

APPUNTI DI FISICA NUCLEARE

Nicola Semprini Cesari

A.A. 2022/2023

Indice

1	Introduzione	2
1.1	Proprietà generali dei nuclei	2
2	Studio del nucleo	3
2.1	Sezione d'urto	3
2.2	Equazione d'onda quantomeccanica	4
2.3	Diffrazione di Kirchhoff	5
2.3.1	Sezione d'urto quantistica	6
2.4	Studio del nucleo ed energia di legame	7
3	Elementi di meccanica quantistica	8
3.1	Momento angolare orbitale e spin	9
3.2	Particelle identiche, fermioni e bosoni	11
4	Modelli nucleari	11
4.1	Modello a goccia	11
4.2	Modello a gas di fermioni	12
4.3	Modello a shell	15
4.3.1	Interazione spin-orbita	15
5	Fisica delle particelle elementari	17
5.1	Campi quantizzati e antiparticelle	17
5.1.1	Interazioni nei campi quantizzati	19
5.1.2	Particelle virtuali	20
5.2	Modello standard	23

1 Introduzione

La fisica nucleare è una disciplina della *fisica fondamentale* che si concentra sullo studio della struttura del nucleo atomico e delle sue reazioni di decadimento e interazione con altre particelle attraverso le teorie della meccanica quantistica e dei campi quantizzati. Pur potendo venire considerata come branca della fisica delle particelle e del suo Modello Standard, non è ancora possibile spiegare il nucleo atomico soltanto attraverso la teoria delle interazioni forti (*cromodinamica*) e perciò è presente un apparato teorico di tipo fenomenologico che ne approssima i meccanismi e che costituisce la disciplina della fisica nucleare come ancora a sé stante.

Per lo studio preciso dei fenomeni nucleari e subnucleari, essendo questi sia di carattere *relativistico* (le velocità dei corpi sono approssimabili a c) che *quantistico* (è necessario ricorrere al concetto quantomeccanico di particella/onda), si è introdotto uno specifico sistema di misura fondato su alcune costanti universali che permettono di indagare la scala microscopica: il *Sistema Naturale della Fisica Nucleare e Subnucleare* (*SNNS*) si basa sulle unità di

- costante di Planck ridotta $\hbar = h/2\pi = 1.055 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$,
- velocità della luce nel vuoto $c = 2.998 \times 10^8 \text{ m/s}$,
- energia degli acceleratori (espressa in elettronVolt) $1 \text{ eV} = 1.602 \times 10^{-19} \text{ J}$,

attraverso cui è possibile ricavare le tre grandezze del *Sistema Internazionale* per lo studio della relatività e della meccanica quantistica di lunghezza, tempo e massa:

- $c \sim L/T \rightarrow L \sim \hbar c/\varepsilon \rightarrow 1 \left(\frac{\hbar c}{\text{MeV}}\right) = 1.97 \times 10^{-13} \text{ m}$;
- $\hbar \sim \varepsilon T \rightarrow T \sim \hbar/\varepsilon \rightarrow 1 \left(\frac{\hbar}{\varepsilon}\right) = 6.59 \times 10^{-22} \text{ s}$;
- $\varepsilon \sim M c^2 \rightarrow M \sim \varepsilon/c^2 \rightarrow 1 \left(\frac{\text{MeV}}{c^2}\right) = 1.78 \times 10^{-30} \text{ kg}$.

1.1 Proprietà generali dei nuclei

Il nucleo o *nuclide* è il sistema di particelle in cui si concentra la quasi totalità della massa dell'atomo ed è composto da **protoni** (massa 938.27 MeV, spin $1/2 \hbar$, carica $1.602 \times 10^{-19} \text{ C} = 1 \text{ e}$) e **neutroni** (massa 939.56 MeV, spin $1/2 \hbar$, carica 0 C), detti collettivamente *nucleoni* (da notare la differenza di massa di 1.29 MeV, caratteristica cruciale ma ancora non spiegata). La sua rappresentazione è espressa attraverso la terna di *numero di protoni* Z , *numero di neutroni* N e *massa atomica* $A = N + Z$ nella simbologia ${}_Z^AX_N$. Atomi con Z uguale ma diverso N sono detti *isotopi*, mentre con N uguale e Z diverso *isotoni*.

Lo *spin* delle particelle è un *momento angolare intrinseco* L che determina la loro dinamica e comportamento collettivo secondo le leggi della meccanica quantistica, applicabile sia a corpi estesi o composti che puntiformi (contrariamente alla fisica classica, si veda l'appendice 3.1). Da ciò, se il corpo è carico possiederà anche un *momento di dipolo magnetico* μ , legato allo spin dall'equazione quantomeccanica relativistica di Dirac

$$\mu = g \frac{e \hbar}{2m} \left(\frac{L}{\hbar} \right)$$

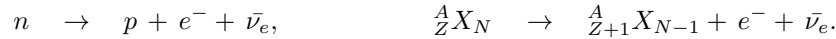
(vedi capitolo 4.3.1) in cui è presente il fattore di correzione g , senza il quale vi sarebbe una discrepanza significativa. Nel caso di particelle puntiformi di spin $1/2$, $g = 2$, ma le teorie di campo quantizzato dimostrano come questo termine debba subire un'ulteriore correzione dovuta a processi virtuali di carattere elettromagnetico, per cui in generale si ha $g = 2(1 + a)$, con $a = (g - 2)/2$ *momento magnetico anomalo*, di estrema importanza per il confronto tra previsioni teoriche e misure sperimentali. Dunque, particelle con $g \neq 2$, cioè con $a \neq 0$, non sono elementari ma composte da strutture interne: per l'elettrone si verifica la puntiformità ($a \approx 0.001$), mentre protoni e neutroni risultano avere rispettivamente $g_p = 5.58$ e $g_n = -3.82$, da cui si ricava la loro natura composita, spiegata dalla teoria degli adroni attraverso i quark.

Il rapporto tra protoni e neutroni non si mantiene costante all'interno del nuclide con l'aumentare della massa atomica, ma a causa dell'intensificarsi della repulsione coulombiana tra protoni per mantenere atomi stabili con grandi A sono necessari più neutroni. La maggior parte degli elementi (in particolare tutti quelli naturali) hanno almeno un isotopo stabile, cioè per cui non è stato osservato alcun decadimento, e un grande numero di isotopi radioattivi che decadono diversamente in base alle proprie condizioni in un tempo specifico (da cui si ricava l'*emivita* o *tempo di dimezzamento* dell'isotopo). L'energia di legame dei nucleoni (energia potenziale che ogni nucleone possiede nel formare un nuclide e che è necessario fornire per separarlo) decresce allontanandosi dall'isotopo più stabile, e il suo andamento nei confronti degli elementi stabili cresce velocemente fino ad un

massimo (^{56}Fe) per poi diminuire lentamente: la scissione di atomi grandi e la fusione di atomi piccoli, cioè, rende più stabili i prodotti in quanto ne aumenta l'energia di legame (reazioni esoergoniche). Non conforme all'andamento generale risulta l'elio (^4He) che ha una elevata energia di legame pur essendo estremamente leggero: si può quindi considerare come un pacchetto stabile di energia a cui si riducono nuclei più pesanti. La presenza di tale massimo significa che la fusione spontanea può produrre atomi soltanto più leggeri del ferro-56, in quanto altrimenti sarebbe necessaria un'immissione di energia esterna, possibile solo in condizioni estreme di collasso gravitazionale di supernovæ.

I nuclidi instabili vanno incontro a reazioni di decadimento a catena che trasmutano l'elemento fino a giungere ad un isotopo stabile: in caso di *eccesso neutronico*

- **decadimento β^-** : espulsione di un neutrone dal nuclide, che una volta libero decade in breve tempo (~ 15 minuti) in un protone, un elettrone e un antineutrino elettronico:



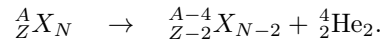
Tali particelle sono i prodotti necessari per la conservazione di energia e quantità di moto che emergono in presenza dei campi e non vanno intesi come "costituenti" il nucleone.

in caso di *eccesso protonico*

- **decadimento β^+** (e **cattura elettronica**): pur essendo generalmente stabile, un protone in legami altamente energetici può decadere in un neutrone, un positrone e un neutrino elettronico. Se il nucleo è però circondato dai suoi elettroni risulta energeticamente conveniente il processo associato di cattura elettronica che risparmia l'energia di produzione del positrone:



- **decadimento α** : per nuclidi molto pesanti e con forte eccesso protonico vi è l'emissione di gruppi di 2 neutroni e 2 protoni (nuclei di elio-4), molto stabili:



per atomi molto pesanti, indifferentemente da un possibile eccesso

- **fissione nucleare**: il nuclide si spezza in frammenti nucleari più una coda di nucleoni singoli, principalmente neutroni.

2 Studio del nucleo

2.1 Sezione d'urto

I metodi sperimentali per lo studio dei nuclidi sono ancora oggi fondati sulla logica delle esperienze di Ernest Rutherford del 1909-11, le quali confrontavano un fascio di particelle proiettile uscente da un bersaglio contenete le particelle da studiare con quello incidente attraverso un rivelatore capace di dare informazioni su alcune grandezze rilevanti per studiare le interazioni avvenute. Tali processi possono essere di

- *diffusione elastica*: particelle del fascio e del bersaglio iniziali e finali coincidono (non ci sono state modificazioni di carattere strutturale) e si conserva l'energia cinetica totale;
- *diffusione inelastica*: particelle del fascio iniziali e finali coincidono, mentre le particelle del bersaglio si modificano in seguito all'assorbimento di energia cinetica;
- *produzione inelastica*: particelle iniziali e finali sono diverse per una modificazione di tutti gli elementi in gioco, sia corpuscolari che energetici.

Si modella l'interazione fascio-bersaglio come assimilabile ad urti meccanici in cui la particella proiettile viene deviata: preso un fascio di sezione trasversale Σ costituito da corpuscoli puntiformi di velocità v e densità spaziale costante e omogenea n_f , e un bersaglio di spessore Δx e area superiore a Σ costituito da particelle sferiche di superficie trasversale σ distribuite in densità n_b , la probabilità che una particella proiettile interagisca con una particella bersaglio è σ/Σ , da cui il numero di particelle deflesse risulta

$$\Delta N_{\text{def}} = \Delta N_f \Delta N_b \frac{\sigma}{\Sigma} = (n_f \Sigma v \Delta t) (n_b \Sigma \Delta x) \frac{\sigma}{\Sigma}.$$

Da questo è possibile ricavare la **sezione d'urto** delle particelle bersaglio, grandezza microscopica che è misurabile attraverso grandezze macroscopiche (è fondamentale utilizzare particelle in interazione a corto raggio, altrimenti per interazioni a lungo raggio risulta $\sigma \rightarrow +\infty$):

$$\sigma = \frac{1}{(n_f v)(n_b \Sigma \Delta x)} \frac{\Delta N_{\text{def}}}{\Delta t}.$$

Lo studio in situazioni reali aumenta la complessità, necessitando maggiore precisione attraverso l'analisi di ulteriori grandezze, come l'angolo solido di deflessione $d\Omega$ e la variazione di energia dE , dando una proporzionalità

$$d\sigma \propto \frac{d}{dE} \frac{d}{d\Omega} \left(\frac{dN_{\text{def}}}{dt} \right) \Rightarrow \sigma = \iint_{\Omega} \int_E \frac{d^2\sigma}{d\Omega dE} d\Omega dE.$$

2.2 Equazione d'onda quantomeccanica

La fisica nucleare si sviluppa così nei primi decenni del 1900 a partire dalle interpretazioni della meccanica quantistica e della teoria dei campi quantizzati, portando ad assumere che le particelle microscopiche studiate siano i *quanti* di specifici campi, con le proprietà duali di onda-corpo. La descrizione della meccanica quantistica è appropriata però solo a basse e medie energie, mentre nel caso dello studio di condizioni ad alta energia è necessario utilizzare le più generali teorie dei campi, distinzione che risulterà fondamentale nello sviluppo della disciplina.

Vi è quindi una relazione tra le grandezze cinematiche fondamentali di un corpo libero relativistico (legate dalla relazione energia-impulso) e quelle di un'onda piana sinusoidale (legate dalla relazione di dispersione)

$$E = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \vec{p} = \frac{m \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4;$$

$$\omega = 2\pi/T, \quad \vec{k} = (2\pi/\lambda)\hat{n}, \quad \omega = \omega(\vec{k}),$$

attraverso le **leggi di Einstein-De Broglie** (valide sia in meccanica quantistica che per i campi quantizzati) che danno una relazione di dispersione non lineare, cioè le onde quantomeccaniche si propagano nel vuoto come se fosse un mezzo dispersivo:

$$E = \hbar\omega, \quad \vec{p} = \hbar\vec{k}, \quad \omega^2 = k^2 c^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2}.$$

L'interpretazione ondulatoria permette di scrivere una *funzione d'onda* piana complessa, il cui significato fisico dovrà essere precisato, di equazione

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = \psi_0 e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)}$$

per cui è possibile introdurre gli **operatori** di differenziazione **della quantità di moto e dell'energia**

$$\hat{P} = -i\hbar \vec{\nabla} \quad \rightarrow \quad \hat{P}\psi(\vec{r}, t) = -i\hbar \psi_0 e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)} \frac{i}{\hbar} \vec{p} = \vec{p} \psi(\vec{r}, t)$$

$$\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \hat{E}\psi(\vec{r}, t) = i\hbar \psi_0 e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)} \left(-\frac{i}{\hbar} E\right) = E \psi(\vec{r}, t)$$

per i quali in una data componente di Fourier dell'onda i valori di quantità di moto e di energia risultano esserne gli *autovalori* e la funzione d'onda l'*autostato*. Si cerca così un'equazione dell'onda a partire dalla relazione energia-impulso:

$$E^2 \psi = p^2 c^2 \psi + m^2 c^4 \psi, \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \cdot i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = c^2 (-i\hbar \vec{\nabla}) (-i\hbar \vec{\nabla}) \psi + m^2 c^4 \psi, \quad -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = c^2 (-\hbar^2 \nabla^2) \psi + m^2 c^4 \psi,$$

$$\boxed{\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \psi}$$

ricavando l'**equazione di Klein-Gordon** per le onde libere scalari (senza spin), generalizzazione dell'equazione di D'Alembert per corpi con massa. Non si ha però ancora un'interpretazione fisica di ψ , dovuto al fatto che Schrödinger fosse partito nel ricavare l'equazione d'onda da condizioni relativistiche, mentre il problema poteva essere superato solo attraverso la teoria dei campi. Non potendo compiere tale passaggio, Schrödinger ripiegò sul

ricavare un'equazione d'onda classica che non ponesse tali problemi, partendo dall'espressione energia-impulso classica per particelle libere in presenza di forze:

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(\vec{r}),$$

$$E\psi = \frac{p^2}{2m}\psi + V(\vec{r})\psi, \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi = \frac{1}{2m}(-i\hbar \vec{\nabla})(-i\hbar \vec{\nabla})\psi + V(\vec{r})\psi = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{r}) \right]\psi,$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi = H\psi$$

definendo con l'**operatore hamiltoniano** $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{r})$, si ottiene l'**equazione di Schrödinger** per onde quantomeccaniche scalari non relativistiche in presenza di forze. A questo punto, come proposto da Max Born, la ψ non deve essere interpretata come una grandezza intrinseca del corpo, ma che l'espressione

$$|\psi(\vec{r}, t)|^2 dV$$

(con la condizione di normalizzazione $\int_V |\psi(\vec{r}, t)|^2 dV = 1$) rappresenti la densità di probabilità di trovare la particella materiale al tempo t all'interno del volume dV centrato nella posizione \vec{r} dopo un'atto di misura. La funzione complessa ψ , detta **onda di De Broglie**, esprime quindi una *relazione* tra la particella e l'osservatore, e di cui non si può conoscere il valore effettivo ma solo il modulo (che elimina la fase), in quanto ciò che si distribuisce nello spazio non è la particella ma la sua probabilità di essere osservata in tale punto. La fisica quantistica non è quindi un campo di studi deterministico, ma fondato su descrizioni stocastiche, che non potrà mai raggiungere un teorico limite di precisione assoluta come nella fisica classica.

2.3 Diffrazione di Kirchhoff

Gli esperimenti fascio-bersaglio con particelle microscopiche devono dunque essere considerati in chiave ondulatoria: l'interazione tra particelle proiettile e bersaglio non deve essere interpretato come un processo di urto meccanico, ma come di diffrazione e rifrazione dell'onda quantomeccanica associata al proiettile.

La diffrazione di onde scalari classiche è trattabile attraverso la teoria di Kirchhoff: si dimostra che l'onda in un qualsiasi punto \vec{r} oltre uno schermo con apertura A è

$$\psi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \iint_A \left[\psi(\vec{r}') (\hat{n}' \cdot \vec{\nabla}') \frac{e^{iks}}{s} - \frac{e^{iks}}{s} (\hat{n}' \cdot \vec{\nabla}') \psi(\vec{r}') \right] da'$$

con, nel punto \vec{r}' dell'apertura, $\psi(\vec{r}')$ funzione d'onda, \hat{n}' versore normale allo schermo, $\vec{\nabla}'$ gradiente calcolato in tale punto e $s = |\vec{r} - \vec{r}'|$ distanza rispetto al centro del sistema di riferimento assunto. A causa della presenza ricorsiva di ψ nella formula, si ricorre all'**approssimazione di Kirchhoff**: la funzione è non nulla solo nei punti dell'apertura dove coincide con la funzione d'onda monocromatica incidente, da cui

$$\psi(\vec{r}') = \psi_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}'} = \psi_0 e^{ik\hat{k} \cdot (x'\hat{i} + y'\hat{j} + z'\hat{k})} = \psi_0 e^{ikz'}.$$

Ora, posto $\hat{n}' = \hat{k}$ che dà $(\hat{n}' \cdot \vec{\nabla}') = \hat{k} \cdot (\hat{i} \frac{\partial}{\partial x'} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y'} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z'}) = \frac{\partial}{\partial z'}$, si hanno

$$\begin{aligned} (\hat{n}' \cdot \vec{\nabla}') \psi_0 e^{ikz'} &= \frac{\partial}{\partial z'} \psi_0 e^{ikz'} = ik \psi_0 e^{ikz'}; \\ (\hat{n}' \cdot \vec{\nabla}') \frac{e^{iks}}{s} &= \frac{\partial}{\partial z'} \frac{e^{iks}}{s} = \left(ik \frac{e^{iks}}{s} - \frac{e^{iks}}{s^2} \right) \frac{\partial s}{\partial z'} \approx ik \frac{e^{iks}}{s} \frac{\partial s}{\partial z'} \quad \text{se } s \text{ grande;} \\ \frac{\partial s}{\partial z'} &= \frac{\partial}{\partial z'} |\vec{r} - \vec{r}'| = \frac{\partial}{\partial z'} \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} = -\frac{1}{2s} 2(z - z') = -\frac{z - z'}{s} \approx -\cos \theta, \end{aligned}$$

da cui, sostituendo nell'equazione di Kirchhoff, risulta

$$\psi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \iint_A \left[-\psi_0 e^{ikz'} ik \frac{e^{iks}}{s} \cos \theta - \frac{e^{iks}}{s} ik \psi_0 e^{ikz'} \right] da' = -\psi_0 \frac{ik}{4\pi} \iint_A \frac{e^{ik(z'+s)}}{s} (\cos \theta + 1) da'$$

che corrisponde al **principio di Huygens**, con il *fattore di obliquità* $f(\theta) = \cos \theta + 1$ ($= 2$ per $\theta \rightarrow 0$) che modula l'ampiezza dell'onda in modo da avere onde soltanto progressive, annullandosi all'indietro. Si esprime la fase nella formula in maniera vettoriale per maggiore generalità (posto $\vec{r}' \ll \vec{r}$):

$$k(s + z') = k(\sqrt{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}') + z'^2}) = k(\sqrt{r^2 + r'^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}' + z'^2}) = k\left(r\sqrt{1 + \frac{r'^2}{r^2} - \frac{2\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} + z'^2}\right) =$$

$$= k \left[r \left(1 + \frac{r'^2}{2r^2} - \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^2} \right) + \hat{n}' \cdot \vec{r}' \right] = kr + \underbrace{\frac{kr'^2}{2r}}_{\approx 0} - k\hat{n} \cdot \vec{r}' - k\hat{n}' \cdot \vec{r}' = kr - k(\hat{n} - \hat{n}') \cdot \vec{r}' = kr - \vec{q} \cdot \vec{r}'$$

introducendo il **vettore d'onda trasferito** $\vec{q} = k(\hat{n} - \hat{n}')$ che parametrizza lo spostamento del punto di osservazione dall'asse del fascio. Il termine $kr'^2/2r$ risulta trascurabile in quanto se il riferimento è interno all'apertura esso vale $D^2/\lambda L \ll 1$ (con D diametro dell'apertura e L distanza da questa), essendo in **regime di Fraunhofer**, cioè a grandi distanze, e si ha anche che $s \approx r - \hat{n} \cdot \vec{r}' \approx r - r' \cos \theta \approx r$. Si ottiene così la funzione d'onda di Fraunhofer diffratta da un'apertura investita da onda monocromatica:

$$\psi_{\text{apertura}}(\vec{r}) \approx -\psi_0 \frac{ik}{2\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \iint_A e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}'} da'.$$

Dal punto di vista dell'incidenza di una fascio di particelle su nuclei ciò che si cerca è però l'opposto della diffrazione così trovata, e la funzione d'onda incidente su un ostacolo di sezione A risulta in relazione con quella su un'apertura attraverso il *principio degli schermi complementari* o di *Babinet*:

$$\psi_{\text{ostacolo}}(\vec{r}) + \psi_{\text{apertura}}(\vec{r}) = \psi_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad \Rightarrow \quad \psi_{\text{ost}}(\vec{r}) \approx \psi_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} + \psi_0 \frac{e^{ikr}}{r} \left[\frac{ik}{2\pi} \iint_A e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}'} da' \right].$$

Si introduce ora la **funzione di profilo** che modula la funzione d'onda sull'apertura A , assunta totalmente trasparente in modo che $\Gamma = \{1 \text{ se interno ad } A \vee 0 \text{ se esterno ad } A\}$ nell'integrale in ψ_{apertura} : la funzione descrive l'assorbitività dell'ostacolo, variando da un corpo nero ideale per $\Gamma = 1$ ad un ostacolo trasparente che non produce diffrazione per 0. In generale Γ dipende dalla posizione \vec{r}' e può assumere valori complessi in modo da descrivere vari fenomeni di assorbimento. Si può introdurre ora l'**ampiezza di diffusione** che integra i vari contributi modulanti e assorbenti in funzione del vettore d'onda trasferito \vec{q} (posto S_B superficie di bersaglio, piano infinito contenente l'apertura/bersaglio A):

$$f(\vec{q}) = \frac{ik}{2\pi} \iint_{S_B} \Gamma(\vec{r}') e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}'} da' \quad \rightarrow \quad \psi_{\text{ost}}(\vec{r}) = \psi_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} + \psi_0 f(\vec{q}) \frac{e^{ikr}}{r} \quad (1)$$

e ciò mostra che la figura di diffrazione data da un ostacolo è il risultato dell'interferenza tra l'onda piana incidente e l'onda circolare modulata proveniente dall'ostacolo.

2.3.1 Sezione d'urto quantistica

La probabilità d'incidenza e diffusione del fascio con una particella bersaglio è analoga a quanto visto sopra (con S_O superficie di osservazione di schermo lontano), e considerando le funzioni d'onda da (1) la sezione d'urto quantistica rispetto all'angolo solido Ω risulta

$$\mathcal{P}_{\text{incidenza}} = \frac{\sigma_{\text{diffusione}}}{\Sigma} = \frac{\iint_{S_O} |\psi_{\text{diffusione}}|^2 dS}{\iint_{\Sigma} |\psi_{\text{incidente}}|^2 d\Sigma} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma_{\text{diff}} = \Sigma \frac{\iint |\psi_0|^2 |f(\vec{q})|^2 \frac{dS}{r^2}}{\iint |\psi_0|^2 d\Sigma} = \iint |f(\vec{q})|^2 d\Omega}.$$

Si può calcolare anche la sezione d'urto d'assorbimento del fascio incidente: considerando che la probabilità incidente deve essere assorbita dal bersaglio su S_B o diffratta sullo schermo S_O , si ha

$$\iint_{\Sigma} |\psi_{\text{inc}}|^2 d\Sigma = \iint_{S_B} |\psi_{\text{assorbita}}|^2 dS + \iint_{S_O} |\psi_{\text{diffratta}}|^2 dS'$$

per cui la probabilità del processo di assorbimento è data da

$$\mathcal{P}_{\text{assorbimento}} = \frac{\sigma_{\text{ass}}}{\Sigma} = \frac{\iint_{S_B} |\psi_{\text{ass}}|^2 dS}{\iint_{\Sigma} |\psi_{\text{inc}}|^2 d\Sigma} = \frac{\iint |\psi_{\text{inc}}|^2 d\Sigma - \iint |\psi_{\text{diff}}|^2 dS'}{\iint |\psi_{\text{inc}}|^2 d\Sigma}.$$

Si studia ora l'integrale dell'onda diffratta (quelli dell'incidente sono banali e danno $|\psi_0|^2 \Sigma$) a partire dalla (1):

$$\begin{aligned} \iint_{S_O} |\psi_{\text{diff}}|^2 dS' &= \iint_{S_O} \left| \psi_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} + \psi_0 f(\vec{q}) \frac{e^{ikr}}{r} \right|^2 dS = \\ &= \iint_{S_O} |\psi_0|^2 dS + \iint_{S_O} |\psi_0|^2 |f(\vec{q})|^2 \frac{dS}{r^2} + 2 \iint_{S_O} \Re \left[|\psi_0|^2 f(\vec{q}) \frac{e^{ik(r-z)}}{r} \right] dS = \\ &= |\psi_0|^2 \Sigma + |\psi_0|^2 \sigma_{\text{diff}} + 2|\psi_0|^2 \Re \left[\iint f(\vec{q}) \frac{e^{ik(r-z)}}{r} dS \right]. \end{aligned}$$

L'area di integrazione del fascio incidente è $S_O = \Sigma$ del fascio stesso in quanto, per regime di Fraunhofer, si stanno considerando bersagli puntiformi la cui diffrazione è limitata e non eccede Σ . Ora la sezione d'urto d'assorbimento è data da

$$\sigma_{\text{ass}} = \Sigma \frac{|\psi_0|^2 \Sigma - \left[|\psi_0|^2 \Sigma + |\psi_0|^2 \sigma_{\text{diff}} + 2|\psi_0|^2 \Re \left(\iint f(\vec{q}) \frac{e^{ik(r-z)}}{r} dS \right) \right]}{|\psi_0|^2 \Sigma} = -\sigma_{\text{diff}} - 2\Re \left(\iint_{S_O} f(\vec{q}) \frac{e^{ik(r-z)}}{r} dS \right).$$

Si calcola quindi l'integrale sullo schermo S_O : assumendo l'origine del sistema di riferimento nel centro dell'ostacolo e l'asse z normale al piano che lo contiene e allo schermo, si ha la fase dell'esponenziale come

$$r - z = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - z = z \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{z^2}} - z \approx z \left(1 + \frac{x^2 + y^2}{2z^2} \right) - z = \frac{x^2 + y^2}{2z}$$

in cui poiché lo schermo è lontano la coordinata z domina largamente sulle altre e la figura di diffrazione si estende su di quello in misura trascurabile. Perciò si può assumere $\vec{q} = k(\hat{n} - \hat{n}') \approx \vec{0}$ perché non vi è significativa deviazione del fascio dopo l'interazione. Si calcola così l'integrale:

$$\begin{aligned} 2\Re \left[\iint_{S_O} f(\vec{q}) \frac{e^{ik(r-z)}}{r} dS \right] &= 2\Re \left[\iint_{S_O} f(\vec{0}) \frac{e^{\frac{ik(x^2+y^2)}{2z}}}{z} dx dy \right] = \frac{2}{z} \Re \left[f(\vec{0}) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{k}{2iz}x^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{k}{2iz}y^2} dy \right] = \\ &= \frac{2}{z} \Re \left[f(\vec{0}) \sqrt{\frac{2iz}{k}} \sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\frac{2iz}{k}} \sqrt{\pi} \right] = \frac{2}{z} \Re \left[f(\vec{0}) \frac{2iz}{k} \pi \right] = \frac{2}{z} \frac{2\pi z}{k} \Re[f(\vec{0}) i] = -\frac{4\pi}{k} \Im[f(\vec{0})]. \end{aligned}$$

Si ottiene in tal modo l'equazione del **teorema ottico** che esprime il valore della sezione d'urto totale

$$\boxed{\sigma_{\text{tot}} = \sigma_{\text{ass}} + \sigma_{\text{diff}} = \frac{4\pi}{k} \Im[f(\vec{0})]}$$

da cui si può ricavare la sezioni d'urto d'assorbimento: conoscendo l'equazione generale di $f(\vec{q} = \vec{0})$ in caso assorbitivo si ha

$$\frac{4\pi}{k} \Im \left[\frac{ik}{2\pi} \iint \Gamma da' \right] = \frac{4\pi}{k} \frac{k}{2\pi} \Im \left[i \iint (\Re \Gamma + i \Im \Gamma) da' \right] = 2 \iint \Re \Gamma da',$$

e sapendo che $\sigma_{\text{diff}} = |f(\vec{0})|^2 = \iint |\Gamma|^2 da'$, si ottiene, ricordando che $|1 - \Gamma|^2 = 1 + |\Gamma|^2 - 2\Re \Gamma$

$$\sigma_{\text{ass}} + \iint |\Gamma|^2 da' = 2 \iint \Re \Gamma da' \quad \rightarrow \quad \sigma_{\text{ass}} = \iint (2\Re \Gamma - |\Gamma|^2) da' \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma_{\text{ass}} = \iint (1 - |1 - \Gamma|^2) da'}.$$

Si modella la sezione del nucleo atomico come un disco circolare di raggio R *totalmente assorbente*, portando ad avere una funzione di profilo $\Gamma = \{1 \text{ se } r \leq R \vee 0 \text{ se } r > R\}$. Preso \vec{r} vettore di posizione dei punti del disco rispetto al sistema di riferimento assunto, si ha $\vec{q} \cdot \vec{r} = qr \cos \varphi$ in quanto giacciono sullo stesso piano xy (con z normale al disco). Passando poi in coordinate cilindriche risulta $da' = r d\varphi dr$. L'ampiezza di diffusione del *disco nero* diventa così

$$f(\vec{q}) = ik \int_0^R r \left[\frac{1}{2k} \int_0^{2\pi} e^{iqr \cos \varphi} d\varphi \right] dr = ik \int_0^R r J_0(qr) dr \quad \text{con} \quad J_0(qr) = \frac{1}{2k} \int_0^{2\pi} e^{iqr \cos \varphi} d\varphi$$

funzione di Bessel di ordine zero (che integrata su R dà quella di *ordine uno*) che modula il fenomeno di diffrazione ottica. Si ricavano quindi i valori delle sezioni d'urto di diffusione e assorbimento:

$$\sigma_{\text{diff}} = \iint \underbrace{|\Gamma|^2}_1 da' = \pi R^2, \quad \sigma_{\text{ass}} = \iint \underbrace{(1 - |1 - \Gamma|^2)}_0 da' = \pi R^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{\text{tot}} = 2\pi R^2.$$

2.4 Studio del nucleo ed energia di legame

Lo studio della struttura nucleare e dei nucleoni è compiuto attraverso l'incidenza di fasci di neutroni (in quanto non interagiscono elettromagneticamente a lungo raggio con il nucleo, ma solo attraverso la forza forte) di opportuna energia, per avere il potere risolutivo cercato, contro i nuclidi. Si modella il nucleo come una sfera assorbente composta da A (numero atomico) nucleoni sferici di raggio r_0 a contatto, senza considerare

gli spazi vuoti tra le particelle. Il volume nucleare risulta dunque $V = \frac{4}{3}\pi R^3 \approx \frac{4}{3}\pi r_0^3 A$ da cui si ottiene in prima approssimazione il raggio nucleare $R \approx r_0 A^{1/3}$ e la sezione d'urto totale $\sigma_{\text{tot}} = 2\pi r_0^2 A^{2/3}$. I dati sperimentali mostrano però un'incongruenza, dando una sezione d'urto non nulla per $A = 0$, portando ad aggiungere un termine costante alla formula del raggio che Hans Bethe suggerì fosse da intendere come un *alone nucleare* di spessore costante per tutti i nuclei dovuto al raggio finito dell'interazione forte tra nucleoni:

$$R_{\text{nucleo}} = r_0 A^{1/3} + b \quad \text{con} \quad b \approx 2.4 \times 10^{-15} \text{ m} = 2.4 \text{ fm.}$$

Il raggio del singolo nucleone risulta dunque $r_0 = \frac{1}{A^{1/3}} (\sqrt{\frac{\sigma}{2\pi}} - b) \approx 1.24 \text{ fm}$.

È possibile ottenere maggiore precisione sulla geometria del nucleo attraverso lo studio della sezione d'urto differenziale di diffusione con il modello sopra esposto, sapendo che $\vec{q} = k(\hat{n} - \hat{n}') \approx k \sin \theta \hat{r}$, che dà

$$\frac{d\sigma_{\text{diff}}}{d\Omega} = \frac{R^2}{\sin^2 \theta} J_1^2(kR \sin \theta) \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} \frac{R^2}{\sin^2 \theta} \left[\frac{1}{2} kR \sin \theta - \frac{1}{16} (kR \sin \theta)^3 \right]^2 \approx \frac{R^2}{\sin^2 \theta} \frac{1}{4} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 R^2 \sin^2 \theta = \frac{\pi^2 R^4}{\lambda^2}$$

rendendo possibile una misura accurata del raggio nucleare (conoscendo la lunghezza d'onda di De Broglie del fascio di neutroni a 10 MeV, $\lambda = 7.5 \text{ fm}$) $R \approx 5.2 \text{ fm}$.

Dallo studio degli andamenti delle sezioni d'urto di diffusione per vari elementi, modellizzabili attraverso funzioni di Bessel di ordine uno, si nota che i picchi negativi non raggiungono mai lo zero come dovrebbero invece fare secondo la teoria del disco nero, indicando che il nucleo non sia totalmente assorbente ma abbia un certo grado di trasparenza: si introduce così il **modello ottico nucleare** che modella i nuclidi attraverso una funzione di profilo $\Gamma \neq 1$ complessa, come per l'indice di rifrazione in ottica classica.

*

Informazioni sulle proprietà della forza nucleare che unisce i nucleoni sono ricavabili dallo studio dell'energia di legame, cioè l'energia da fornire alle particelle per separarle all'infinito ($E_f = E_\infty = 0$) fissata una, da cui si ha $\Delta E = E_f - E_i$. Tale studio è possibile solo attraverso il quadro della relatività ristretta (in quanto non si conosce ancora l'espressione teorica della forza per studiarla classicamente), che associa ad ogni energia una massa inerziale: $\Delta E = (M_f - M_i) c^2$ (con $M_f > M_i$) dunque per trovare l'energia di legame basta studiare il **difetto di massa** tra il sistema disgiunto finale e quello unito iniziale. È possibile dare una *definizione operativa dell'energia di legame* in funzione dei numeri nucleari Z , N e delle masse di protone, neutrone e del nucleo ionizzato (senza elettroni):

$$B({}_Z^A X_N) = [Nm_n + Zm_p + M({}_Z^A X_N)] c^2.$$

Studiando il rapporto $B(A)/A$ si ottiene che:

- per atomi leggeri l'energia tende a zero ($\frac{B(A)}{A}({}^1\text{H}) = 0 \text{ MeV}$) e cresce velocemente fino ad un massimo nel ${}^{56}\text{Fe}$, dopo il quale decresce lentamente (come già visto, tale elemento è il prodotto finale di tutte le reazioni di fusione e scissione nucleare);
- l'energia media (tolti i primi 12 elementi per i quali c'è una forte pendenza) è circa 8 MeV;
- vi è un picco sul ${}^4\text{He}$ che dimostra ancora una volta che sia un nucleo molto stabile (perciò è il prodotto del decadimento α).

3 Elementi di meccanica quantistica

L'evoluzione temporale di un corpo quantomeccanico in regime non relativistico, come visto, è regolata dall'equazione d'onda di Schrödinger, che è studiabile attraverso la misurazione degli **osservabili**, grandezze microscopiche descrittive del sistema. Ad ogni osservabile o è associabile un operatore lineare complesso hermitiano \hat{O} (in maniera euristica, non esistendo una regola generale), ed è possibile ricavare un **valore di aspettazione**, cioè il valore medio dell'osservabile al tempo t in un certo stato quantomeccanico $\psi(\vec{r}, t)$, attraverso

$$\langle o \rangle = \int_V \psi^*(\vec{r}, t) \hat{O} \psi(\vec{r}, t) dV$$

con ψ^* complesso coniugato di ψ in modo che $\psi^* \cdot \psi = |\psi|^2$. Ciò è dovuto alla natura statistica dei fenomeni quantomeccanici: il valore medio di una certa grandezza è data dall'integrale su tutto il volume considerato della

probabilità che si verifichi un certo valore, sapendo che per normalizzazione, al denominatore, $\int |\psi|^2 dV = 1$. Grandezze che misurate ripetutamente in un certo stato danno sempre uno stesso valore si dicono essere *definite* e tale stato ψ è *autostato* dell'operatore \hat{O} di *autovalore* o ($\hat{O}\psi = o\psi$), altrimenti sono *indefinite* e si può ottenere solo una distribuzione di valori.

Tale è un problema delicato: considerando infatti una data componente di Fourier della funzione d'onda piana progressiva $\psi(\vec{r}, t) = \psi_0 \exp\{\frac{1}{\hbar}(\vec{p} \cdot \vec{r} - \omega t)\}$ avente quantità di moto ed energia definite, posizione spaziale e temporale rimangono assolutamente *indefinite* e virtualmente l'onda occupa tutto lo spazio e ogni tempo. Per definire tali grandezze in un'onda specifica è necessario sovrapporre componenti di Fourier di diverso \vec{k} e ω andando a costituire **pacchetti d'onda**, per cui (dalla fisica classica) valgono le **relazioni di indeterminazione**

$$\Delta \vec{k} \Delta \vec{r} \approx 2\pi, \quad \Delta \omega \Delta t \approx 2\pi$$

dove, data una direzione \vec{r} dello spazio, $\Delta \vec{k} = (\Delta k_x, \Delta k_y, \Delta k_z)$ e $\Delta \omega$ stimano la dispersione del vettore d'onda e della pulsazione del pacchetto, mentre $\Delta \vec{r}$ e Δt ne stimano la dispersione spaziale e temporale. Dunque per un pacchetto d'onda contenete un'unica componente di Fourier, avendo $\Delta \vec{k} = 0$, si ha che l'indeterminazione spaziale $\Delta \vec{r} \rightarrow \infty$ per compensare, e analogamente se si riesce a determinare spazialmente (es: attraverso una fenditura di dimensioni comparabili alla lunghezza d'onda di De Broglie) si ottiene un'aumento dell'indeterminazione del vettore d'onda (fenomeno di diffrazione per incurvatura dei fronti d'onda dal principio di Huygens-Fresnel).

Attraverso le relazioni di Einstein-De Broglie si ottengono le **relazioni di indeterminazione di Heisenberg** che legano quantità di moto e posizione ed energia e tempo:

$$\Delta p_x \Delta x \approx h, \quad \Delta p_y \Delta y \approx h, \quad \Delta p_z \Delta z \approx h, \quad \Delta E \Delta t \approx h.$$

L'incompatibilità tra due variabili dinamiche di un sistema quantomeccanico in un certo stato è espressa da

$$\sigma_a \sigma_b \geq \int_V \psi^*(\vec{r}, t) \frac{\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}}{2i} \psi(\vec{r}, t) dV$$

per cui il prodotto delle deviazioni standard delle misure di due osservabili a, b in uno stato ψ è limitato inferiormente dal valore di aspettazione del commutatore $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ fratto $2i$. In un determinato stato *due grandezze possono dunque assumere valori definiti se e solo se i rispettivi operatori commutano*, cioè la commutazione è nulla.

Esempio:

Considerando le variabili dinamiche di posizione e quantità di moto lungo una direzione $x \Rightarrow \hat{X} = x, \quad p_x \Rightarrow \hat{P}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$, si cerca se gli operatori commutano:

$$(\hat{X}\hat{P}_x - \hat{P}_x\hat{X})\psi = \hat{X}\hat{P}_x(\psi) - \hat{P}_x(\hat{X}\psi) = x \left(-i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + i\hbar \frac{\partial}{\partial x}(x\psi) = -xi\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x} + i\hbar \psi + xi\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x} = i\hbar \psi$$

per cui, poiché $[\hat{X}, \hat{P}_x] = i\hbar \hat{1} \neq 0$ (con $\hat{1}$ operatore unitario che restituisce l'argomento), non vi è commutazione e le due variabili non sono determinabili contemporaneamente. Infatti

$$\sigma_x \sigma_{p_x} \geq \int_V \psi^* \frac{\hat{X}\hat{P}_x - \hat{P}_x\hat{X}}{2i} \psi dV = \int_V \psi^* \frac{i\hbar \hat{1}}{2i} \psi dV = \frac{\hbar}{2}.$$

3.1 Momento angolare orbitale e spin

Per variabili quantomeccaniche con corrispondente in fisica classica (es: posizione, quantità di moto) è possibile costruire l'operatore a partire dalla loro espressione classica secondo il *principio di corrispondenza*. Ciò è possibile anche per il momento angolare orbitale, o momento della quantità di moto, per cui da $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$ risulta (in coordinate cartesiane)

$$\hat{L} = \hat{r} \times \hat{P} = \vec{r} \times (-i\hbar \vec{\nabla}) = -i\hbar \vec{r} \times \vec{\nabla} = (\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z) = -i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y}, z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z}, x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

le cui componenti si può però vedere che non commutano, in quanto incompatibili a due a due

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar \hat{L}_z, \quad [\hat{L}_z, \hat{L}_x] = i\hbar \hat{L}_y, \quad [\hat{L}_y, \hat{L}_z] = i\hbar \hat{L}_x;$$

dunque il momento angolare può assumere valori definiti lungo solo una direzione (per convenzione quella di propagazione z). Si considera ora l'**operatore modulo quadrato del momento angolare**, che si può invece vedere come commuti per ogni direzione

$$\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2 \quad \rightarrow \quad [\hat{L}^2, \hat{L}_x] = [\hat{L}^2, \hat{L}_y] = [\hat{L}^2, \hat{L}_z] = 0$$

e dunque per ogni stato quantomeccanico sono definiti i valori di tale modulo quadrato e della proiezione su z . Per trovare i valori definiti di \hat{L}^2 e \hat{L}_z e le espressioni delle funzioni d'onda dei corrispondenti stati quantomeccanici si risolvono le equazioni agli autovalori degli operatori:

$$\begin{aligned} \hat{L}^2 \psi_{l,m}(\vec{r}) &= l(l+1)\hbar^2 \psi_{l,m}(\vec{r}) & l &= 0, 1, 2, \dots \in \mathbb{N}_0 \\ \hat{L}_z \psi_{l,m}(\vec{r}) &= m\hbar \psi_{l,m}(\vec{r}) & m &= -l, -l+1, \dots, l-1, l \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

con l, m **numeri quantici del momento angolare** che descrivono compiutamente lo stato e individuano specifiche funzioni d'onda dette *armoniche sferiche* (assimilabili con gli orbitali atomici). Si ottengono così degli operatori *quantizzati*, che possono restituire solo valori *discreti*.

Per trovare il momento angolare totale di un sistema composto da due sottoinsiemi con proprio momento angolare si calcola la somma operatoriale $\hat{L} = \hat{L}_1 + \hat{L}_2$ associata al sistema complessivo. Se gli operatori dei sottosistemi soddisfano le relazioni di commutazione del momento angolare, anche quello totale vi si atterrà e avrà valori definiti solo per $\hat{L}^2 = (\hat{L}_1 + \hat{L}_2)^2$ e $\hat{L}_z = \hat{L}_{1z} + \hat{L}_{2z}$.

Da qui si ha il **teorema della somma dei momenti angolari quantistici**: dati due stati ϕ_{j_1, m_1} e ϕ_{j_2, m_2} di momento angolare definito, autostati dei rispettivi operatori modulo quadro e proiezione su z , lo stato complessivo $\phi_{J, M}$ sarà autostato degli operatori risultanti con autovalori e numeri quantici dati da

$$\begin{aligned} \hat{L}^2 \psi_{J, M}(\vec{r}) &= J(J+1)\hbar^2 \psi_{J, M}(\vec{r}) & |j_1 - j_2| &< J < |j_1 + j_2| \\ \hat{L}_z \psi_{J, M}(\vec{r}) &= M\hbar \psi_{J, M}(\vec{r}) & M &= m_1 + m_2. \end{aligned}$$

Lo stato complessivo è dato dalla sovrapposizione (cioè combinazione lineare) dei possibili stati risultanti con diversi numeri quantici secondo certi **coefficienti di Clebsch-Gordan** (ricavabili da specifiche tabelle) che esprimono il peso di ogni stato nel comporre quello totale osservabile:

$$\phi_{j_1, m_1} \phi_{j_2, m_2} = \sum_{\substack{J=|j_1-j_2| \\ M=m_1+m_2}}^{|j_1+j_2|} C_{J, M}^{j_1, m_1; j_2, m_2} \phi_{J, M}.$$

Nel caso gli stati venissero sommati in ordine inverso, pur i numeri quantici rimendo gli stessi, si può mostrare che i coefficienti cambierebbero secondo la formula $C_{J, M}^{j_2, m_2; j_1, m_1} = (-1)^{j_1+j_2-J} C_{J, M}^{j_1, m_1; j_2, m_2}$.

*

Per spiegare certi dati sperimentali è necessario introdurre anche per le particelle microscopiche il concetto di **momento angolare intrinseco** o **spin**, che in meccanica classica è associabile solo a corpi estesi (come somma dei momenti angolari orbitali di tutte le parti) e descrivente in maniera continua e variabile il loro stato cinematico di rotazione secondo un dato sistema di riferimento: questo però diventa ora una *grandezza intrinseca* del corpo microscopico che può assumere un solo valore fisso e immutabile, rendendosi una *variabile dinamica essenzialmente quantistica* senza un corrispettivo classico. È così definita una terna cartesiana di **operatori di spin** $\hat{S} = (\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z)$ che opera in uno **spazio degli stati di spin** squisitamente quantistico (lo spin è un nuovo grado di libertà del sistema) e soddisfa regole di commutazione analoghe a quelle del momento angolare:

$$[\hat{S}_x, \hat{S}_y] = i\hbar \hat{S}_z, \quad [\hat{S}_z, \hat{S}_x] = i\hbar \hat{S}_y, \quad [\hat{S}_y, \hat{S}_z] = i\hbar \hat{S}_x.$$

Dunque, analogamente al momento angolare, uno stato quantomeccanico ammette valori definiti solo per il modulo quadrato e la terza componente dello spin, che si ottengono risolvendo le loro equazioni agli autovalori:

$$\begin{aligned} \hat{S}^2 \eta_{s, s_z} &= s(s+1)\hbar^2 \eta_{s, s_z} & s &= 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots \text{ con salti di mezza unità,} \\ \hat{S}_z \eta_{s, s_z} &= s_z \hbar \eta_{s, s_z} & s_z &= -s, -s+1, \dots, s-1, s \in [-s, s] \text{ con salti unitari,} \end{aligned}$$

dove s, s_z sono i **numeri quantici di spin** che, per ogni s , individuano $2s+1$ specifici vettori linearmente indipendenti η_{s, s_z} nello spazio complesso degli spin. Da ciò lo stato totale di una particella quantomeccanica dovrà essere rappresentata nello *spazio prodotto* tra questo e lo spazio ordinario degli stati: $\xi(\vec{r}, t) = \psi_{l, m}(\vec{r}, t) \eta_{s, s_z}$. La composizione dello stato totale da parte di diversi spazi astratto, oltre a quello ordinario delle posizioni, comporta dunque che la descrizione ondulatoria di de Broglie da sola non sia più sufficiente a descrivere i fenomeni quantomeccanici, ma per spiegare certi comportamenti sia necessario introdurre opportuni nuovi spazi vettoriali complessi.

3.2 Particelle identiche, fermioni e bosoni

Seppure nella fisica classica particelle sia diverse che identiche sono sempre distinguibili una volta note posizione e velocità iniziali (dalle quali si ricava la legge oraria e la traiettoria), in meccanica quantistica, data l'indeterminazione di una delle due variabili, particelle identiche sono *sempre indistinguibili*. È possibile però costruire la funzione d'onda del sistema quantomeccanico risultante da due particelle identiche considerando tale indeterminazione: dato che le particelle possono trovarsi in uno stesso momento nelle loro due posizioni distinte intercambiabilmente, vanno prese in esame le funzioni d'onda e le densità di probabilità di osservazione dei corpi sia quando sono nella loro posizione propria che in quella dell'altra particella

$$\begin{cases} \psi_{E_1, \vec{p}_1}(\vec{r}_1, t) = A_{E_1, \vec{p}_1} e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}_1 \cdot \vec{r}_1 - E_1 t)} \\ \psi_{E_2, \vec{p}_2}(\vec{r}_2, t) = A_{E_2, \vec{p}_2} e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}_2 \cdot \vec{r}_2 - E_2 t)} \end{cases} \rightarrow |\psi_{E_1, \vec{p}_1}(\vec{r}_1, t) \cdot \psi_{E_2, \vec{p}_2}(\vec{r}_2, t)|^2,$$

$$\begin{cases} \psi_{E_1, \vec{p}_1}(\vec{r}_2, t) = A_{E_1, \vec{p}_1} e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}_1 \cdot \vec{r}_2 - E_1 t)} \\ \psi_{E_2, \vec{p}_2}(\vec{r}_1, t) = A_{E_2, \vec{p}_2} e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}_2 \cdot \vec{r}_1 - E_2 t)} \end{cases} \rightarrow |\psi_{E_1, \vec{p}_1}(\vec{r}_2, t) \cdot \psi_{E_2, \vec{p}_2}(\vec{r}_1, t)|^2.$$

Dato che entrambi gli esiti sono possibili, la funzione d'onda risultante sarà una loro combinazione lineare:

$$\psi_{\text{sistema}} = \alpha \psi_{E_1, \vec{p}_1}(\vec{r}_1, t) \cdot \psi_{E_2, \vec{p}_2}(\vec{r}_2, t) + \beta \psi_{E_1, \vec{p}_1}(\vec{r}_2, t) \cdot \psi_{E_2, \vec{p}_2}(\vec{r}_1, t).$$

L'indeterminazione data dal non conoscere i coefficienti è nota come **degenerazione di scambio** e può essere rimossa attraverso il **principio di indistinguibilità delle particelle identiche**: a seguito di uno scambio delle posizioni delle particelle identiche tutte le grandezze fisiche osservabili rimangono immutate. Perciò, dato che ciò che è osservabile dello stato di una particella quantomeccanica è il suo modulo quadrato (cosa che non esclude una modificazione della funzione d'onda nello scambio):

$$|\psi_{\text{sist}}^{\text{scambio}}|^2 = |\psi_{\text{sist}}|^2 \rightarrow |\alpha \psi_2(\vec{r}_1) \psi_1(\vec{r}_2) + \beta \psi_1(\vec{r}_1) \psi_2(\vec{r}_2)|^2 = |\alpha \psi_1(\vec{r}_1) \psi_2(\vec{r}_2) + \beta \psi_2(\vec{r}_1) \psi_1(\vec{r}_2)|^2,$$

e poiché i prodotti degli stessi stati differiscono nei due moduli quadri dei sistemi solo per il coefficiente complesso di cui si conosce l'espressione, risulta

$$\begin{cases} |\alpha|^2 = |\beta|^2 \\ \alpha = A e^{ia} \\ \beta = B e^{ib} \end{cases} \Rightarrow$$

Ora, dato che il fattore $A e^{ia}$ può essere raccolto e assorbito come coefficiente di normalizzazione, si ha che il sistema quantomeccanico di due particelle identiche è descritto da una funzione d'onda simmetrica (+) o antisimmetrica (−) rispetto allo scambio delle particelle stesse:

$$\psi_{\text{sist}} = \psi_{E_1, \vec{p}_1}(\vec{r}_1, t) \psi_{E_2, \vec{p}_2}(\vec{r}_2, t) \pm \psi_{E_1, \vec{p}_1}(\vec{r}_2, t) \psi_{E_2, \vec{p}_2}(\vec{r}_1, t).$$

Vi sono dunque due famiglie di particelle distinte dal modo in cui costruiscono un sistema di particelle identiche, permettendo una classificazione basata sulle loro proprietà collettive di simmetria o antisimmetria:

- **particelle di Bose-Einstein** o **bosoni**, che richiedono simmetria. Sono bosoni i mediatori delle forze elementari, detti *di gauge*;
- **particelle di Fermi-Dirac** o **fermioni**, che richiedono antisimmetria e per loro vale il **principio di esclusione di Pauli**: due fermioni non possono disporsi nello stesso stato quantomeccanico poiché ciò annullerebbe la funzione d'onda del sistema. Le particelle atomiche (come ogni quark e leptone) sono fermioni.

Vi è inoltre uno strettissimo legame tra spin e proprietà collettive di simmetria, dato dal fondamentale **teorema spin-statistica**: particelle identiche di spin *intero* sono *bosoni*, mentre di spin *semi-intero* sono *fermioni*. Nel vuoto, a differenza che nei mezzi materiali e nel caso di eccitazioni collettive, le particelle microscopiche si comportano sempre in accordo a tale teorema e non vi sono situazioni di simmetria mista.

4 Modelli nucleari

4.1 Modello a goccia

Sulla base dei dati raccolti fino ad allora, nel 1935 Niels Bohr teorizza il **modello a goccia** del nucleo atomico a partire dalle proprietà a corto raggio della forza forte e alle analogie coi fluidi meccanici incompressibili. Unendo

valutazioni empiriche sui rapporti tra le componenti dei nuclidi e i loro comportamenti sperimentali, si giunge alla **formula di Weizsacker** semiempirica dell'energia di legame nucleare, che approssima in buona misura il comportamento reale:

$$B = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - a_a \frac{(A-2Z)^2}{A} + a_p \frac{\delta}{A^{4/3}}$$

con (in MeV): $a_v = 15.5$, $a_s = 16.8$, $a_c = 0.72$, $a_a = 23.0$, $a_p = 34.0$.

Se ne studiano i termini:

1. *termine di volume*: prima approssimazione basata sul valore medio per nucleone di $B \approx 8 \text{ MeV} \cdot A$;
2. *termine di superficie*: dato il corto raggio della forza nucleare i nucleoni sulla superficie interagiscono con un numero minore di particelle rispetto alle altre, necessitando una correzione del termine precedente sottraendo una quantità proporzionale alla superficie (assunta sferica) $\Sigma = 4\pi R^2 = 4\pi(r_0 A^{1/3})^2 \propto A^{2/3}$;
3. *termine coulombiano*: in quanto i protoni si respingono elettrostaticamente va notato come all'aumentare dei nucleoni diminuisca l'energia necessaria per separarli: ipotizzando un nucleo di carica $Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$ distribuita uniformemente, il lavoro delle forze repulsive su di un singolo protone $\delta q = 4\pi R^2 dR \rho$ è

$$\delta L = \int_R^\infty \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q \cdot \delta q}{r^2} dr = \frac{Q \cdot \delta q}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{4\pi\rho^2}{3\epsilon_0} R^4 dR \Rightarrow L = \frac{4\pi\rho^2}{15\epsilon_0} R^5 = \frac{3}{20\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{R} \propto \frac{(eZ)^2}{r_0 A^{1/3}} \propto \frac{Z^2}{A^{1/3}}$$

e si corregge la formula, sapendo che se si ha un solo protone non vi è interazione coulombiana, con $Z(Z-1)/A^{1/3}$;

4. *termine di asimmetria*: sperimentalmente si ha che i nuclei più stabili sono quelli con $Z \approx A/2$ (la discrepanza aumenta con A) a causa del *principio di esclusione di Pauli*, mentre dai termini precedenti si avrebbero con $Z = 0$: si introduce così un'ulteriore correzione, modulata da $(A-2Z)^2$ (potenza dedotta dai dati empirici) e in funzione di A^{-1} a causa della discrepanza;
5. *termine di accoppiamento* (pairing): sperimentalmente dei 254 nuclei stabili 143 hanno numero di protoni-neutroni pari-pari, 101 pari-dispari (indistintamente) e 5 dispari-dispari, portando ad assumere una maggior stabilità per rapporti pari di nucleoni e ad una descrizione empirica attraverso una funzione

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{se pari-pari;} \\ 0 & \text{se pari-dispari;} \\ -1 & \text{se dispari-dispari.} \end{cases}$$

Da questo si deduce che le forze nucleari sono molto intense ma a corto raggio e producono una distribuzione spaziale tendenzialmente uniforme di nucleoni. Gli ultimi due termini non hanno corrispettivo classico e possono essere spiegati solo attraverso la meccanica quantistica.

4.2 Modello a gas di fermioni

Il modello a goccia, rifacendosi solo ad analogie classiche, non riesce a spiegare i fenomeni dei nuclidi dovuti alla natura quantomeccanica delle particelle. Si costruisce così un modello semplificato basato sulle nozioni espresse nel capitolo 3, partendo dalla conoscenza del corto raggio dell'interazione forte, che supera di poco le dimensioni del nucleone:

- la risultante delle forze per una particella interna al nuclide è mediamente nulla, mentre per quelle sulla superficie (sferica) vi è un'attrazione centripeta, facendo considerare la forza come dipendente dalla distanza dal centro del nuclide;
- ricordando che $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$, è possibile descrivere la forza con un potenziale V costante per $r \in [0, R)$ e che sale rapidamente sulla superficie fino ad un altro valore costante. È dunque presente una *buca di potenziale* in cui i nucleoni si comportano come fossero liberi e vi sono mantenuti dalla forza centripeta;
- poiché le particelle sono vincolate in una regione definita dello spazio, le loro funzioni d'onda si devono annullare sulla superficie e al di fuori dell'area, determinando una quantizzazione delle lunghezze d'onda di De Broglie e dell'energia, dando una serie discreta e numerabile di stati quantomeccanici;

- come visto in appendice 3.2, poiché i nucleoni sono fermioni risultano soggetti al principio di esclusione ed è permesso collocare in ciascuno degli stati in ordine crescente di energia un solo protone e un solo neutrone. Ciò comporta che anche nella condizione di minima energia (allo zero termico) essi non si concentreranno nello stato minimo, ma occuperanno progressivamente tutti i livelli energetici fino a uno massimo, detto *di Fermi*.

Da ciò è possibile assimilare il nucleo nel suo stato fondamentale come un *doppio gas di protoni e neutroni in condizione di massima degenerazione*, distinto dai gas di fermioni identici a bassissime temperature studiati dalla meccanica statistica solo per il numero di componenti (decine invece di 10^{23}), ma sui quali si basa la modellizzazione.

Si cerca così l'equazione d'onda piana di De Broglie di un nucleone. Per maggiore semplicità delle coordinate cartesiane rispetto a quelle sferiche si approssima la buca di potenziale ad un cubo di lato L , dando

$$\psi(\vec{r}, t) = A e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)} = A e^{\frac{i}{\hbar}p_x x} e^{\frac{i}{\hbar}p_y y} e^{\frac{i}{\hbar}p_z z} e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$$

che per rispettare le condizioni imposte deve annullarsi sulle pareti della buca, ma poiché gli esponenziali complessi non lo fanno per alcun valore è necessario considerare solo le loro parti sinusoidali:

$$\psi(\vec{r}, t) = A \sin \frac{p_x x}{\hbar} \sin \frac{p_y y}{\hbar} \sin \frac{p_z z}{\hbar} e^{-\frac{i}{\hbar}Et} = 0 \quad \text{per } x, y, z = 0, L$$

e poiché ciò è sempre soddisfatto per $x, y, z = 0$ l'unico vincolo è dato da $(p_x L)/\hbar = n_x \pi$ (analogo per le altre direzioni), portando ad una *quantizzazione* della quantità di moto, cioè sono ammissibili solo una serie numerabile di suoi valori affinché sia possibile costruire un nucleide:

$$p_x = n_x \frac{\pi \hbar}{L}, \quad p_y = n_y \frac{\pi \hbar}{L}, \quad p_z = n_z \frac{\pi \hbar}{L} \quad \text{con } n_x, n_y, n_z \in \mathbb{N}.$$

Ciò comporta anche una quantizzazione dell'energia, che però anche una volta precisata univocamente lascia comunque un'indeterminazione dovuta ai possibili diversi valori dei numeri quantici n_x, n_y, n_z , dando una famiglia di funzioni di stato possibili:

$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2m} \left(\frac{\pi \hbar}{L} \right)^2 (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2).$$

Sostituendo le quantità di moto quantizzate nell'espressione dello stato e imponendo la condizione di normalizzazione sul volume nucleare si ottiene la *funzione d'onda del nucleone generico nel volume nucleare cubico di lato L* (come media tra protoni e neutroni)

$$\psi(\vec{r}, t) = \sqrt{\frac{8}{L^3}} \sin(n_x \frac{\pi x}{L}) \sin(n_y \frac{\pi y}{L}) \sin(n_z \frac{\pi z}{L}) e^{-\frac{i}{\hbar}Et}.$$

Si cerca il numero di stati quantomeccanici che possiedono una energia (cioè modulo della quantità di moto) minore o uguale al valore di energia dell'onda cumulativa, disponibili per disporci nucleoni: si considera uno spazio tridimensionale delle quantità di moto p_x, p_y, p_z in cui gli stati accessibili al nucleone si collocano nel primo ottante sulle intersezioni di una griglia di passo $\pi \hbar/L$, a cui corrispondono una certa terna di numeri quantici. Dunque tale numero di stati n_s^* sarà il rapporto tra il volume dell'ottante di sfera di raggio p e il volumetto cubico della griglia: tale formula però sovrastima il numero di stati nulli (quelli sui piani degli assi) che andrebbero considerati come unico, perciò è da sottrarre un termine n_0 dato dal rapporto tra i tre quarti dell'area di un cerchio di raggio p e l'area quadrata di uno stato, dando come numero di stati quantici con $0 \leq |p| \leq p$ (posti $V = L^3$ e $S = 6L$ per maggiore generalità)

$$n_s^* = \frac{\frac{1}{8} \frac{4}{3} \pi p^3}{\left(\frac{\pi \hbar}{L}\right)^3} = \frac{1}{6} \frac{L^3}{\pi^2 \hbar^3} p^3, \quad n_0 = \frac{\frac{3}{4} \pi p^2}{\left(\frac{\pi \hbar}{L}\right)^2} = \frac{3}{4} \frac{L^2}{\pi \hbar^2} p^2 \quad \Rightarrow \quad n_s = n_s^* - n_0 = \frac{V}{6\pi^2 \hbar^3} p^3 - \frac{S}{8\pi \hbar^2} p^2.$$

Per principio di esclusione di Pauli, però, ciascuno stato quantistico della funzione d'onda orbitale può alloggiare al massimo due fermioni identici (uno per ciascuno dei due stati di spin del nucleone), dunque il numero di protoni o neutroni identici contenuti nel volume nucleare di impulso p_F è

$$n_F = 2n_s = \frac{V}{3\pi^2 \hbar^3} p_F^3 - \frac{S}{4\pi \hbar^2} p_F^2.$$

Da ciò si può calcolare quindi la quantità di moto dell'energia di Fermi (energia del più alto livello occupato in un sistema di fermioni alla temperatura dello zero assoluto), considerando che il termine di superficie è trascurabile rispetto a quello di volume e sapendo che in nuclei stabili $V = 4/3\pi r_0^3 A$ e $n_F \approx n_p \approx n_n \approx A/2$

$$p_F = \sqrt[3]{3\pi^2 \hbar^3 \frac{n_F}{V}} \approx \sqrt[3]{3\pi^2 \hbar^3 \frac{A/2}{4/3\pi r_0^3 A}} = \sqrt[3]{\frac{9\pi \hbar^3}{8r_0^3}} = \frac{\hbar}{r_0} \sqrt[3]{\frac{9\pi}{8}} \approx 254 \text{ MeV}/c$$

per cui anche nello stato di minore energia si hanno nucleoni con impulso rilevante. Inoltre è da notare che tale impulso massimo allo stato fondamentale, non dipendendo da A , è uguale per ogni nucleo, fatto che verrà spiegato in seguito. È ora possibile calcolare la *profondità della buca di potenziale nucleare*, che risulta approssimativamente pari alla somma dell'energia cinetica di Fermi di un nucleone e l'energia media di separazione dei nucleoni (mediamente 8 MeV) ed è indipendente dal tipo e dimensione del nucleo

$$V_0 \approx E_F + B/A = \frac{p_F^2}{2M_{p,n}} + B/A \approx (34 + 8) \text{ MeV} \approx 41 \text{ MeV}.$$

Poiché l'energia massima dei nucleoni è di poco inferiore alla profondità della buca (di appunto 8 MeV), il nucleo è un insieme di nucleoni debolmente legati.

Per calcolare l'energia di legame secondo il modello a gas di fermioni si calcolano i contributi medi di ogni singolo neutrone e protone, che differiscono per le diverse energie cinetiche medie e perché per i secondi interviene anche la repulsione coulombiana (dipendente dalla disposizione spaziale dei protoni): i lavori medi per estrarre un singolo nucleone sono $b_n = V_0 - \langle K_n \rangle$, $b_p = V_0 - \langle K_p \rangle - \langle V_{\text{coul}} \rangle$. Le energie cinetiche medie per neutroni e protoni sono date da (posto dn numero di nucleoni con impulso tra p e $p + dp$)

$$\langle K \rangle = \int_0^{p_F} \frac{p^2}{2m} dn / \int_0^{p_F} dn$$

ricavabile attraverso calcoli laboriosi, e assumendo una distribuzione uniforme il termine coulombiano risulta

$$\langle V_{\text{coul}} \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{j=1}^Z \sum_{\substack{k=1 \\ j > k}}^Z \frac{e^2}{4\pi \varepsilon_0 r_{j,k}} = \frac{1}{Z} \frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi \varepsilon_0} \frac{Z(Z-1)}{R} = \frac{3}{5} \left(\frac{e^2}{4\pi \varepsilon_0 \hbar c} \right) \hbar c \frac{(Z-1)}{R} = \frac{3}{5} \alpha \hbar c \frac{(Z-1)}{R}.$$

Si ottiene così l'espressione dell'energia di legame nucleare

$$B = Nb_n + Zb_p = AV_0 + N \langle K_n \rangle + Z(\langle K_p \rangle - \langle V_{\text{coul}} \rangle) \quad \text{da cui}$$

$$B \approx \left[V_0 - \frac{3\hbar^2}{10mr_0^2} \left(\frac{9\pi}{8} \right)^{2/3} \right] A - \left[\frac{3\hbar^2}{80mr_0^2} \left(\frac{3\pi^2}{2\sqrt{2}} \right)^{2/3} \right] A^{2/3} - \left[\frac{3\alpha \hbar c}{5r_0} \right] \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} + \left[\frac{\hbar^2}{6mr_0^2} \left(\frac{9\pi}{8} \right)^{2/3} \right] \frac{(A-2Z)^2}{A} - \left[\frac{\hbar^2}{8mr_0^2} \left(\frac{3\pi^2}{2\sqrt{2}} \right)^{2/3} \right] \frac{(A-2Z)^2}{A^{4/3}}.$$

Il modello risultante è in buon accordo con i dati sperimentali e riesce a ricondurre correttamente i termini a meccanismi e grandezze quantomeccaniche. In particolare il termine di superficie (secondo) è dovuto come visto sopra al sovraconteggio degli stati nulli, e il termine di asimmetria (quarto) è dovuto al fenomeno di **Pauli blocking** del principio di esclusione che spiega la necessità di minimizzare $(A-2Z)^2$: i nuclei non sono composti da soli neutroni poiché questi decadono spontaneamente in protoni (più elettroni e neutrini, che non sono però rilevanti per il nucleo) a bassa energia che vanno a riempire gli stati protonici fino al livello di Fermi, che rappresenta l'equilibrio $N \approx Z$. Raggiunto questo limite i neutroni non decadono più, in quanto l'energia necessaria per aggiungere un protone è maggiore di quella dei neutroni generatori, lasciando l'equilibrio. D'altra parte, considerando che $m_n > m_p$, i protoni non decadono spontaneamente per conservazione dell'energia. In significativo disaccordo è il termine di accoppiamento (quinto), dovuto al fenomeno di spin che non è stato tenuto in conto.

Il successo di tale modello dimostra come la maggior parte delle proprietà dei nuclei in prossimità dello stato fondamentale sono legate alle proprietà collettive dei nucleoni (dovute al principio di esclusione) in condizioni di forte degenerazione piuttosto che alle specifiche proprietà della forza nucleare, la quale viene riassunta in una semplice forza di contenimento dei nucleoni.

4.3 Modello a shell

Per migliorare il modello a gas di fermioni è necessario trovare una descrizione non semplicistica delle forze nucleari. Come visto, l'idea di una forza posizionale descrivibile come potenziale funziona, ma non può essere concettualizzata in maniera stocastica classica con urti casuali di particelle, che non dipenderebbero dalla posizione. Infatti, poiché i livelli energetici sono quantizzati e, in caso di degenerazione, occupati completamente fino al livello di Fermi, gli urti tra nucleoni nel gas fermionico potrebbero avvenire solo se la quantità di moto trasmessa fosse sufficiente per superare il livello massimo (fenomeno di *Pauli blocking*), cosa statisticamente poco probabile. Dunque il moto dei nucleoni è sostanzialmente imperturbato e segue "traiettorie" regolari dipendenti dalla posizione, permettendo una descrizione della forza nucleare attraverso un potenziale.

Per comprendere la forma di tale potenziale bisogna studiare il numero di stati quantomeccanici di ogni possibile livello energetico (ovvero il grado di degenerazione, il numero di nucleoni permessi per livello) e la loro spaziatura. Per farlo si studia l'energia di legame minima di un nucleo allo stato fondamentale: con Z protoni e N neutroni l'energia per strappare un nucleone è pari alla differenza tra la profondità energetica della buca di potenziale e l'energia del livello di Fermi $V_0 - E_l$, mentre per isotopi o isotoni (in cui si ha aggiunto un neutrone o un protone) si hanno due casi in base se il livello di Fermi era incompleto, dando la stessa energia di legame poiché il nucleone aggiunto si è posto nello stesso livello, o già completo, portando ad un calo dell'energia di legame a $V_0 - E_{l+1}$ poiché il nuovo nucleone si è posto in un livello successivo. Dunque le energie di separazione per i nucleoni subiscono bruschi cali in corrispondenza del completamento dei rispettivi livelli energetici nucleari: sperimentalmente ciò si ha per la serie di **numeri magici** di nucleoni identici 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126.

Per verificare se il modello di **buca di potenziale infinita** assunto col modello a gas di fermioni per cui $V = \{0 \text{ per } r < R \quad \vee \quad +\infty \text{ per } r \geq R\}$ possa essere adeguato, si risolve l'equazione di Schrödinger (cercando autofunzioni e autovalori dell'operatore hamiltoniano costruito con esso) che per generalità è considerata in coordinate sferiche polari: poiché V non dipende dalle variabili angolari, la parte spaziale della funzione d'onda può essere scissa

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi(r, \theta, \varphi) e^{-\frac{i}{\hbar} E t} = f(r) g(\theta, \varphi) e^{-\frac{i}{\hbar} E t} = J_l(kr) Y_{l,n}(\theta, \varphi) e^{-\frac{i}{\hbar} E t}$$

dove J_l è la funzione di Bessel di ordine numero quantico del momento angolare l e $Y_{l,n}$ sono le armoniche sferiche, viste in appendice 3.1, dipendenti da l e dal numero quantico principale. Affinché la funzione sia nulla in $r = R$ per condizione al contorno, deve annullarsi la funzione di Bessel, cosa che accade per certe serie di zeri, portando ad una quantizzazione del modulo del vettore d'onda e dunque dell'energia:

$$J_l(kR) = J_l(z_{l,n}) = 0 \quad \rightarrow \quad k = \frac{z_{l,n}}{R} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2mR^2} z_{l,n}^2.$$

Ad ogni livello di energia (cioè coppia di numeri quantici l, n) sono dunque associate $(2l + 1)$ funzioni d'onda per le corrispondenti armoniche Y , dando che ogni livello l, n ha degenerazione di ordine $(2l + 1)$. Per descrivere i livelli si utilizza convenzionalmente la *notazione atomica* data dalla coppia n, l con

$$\begin{array}{ccccccc} l = & 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & \dots \\ & s & p & d & f & g & \dots \end{array}$$

Risolvendo per la serie crescente di zeri di Bessel si ottengono i livelli energetici dati dalla buca di potenziale sferica infinita, per poi raccogliere quelli troppo vicini e non risolvibili sperimentalmente, e si hanno i relativi numeri magici associati al modello, che però non corrispondono a quelli empirici.

Si modifica così la forma del potenziale, assumendo che abbia profondità finita con una risalita ripida ma non verticale in $r = R$, ottenendo il **potenziale di Saxon-Woods** con profondità V_0

$$V_{\text{SW}}(r) = \frac{-V_0}{1 + \exp\left\{\frac{r-R}{d}\right\}}$$

che però, pur riarrangiando i livelli, non restituisce comunque i numeri magici empirici.

4.3.1 Interazione spin-orbita

La soluzione sta nell'introdurre nel potenziale nucleare medio un termine di *spin-orbita*, per considerare il fenomeno di momento angolare intrinseco la cui assenza aveva inficiato i modelli precedenti. Si modella tale termine sul caso dell'elettrone legato al nucleo: se la carica è *puntiforme* e si muove in modo da poter trascurare l'irraggiamento di campi elettromagnetici possiede solo una energia potenziale elettrostatica coulombiana

$$\delta L = -dU_{\text{coul}} = \vec{F} \cdot d\vec{s} = (q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s} = -q\vec{\nabla}V \cdot d\vec{s} = -d(qV) \quad \rightarrow \quad U_{\text{coul}} = qV,$$

mentre se è *non puntiforme* si aggiungono gradi di libertà dipendenti dal momento di dipolo magnetico (in quanto le particelle fondamentali non hanno dipolo elettrico). Per semplicità si considera dunque una distribuzione di correnti i su di una spira rettangolare di lati a , b immersa in campo elettrico e magnetico uniformi: fissato un asse di rotazione a metà dei lati lunghi b , su di questi le forze impresse sono comprese dalla rigidità della spira mentre quelle sui lati corti a determinano una coppia $d\vec{f}$ che tende a ruotare la spira attorno all'asse. Considerando θ l'angolo tra \vec{B} e la normale \hat{n} al piano della spira e dunque $\pi/2 - \theta$ l'angolo tra la forza su a e lo spostamento $d\vec{s}$ che produce, si calcola il lavoro

$$\delta L = 2d\vec{f} \cdot d\vec{s} = 2df ds \cos(\pi/2 - \theta) = 2(idlB) \left(-\frac{b}{2}d\theta\right) \sin\theta = -idl bB \sin\theta d\theta$$

che integrato sui lati corti dà la dipendenza dal momento di dipolo magnetico $\vec{\mu}$ e l'espressione della porzione dell'energia potenziale a questo associata

$$\delta L = -ibB \sin\theta d\theta \int_0^a dl = iabB(-\sin\theta d\theta) = d(iabB \cos\theta) = d(\vec{\mu} \cdot \vec{B}) = -dU_{\text{em}} \rightarrow U_{\text{em}} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}.$$

Per un elettrone puntiforme, il momento di dipolo magnetico quantomeccanico effettivo (che esiste perché è una particella carica avente spin) è simile a quello ricavabile classicamente considerando una distribuzione di carica in rotazione rispetto ad un asse baricentrico, a meno di un fattore moltiplicativo g , detto *rapporto giromagnetico*: definendo \vec{S} il momento angolare del sistema e \hat{S} l'operatore quantomeccanico associato

$$\hat{\mu} = -g \frac{e\hbar}{2m} \frac{\hat{S}}{\hbar} \quad \text{con } g = 2 \text{ per particelle puntiformi,}$$

che, poiché solo S^2 e S possono assumere autovalori definiti (si veda appendice 3.1), può assumere solo due possibili valori della componente definita, dato che l'elettrone ha spin $s = 1/2$

$$\begin{cases} |\vec{\mu}| = -g(e\hbar/2m)\sqrt{s(s+1)} & s = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots \\ \mu_z = -g(e\hbar/2m)s_z & s_z \in [-s, s] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\vec{\mu}| = -g(e\hbar/2m)\sqrt{3/4} \\ \mu_z = -g(e\hbar/2m)(\pm 1/2) \end{cases}.$$

Il campo magnetico generato dal nucleo a cui è soggetto l'elettrone atomico è ricavabile classicamente, considerando che per un sistema di riferimento solidale all'elettrone è il nucleo ad orbitare con velocità $-\vec{v}_{\text{elettrone}}$:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_{\text{nucleo}}}{r^2} (\vec{v}_{\text{nucleo}} \times \hat{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_n}{m r^3} (\vec{r} \times \vec{v}_e) = -\frac{\mu_0 \varepsilon_0}{m} \frac{q_n}{4\pi \varepsilon_0 r^3} \vec{L} = \frac{1}{mc^2} \frac{|E|}{r} \vec{L} = \frac{1}{mrc^2} \left| \frac{\partial U}{\partial r} \right| \vec{L}.$$

Dunque il *potenziale elettromagnetico spin-orbita* dell'elettrone risulta

$$U_{\text{em}} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = \frac{ge\hbar}{2m^2 r c^2} \left| \frac{\partial U}{\partial r} \right| \vec{L} \cdot \vec{S}$$

che va ad aggiungersi al potenziale elettrostatico trovato sopra, dando $U_{\text{tot}} = qV - \vec{\mu} \cdot \vec{B}$.

Si ha dunque che tale prodotto scalare tra il *momento angolare orbitale* L e il *momento angolare intrinseco* S porta ad una separazione dei livelli energetici del potenziale coulombiano in coppie di livelli dette **struttura iperfine**.

Hans Jensen e Maria Göppert Mayer, su suggerimento di Enrico Fermi, ipotizzarono correttamente che anche le interazioni forti fossero caratterizzate da un'interazione spin-orbita analoga a quella elettromagnetica degli elettroni, portando ad aggiungere al potenziale di Saxon-Woods un termine di spin-orbita: passando agli operatori quantomeccanici, il **potenziale medio nucleare della interazione forte** risulta

$$\hat{V}_{\text{forte}} = V_{\text{SW}}(r) + V_{\text{Is}}(r) \hat{L} \cdot \hat{S}$$

per cui si devono cercare i valori di aspettazione

$$\langle \hat{V}_{\text{forte}} \rangle = \int_V \psi^* [V_{\text{SW}}(r) + V_{\text{Is}}(r) \hat{L} \cdot \hat{S}] \psi dV = \int_V \psi^* V_{\text{SW}}(r) \psi dV + \int_V \psi^* V_{\text{Is}}(r) \hat{L} \cdot \hat{S} \psi dV$$

studiando il secondo integrale. Si introduce dunque l'operatore *momento angolare totale del nucleone* $\hat{J} = \hat{L} + \hat{S}$ e, assumendo che lo stato quantomeccanico del nucleone abbia ogni momento definito, si ricava

$$\hat{J}^2 = \hat{L}^2 + \hat{S}^2 + 2\hat{L} \cdot \hat{S} \rightarrow (\hat{L} \cdot \hat{S}) \psi = 1/2 (\hat{J}^2 - \hat{L}^2 - \hat{S}^2) \psi = \hbar/2 [j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)] \psi$$

che sostituito nell'integrale risulta un fattore moltiplicativo all'integrale di aspettazione dell'operatore potenziale di spin-orbita, e dato che tale integrale e quello dell'operatore potenziale di Saxon-Woods assumeranno un valore numerico definito si può scrivere

$$\langle \hat{V}_{\text{forte}} \rangle = \alpha + \beta \frac{\hbar}{2} [j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)].$$

Ora, sapendo le regole di somma dei momenti angolari si ricavano gli autovalori dei momenti angolari di spin, orbitali e totali nel caso dei nucleoni fermionici (si veda appendice 3.2)

$$s = 1/2, \quad l = 1, 2, \dots \quad j = |j - s|, \dots, |j + s| = l - \frac{1}{2}, l + \frac{1}{2}$$

che sostituiti nel valore di aspettazione del potenziale nucleare danno

$$\langle \hat{V}_{\text{forte}} \rangle = \alpha + \beta \frac{\hbar}{2} \begin{cases} l/2 & j = l + 1/2 \\ -(l+1)/2 & j = l - 1/2 \end{cases} \quad l = 1, 2, \dots$$

portando ad una separazione dei livelli energetici di Saxon-Woods in coppie di sottolivelli (*shell*) spazati in misura crescente secondo $\langle \Delta \hat{V}_{\text{forte}} \rangle = \beta \hbar (l + 1/2)$, (tranne che per il livello $l = 0$ (e per i protoni, a causa degli effetti di repulsione coulombiana, vi è maggiore spaziamento), che riescono a restituire i numeri magici empirici).

Infatti si riesce a spiegare il termine di pairing: neutroni e protoni vanno ad occupare i rispettivi livelli energetici dal minore a quello di Fermi, che al contrario degli altri può anche non essere completato, dividendosi in *nucleoni di core* collocati nei livelli completi e che non influiscono sulle proprietà del nucleo, e *nucleoni di valenza*, tendenti ad appaiarsi, collocati nel livello maggiore non completo e che contribuiscono alle proprietà complessive solo se spaiati. Sapendo che se una shell di determinato momento angolare orbitale l è completa saranno completi anche tutti gli stati che concorrono con uguale peso a formare lo stato quantistico complessivo, e che l'unico stato quantico che, fissato l , dà uguale peso a tutti i diversi valori di m è quello di momento angolare nullo, si ricava che i nucleoni di una shell completa devono avere momento angolare complessivo nullo e dunque essere di numero pari. Da ciò emerge dunque che tutti i nuclei con numero pari di neutroni e protoni (*pari-pari*) non possiedono spin e risultano molto più stabili degli altri.

5 Fisica delle particelle elementari

La fisica delle particelle elementari è una branca della *fisica fondamentale* che si concentra sullo studio delle componenti ultime della materia e delle loro interazioni, considerando un insieme di particelle ben più esteso di quello soltanto atomico, attraverso l'insieme di teorie del **Modello Standard** che completa attraverso la teoria dei campi quantizzati (*quantum field theory*, QFT) le lacune della meccanica quantistica in ambito relativistico. In particolare si giunge ad un modello composito da varie teorie, costituito da 6 **leptoni** (da *leptos*, leggero, non soggetto all'interazione forte) governati dalla teoria delle **interazioni elettrodeboli** (*electro-weak theory*, EWT, che unifica interazioni elettromagnetiche con quelle deboli di decadimento) attraverso i 2 bosoni dell'interazione debole e il fotone per l'elettromagnetica, e 6 **quark** governati dalla teoria della **cromodinamica quantistica** (*quantum chromodynamics*, QCD, che modella le interazioni forti) attraverso il **gluone** e che si uniscono in **adroni** (da *adros*, pesanti, soggetti all'interazione forte).

5.1 Campi quantizzati e antiparticelle

La QFT, per trattare il più ampio spettro di particelle con velocità prossime a c , riesce ad incorporare oltre alla meccanica quantistica di Schrödinger anche la teoria della relatività ristretta e la descrizione delle interazioni di particelle e delle trasformazioni a seguito di queste attraverso il concetto di campo, introdotto da Maxwell nell'elettromagnetismo, quantizzando i *modi normali* di vibrazione. In tal modo si supera il dualismo onda/particella della fisica classica che già era stato intaccato dalla meccanica quantistica: ogni ente fisico, particella o forza, risulta dunque un'espressione di uno o più specifici campi, ora assunti a fondamenti della realtà, come quanto (unità fondamentale) di tale campo, spiegando i fenomeni ibridi di corpuscolo (i quanti hanno energia e quantità di moto definite) e onda (sono appartenenti ad un campo eccitabile attraverso vibrazioni). Si riesce anche a spiegare il problema delle identità, per cui ogni particella già esistente o prodotta risulta identica a tutte le altre, considerando che si tratta sempre di quanti di un certo campo che permea indistintamente tutto l'universo.

La necessità di una nuova interpretazione della realtà rispetto alla meccanica quantistica classica è dovuta al non mantenimento delle ipotesi di questa nel considerare casi relativistici. Infatti, considerando un corpuscolo microscopico di spin nullo e massa m descritto dalla funzione d'onda ψ e soddisfacente l'equazione di Schrödinger, la grandezza $\psi^* \psi dV$ rappresenta fisicamente la probabilità di localizzarlo all'interno del volume dV solo se l'equazione di Schrödinger ammette la conservazione di una grandezza definita positiva. Considerando una particella libera (cioè non si ha dipendenza da un potenziale), dall'equazione di Schrödinger e la sua complessa coniugata si ottiene

$$\begin{cases} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi \\ -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi^* = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi^* \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i\hbar \psi^* \frac{\partial}{\partial t} \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \psi^* \nabla^2 \psi \\ -i\hbar \psi \frac{\partial}{\partial t} \psi^* = -\frac{\hbar^2}{2m} \psi \nabla^2 \psi^* \end{cases} \quad \text{e sottraendo membro a membro}$$

$$i\hbar \left(\psi^* \frac{\partial}{\partial t} \psi + \psi \frac{\partial}{\partial t} \psi^* \right) = -\frac{\hbar^2}{2m} (\psi^* \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \psi^*) \rightarrow -\frac{\partial}{\partial t} [\psi^* \psi] = \vec{\nabla} \left[-\frac{i\hbar}{2m} (\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*) \right]$$

da cui sostituendo $\rho = \psi^* \psi$ densità locale e $\vec{j} = -\frac{i\hbar}{2m} (\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*)$ densità di corrente si ottiene

$$-\frac{\partial}{\partial t} \rho = \vec{\nabla} \cdot \vec{j}$$

che esprime la conservazione di una grandezza fisica ρ di densità di probabilità di osservazione che risulta definita positiva. Contrariamente, partendo dall'equazione di Klein-Gordon (vedi capitolo 2.2) e operando come prima, non si riesce ad ottenere una grandezza definita positiva conservata:

$$\begin{cases} \psi^* \nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \psi^* \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \psi^* \psi \\ \psi \nabla^2 \psi^* - \frac{1}{c^2} \psi \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi^* = \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \psi \psi^* \end{cases} \quad \text{e sottraendo membro a membro e raccogliendo}$$

$$\vec{\nabla} (\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*) = -\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{c^2} \left(\psi^* \frac{\partial}{\partial t} \psi - \psi \frac{\partial}{\partial t} \psi^* \right) \right] \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\frac{\partial}{\partial t} \rho$$

e si ottengono le espressioni delle densità locali e di corrente conservate, a meno di un fattore moltiplicativo uguale per entrambe. Si studia il segno di ρ , considerando la componente di Fourier progressiva dell'onda $\psi_{\vec{k},\omega}(\vec{r}, t) = a(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$ complessa:

$$\rho = \frac{1}{c^2} \left(\psi^* \frac{\partial}{\partial t} \psi - \psi \frac{\partial}{\partial t} \psi^* \right) = \frac{1}{c^2} [\psi^* (i\omega) \psi - \psi (i\omega) \psi^*] = \frac{2i\omega}{c^2} \psi \psi^*$$

che dipende da ω , ricavabile dall'equazione di Klein-Gordon, che può però essere sia positiva che negativa

$$(i\vec{k})(i\vec{k})\psi - \frac{1}{c^2} (i\omega)(i\omega)\psi = \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \psi \rightarrow -k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \rightarrow \omega = \pm \sqrt{k^2 c^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2}} \quad (2)$$

portando a una ρ non definita positiva. Il valore negativo non può essere rigettato o trascurato dato che la componente d'onda è complessa, implicando che dunque ρ non sia una densità di probabilità e ψ una funzione d'onda in senso quantomeccanico.

Si rese dunque necessario ridefinire il significato fisico di ψ . Si può osservare che la relazione di dispersione (2) è soddisfatta dalle seguenti combinazioni di segnatura

$$(+\vec{k}, +\omega), \quad (+\vec{k}, -\omega), \quad (-\vec{k}, +\omega), \quad (-\vec{k}, -\omega)$$

che, data la linearità dell'equazione di Klein-Gordon, portano ad avere la funzione d'onda nel modo (\vec{k}, ω) espressa da 4 parti distinte

$$\begin{aligned} \psi_{\vec{k},\omega}(\vec{r}, t) &= a(+\vec{k}, +\omega) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + a(+\vec{k}, -\omega) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} + \omega t)} + a(-\vec{k}, +\omega) e^{i(-\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + a(-\vec{k}, -\omega) e^{i(-\vec{k} \cdot \vec{r} + \omega t)} = \\ &= \underbrace{[a(+\vec{k}, +\omega) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + a(-\vec{k}, -\omega) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}]}_{\text{progressive}} + \underbrace{[a(+\vec{k}, -\omega) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} + \omega t)} + a(-\vec{k}, +\omega) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} + \omega t)}]}_{\text{regressive}} \end{aligned}$$

di cui per semplicità si considera solo la componente progressiva: si deduce che ω e \vec{k} non descrivono proprietà delle particelle materiali, poiché se così fosse il termine dipendente da $(-\vec{k}, -\omega)$ porterebbe ad un'energia negativa $E = -\hbar\omega$ impossibile.

Il cambio di prospettiva si compì grazie all'ipotesi di Fermi che la formalizzazione dell'elettromagnetismo attraverso i campi quantizzati potesse essere estesa anche alla materia: per ottenere la corretta quantizzazione

dell'energia si dovevano promuovere le ampiezze delle componenti da semplici numeri complessi a operatori agenti su di un nuovo vettore di stato del campo e con l'effetto di aggiungere o distruggere un quanto nello stato, implicando che la funzione $\psi(\vec{r}, t)$ non descrivesse più la particella materiale quanto un campo dotato di massa ad essa associato (più precisamente un vettore descrivente gli stati dei rispettivi modi normali del campo, determinante uno *spazio di Fock* degli stati) che veniva scomposto in modi normali (\vec{k}, ω) caratterizzati dall'ampiezza operatoriale. Determinando poi la quantizzazione dell'energia e della quantità di moto di tali modi normali, si giunse a identificare i quanti dei campi materiali con le particelle materiali, che così perdevano il loro carattere di enti persistenti e indistruttibili retrocedendo a mere manifestazioni della variazione di energia del campo che invece diventava l'ente fisico fondamentale.

Prese la componente progressiva dell'onda nel modo (\vec{k}, ω) e la sua complessa coniugata (indicata con \dagger) che ora sono degli operatori di stato del campo,

$$\begin{cases} \hat{\psi}_{\text{prog}} = \hat{a}(\vec{k}, +\omega) e^{+i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + \hat{a}(-\vec{k}, -\omega) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \\ \hat{\psi}_{\text{prog}}^\dagger = \hat{a}^\dagger(\vec{k}, +\omega) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + \hat{a}^\dagger(-\vec{k}, -\omega) e^{+i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \end{cases}$$

si ha che le pulsazioni positive e negative descrivono due diversi modi normali dello stesso campo materiale, cioè due diversi gradi di libertà di uguale massa e spin ciascuno dei quali produrrà quanti di energia $E = \hbar\omega$ sempre positiva. Il significato fisico di tali modi con pulsazioni opposte si deduce in analogia con quanto trovato nel campo elettromagnetico: se gli operatori $\hat{a}(\vec{k}, +\omega)$ e $\hat{a}^\dagger(\vec{k}, +\omega)$ descrivono rispettivamente la *distruzione* e la *creazione* di una particella di vettore d'onda $+\vec{k}$ e pulsazione $+\omega$, allora gli operatori $\hat{a}(-\vec{k}, -\omega)$ e $\hat{a}^\dagger(-\vec{k}, -\omega)$ devono descrivere rispettivamente la *distruzione* e la *creazione* di una particella di vettore d'onda $-\vec{k}$ e pulsazione $-\omega$, cioè di un corpo con proprietà opposte a quelle della particella già conosciuta descritta da \vec{k} e ω positivi, detto **antiparticella**. Si riformula l'espressione precedente ponendo

$$\hat{a}(-\vec{k}, -\omega) = \hat{b}^\dagger(\vec{k}, +\omega), \quad \hat{a}^\dagger(-\vec{k}, -\omega) = \hat{b}(\vec{k}, +\omega)$$

reinterpretando gli operatori come rispettivamente di *creazione* e *distruzione* dell'antiparticella associata a quella di modo $(+\vec{k}, +\omega)$, indicandolo con b , ottenendo

$$\begin{aligned} \hat{\psi} &= \hat{a}(\vec{k}, +\omega) e^{+i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + \hat{b}^\dagger(\vec{k}, +\omega) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} && \text{distruzione di particella, creazione di antiparticella,} \\ \hat{\psi}^\dagger &= \hat{a}^\dagger(\vec{k}, +\omega) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + \hat{b}(\vec{k}, +\omega) e^{+i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} && \text{creazione di particella, distruzione di antiparticella.} \end{aligned}$$

Una conseguenza rilevante è che se $\hat{\psi} = \hat{\psi}^\dagger \Rightarrow \hat{a} = \hat{b}, \quad \hat{a}^\dagger = \hat{b}^\dagger$ cioè gli operatori si dicono **autoaggiunti**, la particella risulta uguale all'antiparticella e si dice che il campo è **realmente neutro**, cioè non vi sono differenziazioni tra i quanti di modi diversi (es. fotoni del campo elettromagnetico), altrimenti il campo è detto **realmente carico** e particella e antiparticella sono distinte.

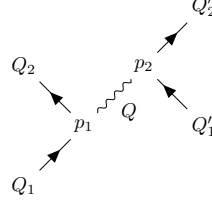
5.1.1 Interazioni nei campi quantizzati

La nozione fondamentale che introduce la QFT in analogia alla teoria dei campi classica è la pre-esistenza del campo alle particelle, e che l'accoppiamento di queste ad uno specifico campo significa la soggezione ad interazioni, mediate dal campo stesso. La differenza sostanziale tra le due teorie sta però nel fatto che dove in quella classica l'interazione era compiuta attraverso uno scambio *continuo* di energia (sia questo di emissione che assorbimento) tra campo e particella mediata in senso lato dal campo stesso, nella quantizzata è necessario considerare le interazione come *discrete*, in cui vengono scambiate frazioni di energia piccole ma finite (dette **quanti** del campo di interazione) in punti e istanti precisi, in maniera probabilistica.

Ora, dato che nella QTF non solo le forze ma anche le particelle materiali sono ricondotte a campi, l'interazione tra campi quantistici è descritta come una sequenza di processi di emissione (creazione) e assorbimento (distruzione) di specifici quanti, rappresentabile attraverso particolari diagrammi bidimensionali, i cui assi sono sottointesi e le ascisse rappresentano tutte le dimensioni spaziali mentre le ordinate quella temporale (procedere verso l'altro significa avanzare nel tempo): per esempio si consideri

1. un quanto di un campo fermionico (cioè una particella) in moto con *quadrimpulso* Q_1 ,
2. in un certo punto p_1 dello spazio e del tempo questo viene distrutto e immediatamente è prodotto una particella analoga nello stato di quadrimpulso $Q_2 = Q_1 - Q$ in moto scartato dato il calo di energia,
3. contemporaneamente sempre in p_1 è prodotto un quanto del campo di interazione (bosone) nello stato di quadrimpulso $Q = Q_1 - Q_2$ che si muove nello spazio per un certo tempo,

4. un differente quanto fermionico analogo di quadrimpulso Q'_1 si trova nella traiettoria del quanto bosonico emesso, e nel punto p_2 dello spazio e del tempo lo assorbe,
5. i quanti fermionico di stato Q'_1 e bosonico di stato Q così si distruggono e nello stesso punto si produce una paeticella analoga di quadrimpulso $Q'_2 = Q'_1 + Q$, che scarta dato l'aumento di energia.



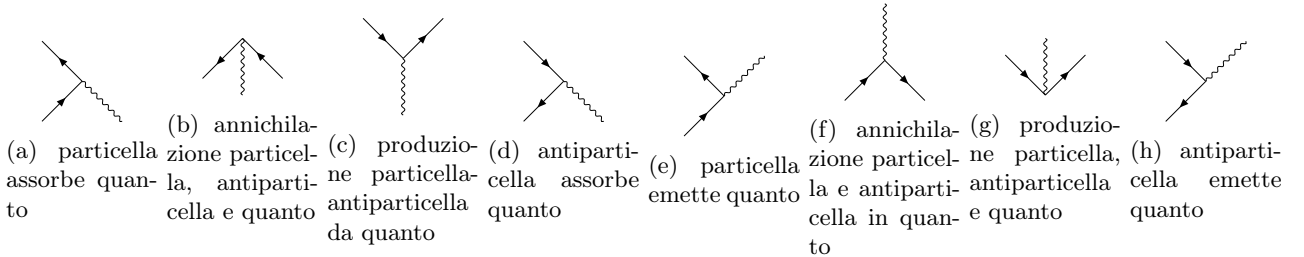
Tale rappresentazione è però incompleta, in quanto non tiene conto del fenomeno relativistico sopra evidenziato della copresenza del modo normale opposto alla particella considerata: l'emissione di un quanto descritto da vettore d'onda e pulsazione (\vec{k}'', ω'') da parte di una particella (\vec{k}, ω) che a seguito di ciò diventa la particella (\vec{k}', ω') , rappresentabile classicamente come (richimando gli operatori sopra visti, posto $\hat{\alpha}$ quello del quanto d'interazione)

$$\hat{\alpha}^\dagger(\vec{k}', \omega') \hat{\alpha}^\dagger(\vec{k}'', \omega'') \hat{\alpha}(\vec{k}, \omega),$$

deve essere in realtà descritto in maniera da non violare l'invarianza relativistica, considerando gli stati accoppiati: ciò porta ad avere $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ possibili combinazioni di avvenimenti

$$\begin{aligned} \hat{\psi}^\dagger \hat{\phi}^\dagger \hat{\psi} &= [\hat{a}^\dagger(\vec{k}', \omega') + \hat{b}(\vec{k}', \omega')] [\hat{\alpha}(\vec{k}'', \omega'') + \hat{\alpha}^\dagger(\vec{k}'', \omega'')] [\hat{a}(\vec{k}, \omega) + \hat{b}^\dagger(\vec{k}, \omega)] = (\hat{a}^\dagger + \hat{b})(\hat{\alpha} + \hat{\alpha}^\dagger)(\hat{a} + \hat{b}^\dagger) = \\ &= (\hat{a}^\dagger \hat{\alpha} \hat{a}) + (\hat{b} \hat{\alpha} \hat{a}) + (\hat{a}^\dagger \hat{\alpha} \hat{b}^\dagger) + (\hat{b} \hat{\alpha} \hat{b}^\dagger) + (\hat{a}^\dagger \hat{\alpha}^\dagger \hat{a}) + (\hat{b} \hat{\alpha}^\dagger \hat{a}) + (\hat{a}^\dagger \hat{\alpha}^\dagger \hat{b}^\dagger) + (\hat{b} \hat{\alpha}^\dagger \hat{b}^\dagger). \end{aligned}$$

Utilizzando la convenzione di rappresentare l'antiparticella orientata oppositamente al senso di tempo, al contrario rispetto ad una particella, si ottengono i diagrammi degli avvenimenti relativistici secondo la QFT.



È utile notare che è possibile ottenere l'insieme dei diagrammi partendo da uno qualsiasi di essi e adottando la **regola di scambio tra particelle iniziali e finali**, di valenza generale per la struttura degli operatori di campo, per cui si può trasformare una particella o quanto d'interazione iniziale (finale) in un'antiparticella o anti-quanto d'interazione finale (iniziale), e viceversa.

5.1.2 Particelle virtuali

Presi due campi generici X, Y assunti entrambi massivi, considerando un'emissione da parte di una particella (massa m ed energia ε_1) del campo X di un quanto (massa M ed energia ε) del campo Y e di una particella analoga (massa m ma energia ε_2) del campo X si ha che per conservazione dell'energia e della quantità di moto, e per equazione dell'energia relativistica deve risultare

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \varepsilon_2 + \varepsilon \\ \vec{p}_1 = \vec{p}_2 + \vec{p} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \varepsilon_1^2 = p_1^2 c^2 + m^2 c^4 \\ \varepsilon_2^2 = p_2^2 c^2 + m^2 c^4 \\ \varepsilon^2 = p^2 c^2 + M^2 c^4 \end{cases}$$

ma il secondo sistema non è risolvibile. Si deve dunque cedere un'equazione dell'energia e si sceglie quella di ε , portando a non avere una regolarità con $M = M'$, che si calcola:

$$\begin{aligned} M'^2 c^2 &= \varepsilon^2 - p^2 c^2 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 - (\vec{p}_1 - \vec{p}_2)^2 c^2 = (\varepsilon_1^2 - p_1^2 c^2) + (\varepsilon_2^2 - p_2^2 c^2) - 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 + 2\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 c^2 = \\ &= m^2 c^4 + m^2 c^4 - 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 + 2\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 c^2 = 2m^2 c^4 - 2(\varepsilon_1 \varepsilon_2 - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 c^2), \end{aligned}$$

bisogna porre un sistema di riferimento e, essendo grandezze *invarianti di Lorentz*, la scelta è arbitraria e si considera quello solidale con la particella originaria ($\vec{p}_1 = 0 \rightarrow \vec{p}_2 = -\vec{p}, \quad \varepsilon_1^2 = m^2 c^4$)

$$M'^2 c^2 = 2m^2 c^4 - 2(\varepsilon_2 \sqrt{m^2 c^4}) = 2m^2 c^4 - 2(\underbrace{mc^2 \sqrt{p_2^2 c^2 + m^2 c^4}}_{> mc^2}) < 0.$$

Emerge dunque che M' non è costante, dato che dipende dal prodotto scalare tra quantità di moto (e cioè dall'angolo di scarto prima e dopo l'emissione), e che è un valore immaginario dato $M'^2 < 0$.

Per spiegare l'assurdità di una massa immaginaria si riprendono le **relazioni di indeterminazione** (si veda capitolo 3) che devono ora essere intese come "misure" fatte sul campo: la variazione di energia qui considerata è la fluttuazione dell'energia intrinseca del campo che può portare a due casi limite

$$\Delta E \Delta t \approx h, \quad \Delta p \Delta x \approx h \Rightarrow \begin{cases} \Delta t \rightarrow \infty \Rightarrow \Delta E \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta E \rightarrow \infty \end{cases}, \quad \begin{cases} \Delta x \rightarrow \infty \Rightarrow \Delta p \rightarrow 0 \\ \Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta p \rightarrow \infty \end{cases}$$

cioè in piccoli tempi e spazi vi sono oscillazioni significative di energia e quantità di moto, dunque comparsa di particelle con massa e velocità dal "nulla" (cioè il campo), che su lunghi periodi e a grandi scale sono trascurabili. Tornando all'espressione $M'^2 = \varepsilon^2/c^4 - p^2/c^2$, si cerca di calcolarla considerando tali fluttuazioni:

$$\begin{cases} \frac{\partial M'^2}{\partial \varepsilon} = 2\varepsilon/c^4 \\ \frac{\partial M'^2}{\partial p} = -2p/c^2 \end{cases} \Rightarrow [\Delta(M'^2)]^2 = \left(\frac{2\varepsilon}{c^4} \Delta\varepsilon\right)^2 + \left(\frac{2p}{c^2} \Delta p\right)^2 \approx (2M' \Delta M')^2$$

e paragonando gli ordini di grandezza (?)

$$\begin{cases} 2M' \Delta M' \approx \frac{2\varepsilon}{c^4} \Delta\varepsilon \\ 2M' \Delta M' \approx \frac{2p}{c^2} \Delta p \end{cases}, \quad \begin{cases} \Delta M'^2 \approx \Delta\varepsilon/c^4 \\ \Delta M'^2 \approx \Delta p/c^2 \end{cases}, \quad \begin{cases} \Delta M' \approx \Delta\varepsilon/c^2 \geq M \\ \Delta M' \approx \Delta p/c \geq M \end{cases}, \quad \begin{cases} Mc^2 \Delta t \leq \Delta\varepsilon \Delta t \approx h \\ Mc \Delta x \leq \Delta p \Delta x \approx h \end{cases}$$

$$\boxed{\Delta t_C \leq \frac{h}{Mc^2}, \quad \Delta x_C \leq \frac{h}{Mc}}$$

si ottengono le **disuguaglianze di Compton**, che indicano i limiti di tempo e spazio entro i quali è possibile osservare le particelle virtuali. Ciò comporta che se $M = 0$ si hanno $\Delta t \approx \Delta x \leq \infty$, cioè non vi sono limiti all'osservazione dei quanti di interazione e tali particelle non devono essere necessariamente virtuali, dunque l'interazione *elettromagnetica* è a lungo raggio poiché i fotoni sono non massivi mentre quella *forte* è mediata da quanti con una certa massa che possono esistere solo in una scala temporale e spaziale ridotta:

- per la forza forte si è stimato un raggio di interazione $r_{\text{int}} = \Delta x_C \approx 1 \text{ fm}$, dunque l'energia del quanto di interazione forte risulta

$$E = Mc^2 \approx \frac{\hbar}{\Delta x_C} c \approx 196 \text{ MeV}.$$

La soluzione dell'equazione di Klein-Gordon per tale quanto massivo, considerando $E = p^2 c^2 + M^2 c^4 = 0$, è data dalla funzione

$$\begin{cases} \psi = \psi_0 e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)} \\ p^2 = -M^2 c^2 \rightarrow \vec{p} = \pm i M c \hat{k} \end{cases} \Rightarrow \psi = \psi_0 e^{\frac{i}{\hbar}(\pm i M c z)} = \psi_0 e^{-\frac{Mc}{\hbar} z}$$

(si è ignorato il termine negativo perché avrebbe portato ad un esponenziale divergente, senza significato fisico) e si ottiene una funzione costante nel tempo in quanto manca la dipendenza da t e che si estingue dopo uno spazio $\Delta z = \hbar/Mc$, ritrovando la *disuguaglianza di Compton* spaziale. Considerando Mc/\hbar come numero d'onda si può trovare la *lunghezza d'onda di Compton* della particella virtuale mediatrice

$$\frac{Mc}{\hbar} = \frac{2\pi}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{h}{Mc};$$

- per la forza elettromagnetica, data l'assenza di massa del fotone mediatore, la soluzione si deve ricavare dall'espressione in coordinate sferiche dell'equazione di Klein-Gordon (considerando sempre $E = 0$)

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \psi) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi \Rightarrow \begin{cases} \psi = -g^2 \frac{e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)}}{r} \\ \vec{p} = i M c \hat{k} \end{cases} \Rightarrow \psi = -g^2 \frac{e^{-\frac{Mc}{\hbar} r}}{r}.$$

Considerando ancora i campi massivi X, Y , accoppiati in modo che il secondo sia interpretabile come quello d'interazione del primo, la lunghezza e il tempo di Compton sopra visti indicano che l'interazione tra quanti del campo X è possibile solo se questi si trovano a distanze inferiori a Δx_C . Nel caso il campo X fosse libero e isolato, nell'intervallo Δt_C l'interazione di Y non incontrerà alcun altro quanto: per conservazione dell'energia non è però possibile che il quanto di Y scompaia se non assorbito, dunque viene riassorbito dallo stesso quanto emettitore di X .

Tali processi di emissione e assorbimento sono di natura probabilistica in base alle caratteristiche di accoppiamento tra i campi, e avvengono in maniera continua nei casi di campi sia liberi che vincolati da forze esterne, sia isolati che sufficientemente vicini ad altri campi con cui possono interagire. Ciò porta ad una conseguenza rilevante: i processi di irradiazione e annichilazione possono avvenire a catena, portando a separazioni del quanto virtuale in loop di altre particelle e antiparticelle che a loro volta possono emettere altri quanti virtuali, in teoricamente infinite iterazioni, sia nel caso di campi liberi (in cui alla fine il quanto virtuale viene riassorbito da quello emittitore) che in interazione. Da ciò emerge che per ogni singolo evento concorrono infinite possibilità statistiche, complicando estremamente i calcoli e per trovarci una quadra si calcola la probabilità di avvenimento di emissione dei quanti: la forza elementare dovuta all'emissione del quanto, utilizzando l'energia elementare di una particella ricavata differenziando l'equazione di energia relativistica, è

$$\begin{cases} dF = \frac{dp}{dt} = \frac{dE}{dx} \\ dE \approx \frac{pc^2}{E} dp \\ dp \approx \frac{h}{dx} \end{cases} \Rightarrow dF \approx c \frac{pc}{E} \frac{dp}{dx} \approx c \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{mc}{h} dx\right)^2}} \frac{h}{dx^2} = \frac{ch}{\sqrt{1 + \left(\frac{mc}{h} dx\right)^2}} \frac{1}{dx^2}.$$

Ora, la forza che emerge macroscopicamente dall'avvenire di N interazioni, posti dp_j quantità di moto del singolo quanto, dt tempo di separazione tra due eventi successivi e $d\tau$ durata media dell'interazione, è data da

$$F_{\text{macro}} = \frac{dp_{\text{macro}}}{dt_{\text{macro}}} \approx \frac{\sum_{j=1}^N dp_j}{N dt} = \frac{\sum_j d\tau \frac{dp_j}{d\tau}}{N dt} = \frac{d\tau \sum_j dF_j}{N dt} \approx \frac{d\tau N dF}{N dt} = \left(\frac{d\tau}{dt}\right) dF$$

dove $\alpha = (d\tau/dt)$ è la misura dell'intensità dell'interazione, interpretabile come la probabilità di avvenimento di un evento di emissione o assorbimento. Dunque per

- *l'interazione elettromagnetica*: sapendo che il fotone ha massa nulla e la forza macroscopica è data da quella di Coulomb, si ha

$$F_{\text{macro}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{dx^2} \approx \alpha \frac{ch}{\sqrt{1 + \left(\frac{mc}{h} dx\right)^2}} \frac{1}{dx^2} = \alpha \frac{ch}{dx^2} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{ch} \approx \frac{1}{137.036}$$

detta **costante di struttura fina**, cioè il tempo che separa due eventi successivi è 137 volte la durata dell'evento stesso, dunque si ha la probabilità di $1/137 \approx 0.73\%$ che avvenga un'interazione con il campo elettromagnetico. Ciò comporta che catene con molte emissioni o assorbimenti siano estremamente meno probabili e dunque sempre meno influenti sull'evento totale, rendendo possibile troncare i calcoli ad un certo ordine scelto: tali interazioni si dicono trattabili **perturbativamente**. Seppure non sia stata ancora dimostrata la convergenza della serie perturbativa che risulta infinita, il suo utilizzo troncato produce i risultati più precisi della fisica;

- *l'interazione forte*: si ricava che la costante $\alpha \approx 1$, cioè gli eventi sono "densi" nel percorso del quanto e ogni possibile combinazione contribuisce all'interazione totale, rendendo i calcoli estremamente complessi e pesanti. Tale interazione non è trattabile perturbativamente, ma solo con metodi di calcolo numerico.

Anche nel caso delle interazioni trattabili perturbativamente sorgono dei problemi rilevanti: non è infatti garantita la finitezza dei singoli termini della serie perturbativa e in particolare i processi con topologie contenenti *loop* assumono un valore infinito. Per superare tale difficoltà venne elaborata una tecnica di rimozione degli infiniti detta **rinormalizzazione**, composta da due parti principali:

- *regolarizzazione*: si esegue il calcolo dell'ampiezza separando le parti finite da quelle divergenti attraverso una *regolarizzazione dimensionale*, che sfruttando le proprietà della funzione gamma esegue il calcolo degli integrali in uno spazio $(4 - \epsilon)$ -dimensionale preservando la Lorentz invarianza;
- *rinormalizzazione*: si contrappone a ciascuna parte divergente trovata un opportuno diagramma (detto controtermine) che la elimina, ottenendo l'ampiezza rinormalizzata, e si manda $\epsilon \rightarrow 0$ recuperando le 4 dimensioni dove l'ampiezza assume ora un valore finito.

Se è possibile opporre un numero finito di controtermini alle infinite parti divergenti la teoria di campo si dice appunto **rinormalizzabile** (e qui sta il problema delle modellizzazioni di QFT della gravità: sono necessari infiniti controtermini per la normalizzazione). Questa procedura porta ad una nuova concettualizzazione degli eventi fisici: una particella risulta così composta da un "nucleo" caratterizzato dai suoi effettivi parametri fisici con cui questa interviene nel calcolo dell'ampiezza (detti **parametri nudi**), rivestito da una "nube" di processi virtuali dovuti agli accoppiamenti con gli altri campi che modificano i parametri in **parametri vestiti** o *rinormalizzati* in maniera dipendente dal quadrimpulso trasferito (si veda il processo di *polarizzazione del vuoto* nel caso dell'elettrone). Dato che non è possibile separare i processi virtuali dalla particella stessa, ciò che si osserva sperimentalmente sono solo i parametri vestiti e non è possibile misurare quelli nudi. Il fatto che parametri rinormalizzati dipendano dal quadrimpulso trasferito comporta che i parametri fisici con cui le particelle intervengono nei processi non siano costanti ma dipendano dalla energia in gioco: al variare dell'energia del processo cambia anche la lunghezza d'onda quantomeccanica delle particelle coinvolte e con essa il loro potere risolutivo, ovvero la capacità di distinguere in misura diversa il nucleo dai processi virtuali.

La principale evidenza sperimentale fu data nel 1947 da Willis Lamb che riuscì a misurare lo splitting tra i livelli $2S$ e $2P$ degli elettroni eccitati di un gas di idrogeno cercando i picchi di assorbimento da un laser finemente sintonizzato, trovando il valore di 1059 MHz (*Lamb shift*) spiegato in maniera relativistica considerando che il potenziale coulombiano dovesse tenere conto dei processi virtuali (polarizzazione del vuoto, splitting al vertice, self-energy, etc) con i relativi contributi, ottenendo $-27 + 68 + 1017 = 1058$ MHz.

5.2 Modello standard

Buona parte della fenomenologia delle particelle elementari è descritta compiutamente dalla teoria del Modello Standard, schema generale costruito attraverso la QFT e gli strumenti della **teoria di gauge**.

Sperimentalmente si trovano 12 particelle fermioniche fondamentali (e le relative 12 antiparticelle), cioè 12 campi materiali di spin $1/2$: queste si dividono in 6 **leptoni** non soggetti all'interazione forte e 6 **quark** soggetti all'interazione forte, che si combinano a formare **adroni** (come il protone $p = u u d$ e il neutrone $n = u d d$). La distinzione tra le particelle è compiuta in base al **sapore** (le possibili interazioni che hanno), chiamato così perché è possibile una sovrapposizione lineare data la loro natura quantomeccanica. Tali fermioni sono distinti dai processi di interazione debole in tre **generazioni** che accoppiano due particelle in base ai tipi di decadimento o produzione: per i quark sono evidenziati in tabella, per i leptoni si accoppiano particella carica con relativo neutrino.

Leptoni	elettrone	e^-	Soggetti ad <i>interazione elettrodebole</i> , di carica pari a $-e$
	muone	μ^-	
	tauone	τ^-	
	neutrino elettronico	ν_e	Soggetti solo ad <i>interazione debole</i> in quanto non carichi
	neutrino muonico	ν_μ	
	neutrino tau	ν_τ	
Quark	up	u	Soggetti ad entrambe <i>interazione forte</i> ed <i>elettrodebole</i> , di carica frazionaria
	down	d	
	charm	c	
	strange	s	
	top	t	
	bottom	b	

Il modello è ridondante, in quanto solo 3 particelle (quark up e down ed elettrone) delle 12 (o meglio, 24) totali compongono la materia ordinaria, mentre le altre o interagiscono poco (neutrini, soggetti solo ad interazione debole e gravitazionale) o producono materia esotica e mesoni (adroni con numero pari di quark, alcuni sono mediatori dell'interazione forte per particelle composite).

Il modello considera anche 12 campi non massivi di spin 1 che permettono interazioni e un tredicesimo campo massivo di spin 0 (campo scalare di Higgs).