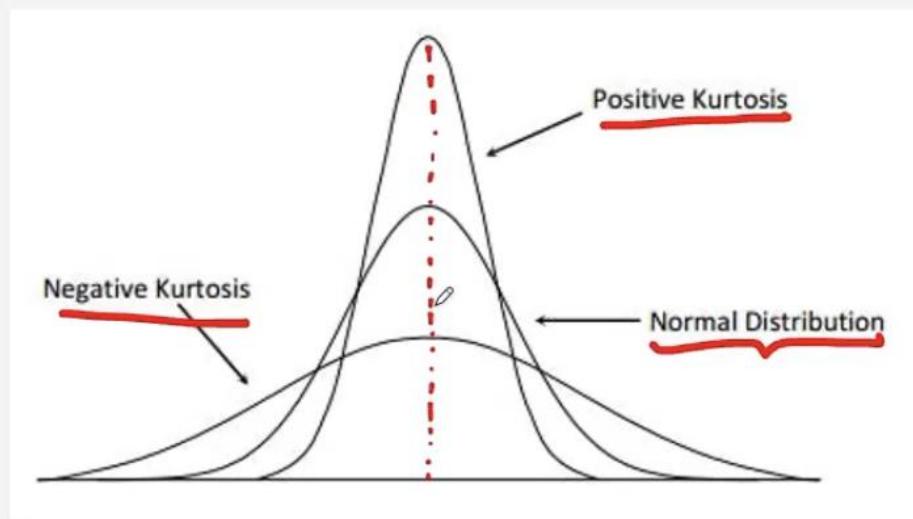
fisikamodem00-2625220

Distribusi Simetris



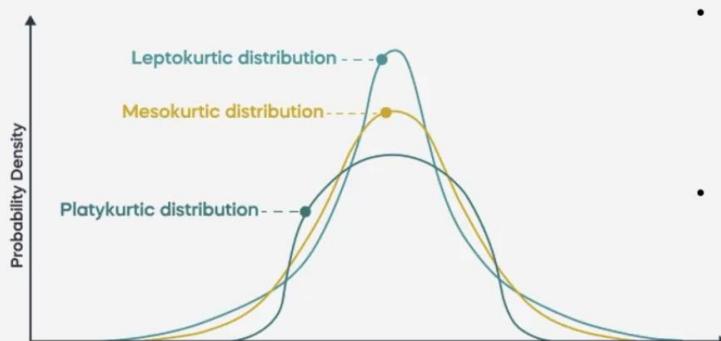
- Distribusi yang tersebar dengan titik median dan mean saling berdekatan.
- Contoh dari distribusi ini adalah distribusi normal

Kurtosis



Kurtosis mengukur derajat konsentrasi data di sekitar mean dan frekuensi outlier. Secara teknis, kurtosis adalah momen keempat dari distribusi yang dinormalisasi.

Kurtosis

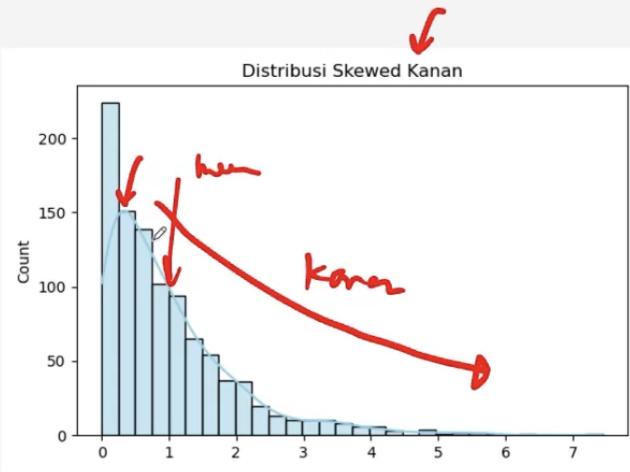


Menghitung kurtosis dengan python

```
from scipy.stats import kurtosis  
kurtosis(data, fisher=False)
```

- Mesokurtic (Kurtosis ≈ 3)
 - Distribusi normal standar.
 - Puncak distribusi sedang, tidak terlalu tajam atau datar.
 - Outlier muncul dengan frekuensi normal.
- Leptokurtic (Kurtosis > 3)
 - Puncak distribusi tajam dan tinggi.
 - Data lebih terkonsentrasi di sekitar mean.
 - Outlier lebih sering muncul.
 - Contoh: distribusi keuangan dengan lonjakan ekstrem.
- Platykurtic (Kurtosis < 3)
 - Puncak distribusi datar dan lebar.
 - Data lebih tersebar.
 - Outlier lebih jarang.
 - Contoh: distribusi nilai ujian yang merata.

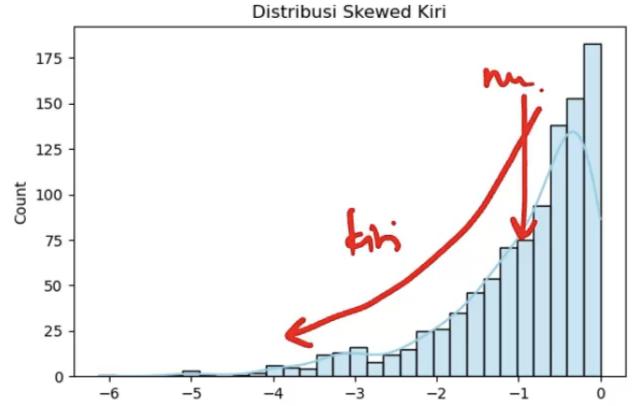
Distribusi Miring (Skewed)



Skewness > 0: miring ke kanan

$$skewness = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3}{(n-1)\sigma^3}$$

\bar{x} = nilai mean,
 x_i = Nilai data ke- i ,
 σ = Standard Deviation,
 n = jumlah data

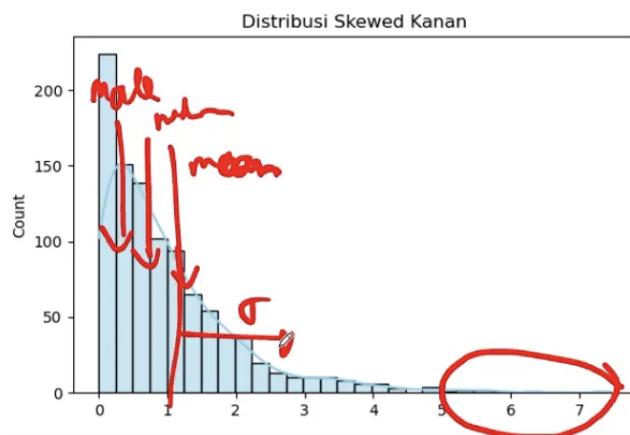


Skewness < 0: miring ke kiri

fisikamodern00-2625220

Distribusi Miring (Skewed)

fisikamodern00-2625220

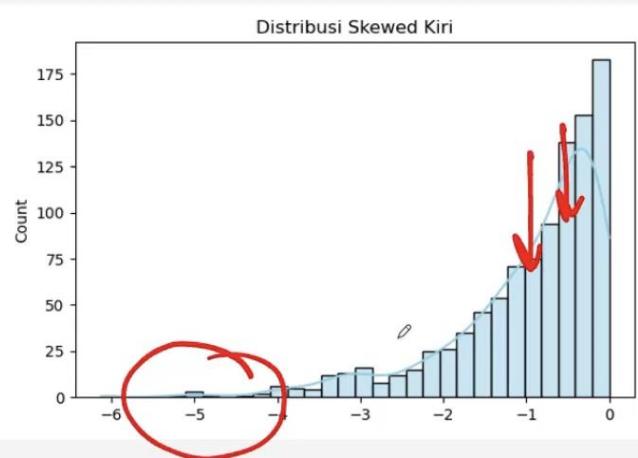


Skewness > 0: miring ke kanan

Karakteristik:

- Ekor Panjang di kanan
- Mean > Median > Mode
- Contoh:
 - Pendapatan Individu: selegintir orang berpenghasilan sangat tinggi
- Warning:
 - Nilai Mean dapat menyesatkan karena dipengaruhi oleh outliers
 - Median lebih representatif untuk pusat data
 - Standard Deviasi yang sangat besar karena terdapat nilai ekstrem di kanan

Distribusi Miring (Skewed)

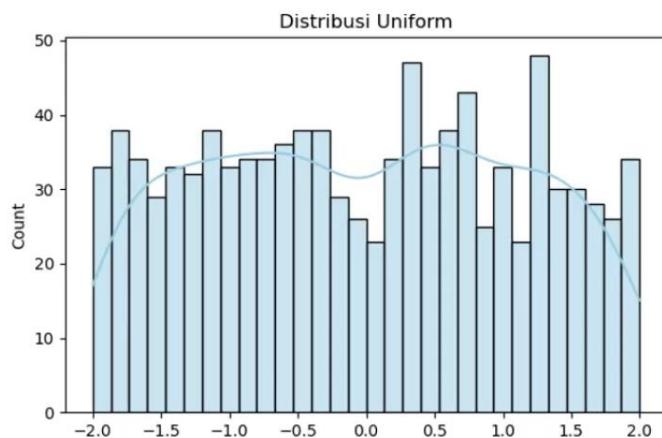


Skewness < 0: miring ke kiri

Karakteristik:

- Ekor Panjang di kiri
- Mean < Median < Mode
- Contoh:
 - Skor ujian dengan nilai tinggi yang banyak dan sedikit yang bernilai rendah
- Warning:
 - Nilai Mean dapat menyesatkan karena dipengaruhi oleh outliers ekstrem minimum
 - Median lebih representatif untuk pusat data
 - Standard Deviasi yang sangat besar karena terdapat nilai ekstrem di kiri

Distribusi Uniform



Skewness < 0: miring ke kiri

Karakteristik:

- Semua nilai memiliki probabilitas yang mirip
- Mean ≈ Median
- Contoh:
 - Hasil lemparan dadu fair → setiap angka memiliki probabilitas $1/6$
 - Digunakan untuk menggenerasi nilai random pada nilai awal bobot machine learning.
- Warning:
 - Semakin besar rentang data, semakin besar variansnya.
 - $Var(x) = \frac{(b-a)^2}{12}$, dengan a dan b adalah rentang distribusi

Penutup

- Bentuk distribusi mempengaruhi analisis data
- Skewness dan kurtosis membantu memahami karakteristik data
- Visualisasi sangatlah penting untuk eksplorasi awal sebaran data dan deteksi outliers.

1-5. Summary And Practice Problems

Ringkasan Konsep Utama

- Mean: Rata-rata dari sekumpulan data
- Median: Nilai tengah dari data yang diurutkan
- Mode: Nilai yang paling sering muncul
- Range: Selisih antara nilai maksimum dan minimum
- Variance: Ukuran penyebaran data dari rata-rata
- Standard Deviation: Akar dari variance, menunjukkan sebaran data



Latihan 1 – Ukuran Pemusatan

Diberikan data: [4, 8, 6, 5, 3, 4, 1, 7]

fisikamodern00-2625220

Hitung mean, median, modus, dan range

$$\text{mean} \rightarrow \bar{x} = \frac{4+8+6+5+3+4+1+7}{8} = \frac{41}{8} = 5,125$$

modus = 4

$$\text{range} = 8 - 3 = 5$$

median \rightarrow 3 4 4 4 5 6 7 8

$$\frac{4+5}{2} = 4,5$$

A hand-drawn bell-shaped curve is drawn below the data set.

Latihan 2 – Ukuran Penyebaran

Diberikan data: [10, 12, 23, 23, 16, 23, 21, 16]

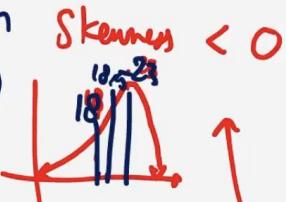
Hitung variance, standard deviation dan skewness

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} \\ &= \frac{(10-18)^2 + (12-18)^2 + \dots}{8} \\ &= \frac{8^2 + 6^2 + 5^2 + 5^2 + 2^2 + 5^2 + 3^2 + 2^2}{8} = 24\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\text{modus} = 23$$

$$\bar{x} = \frac{141}{8} = 18$$

$$\text{mean}$$



$$\text{skewness} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{(x_i - \bar{x})^3}{s^3} \right) = -0,3$$



Tips

- Gunakan mean untuk data simetris tanpa outlier
- Gunakan median jika data memiliki outlier atau skewed
- Mode berguna untuk data kategorikal
- Standard deviation menunjukkan sebaran data dari rata-rata
- Visualisasi seperti histogram membantu memahami distribusi
- Perhatikan bentuk distribusi sebelum memilih ukuran statistik

Chapter 2. Probability Theory

2-1. What Is Probability

01

**Definisi
Probability**

02

**Sample Space
Dan
Event**

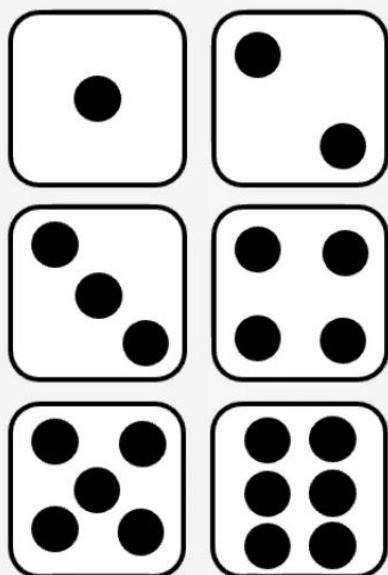
03

**Classical
vs
Empirical**

Apa Itu Probabilitas?

- | | |
|-----------|---|
| 01 | • Probabilitas adalah ukuran kemungkinan suatu kejadian terjadi |
| 02 | • Bernilai 0 saat tidak terjadi.
• Bernilai 1 saat terjadi. |
| 03 | • Digunakan dalam pengambilan keputusan berbasis data |

Contoh



Berapa probabilitas / kemungkinan dadu berangka 2 muncul saat dilempar?

[1, 2, 3, 4, 5, 6]

↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓

0 1 0 0 0 0

$$P(2) = \frac{1}{6}$$
$$P(1) = \frac{1}{6}$$
$$P(6) = \frac{1}{6}$$

Contoh



Berapa probabilitas / kemungkinan gambar muncul saat sekali tos?

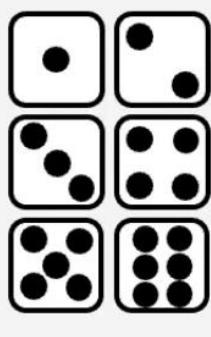
$$p(\text{gambar}) = \frac{1}{2}$$

$$\underline{p(\text{angka}) = \frac{1}{2}} +$$

(1)

Sample Space / Ruang Sampel

- Sample Space adalah himpunan semua kemungkinan hasil



Sample Space nya adalah:
[1, 2, 3, 4, 5, 6]

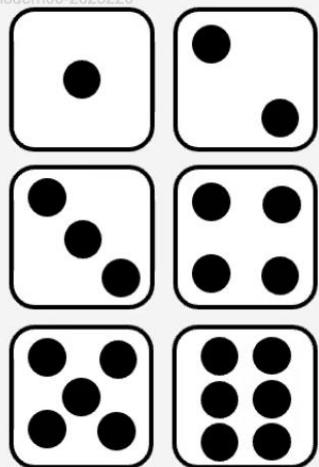



Sample Space nya adalah:
[angka, gambar]


Event / Kejadian

- Event atau kejadian adalah subset dari sample space

fisikamodern00-2625220



Sample Space nya adalah:

[1, 2, 3, 4, 5, 6]

Event → Angka Ganjil:

[1, 3, 5]

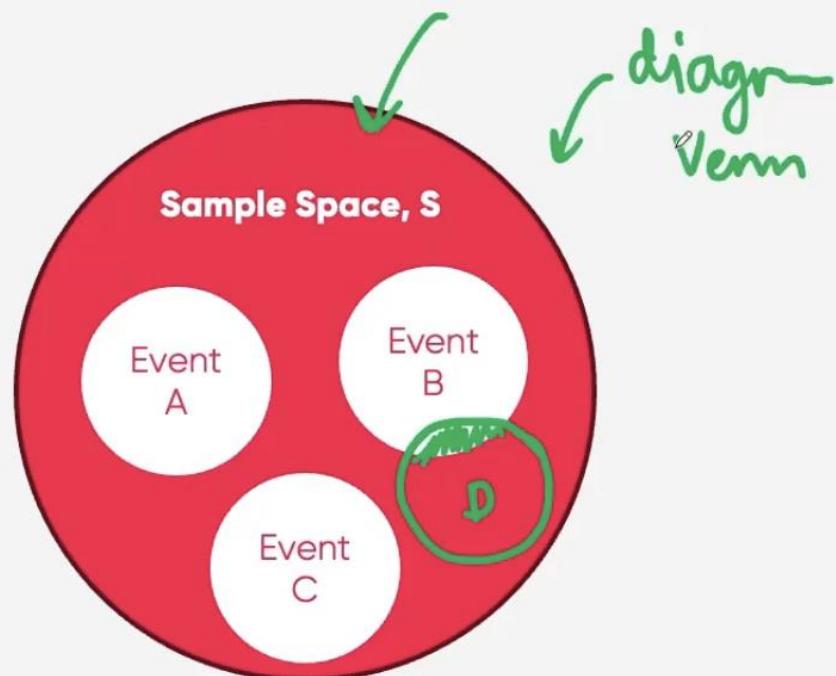
Event → Angka Genap:

[2, 4, 6]

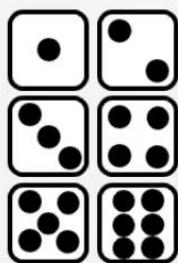
Event → Bilangan Prima:

[2, 3, 5]

Sample Space dan Event



Classical VS Empirical



Jumlah sampel adalah 6

Kemungkinan angka 3 muncul adalah?

Classical / Theoretical:

$$P(3) = \frac{\text{kemungkinan } 3}{\text{total kemungkinan}} \\ = \frac{1}{6}$$

Empirical / Experiment:

$$1 \ 3 \ 1 \ 4 \ 5 \ 6 \\ P(1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Kenapa Berbeda?

Probabilitas Teoritical akan sama dengan Probabilitas Empirical saat

jumlah ekperimen

Jumlah ekperimen

sangatlah

BESAR!



Jika nilai probabilitas teoritical tidak diketahui, jumlah observasi yang sangat banyak akan meningkatkan akurasi nilai probabilitas

Ringkasan

- **Sample Space:** semua kemungkinan outcome dari eksperimen
- **Eksperimen:** proses yang menghasilkan hasil acak
- **Outcome:** hasil dari satu percobaan

Kejadian saling lepas (mutually exclusive)

- Kejadian yang tidak mungkin terjadi bersama-sama:
 - Pelemparan satu dadu menghasilkan angka 2 dan 5
 - Pelemparan coin satu kali menghasilkan gambar dan angka

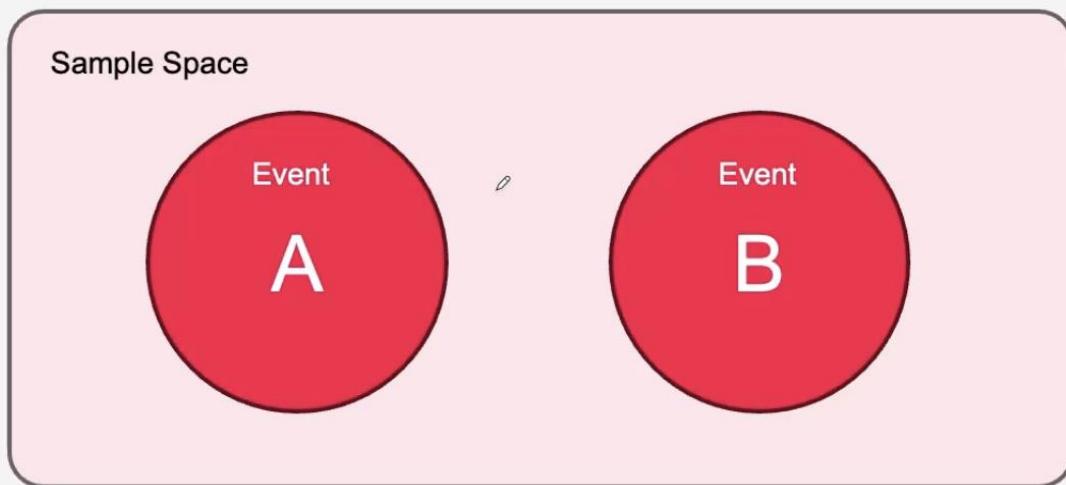


Diagram Venn

fisikamodern00_2625220

Kejadian tidak saling lepas (Non mutually exclusive)

- Kejadian yang mungkin terjadi bersama-sama:
 - Siswa yang suka fisika dan matematika
 - Siswa yang memakai kacamata dan keriting

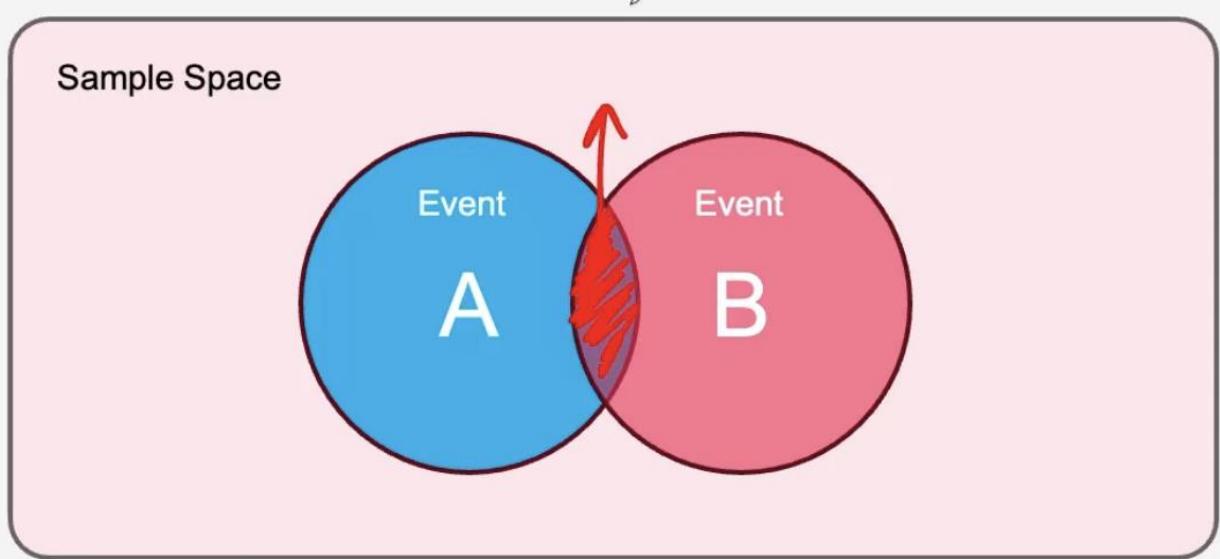
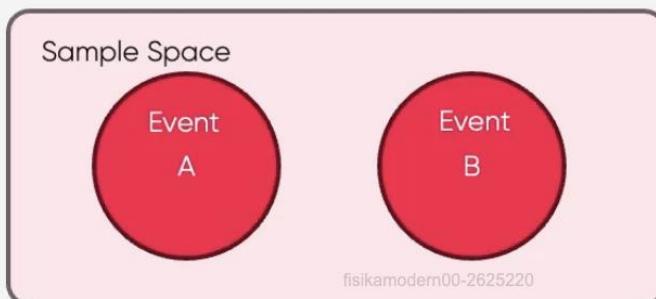


Diagram Venn

Aturan Penjumlahan (Mutually Exclusive)

- Berapa probabilitas kejadian A atau B. contohnya dalam 1 lempar dadu, muncul angka 1 atau 6 **atau 3**



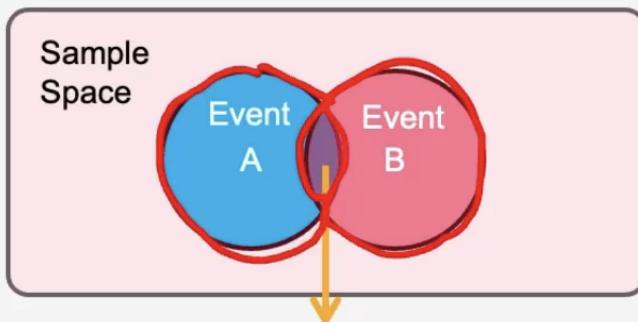
$$\begin{aligned}P(A \text{ atau } B) &= P(A) + P(B) \\P(1 \text{ atau } 6) &= P(1) + P(6) \\&= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \\&= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

- Formulasi:

$$P(A \text{ atau } B) = P(A \text{ or } B) = P(A \cup B) = P(\bar{A}) + P(B)$$

Aturan Penjumlahan (Mutually Exclusive)

- Berapa probabilitas kejadian A atau B. contohnya siswa berkacamata atau keriting



$$P(A \text{ dan } B) = P(A \text{ and } B) = P(A \cap B)$$

- Formulasi:

$$\begin{aligned}P(A \text{ atau } B) &= P(A \text{ or } B) = P(A \cup B) \\&= P(A) + P(B) - P(A \cap B)\end{aligned}$$

union .

Dependent vs Independent Events

Dependent

Kejadian yang hasilnya mempengaruhi kejadian selanjutnya

Contoh:

- Pengambilan kartu pada dek kartu tanpa dikembalikan, mempengaruhi pengambilan selanjutnya

Independent

Kejadian yang hasilnya tidak mempengaruhi kejadian selanjutnya

Contoh:

- Pelemparan coin pertama tidak mempengaruhi pelemparan kedua, dan seterusnya

Aturan Perkalian (Mutually Exclusive)



- Akan selalu bernilai nol, karena kejadian A dan B terjadi bersamaan tidak ada

Sample Space

Event
A

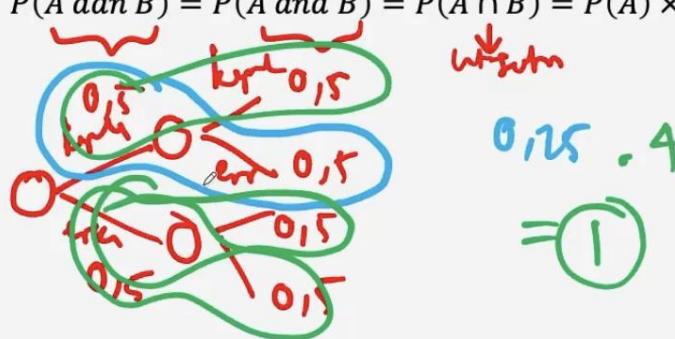
Event
B

$$P(A \cap B) = 0$$

$$P(A) \times P(B) = 0$$

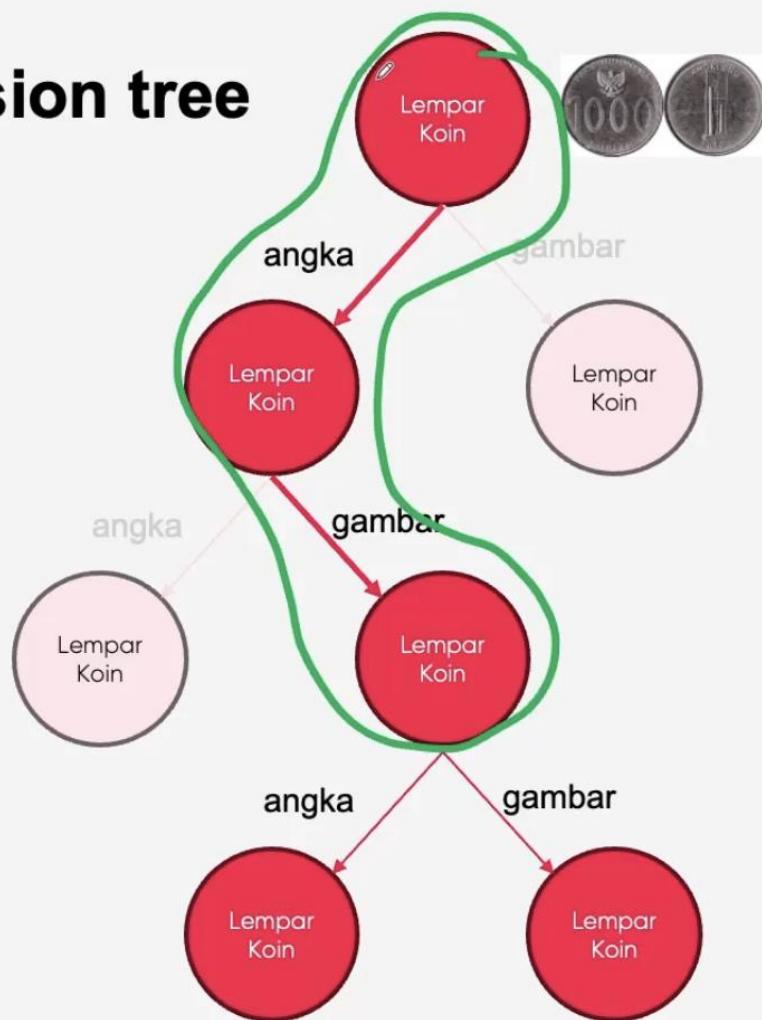
Aturan Perkalian (Independent)

- Aturan perkalian digunakan untuk menemukan probabilitas bahwa dua atau lebih kejadian saling bebas terjadi secara berurutan atau bersamaan
- Contoh: Melempar koin dua kali
 - Kejadian A: Mendapatkan "Kepala" pada lemparan pertama. $P(A) = 0.5$
 - Kejadian B: Mendapatkan "Ekor" pada lemparan kedua. $P(B) = 0.5$
 - Probabilitas mendapatkan kepala lalu ekor:
 - $P(A \text{ dan } B) = P(A \text{ and } B) = P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0.5 \times 0.5 = 0.25$



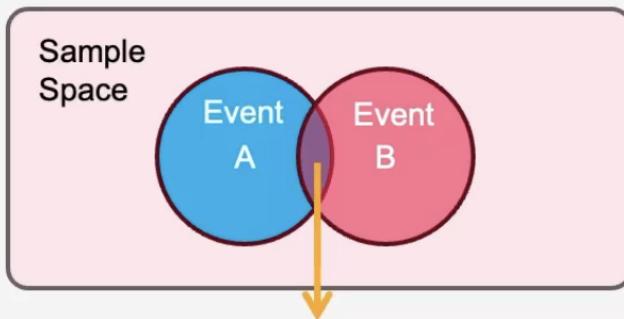
fisikamodern00-2625220

Ilustrasi decision tree Independent



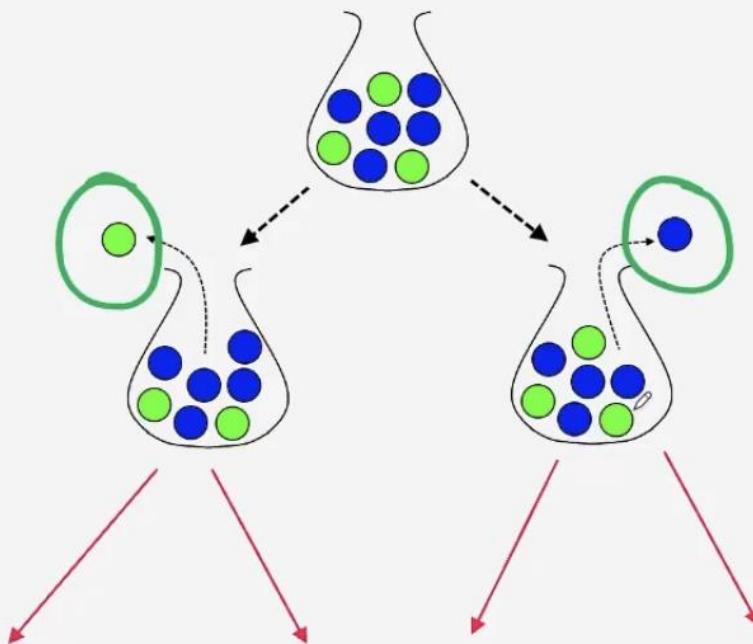
Aturan Perkalian (Non Mutually Exclusive)

- Akan bernilai tidak nol, karena kejadian A dan B dapat terjadi dalam waktu bersamaan, misal mengambil kartu no 5 dan berwarna merah.



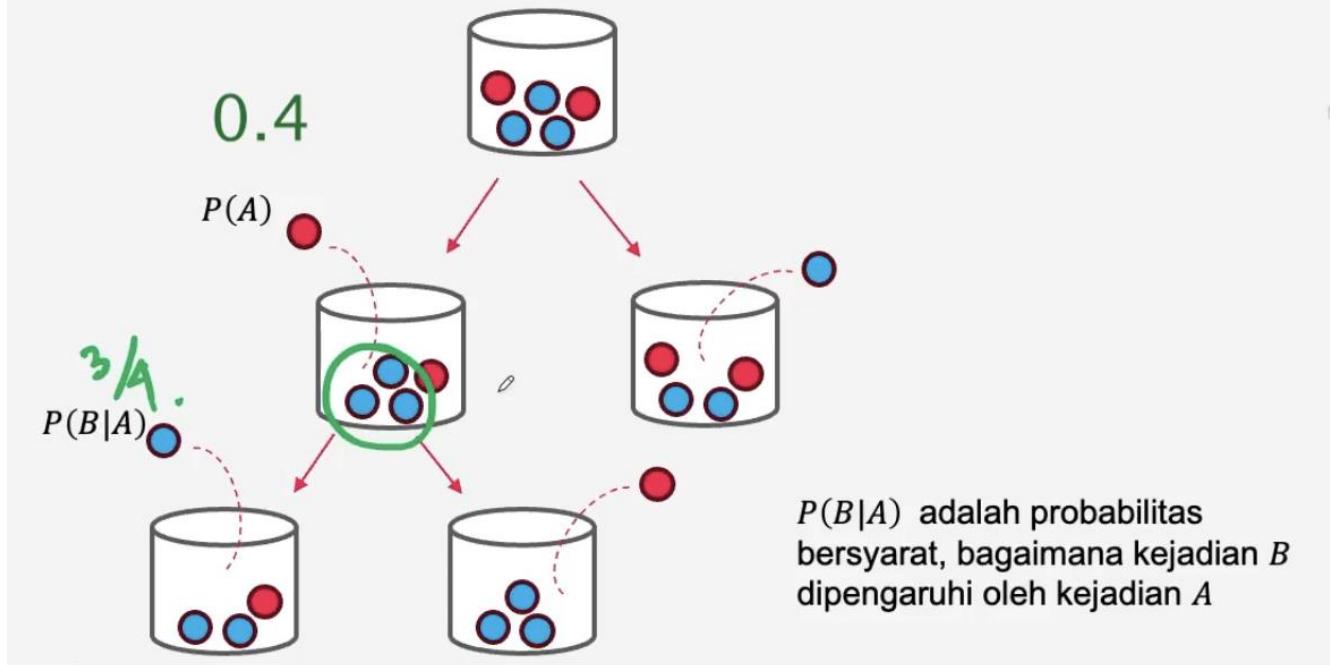
$$P(A \text{ dan } B) = P(A \text{ and } B) = P(A \cap B) \neq 0$$

Ilustrasi decision tree - Dependent



Probabilitas Bersyarat

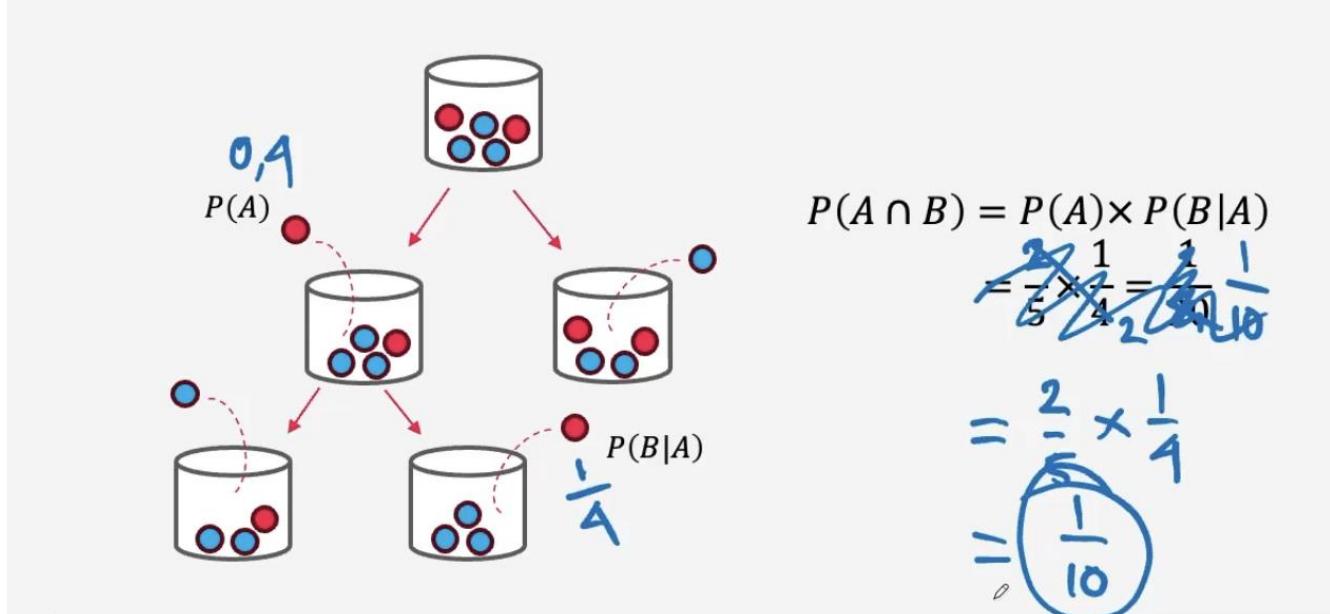
- Sebuah kantong berisi 2 kelereng merah dan 3 kelereng biru
- Kejadian A : Mengambil kelereng merah pada pengambilan pertama
 - $P(A) = \frac{2}{5} = 0.4$
- Kejadian B : Mengambil kelereng biru pada pengambilan kedua
 - $P(B|A) = \frac{\text{jumlah biru}}{\text{kelereng sisa}} = \frac{3}{4}$



$P(B|A)$ artinya peluang B dengan syarat A sudah diketahui (atau terjadi). Urutannya: A diketahui dulu, baru B dihitung.

Aturan Perkalian - dependent

- Sebuah kantong berisi 2 kelereng merah dan 3 kelereng biru
- Kejadian A : Mengambil kelereng merah pada pengambilan pertama
 - $P(A) = \frac{2}{5} = 0.4$
- Kejadian B : Mengambil kelereng merah pada pengambilan kedua
 - $P(B|A) = \frac{\text{jumlah merah}}{\text{kelereng sisa}} = \frac{1}{4}$



2-3. Conditional Probability & Independence

01

Memahami konsep conditional probability

02

Menghitung probabilitas bersyarat menggunakan rumus

03

Mengidentifikasi kejadian independen

04

Menggunakan tabel kontingensi dan diagram pohon untuk visualisasi

Apa itu Conditional Probability?

- Probabilitas suatu kejadian terjadi dengan asumsi bahwa kejadian lain telah terjadi.
- Notasi diberikan oleh:

$P(A|B)$ = Probabilitas A terjadi jika B telah terjadi

- Contoh: Probabilitas seseorang sakit flu jika ia demam

Conditional Probability Formula

- Ingat bahwa probabilitas kejadian A terjadi dan kejadian B terjadi adalah :

$$= P(A) \times P(B|A)$$

$$P(A \cap B) = P(B) \times P(A|B)$$



- Kita bisa menggabarkan bahwa $P(A|B)$ sebagai seberapa mungkin A terjadi di antara kejadian B

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$



- Contoh: Probabilitas seseorang sakit flu jika ia demam

$$P(\text{flu|demam}) = \frac{P(\text{flu dan demam})}{P(\text{demam})}$$

Contoh

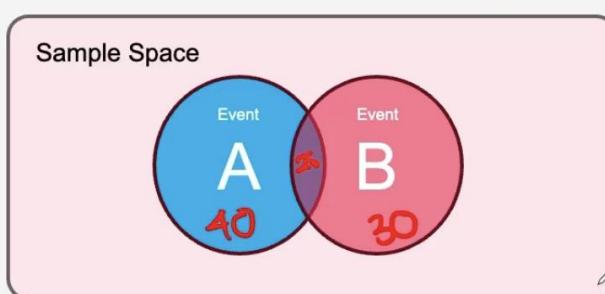
- Dari 100 pasien, 40 demam, 30 sakit flu, dan 25 keduanya

$$P(\text{Demam}) = \frac{40}{100} = 0.4$$

$$P(\text{flu}) = \frac{30}{100} = 0.3$$

$$P(\text{Sakit} \cap \text{Demam}) = \frac{25}{100} = 0.25$$

$$P(\text{Sakit} | \text{Demam}) = \frac{0.25}{0.4} = 0.625$$



$$\begin{aligned} P(\text{sakit} | \text{demam}) &= \frac{P(\text{sakit} \cap \text{demam})}{P(\text{demam})} \\ &= \frac{0.25}{0.4} \\ P(\text{demam} | \text{sakit}) &= \frac{P(\text{sakit} \cap \text{demam})}{P(\text{sakit})} \\ &= \frac{0.25}{0.3} = 0.833 \end{aligned}$$

Contingency Table

- Tabel kontingensi membantu menghitung probabilitas bersyarat
- Dari 100 pasien, 40 demam, 30 sakit flu, dan 25 keduanya

$$P(\text{Sakit} | \text{Demam}) = \frac{15}{40} = 0,375$$
$$P(\text{Sakit} | \text{Demam}) = \frac{P(\text{Sakit} \cap \text{Demam})}{P(\text{Demam})}$$
$$= \frac{25}{40}$$
$$= 0,625$$

	Sakit	Tidak Sakit	Total
Demam	25	15	40
Tidak Demam	5	55	60
Total	30	70	100

$$P(\text{Demam} | \text{Sakit}) = \frac{25}{30} = 0,833$$

fisikamodern00-2625220

Mendeteksi Kejadian Independent

fisikamodern00-2625220

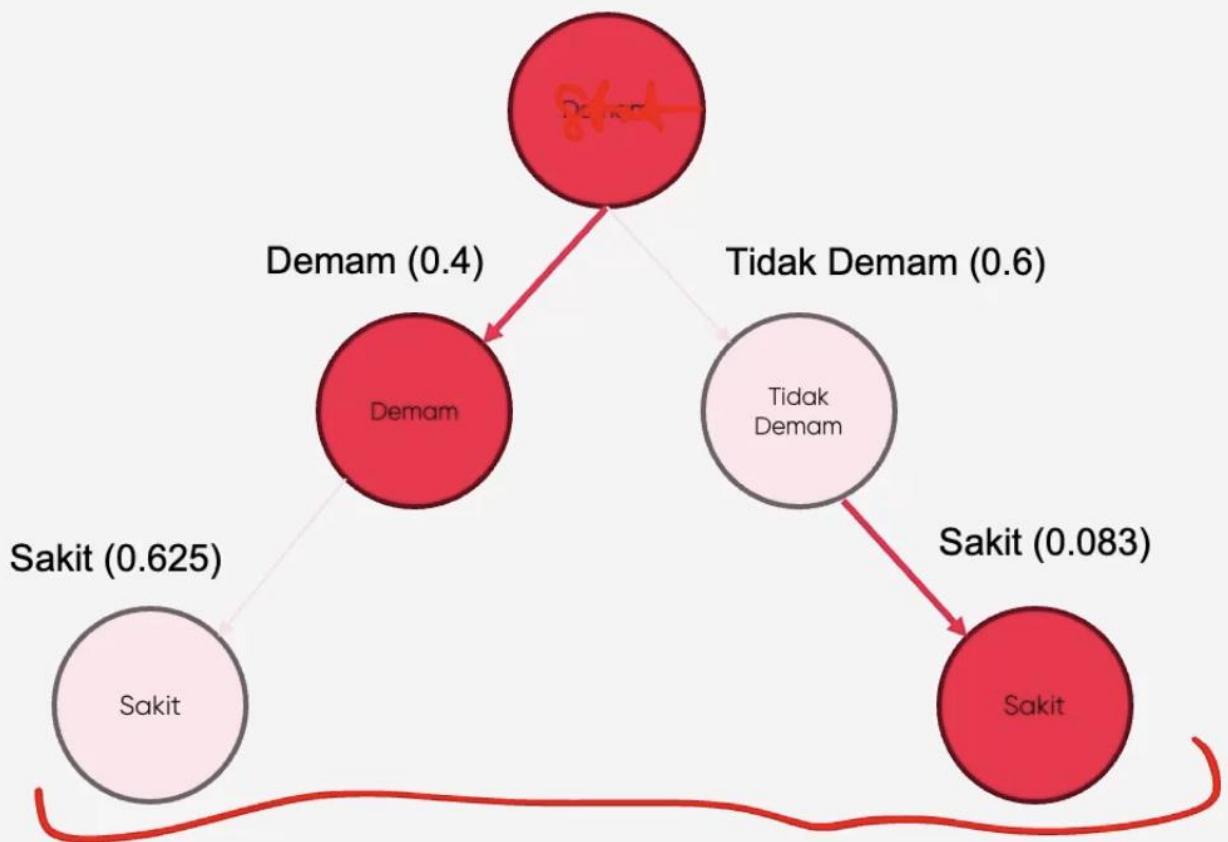
- Dua kejadian A dan B dinyatakan independent jika

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

- Atau secara ekuivalen

$$P(A|B) = P(A) \text{ dan } P(B|A) = P(B)$$

Ilustrasi decision tree



$$\text{Probabilitas total sakit} = (0.4 \times 0.625) + (0.6 \times 0.083) = 0.25 + 0.05 = 0.30$$

Ringkasan

- Conditional probability memperhitungkan informasi tambahan.
- Kejadian independen tidak saling mempengaruhi.
- Tabel kontingensi dan diagram pohon membantu visualisasi.
- Konsep ini penting dalam model prediktif dan inferensi statistik.

01

Memahami konsep dasar teorema Bayes

02

Menginterpretasikan rumus Bayes dalam konteks nyata

03

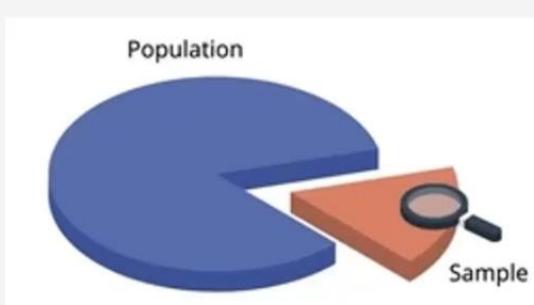
Menerapkan Teorema Bayes pada kasus nyata

04

Menghubungkan Teorema Bayes dengan algoritma machine learning

Pengantar

- Bayes Theorem adalah alat penting dalam inferensi statistik

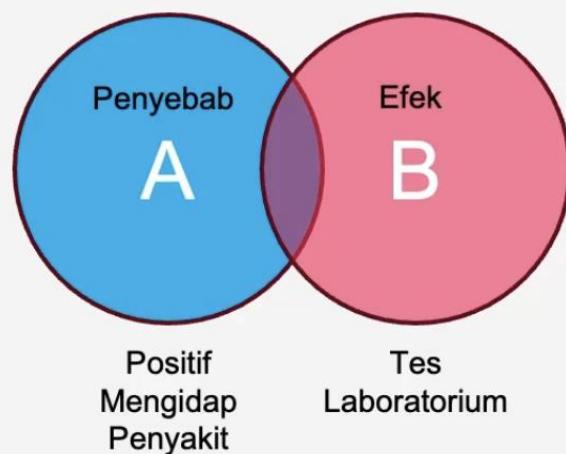


Inferensial:

- Menggunakan sampel untuk menyimpulkan tentang populasi
- Melibatkan estimasi dan pengujian hipotesis
- Probabilitas diperbaharui setiap ada informasi baru

Pengantar

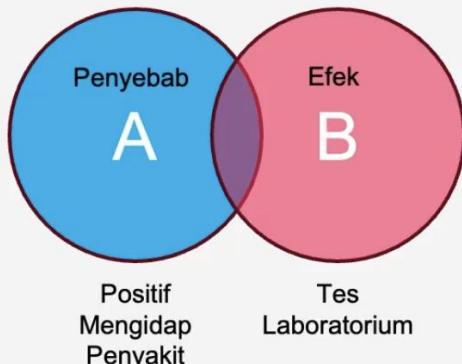
- Secara sederhana, Teorema Bayes memberikan cara matematis untuk membalikkan probabilitas bersyarat.
- Memungkinkan untuk menemukan probabilitas suatu "penyebab" (A) jika kita mengetahui "efek" (B) telah terjadi.



$P(B|A)$ Probabilitas hasil tes positif jika memang sakit

$P(A|B)$ Probabilitas orang sakit jika tes adalah positif

Teorema Bayes



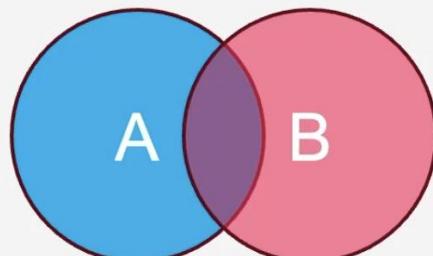
$P(B|A)$ Probabilitas hasil tes positif jika memang sakit

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A)$$

Probabilitas sakit dan tes positif =
Perobabilitas tes positif \times Sakit jika hasil tes positif

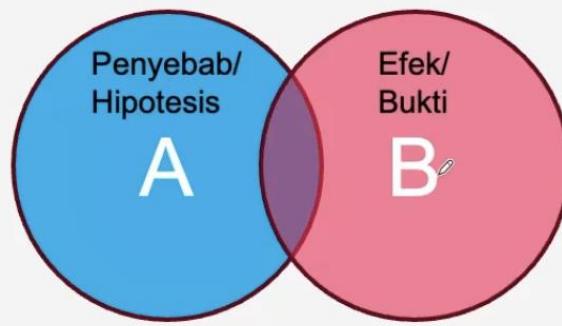
$$P(A \cap B) = P(B) \times P(A|B)$$

$$P(A|B) = \frac{P(A) \times P(B|A)}{P(B)}$$



example: orang di test PCR misal hasilnya positif, berapa probabilitas dia untuk terjadinya sakit

Teorema Bayes



$$P(A|B) = \frac{P(A) \times P(B|A)}{P(B)}$$

Prior \downarrow bukti.
 bukti. \downarrow kem. wkt
buktinya.

- $P(B|A)$: **Likelihood** : Probabilitas bukti/terjadi B jika diberikan terjadi A
- $P(A)$: **Prior** : Probabilitas terjadi A / probabilitas awal
- $P(B)$: **Bukti/Evidence** : Probabilitas dari bukti B
- $P(A|B)$: **Posterior** : Probabilitas Hipotesis A atau Penyebab A diberikan bukti/terjadi B

misal ada kendaraan dan waktu tempuh

B = sebab = kendaraan

A = akibat = waktu tempuh

$P(A | B)$ = peluang tiba cepat jika naik kendaraan tertentu

$P(B | A)$ = peluang naik kendaraan tertentu jika tiba cepat

Essential Mathematical Foundation – Probability Theory – Bayes' Theorem Explained

Contoh: Diagnosis Medis

- 1% populasi mengidap penyakit P
- Tes memiliki sensitivitas 99% dan spesifikitas 95%

$$\begin{aligned}
 P(P|+) &= \frac{P(+|P) \cdot P(P)}{P(+)} \\
 &= \frac{0,99 \cdot 0,01}{0,0599} \\
 &= 0,16667 \rightarrow 16,67\%
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(P) &= 1\% = 0,01 \\
 P(P_c) &= 99\% = 0,99 \\
 P(+|P) &= 99\% = 0,99 \\
 P(+|P_c) &= 5\% = 0,05 \\
 P(+|P) \cdot P(P) &= 0,99 \cdot 0,01 = 0,0099 \\
 P(+|P_c) \cdot P(P_c) &= 0,05 \cdot 0,99 = 0,0495
 \end{aligned}$$

Contoh Teorema Bayes

Diketahui Kotak :

1. Kotak A berisi 10 cokelat manis dan 5 cokelat pahit
2. Kotak B berisi 4 cokelat manis dan 16 cokelat pahit

Diketahui Kebiasaan Kamu :

1. 3 dari 5 kali, kamu memilih Kotak A. $P(\text{manis} \mid A) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$
2. 2 dari 5 kali, kamu memilih Kotak B. $P(\text{manis} \mid B) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$

Pertanyaan :

1. berapa peluang bahwa cokelat manis itu berasal dari Kotak A

Jawaban

1. Peluang Dasar (dari isi kotak) :

$$* P(\text{manis} \mid A) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

$$* P(\text{manis} \mid B) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

2. Hitung total probabilitas dapat cokelat manis $P(\text{manis})$:

$$* P(\text{manis}) = P(\text{manis} \mid A) \cdot P(A) + P(\text{manis} \mid B) \cdot P(B)$$

$$* P(\text{manis}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{12}{25}$$

3. Sekarang hitung $P(A \mid \text{manis})$ pakai teorema bayes :

$$* P(A \mid \text{manis}) = \frac{P(\text{manis} \mid A) \cdot P(A)}{P(\text{manis})}$$

$$* P(A \mid \text{manis}) = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{12}{25}} = \frac{50}{60} = \frac{5}{6} = 0.833 = 83.3\%$$

4. Kesimpulan :

setelah kamu tahu cokelat manis, peluang besar bahwa kamu ambil dari kotak A adalah $\frac{5}{6}$ atau sekitar 83.3%

Langkah-langkah



Tentukan Prior $P(A)$



Hitung likelihood $P(B|A)$



Hitung Evidence $P(B)$



Gunakan rumus bayes untuk mendapatkan posterior $P(A|B)$

Naive Bayes Classifier (Machine Learning)

- Algoritma naïve Bayes memanfaatkan teorema Bayes untuk tugas klasifikasi. Dengan Asumsi penyederhanaan yang NAÏVE!

$$P(A|B) = \frac{P(A) \times P(B|A)}{P(B)} \quad \leftarrow \text{teorema Bayes}$$

- Jika bukti yang ingin dipakai banyak, atau bukti ini biasanya disebut fitur.

$$P(A|b_1, b_2, \dots, b_n) = \frac{P(A) \times P(b_1, b_2, \dots, b_n|A)}{P(b_1, b_2, \dots, b_n)}$$

class
fitur

- Naïve Bayes mengasumsikan fitur-fitur ini independent, maka dapat disederhanakan:

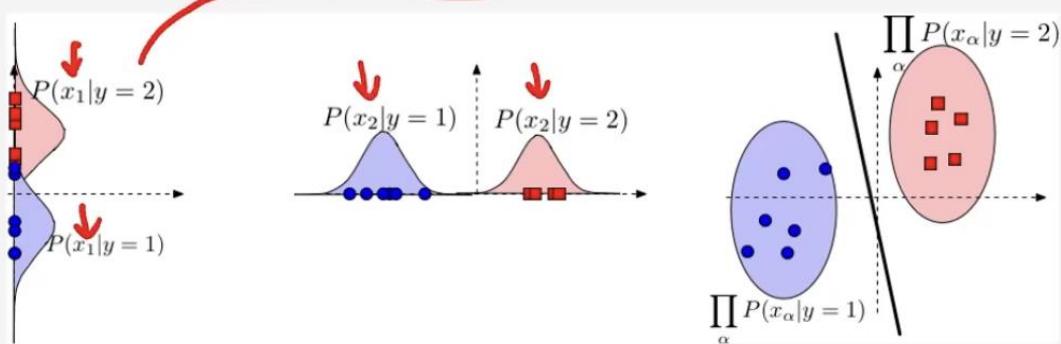
$$\begin{aligned} P(b_1, b_2, \dots, b_n|A) &= P(b_1|A) \times P(b_2|A) \times P(b_3|A) \times \dots \times P(b_n|A) \\ &= \prod_{i=1}^n P(b_i|A) \end{aligned}$$

Naive Bayes Classifier (Machine Learning)

- Naïve Bayes mengasumsikan fitur-fitur ini independent, maka dapat disederhanakan:

$$P(b_1, b_2, \dots, b_n|A) = \prod_{i=1}^n P(b_i|A)$$

$$P(A_m|b_1, b_2, \dots, b_n) = \frac{P(A_m) \times \prod_{i=1}^n P(b_i|A_m)}{P(b_1, b_2, \dots, b_n)}$$



Contoh

Email ID	Teks Email	Label
1	Beli obat murah	Spam
2	Diskon besar sekarang	Spam
3	Halo apa kabar	Bukan Spam
4	Pertemuan tim besok	Bukan Spam
5	Obat terlaris diskon	Spam

Prediksi email baru: "Murah Sekarang"

A = Label / Kelas

- Jumlah total email: 5
- Jumlah email "Spam": 3
- Jumlah email "Bukan Spam": 2

$$P(\text{spam}) = P(A_1) = \frac{\text{jumlah spam}}{\text{total email}} = \frac{3}{5} = 0.6$$

$$P(\text{Bukan spam}) = P(A_2) = \frac{\text{jumlah bukan spam}}{\text{total email}} = \frac{2}{5} = 0.4$$

Contoh

Tabel Fitur/likelihood kata pada kelas spam

$$\begin{aligned} P(\text{kata|spam}) &= P(\text{kata}|A_1) = \frac{\text{Jumlah kemunculan kata} + 1}{\text{Total kata di kelas spam} + \text{total kosakata}} \\ &= \frac{\text{jumlah kemunculan kata}}{9 + 13} \end{aligned}$$

Kata	Jumlah di spam	$P(\text{kata spam})$
beli	1	$\frac{(1+1)}{22} = 0.0909$
obat	2	0.1364
murah	1	0.0909
diskon	2	0.1364
besar	1	0.0909
Sekarang	1	0.0909
Terlaris	1	0.0909
(kata lain)	0	0.0455

Contoh

Tabel Fitur/likelihood kata pada kelas bukan spam

$$P(\text{kata|bukan spam}) = P(\text{kata}|A_2) = \frac{\text{Jumlah kemunculan kata} + 1}{\text{Total kata di kelas bukan spam} + \text{total kosakata}}$$

$$= \frac{\text{jumlah kemunculan kata}}{6 + 13}$$

Kata	Jumlah di bukan spam	$P(\text{kata bukan spam})$
halo	1	$\frac{(1+1)}{19} = 0.1053$
apa	1	0.1053
kabar	1	0.1053
pertemuan	1	0.1053
tim	1	0.1053
besok	1	0.1053
(kata lain)	0	0.0526

Contoh

Prediksi email baru: "Murah Sekarang"

$$P(\text{spam}) = P(A_1) = \frac{\text{jumlah spam}}{\text{total email}} = \frac{3}{5} = 0.6$$

$$P(\text{Bukan spam}) = P(A_2) = \frac{\text{jumlah bukan spam}}{\text{total email}} = \frac{2}{5} = 0.4$$

$$P(\text{Spam|email baru}) > P(\text{Bukan Spam|email baru})$$

$$0.004958 \times \frac{1}{P(\text{semua kata})} > 0.001107 \times \frac{1}{P(\text{semua kata})}$$

$$0.004958 > 0.001107$$

SPAM!

$$P(\text{Spam|email baru}) = \frac{P(\text{Spam}) \cdot P(\text{murah|spam}) \cdot P(\text{sekarang|spam})}{P(\text{semua kata})}$$

$$= 0.6 \times \frac{2}{22} \times \frac{2}{22} \times \frac{1}{P(\text{semua kata})}$$

$$= 0.004958 \times \frac{1}{P(\text{semua kata})}$$

$$P(\text{Bukan Spam|email baru}) = \frac{P(\text{Bukan Spam}) \cdot P(\text{murah|bukan spam}) \cdot P(\text{sekarang|bukan spam})}{P(\text{semua kata})}$$

$$= 0.4 \times \frac{1}{19} \times \frac{1}{19} \times \frac{1}{P(\text{semua kata})}$$

$$= 0.001107 \times \frac{1}{P(\text{semua kata})}$$



Naïve Bayes



Naïve Bayes Classifier menggunakan teorema Bayes



Fitur bersifat independen



Cepat dan efektif untuk klasifikasi teks



Contoh `sklearn.naive_base.GaussianNB.MultinomialNB`

Ringkasan

- Teorema Bayes menggabungkan informasi baru dengan pengetahuan awal
- Digunakan dalam banyak aplikasi nyata dan algoritma Machine Learning
- Penting untuk memahami asumsi dan interpretasi hasil

Chapter 3. Random Variable & Probability Distribution

3-1. What are random variables

01

Memahami konsep Random Variable

02

Membedakan antara fenomena diskrit dan kontinu

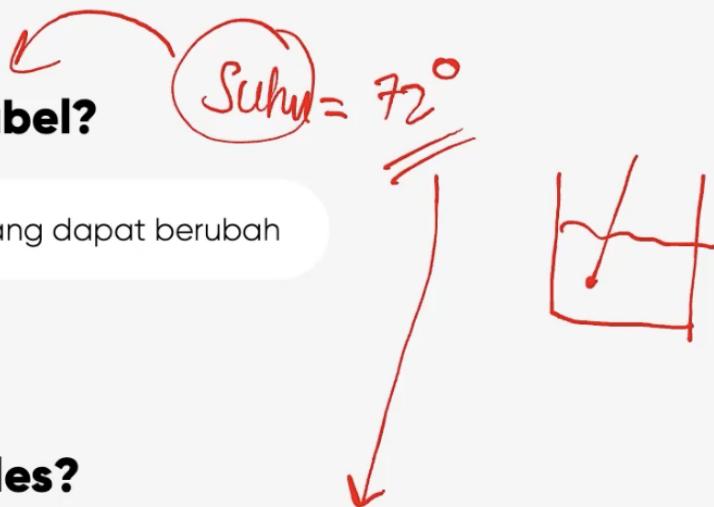
03

Memahami pentingnya Random Variable untuk pemodelan

Apa Itu Variables/Variabel?

Simbol yang mewakili kuantitas yang dapat berubah

Contoh: Suhu, Jumlah_penjualan, Usia



Apa Itu Random Variables?

Dalam Probabilitas, nilai dari variable ditentukan oleh **proses acak** atau **eksperimen**

Contoh:

- Jika kita melempar koin, hasilnya bisa "Heads" (H) atau "Tails" (T). Ini bukan angka.
- Bagaimana jika kita ingin menganalisis hasilnya secara matematis? Kita perlu mengubahnya menjadi angka.

CONTOH!

Percobaan: Melempar sebuah koin satu kali

Ruang Sampel (S): {Angka, Gambar}



↓ ↓
1 0

Tantangan: Analisis secara kuantitatif

Solusi:

definisi:

$$\begin{aligned} X=1 &\rightarrow \text{hasil} \rightarrow \text{angka} \\ X=0 &\rightarrow \text{hasil} \rightarrow \text{gambar} \\ P(X=1) &=? \frac{1}{2} \quad P(X=0)=? \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\text{angka}) &\rightarrow P(X=1) \\ P(\text{gambar}) &\rightarrow P(X=0). \end{aligned}$$

CONTOH!

Percobaan: Melempar sebuah koin **dua** kali

Ruang Sampel (S): {AA, AG, GA, GG}



Tantangan: Analisis secara kuantitatif

Solusi:

definisi ~~R~~ $\rightarrow X = \text{jumlah angka yg muncul}$

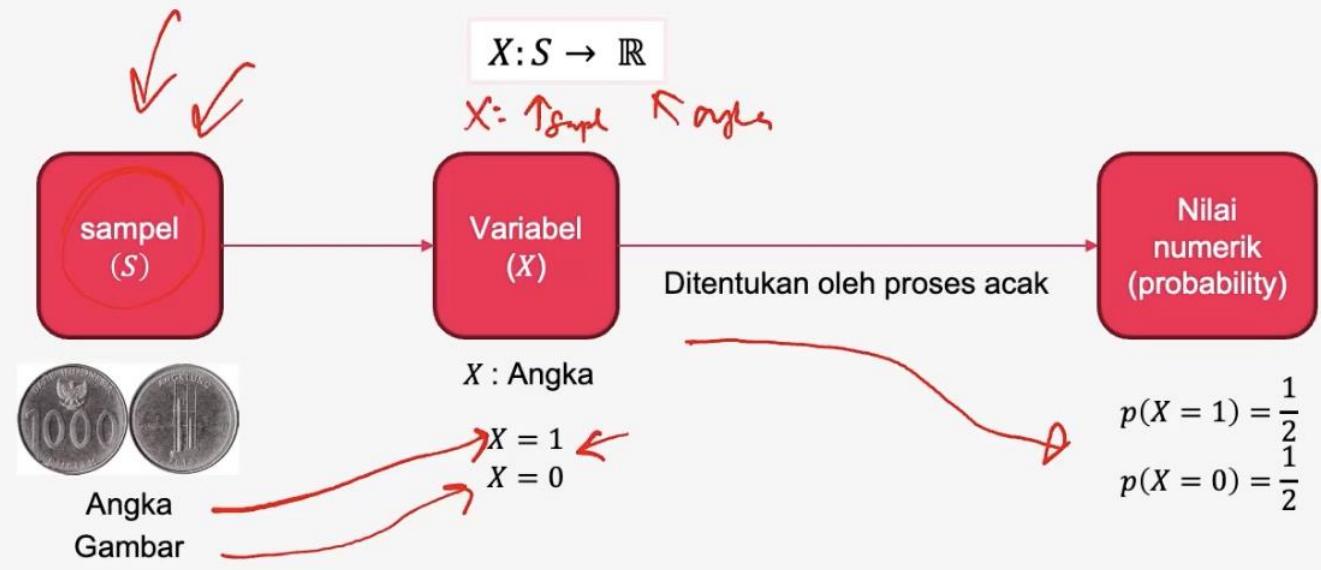
$$\begin{aligned} X=0 &\rightarrow \text{Angka } 0 \\ X=1 &\rightarrow \text{Angka } 1 \text{ kali} \\ X=2 &\rightarrow \text{Angka } 2 \text{ kali muncul.} \end{aligned} \quad X = \{0, 1, 2\}$$

$$\begin{aligned} P(X=1) &= P(AG) + P(GA) \\ &= 0,25 + 0,25 \\ &= 0,5 \end{aligned}$$



Definisi Formal?

Dilambangkan dengan huruf kapital misalkan X, Y atau Z , yang memetakan sample (S) ke bilangan real (\mathbb{R})



Diskrit VS Kontinu

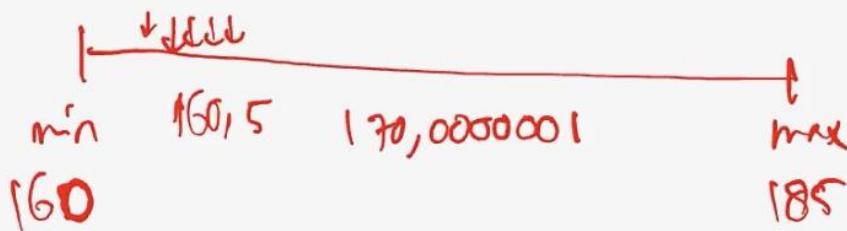
fisikamodern00-2625220

Discrete Random Variable (Variabel Acak Diskrit)

- Mengambil nilai-nilai yang dapat dihitung atau terpisah. $1, 2, 3, 4, \dots$
- Jumlah terbatas atau tak terhingga, tapi masih bisa dihitung (misalnya 1, 2, 3, ...)
- Contoh: Jumlah anak di sebuah keluarga, jumlah mobil yang lewat di persimpangan

Continuous Random Variable (Variabel Acak Kontinu)

- Mengambil nilai dalam sebuah interval yang tak terhitung jumlahnya.
- Nilai-nilai diukur, bukan dihitung.
- Contoh: Tinggi badan seseorang, suhu ruangan, waktu yang dibutuhkan untuk menyelesaikan sebuah tugas



Let's Differentiate!

Diskrit/Kontinu

Waktu yang dibutuhkan sebuah baterai untuk habis

Kontinu

Jumlah kecelakaan mobil dalam sehari di Bandung

Diskrit

Tingkat gula darah seseorang

Kontinu

Jumlah buku yang terjual di sebuah toko dalam sehari

Diskrit

RECAP

Apa itu random variables: Sebuah fungsi yang mengubah hasil non-numerik dari sebuah percobaan acak menjadi nilai numerik

Tujuannya: Memungkinkan kita untuk menggunakan alat-alat matematika dan statistic untuk menganalisa dan memodelkan fenomena acak

Dua tipe utama:

- Diskrit: Nilai yang dapat dihitung (count)
- Kontinu: Nilai yang diukur dalam sebuah interval

Next up: Kita akan membahas lebih dalam tentang distribusi probabilitas untuk variable acak diskrit dan kontinu

01

Memahami dan menginterpretasikan Probability Mass Function (PMF) untuk menghitung probabilitas

02

Mengidentifikasi dan menerapkan model distribusi binomial dan distribusi poisson dalam masalah nyata

03

Menghitung Expected Value (nilai harapan) dan Variance (varians) untuk distribusi binomial dan poisson)

Pengantar Probability Mass Function (PMF)

$$F(x) = \dots$$

Apa itu PMF?

- PMF adalah sebuah fungsi yang memberikan probabilitas bahwa sebuah variabel acak diskrit akan sama dengan nilai tertentu.
- Singkatnya, ini adalah peta yang menunjukkan seberapa sering setiap nilai yang mungkin muncul.

Definisi

- Untuk variabel acak diskrit X , PMF dilambangkan sebagai

$$P(X = x)$$

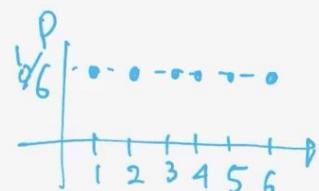
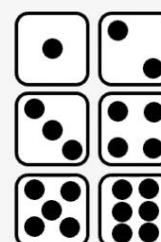
lisikamodem00-2626220

- Probabilitas untuk setiap nilai harus non-negative: $P(X = x) \geq 0$
- Total semua probabilitas: $\sum_x P(X = x) = 1$

Contoh never dies!

Percobaan

Melempar sebuah dadu standar enam sisi



Hitung

- Variabel acak X : hasil lemparan dadu
- Sampel S : $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- PMF untuk setiap hasil (asumsi dadu adil):

$$P(X=1) = ?$$

total probabilitas.

$$P(X=1) = 1/6$$

$$\begin{aligned} \sum P(X=x) &= 1/6 + 1/6 + 1/6 \\ &\quad + 1/6 + 1/6 + 1/6 \end{aligned}$$

$$P(X=2) = 1/6$$

$$= 1/6$$

$$P(X=6) = 1/6$$

Distribusi Binomial

Digunakan ketika kita memiliki percobaan dengan jumlah pengulangan yang tetap (n), di mana setiap percobaan hanya memiliki dua hasil yang mungkin (sukses atau gagal)

Syarat Percobaan Binomial:

1. Ada n percobaan yang independen.
2. Setiap percobaan memiliki dua hasil: Sukses atau Gagal.
3. Probabilitas sukses (p) tetap konstan di setiap percobaan.

guru atau ayah

jumlah berhasil *jumlah percobaan*

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Di mana $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ *probabilitas*

Distribusi Binomial

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

$n=1$ $k=1$ $p=0,5$

1 percobaan, 1 berhasil

$$P(X = 1) = \frac{1!}{1! (1-1)!} (0.5)^1 (1-0.5)^{1-1} = 0.5$$

$\cancel{0.5} \cdot 0,5 (0,5)^0 = 0,5$

1 percobaan, 1 gagal

$$P(X = 0) = \frac{1!}{0! (1-0)!} (0.5)^0 (1-0.5)^{1-0} = 0.5$$

$\cancel{0.5} \cdot 1 = 0.5$



Distribusi Binomial

$$n=2, k=1, p=0.5$$

2 percobaan, 1 berhasil lalu 1 gagal

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$P(X = 1) = \frac{2!}{1!(2-1)!} (0.5)^1 (1-0.5)^{2-1} = 0.5$$

2 percobaan, 2 berhasil

$$n=2, k=2, p=0.5$$

2 percobaan, 2 gagal

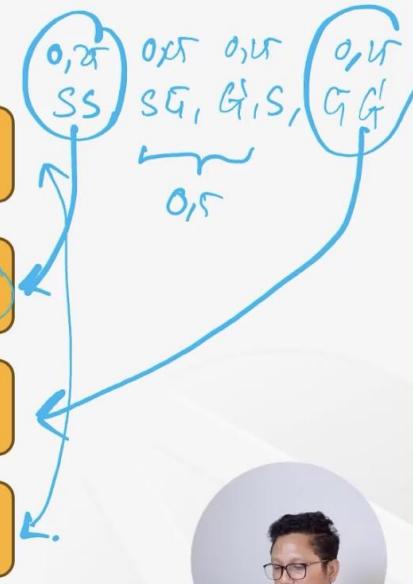
$$n=2, k=0, p=0.5$$

2 percobaan, 1 gagal lalu 1 berhasil

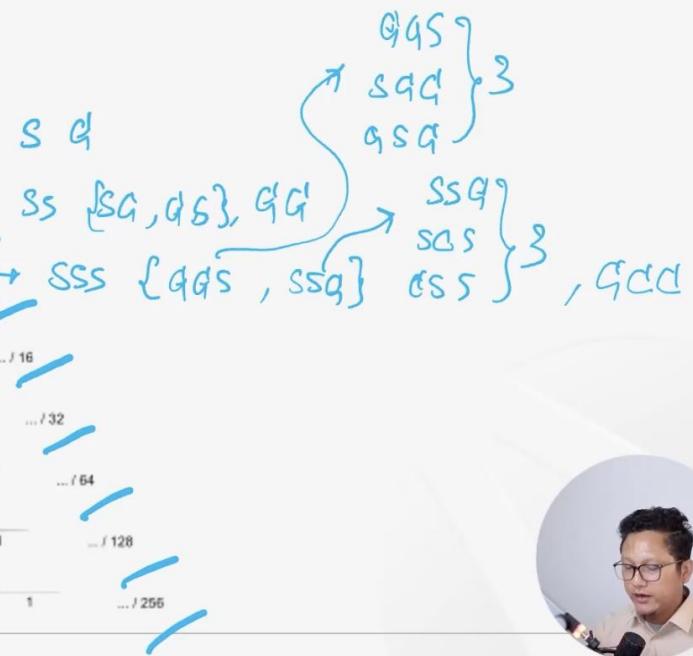
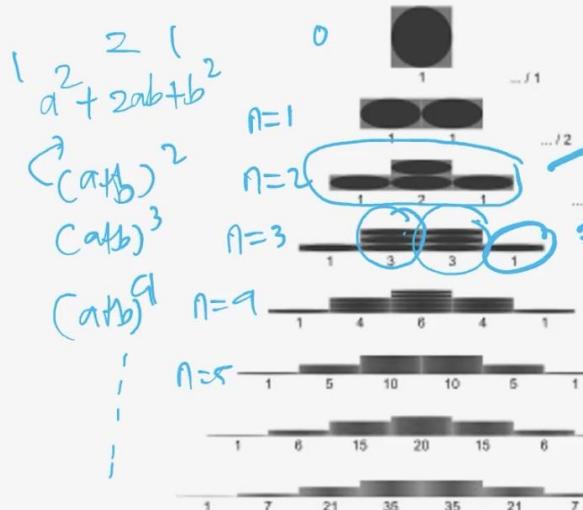
$$P(X = 2) = \frac{2!}{2!(2-2)!} (0.5)^2 (1-0.5)^{2-2} = 0.25$$

$$P(X = 0) = \frac{2!}{0!(2-0)!} (0.5)^0 (1-0.5)^{2-0} = 0.25$$

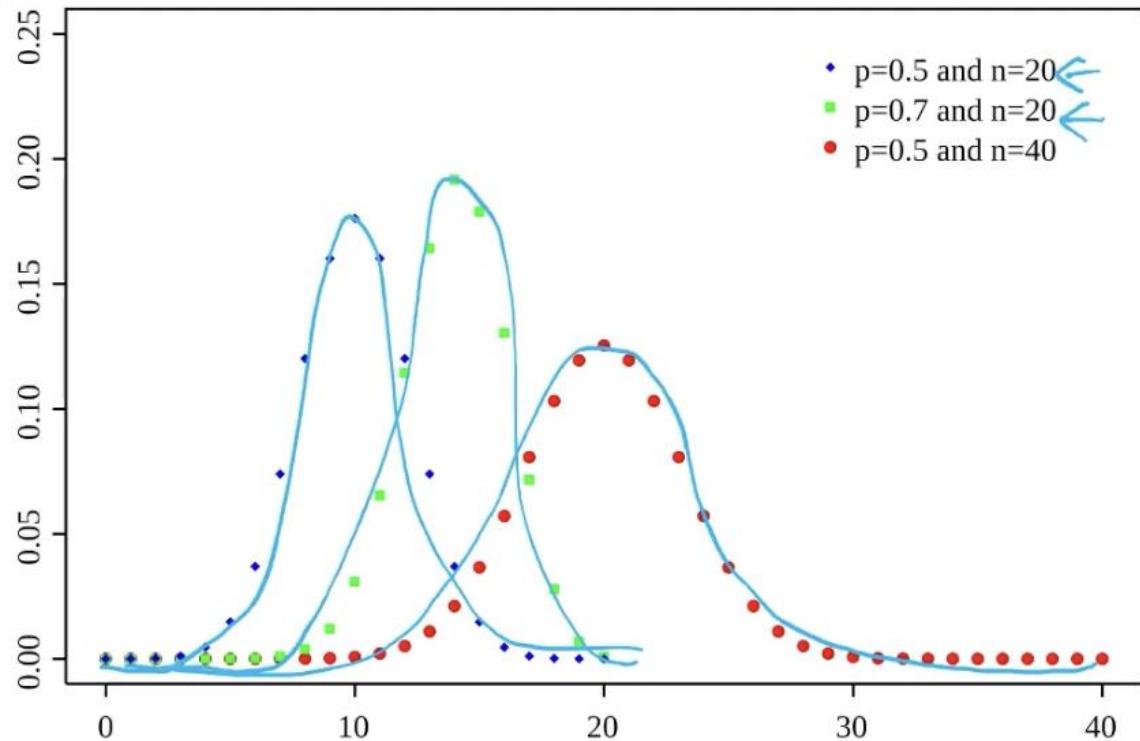
$$P(X = 1) = \frac{2!}{1!(2-1)!} (0.5)^1 (1-0.5)^{2-1} = 0.5$$



Distribusi Binomial

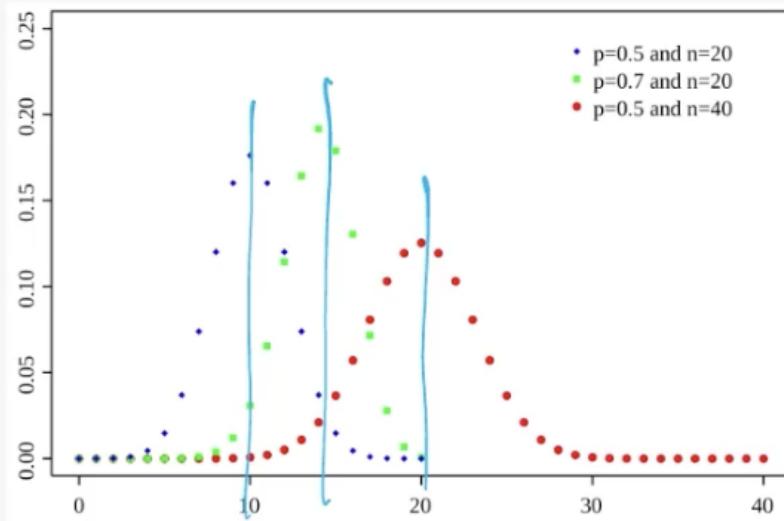


Distribusi Binomial



Expected Value

Expected Value ($E[X]$): Rata-rata atau nilai yang diharapkan dari variable acak jika percobaan diulang berkali-kali



$$E[X] = n \cdot p$$

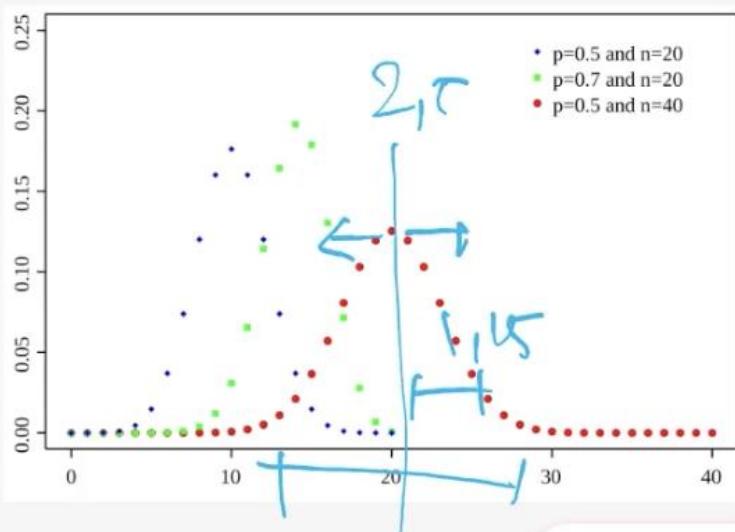
n: Jumlah percobaan
p: Probabilitas

Contoh: Melempar koin 5 kali

$$E[X] = 0.5 \cdot 5 = 2.5$$

Variance

Variance ($Var[X]$): Mengukur seberapa jauh nilai-nilai yang mungkin tersebar dari nilai harapan.



$$\overbrace{\mathbb{E}(X)}^{\text{Mean}} (1-p)$$

$$Var[X] = n \cdot p \cdot (1 - p)$$

n : Jumlah percobaan

p : Probabilitas

Contoh: Melempar koin 5 kali

$$\begin{aligned} Var(X) &= 2\pi \cdot (1-0.5) \\ &= 1,25 \end{aligned}$$