

NICCOLÒ ZANOTTI

APPUNTI DI FISICA NUCLEARE E SUBNUCLEARE

Indice

<i>Introduzione</i>	5
---------------------	---

<i>Fisica Nucleare</i>	7
------------------------	---

<i>Le unità di misura della Fisica Nucleare e Subnucleare</i>	7
---	---

<i>Le proprietà generali dei nuclei</i>	9
---	---

<i>La differenza di massa tra neutrone e protone</i>	12
--	----

<i>Le carte dei nuclidi</i>	12
-----------------------------	----

<i>Lo studio del nucleo</i>	13
-----------------------------	----

<i>La sezione d'urto</i>	13
--------------------------	----

<i>Calcoli di sezioni d'urto</i>	17
----------------------------------	----

<i>Le proprietà ondulatorie delle particelle microscopiche</i>	20
--	----

<i>Teoria della diffrazione di Kirchhoff</i>	25
--	----

<i>Le sezioni d'urto in meccanica quantistica</i>	29
---	----

<i>Diffrazione di un disco assorbente</i>	33
---	----

<i>Appendici</i>	37
------------------	----

<i>Appendice 1 : La formula della diffrazione di Kirchhoff</i>	37
--	----

Introduzione

Valutare cosa mettere di introduzione

Fisica Nucleare

Le unità di misura della Fisica Nucleare e Subnucleare

La scelta della unità di misura è arbitraria ma, in accordo con i criteri che ispirano i moderni sistemi, soddisfa alcuni semplici requisiti di ordine generale:

- **l'unità deve essere connessa ad un fenomeno naturale ritenuto stabile ed invariabile nel tempo** piuttosto che ad un oggetto o manufatto particolare il quale potrebbe deteriorarsi o modificare le sue proprietà con il tempo;
- **le unità non devono essere ridondanti** e devono costituire un sistema di grandezze fisiche irriducibili dette fondamentali dalle quali ottenere tutte le altre che invece vengono dette derivate;
- **l'unità deve essere riproducibile in laboratorio con una relativa facilità** (in realtà è lavoro da professionisti quali sono i metrologi).

Un sistema di unità di misura più appropriato può essere costruito facendo riferimento alle costanti fisiche fondamentali che governano i fenomeni nucleari e subnucleari. Accanto alle grandezze fondamentali, ogni area della fisica introduce anche specifiche costanti fisiche.

Queste possono essere sia dimensionali che adimensionali, riferirsi a specifiche classi di fenomeni - e dunque di *rango locale* - oppure valide per ogni fenomeno fisico e quindi di *rango universale*. Mentre il valore numerico delle costanti dimensionali dipende dalla scelta del sistema di unità misura, quello delle costanti adimensionali ne è del tutto indipendente per cui si ritiene che siano dotate di un più profondo significato fisico anche se a tutt'oggi nessuna teoria è in grado di predirne il valore.

Fu Planck che propose di assumere come grandezze fisiche fondamentali le costanti fisiche universali introducendo i cosiddetti sistemi naturali di unità di misura. Lo scopo di tali sistemi è quello di dedurre le appropriate scale di lunghezze, tempi, masse e temperature direttamente dai fenomeni naturali piuttosto che da convenzioni di natura metrologica

La costruzione di un sistema di unità di misura le cui grandezze abbiano la scala appropriata per una certa classe di fenomeni richiede l'introduzione di specifici vincoli tra le grandezze fondamentali della descrizione macroscopica. Ad esempio, dato che **i fenomeni nucleari e subnucleari sono al tempo stesso relativistici e quantistici** ciò significa che le velocità, ovvero i quozienti tra lunghezze e tempi saranno dell'ordine di c , mentre le azioni, cioè i prodotti delle energie per i tempi caratteristici saranno dell'ordine di \hbar . Due costanti universali non sono però sufficienti per fissare la scala delle tre grandezze necessarie al Sistema Internazionale per descrivere la relatività e meccanica quantistica (L, T ed M). Il particolare ruolo giocato dalle macchine acceleratrici in fisica nucleare e delle particelle elementari suggerisce allora di assumere come terza grandezza (non costante) un fondamentale parametro costruttivo della macchina, **l'energia E**. In accordo con le convenzioni adottate nella ingegneria delle macchine acceleratrici si assume come unità l'elettronvolt (eV), ovvero l'energia cinetica acquisita da un elettrone accelerato da una differenza di potenziale di un volt. Si ottiene facilmente la sua conversione in joule: $E_{\text{cin}} = eV$ da cui $1eV = 1.602 \times 10^{-19} J$.

Definite le unità del **Sistema Naturale della Fisica Nucleare e Subnucleare (SNNS)** possiamo facilmente calcolare i loro valori nel Sistema Internazionale (SI) attraverso le seguenti equazioni dimensionali (si noti che con le lettere minuscole indichiamo le grandezze fondamentali del SNNS e con le maiuscole quelle del SI)

$$\begin{aligned} c &\sim \frac{L}{T} & \epsilon &\sim Mc^2 & \epsilon T &\sim \hbar \\ L &\sim cT & M &\sim \frac{\epsilon}{c^2} & T &\sim \frac{\hbar}{\epsilon} \\ \implies L &\sim \frac{\hbar c}{\epsilon} & M &\sim \frac{\epsilon}{c^2} & T &\sim \frac{\hbar}{\epsilon} \end{aligned}$$

Da queste deduciamo che le lunghezze possono essere misurate in unità di $\frac{\hbar c}{\epsilon}$ ($\hbar c/eV$ o $1/eV$ se $c = 1$), i tempi in unità di $\frac{\hbar}{\epsilon}$ (\hbar/eV o $1/eV$ se $\hbar = 1$) ed infine le masse in unità di ϵ/c^2 (eV/c^2 o eV se $c = 1$).

Tenendo ora presenti i valori delle costanti universali espresse nel Sistema Internazionale e della conversione tra Joule (J) ed elettronvolt (eV):

$$\hbar = 1.055 \times 10^{-34} J \cdot s \quad c = 2.998 \times 10^8 m/s \quad \hbar c = 3.162 \times 10^{-26} J \cdot m$$

$$1eV = 1.602 \times 10^{-19} J$$

possiamo calcolare i coefficienti della conversione tra il Sistema Naturale della Fisica Nucleare e Subnucleare ed il Sistema Internazionale

(per quanto riguarda l'energia, piuttosto che gli eV, assumeremo la scala più appropriata dei MeV)

$$\begin{aligned} L &\sim \frac{\hbar c}{\epsilon} & 1 \left(\frac{\hbar c}{MeV} \right) &\sim 1.97 \times 10^{-19} m \\ M &\sim \frac{\epsilon}{c^2} & 1 \left(\frac{MeV}{c^2} \right) &\sim 1.78 \times 10^{-30} Kg \\ \frac{\hbar}{\epsilon} &\sim T & 1 \left(\frac{\hbar}{MeV} \right) &\sim 6.59 \times 10^{-22} s \end{aligned}$$

Le proprietà generali dei nuclei

Il **nucleo** è un sistema composto formato da **neutroni** e **protoni** – spesso indicati con il nome generico di **nucleoni** - tenuti assieme dalla **interazione forte**, una delle interazioni fondamentali della natura (di cui non si ha traccia macroscopicamente).

In fisica nucleare si usa il termine ‘nuclide’ piuttosto che ‘nucleo’ più prossimo alla chimica. Si hanno le seguenti grandezze rilevanti:

- **numero atomico** Z , ovvero numero di protoni del nuclide ;
- il numero di neutroni non ha nome specifico e si indica con N ;
- **numero di massa** A , ovvero il numero di nucleoni $Z + N$.

Ne consegue che una qualunque coppia dei numeri Z, N ed A identifica univocamente il nuclide. La notazione è la seguente:

$${}^A_Z X_N$$

Si parla di nuclidi

1. **isotopi** se hanno stesso Z ma diversi N ed A ;
 2. **isotoni** se hanno stesso N ma diversi Z ed A ;
 3. **isobari** se hanno stesso A ma diversi N ed Z ;
- se questi hanno N e Z scambiati si dicono *speculari*;
4. **isomeri** se sono identici ma in uno stato di energia differente.

Il neutrone ha una massa di $939.56 MeV$ che eccede di soli $1.29 MeV$ la massa del protone che ammonta a $938.27 MeV$. Spesso approssimate a $940 MeV$ o addirittura ad $1 GeV$, i nucleoni risultano circa 1840 volte più massivi dell'elettrone ($0.51 MeV$). La piccola differenza di massa gioca un ruolo chiave in molti fenomeni (vedi paragrafo sulla differenza di massa neutrone-protone).

Sia i **neutroni** che i protoni possiedono un momento angolare intrinseco di **spin** $s = \frac{1}{2}$ (in unità \hbar). Sulla base della meccanica quantistica, ciò significa che la proiezione del momento angolare lungo un

certo asse può assumere i due soli valori $\frac{1}{2}\hbar$ e $-\frac{1}{2}\hbar$. Lo spin interviene non solo negli aspetti specifici della dinamica dei nucleoni ma anche nella determinazione del loro **comportamento collettivo**. La meccanica quantistica impone ai sistemi di particelle identiche restrizioni peculiari che non hanno analogie nella fisica classica. Sulla base del **teorema spin statistica** i neutroni ed i protoni nucleari - che hanno spin semintero - si comportano collettivamente come **fermioni** e devono soddisfare il **principio di Pauli**, un fatto che gioca un ruolo decisivo nella **stabilità** e **struttura** del nucleo.

Nella fisica classica solo una particella estesa può possedere momento angolare intrinseco (spin). Se lo possiede ed è elettricamente carica allora possiede anche momento di dipolo magnetico. Ad esempio è facile mostrare che un anello di carica 'e' e superficie S , posto in rotazione attorno all'asse di simmetria, soddisfa la seguente relazione $\mu = eL$.

Nella fisica quantistica, non solo le particelle estese (composte) ma **anche quelle puntiformi** (elementari) possono essere dotate di **spin** per cui - se dotate di carica elettrica - possiederanno anche un **momento di dipolo magnetico**.

Vediamo da un conto esplicito che l'analogia classica-quantistica è fallimentare:

$$\mu = is = \frac{e}{T}\pi R^2 \rightarrow L = mvR = m \frac{2\pi R}{T} R$$

$$\pi R^2 = \frac{T}{2m} L \rightarrow m = \frac{e}{T} \frac{T}{2m} L = \frac{e\hbar}{2m} \left(\frac{L}{\hbar} \right)$$

dove la grandezza $\frac{e\hbar}{2m}$ viene detta **magnetone di Bohr** e vale $5.05 \times 10^{-27} J/T$. E' un fatto ben noto però che la relazione tra μ ed L differisce da quella classica per un fattore numerico. Ad esempio, nel caso di particelle puntiformi di spin 1/2, l'equazione **quantomeccanica relativistica di Dirac** conduce ad una relazione contenente un fattore g di valore 2.

Preso atto di questo fatto dobbiamo aggiungere che le teorie di campo quantizzato hanno dimostrato che il fattore $g=2$ delle particelle puntiformi deve subire **piccole correzioni** dovute a certi processi virtuali, soprattutto di natura elettromagnetica, di cui diremo

$$g = 2(1 - a) \quad a = \frac{g-2}{2}$$

La correzione a - detta *momento magnetico anomalo* o anche $\frac{g-2}{2}$ - rappresenta uno dei parametri più importanti per un confronto di alta precisione tra previsioni teoriche e misure sperimentali. A titolo di esempio nel caso dell'elettrone si ha

$$a_{th} = 0.001159652181643(764)$$

Momento di dipolo magnetico dei nucleoni

$$a_{ex} = 0.001159652180730(280)$$

lo stupefacente accordo costituisce uno dei test più significativi a favore della QED.

Nel caso in cui la particella quantistica non sia puntiforme il fattore $g = 2$ si modifica ben più pesantemente. Ad esempio, nel caso del protone deve essere moltiplicato per 2.79 per cui si ha $g = 2 \times 2.79 = 5.58$ mentre nel caso del neutrone deve essere moltiplicato per -1.91 per cui si ha $g = 2 \times (-1.91) = -3.82$.

Tali valori così diversi dal fattore 2 delle particelle puntiformi dimostrano la natura non elementare dei nucleoni, un fatto che troverà la sua conferma nel modello a quark degli adroni.

I nucleoni non possiedono invece momento di dipolo elettrico un fatto che ha importanti implicazioni sulle quali torneremo.

Il modello a quark degli adroni (particelle soggette alla interazione forte) chiarisce che i nucleoni non sono particelle elementari. Tralasciando per ora la complessa struttura prevista dalla teoria dei campi quantizzati, in prima approssimazione i nucleoni sono pensabili come **stati legati di tre quark** (i quark costituiscono una famiglia di 6 particelle elementari del modello standard) con ‘carica forte’ complessiva nulla (nel gergo della QCD di colore bianco) nello stato di minima energia. In particolare neutrone e protone sono stati legati dei quark (u, d, d) e (u, u, d) rispettivamente.

La natura composta dei nucleoni chiarisce anche la natura della forza forte che li lega all’interno del nucleo. Infatti, oggi sappiamo che le vere sorgenti della interazione forte sono le ‘cariche forti’ (cariche di colore) dei tre quark che compongono i nucleoni per cui la forza forte che li unisce nei nuclidi altro non è che il residuo esterno della interazione forte primaria tra i quark. Per questo motivo la forza forte tra nucleoni ha una struttura complicata e decade rapidamente con la distanza assumendo un carattere a **corto raggio**.

Da questo punto di vista è assai utile l’analogia con le forze elettromagnetiche nelle molecole, le forze di Van der Waals. Le interazioni primarie tra le cariche dei nuclei e degli elettroni interni alla molecola sono le interazioni elettromagnetiche a lungo raggio caratterizzate da una struttura relativamente semplice. All’esterno della molecola però, si osserva la risultante di tali interazioni che è attrattiva, ha un andamento spaziale complicato e decade rapidamente con la distanza.

In questo senso possiamo affermare che **le forze forti tra nucleoni sono le forze di Van der Waals delle interazioni forti tra i quarks**. Premesso che la comprensione delle forze forti tra nucleoni a partire dalle sottostanti interazioni forti tra quarks mediate da gluoni è un tema di assoluta frontiera non ancora risolto (QCD), il carattere essenzialmente **attrattivo** e a **corto raggio** della **forza forte** tra nucleoni è noto sin dagli anni '30.

[pag. 18-21 come approfondimento dalle dispense]

La differenza di massa tra neutrone e protone

pag 21-23 dispense

Le carte dei nuclidi

qui roba lezione 3

Lo studio del nucleo

La sezione d'urto

In quale modo i fisici possono esplorare la struttura di oggetti così piccoli quali sono gli atomi, i nuclei e le particelle subatomiche? Quali sono le grandezze fisiche sperimentalmente misurabili e quale tipo di informazioni su tali oggetti microscopici è effettivamente possibile ottenere da tali misure?

Gli elementi fondamentali che caratterizzano l'esperimento di Rutherford(1909-1913) così come versioni più moderne sono i seguenti:

1. un **fascio incidente** di particelle proiettile;
2. un **bersaglio** contenente le particelle da studiare(atomi/nuclei /protoni/neutroni);
3. un **rivelatore** dietro/attorno al bersaglio capace di misurare le particelle emergenti¹.

Nell'esperimento di Rutherford:

- fascio: particelle α di 5.6MeV
- bersaglio: gold foil con spessore di $8.6 \times 10^{-6}\text{ cm}$
- rivelatore: vetro dipinto da ZnS scintillante al momento dell'incontro con particelle cariche.

Goal dell'esperimento: riconoscere le particelle emergenti e misurarne le grandezze cinematiche(energia, quantità di moto) al fine di ottenere informazioni sulla natura dell' **interazione** tra particella del fascio e particella del bersaglio.

Il termine **interazione** è un termine generico. Introduciamo la seguente notazione:

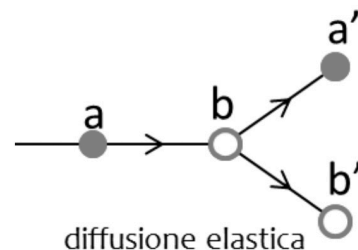
- **Processi di diffusione:** particelle emergenti dal bersaglio coincidono con quelle del raggio incidente
- **Processi di produzione:** non vale quanto sopra

Tra i processi di diffusione si distinguono processi

- **elastici** : energia della particella incidente = emergente

L'esperimento di Geiger-Mursden-Rutherford²

¹ Il progresso tecnologico nel campo delle macchine acceleratrici ha reso possibile una variante dello schema descritto dove la collisione avviene tra le particelle di due fasci contrapposti. I 'collider', certamente più difficili da costruire permettono però di raggiungere, a parità delle tecnologie di accelerazione delle particelle, una maggiore energia della collisione.



- **anelastici:** energia della particella incidente \neq emergente

Dato che solitamente la particella proiettile è priva di struttura interna, a differenza di quella bersaglio, si ha diffusione

- elastica: il bersaglio non modifica la sua struttura e non assorbe energia
- anelastica: il bersaglio modifica la sua struttura e assorbe energia

Si parla di *diffusione profondamente inelastica* quando l'energia della particella proiettile è tale che la De Broglie wavelength associata risulta molto minore della dimensione della particella bersaglio \rightarrow si può definirne la struttura interna (che varia durante il processo).

Sulla base di questa terminologia è evidente che **un processo di produzione è sempre inelastico**.

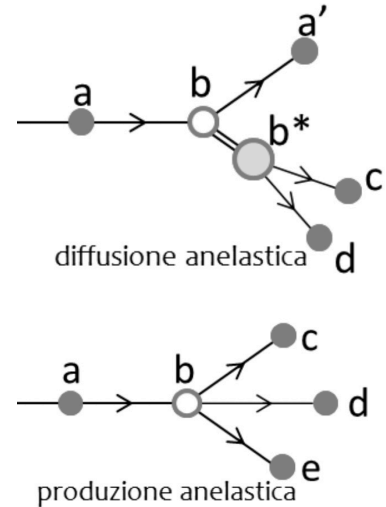
Vogliamo ora domandarci quale **grandezza fisica microscopica del bersaglio** sia possibile misurare con un arrangiamento sperimentale alla Rutherford. Per cominciare, occorre tenere presente che nella pratica sperimentale si cerca di ottenere **un fascio di particelle proiettile con densità e velocità uniformi e costanti** da inviare su di un **bersaglio materiale chimicamente omogeneo**. In generale, in questa situazione, **si ottengono informazioni sui componenti microscopici del bersaglio confrontando il fascio di particelle uscente con quello entrante**. In particolare maggiore è il numero di grandezze fisiche del fascio emergente che vengono misurate (distribuzione spaziale, energia, quantità di moto, tipologia, etc. etc.) più dettagliata risulterà l'informazione sui componenti microscopici del bersaglio.

Le assunzioni che faremo sono le seguenti:

1. il fascio di sezione trasversale Σ sia costituito da corpuscoli massivi puntiformi in moto con la stessa velocità v e densità spaziale n_f uniforme e costante;
2. il bersaglio sia costituito da sferette massive di raggio dato, distribuite con densità n_b uniforme all'interno di un sottile strato materiale di spessore Δx e area maggiore di Σ (in modo da utilizzare tutte le particelle del fascio);
3. l'interazione tra particella proiettile e particella bersaglio sia assimilabile ad un urto meccanico;
4. a seguito di tale interazione la particella proiettile venga deviata e dunque rilevata in una direzione diversa da quella del fascio.

Date queste condizioni, la probabilità che una singola particella proiettile interagisca con una singola particella del bersaglio vale

$$\frac{\sigma}{\Sigma}$$



dove σ è la sezione trasversale della particella bersaglio e Σ la sezione trasversale del fascio. Il numero di particelle deflesse dalla direzione del fascio a seguito dell'urto vale allora

$$\Delta N_{def} = \Delta N_f \Delta N_b \frac{\sigma}{\Sigma}$$

dove ΔN_f è il numero di particelle del fascio che nel tempo Δt hanno avuto la possibilità di interagire con le ΔN_b particelle del bersaglio.

Ora si noti che le ΔN_f particelle del fascio sono contenute all'interno di un parallelepipedo di area Σ ed altezza $v\Delta t$ mentre le ΔN_b particelle del bersaglio sono contenute all'interno di un parallelepipedo di area Σ ed altezza Δx . Ricordando allora che le densità volumetriche di particelle del fascio e del bersaglio valgono rispettivamente n_f e n_b , si ottengono le seguenti espressioni:

$$\Delta N_f = \underbrace{\Sigma v \Delta t}_{\text{Volume}} n_f \quad \Delta N_b = \underbrace{\Sigma \Delta x}_{\text{Volume}} n_b$$

che sostituite forniscono il numero di particelle deflesse nel tempo Δt :

$$\Delta N_{def} = \Delta N_f \Delta N_b \frac{\sigma}{\Sigma} = (\Sigma v \Delta t n_f)(\Sigma \Delta x n_b) \frac{\sigma}{\Sigma}$$

e quindi un rate di deflessione

$$\frac{\Delta N_{def}}{\Delta t} = (v n_f)(\Sigma \Delta x n_b) \sigma$$

Invertendo la relazione, otteniamo infine l'espressione della **sezione trasversale della particella bersaglio o sezione d'urto**

$$\boxed{\sigma = \frac{1}{(n_f v)(n_b \Sigma \Delta x)} \frac{dN_{def}}{dt}} \quad (1)$$

L'interesse di questa espressione risiede nel fatto che mette in relazione una grandezza fisica microscopica, quale la sezione trasversale σ della particella bersaglio, con grandezze fisiche macroscopiche misurabili quali sono i parametri geometrici $n_f, n_b, \Sigma, \Delta x$ e $\frac{\Delta N_{def}}{\Delta t}$.

La grandezza σ è detta **sezione d'urto totale** o sezione totale d'interazione ed è ciò che può essere misurato in un tipico arrangiamento alla Rutherford (questa affermazione va presa cum grano salis poiché disponendo di un adeguato apparato si possono misurare le sezioni d'urto in funzione di specifiche variabili d'interesse), ha le **dimensioni di un'area** (in questo caso coincidente con l'area trasversale della particella bersaglio) e dunque si misura in m^2 (più propriamente in suoi sottomultipli), ed è la grandezza fisica che **caratterizza l'interazione tra la generica particella del fascio e la generica particella del bersaglio**. Ci attendiamo infine che tale espressione abbia una **validità generale** e che possa essere applicata non solo nel

caso specifico dell'urto meccanico da noi esaminato (impossibile a livello microscopico!) ma anche nel caso più realistico in cui le particelle del fascio e del bersaglio interagiscono per mezzo di una interazione naturale.

Infatti, anche nel caso delle particelle subatomiche, nel quale la mutua interazione non è certo schematizzabile come un urto meccanico di sfere rigide, sarà sempre possibile introdurre la grandezza microscopica σ il cui valore, però, non sarà determinato dalla sezione trasversale della particella ma dalle proprietà della interazione e tra particella proiettile e particella bersaglio.

Dunque, in fisica nucleare e delle particelle elementari gli esperimenti su fasci misurano essenzialmente le sezioni d'urto della interazione elementare fascio-bersaglio. Quando si dispone di una teoria quantitativa di tale interazione la grandezza σ può essere calcolata anche teoricamente ed allora, attraverso il confronto con il valore determinato sperimentalmente, risulta possibile saggiare la bontà della teoria stessa. Nella fisica nucleare e delle particelle elementari il confronto tra teoria ed esperimento avviene quasi sempre attraverso le sezioni d'urto.

Se l'apparato sperimentale è costruito in modo opportuno risulta possibile andare oltre il semplice conteggio del numero di particelle deflesse e fornire informazioni sempre più stringenti. Ad esempio, con un apparato sperimentale disposto attorno al bersaglio e *opportunamente segmentato*, in un processo di diffusione risulta possibile misurare la distribuzione angolare delle particelle del fascio deflesse dal bersaglio acquisendo ulteriore informazione sperimentale sulle proprietà della interazione in gioco. In questo modo si potrà misurare la sezione d'urto d'interazione con la condizione ulteriore che la particella proiettile emerga all'interno di un certo angolo solido elementare $d\Omega$. Avremo allora la seguente d'urto elementare (poiché infinitesimo risulta l'elemento di angolo solido)

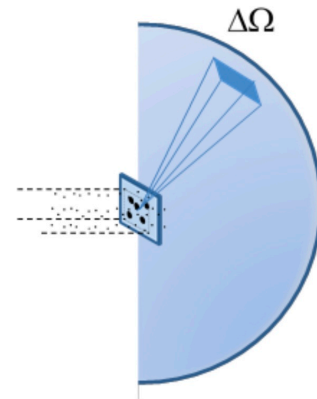
$$d\sigma = \frac{1}{(n_f v)(n_b \Sigma \Delta x)} d \left(\frac{dN_{def}}{dt} \text{ in } d\Omega \right)$$

in altri termini:

$$d\sigma = \frac{1}{(n_f v)(n_b \Sigma \Delta x)} \frac{d\dot{N}_{def \text{ in } \Delta\Omega}}{d\Omega} d\Omega$$

dalla quale otteniamo l'espressione della **sezione d'urto differenziale rispetto all'angolo solido** che è la grandezza misurata dal nostro ipotetico esperimento. Va da sè che l'integrale di tale sezione d'urto differenziale rispetto all'angolo solido debba restituire la sezione d'urto totale

Sezione d'urto differenziale rispetto all'angolo solido



$$\sigma = \iint_{\Omega} \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \quad (2)$$

relazione che può essere assunta come definizione della sezione d'urto differenziale rispetto all'angolo solido. Se il rivelatore permette di misurare anche l'energia della particella proiettile sarà possibile misurare il numero di particelle del fascio che nella unità di tempo emergono nell'angolo solido elementare $d\Omega$ all'interno dell'intervallo elementare dE . Si ha infatti:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(n_f v)(n_b \Sigma \Delta x)} \frac{d}{d\Omega} \left(\frac{dN_{def}}{dt} \text{ in } d\Omega \right)$$

$$\frac{d^2\sigma}{dE d\Omega} = \frac{1}{(n_f v)(n_b \Sigma \Delta x)} \frac{d}{dE} \frac{d}{d\Omega} \left(\frac{dN_{def}}{dt} \text{ in } d\Omega \text{ e } dE \right)$$

Il nostro ipotetico esperimento misurerà allora la seguente **sezione d'urto doppiamente differenziale in funzione dell'angolo solido e della energia** definita dalla relazione

$$\sigma = \iint_{\Omega} \int_E \frac{d^2\sigma}{dE d\Omega} d\Omega$$

Gli esempi citati, pur riferendosi a casi particolari chiariscono il fatto, di validità generale, che *il tipo di sezione d'urto misurata dipende essenzialmente dalle caratteristiche tecniche del rivelatore.*

Nel caso più semplice si misurerà una sezione d'urto totale di interazione ma, disponendo di rivelatori via via più sofisticati, risulterà possibile misurare sezioni d'urto differenziali di interazione in funzione di un insieme di variabili cinematiche sempre più ampio.

Calcoli di sezioni d'urto

Vediamo due esempi di calcolo di sezioni d'urto :

- i) Sezione d'urto differenziale rispetto all'angolo solido di un fascio di proiettili di sezione trascurabile su sfere di raggio R nella ipotesi che abbiano luogo urti classici elastici. ii). Sezione d'urto differenziale di Rutherford
- i) Senza entrare nel dettaglio della meccanica dell'urto - assumendo un sistema di coordinate sferiche con asse z lungo l'asse centrale della sfera - sappiamo che sussiste una piena simmetria rispetto all'angolo e l'**angolo di emergenza** del proiettile è interamente determinato dal **parametro d'urto** b attraverso una relazione del tipo

$$b = b(\vartheta) \quad (3)$$

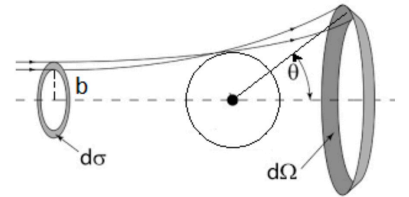


Figura 1: Sezione d'urto differenziale di una sfera rigida

che codifica i dettagli dell'urto stesso. Ciò significa che tutti i proiettili passanti per l'area elementare $bd\varphi db$ saranno deflessi dello stesso angolo solido elementare $d\Omega$ per cui, sulla base di (3.2), possiamo scrivere

$$d\sigma = \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = bd\varphi db$$

da cui segue

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \sin \vartheta d\varphi d\vartheta = bd\varphi \left| \frac{db}{d\vartheta} \right| d\vartheta$$

e dunque, infine, la sezione d'urto differenziale rispetto all'angolo solido

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin \vartheta} \left| \frac{db}{d\vartheta} \right| \quad (4)$$

valida classicamente non solo nel caso della sfera rigida ma in generale. Per calcolare la sezione d'urto differenziale rispetto all'angolo solido nel caso della sfera rigida di raggio R dobbiamo precisare la forma della (3.3). Si trova facilmente

$$\frac{b}{R} = \sin \alpha \quad \vartheta = \pi - 2\alpha$$

da cui

$$b = R \cos \frac{\vartheta}{2}$$

Sostituendo nella (3.4) otteniamo

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{R \cos \frac{\vartheta}{2}}{\sin \vartheta} \left| \frac{d}{d\vartheta} R \cos \frac{\vartheta}{2} \right| = \frac{R \cos \frac{\vartheta}{2}}{\sin \vartheta} \frac{R}{2} \sin \frac{\vartheta}{2}$$

da cui, infine, la sezione d'urto differenziale della sfera rigida di raggio R

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{R^2}{4} \quad (5)$$

E' immediato verificare che da questa espressione si ottiene una sezione d'urto totale $\sigma = \pi R^2$.

La formula (3.4) può essere utilizzata anche nel caso in cui l'interazione tra le particelle del fascio e quelle del bersaglio non consista in un urto meccanico ma in una interazione mediata da una forza naturale.

ii). Trattiamo allora il caso della **diffusione di Rutherford** di proiettili di carica elettrica positiva ze su bersagli di carica elettrica positiva Ze governata dalla forza

$$\mathbf{F} = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \mathbf{i}_r$$

Come noto tale forza **conserva il momento angolare** del proiettile

$$\mathbf{r} \wedge \mathbf{F} = \frac{d}{dt} \mathbf{l} \quad \mathbf{r} \mathbf{i}_r \wedge \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \mathbf{i}_r = \mathbf{0} \quad \mathbf{0} = \frac{d}{dt} \mathbf{l} \quad \mathbf{l} = \mathbf{K}$$

Sezione d'urto differenziale
di una sfera rigida

$$\mathbf{l}_{t=-\infty} = \mathbf{l}_t \quad (-x\dot{\mathbf{i}} + y\dot{\mathbf{j}}) \wedge (m\dot{x}\dot{\mathbf{i}} + m\dot{y}\dot{\mathbf{j}})_{t=-\infty} = r\dot{\mathbf{i}}_r \wedge m(\dot{r}\dot{\mathbf{i}}_r + r\dot{\varphi}\dot{\mathbf{i}}_\varphi) \quad -\dot{x}y = r^2\dot{\varphi}$$

$$\dot{x}_{t=-\infty} = v_0 \quad \dot{y}_{t=-\infty} = 0 \quad y_{t=-\infty} = b$$

da cui

$$\dot{\varphi} = -\frac{v_0 b}{r^2} \quad (6)$$

e conserva l'energia del proiettile

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \frac{dT}{dt} \rightarrow -\nabla V \cdot \mathbf{v} = \frac{dT}{dt}$$

$$\frac{d(T+V)}{dt} = 0 \quad E = T + V = K$$

$$T_{t=-\infty} + V_{t=-\infty} = T_{t=+\infty} + V_{t=+\infty} \quad V_{t=\pm\infty} = -\frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{t=\pm\infty}} = 0 \quad T_{t=-\infty} = T_{t=+\infty}$$

da cui si ha

$$v_0 = v_{t=+\infty} \quad (7)$$

Fatte queste premesse conviene risolvere la sola **equazione del moto trasversale**:

$$F_y = \frac{d}{dt}mv_y \quad \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \sin\varphi = \frac{d}{dt}mv_y$$

$$mv_{y,t=+\infty} - mv_{y,t=-\infty} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \sin\varphi dt$$

$$v_{y,t=+\infty} = v_{t=+\infty} \sin\vartheta \quad v_{y,t=-\infty} = 0 \quad \varphi_{t=+\infty} = \vartheta \quad \varphi_{t=-\infty} = \pi$$

$$mv \sin\vartheta = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \sin\varphi \frac{r^2}{v_0 b} d\varphi = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 v_0 b} (\cos\vartheta + 1)$$

da cui

$$b = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 mv_0^2} \cot \frac{\vartheta}{2} \quad (8)$$

Ora possiamo derivare questa espressione

$$\left| \frac{db}{d\vartheta} \right| = \frac{1}{2} \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 mv_0^2} \frac{1}{\sin^2 \vartheta/2}$$

e sostituirla nella (3.4) assieme alla (3.7) ottenendo

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 mv_0^2} \right) \cot \frac{\vartheta}{2} \frac{1}{2 \sin \vartheta/2 \cos(\vartheta/2)} \frac{1}{2} \left(\frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 mv_0^2} \right) \frac{1}{\sin^2 \vartheta/2}$$

da cui la **sezione d'urto differenziale di Rutherford**

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4} \left(\frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 mv_0^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \vartheta/2} \quad (9)$$

un risultato valido anche in meccanica quantistica.

[Esercizio in dispensa pag 38.]

Le proprietà ondulatorie delle particelle microscopiche

Nel 1913, quando Geiger, Mursden e Rutherford compirono il loro esperimento, interpretarono le collisioni tra particelle del fascio e atomi del materiale in termini di urti governati dalle leggi della meccanica classica. Non potevano fare altrimenti, tuttavia di lì poco Bohr - sulla base dei lavori di Planck ed Einstein - e poi nella decade successiva De Broglie, Heisenberg, Schroedinger e Born modificheranno radicalmente il quadro interpretativo introducendo l'idea che **le particelle microscopiche, oltre a possedere proprietà corpuscolari, dovevano possedere anche proprietà ondulatorie**, per cui ad esse si doveva associare una lunghezza d'onda e frequenza (De Broglie) ed una funzione d'onda (Born), soluzione quest'ultima di una determinata equazione d'onda (Schroedinger), giungendo così alla formulazione della meccanica quantistica.

D'altra parte, a partire dai lavori di Planck sul corpo nero (1900) e di Einstein sull'effetto fotoelettrico (1905), venne contemporaneamente affermandosi l'idea che i campi classici maxwelliani - dotati certamente di proprietà ondulatorie poiché capaci dei fenomeni della interferenza e diffrazione - dovevano essere costituiti da enti microscopici (poi chiamati quanti del campo) dotati anche di proprietà corpuscolari. Si affermò così il concetto di **quanto del campo come ente microscopico intrinsecamente 'ibrido' poiché dotato di proprietà sia ondulatorie che corpuscolari**.

Dato questo stato di cose, si pose naturalmente la domanda se le particelle microscopiche ed i quanti del campo - entrambi dotati di proprietà sia corpuscolari che ondulatorie - dovessero essere pensati come enti distinti oppure no.

La risposta - fondamento del moderno punto di vista - fu data dalle teorie di campo quantizzato (formulate alla fine degli anni '20 da Dirac, Heisenberg, e Jordan) le quali assumono che **le particelle microscopiche osservate negli apparati sperimentali devono essere identificate con i quanti di specifici campi**, superando in tal modo la ripartizione degli enti fisici in particelle materiali e campi affermata dalla fisica classica. Da ciò consegue che **il linguaggio naturale della fisica delle particelle debba essere quello della teoria dei campi quantizzati** tuttavia, quando le energie in gioco non sono così elevate da rendere necessaria una descrizione relativistica e soprattutto da rendere possibili processi di creazione e distruzione di particelle, **la descrizione offerta dalla meccanica quantistica ordinaria risulta appropriata**.

Per questo, alle basse e medie energie possiamo certamente assumere che la fisica nucleare possa essere ben descritta nell'ambito della meccanica quantistica mentre questo non è certamente più vero nella

fisica nucleare alle alte energie dove possono aversi collisioni tra nucleoni ad energie di centinaia o migliaia di GeV per nucleone (Alice ha operato a 2.76 TeV per coppia di nucleoni) e risulta necessaria una descrizione dei processi basata sulle teorie di campo quantizzato.

Volendo richiamare in modo diretto ed euristico alcuni concetti di meccanica quantistica, si può cominciare scrivendo **le grandezze cinematiche fondamentali di una generica onda piana sinusoidale**, ovvero la **pulsazione** ed il **vettore d'onda** collegate tra loro nella **relazione di dispersione** che caratterizza le proprietà fisiche del mezzo in cui l'onda stessa si propaga

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \mathbf{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \omega = \omega(\mathbf{k})$$

Scriviamo anche **le grandezze cinematiche fondamentali di un generico corpuscolo libero** che corrispondono alle espressioni relativistiche della **energia** e **quantità di moto** collegate dalla **relazione energia-impulso**

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (10)$$

Sulla base di considerazioni di natura assai generale, Einstein e De Broglie ipotizzarono che **le grandezze ondulatorie e corpuscolari fossero legate dalle seguenti relazioni** (valide sia nella meccanica quantistica che nella teoria dei campi quantizzati)

$$E = \hbar\omega \quad \mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$$

per cui dedussero il seguente legame esplicito tra grandezze ondulatorie e corpuscolari valido per le particelle microscopiche e le non meglio precisate **‘onde quantomeccaniche’** o **‘onde di De Broglie’** a loro associate

Equazioni di De Broglie-Einstein

$$E = \hbar\omega = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \mathbf{p} = \hbar\mathbf{k} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \omega^2 = k^2 c^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \quad (11)$$

La relazione dispersione (relazione energia-impulso) indica chiaramente che le componenti di Fourier delle **‘onde quantomeccaniche’** si propagano come se il vuoto fosse un **mezzo dispersivo**.

Se ad una particella materiale si devono associare grandezze ondulatorie ad essa si dovrà pure associare una fase ed una certa funzione della fase detta **funzione d'onda** il cui significato fisico dovrà essere precisato. Una data componente di Fourier di tale onda in forma piana dovrà comunque avere la seguente semplice espressione²

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \psi_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = \psi_0 e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - Et)} \quad (12)$$

² L'utilizzo della notazione complessa non è casuale. Infatti alle due espressioni

$$\psi_1(\mathbf{r}, t) = \psi_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

$$\psi_2(\mathbf{r}, t) = \psi_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$$

sono associate a probabilità differenti

$$|\psi_1|^2 = \psi_0^2$$

$$|\psi_2|^2 = \psi_0^2 \sin^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$$

di cui *solo la prima è in accordo con le verifiche sperimentali*.

Come in un qualunque fenomeno ondulatorio, data la funzione d'onda si pone il problema di stabilire **l'equazione d'onda** ovvero l'equazione che ne governa la dinamica.

Trovare l'espressione formale della equazione d'onda in modo diretto per una data componente di Fourier non è difficile poiché sappiamo che una volta sostituita la funzione d'onda (12) essa non deve fare altro che restituire la relazione energia-impulso (10) o la relazione di dispersione (11). A questo scopo vale la pena introdurre le seguenti **operazioni di differenziazione**

$$-i\hbar\nabla\psi(\mathbf{r},t) = -i\hbar\nabla\psi_0e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}-Et)} = -i\hbar\psi_0e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}-Et)}\frac{i}{\hbar}\mathbf{p} = \mathbf{p}\psi(\mathbf{r},t)$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{r},t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_0e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}-Et)} = i\hbar\psi_0e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}-Et)}\left(-\frac{i}{\hbar}E\right) = E\psi(\mathbf{r},t)$$

Queste espressioni mostrano che gli operatori differenziali, agendo sulla generica componente di Fourier, ne determinano la rimoltiplicazione per i valori della quantità di moto ed energia, un fatto che suggerisce di definirli come **operatori della quantità di moto ed energia**:

- Operatore della **quantità di moto**

$$\hat{P} = -i\hbar\nabla$$

- Operatore **dell'energia**

$$\hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$$

Nel linguaggio degli operatori, le precedenti espressioni possono allora essere rilette affermando che in una data componente di Fourier dell'onda quantomeccanica **i valori della quantità di moto e della energia sono autovalori degli operatori \hat{P} ed \hat{E}** mentre la funzione d'onda è un loro autostato

$$\hat{P}\psi(\mathbf{r},t) = \mathbf{p}\psi(\mathbf{r},t) \quad \hat{E}\psi(\mathbf{r},t) = E\psi(\mathbf{r},t)$$

Introdotti gli operatori energia e quantità di moto, possiamo partire dalla relazione relativistica energia-impulso della particella libera ed ottenere la sua equazione d'onda. I passaggi sono i seguenti

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$$

$$E^2\psi(\mathbf{r},t) = p^2c^2\psi(\mathbf{r},t) + m^2c^4\psi(\mathbf{r},t)$$

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)\psi(\mathbf{r},t) = c^2(-i\hbar\nabla)(-i\hbar\nabla)\psi(\mathbf{r},t) + m^2c^4\psi(\mathbf{r},t)$$

Si noti che **tale equazione è lineare per cui deve valere non solo per la data componente di Fourier ma – in modo del tutto**

generale - per una qualunque sovrapposizione di componenti di Fourier e dunque per una qualsiasi onda.

Giungiamo così ad individuare l'**equazione d'onda** cercata detta **equazione di Klein-Gordon** valida per le **'onde quantomeccaniche' libere scalari** (senza spin, essendo ψ scalare)

Equazione di Klein-Gordon

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(\mathbf{r}, t) = \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi(\mathbf{r}, t) \quad (13)$$

Tale equazione fu trovata per la prima volta da Schroedinger il quale però non riuscì a fornire una interpretazione fisica consistente della funzione d'onda. Si trattava di un problema cruciale che poteva essere superato solo interpretando la funzione d'onda nel senso della teoria dei campi quantizzati (affronteremo questo aspetto in maggior dettaglio nella seconda parte del corso). Non essendoci allora i presupposti per un passaggio di tal genere, Schroedinger rinunciò alla equazione d'onda relativistica e ripiegò sulla **equazione d'onda classica** la cui interpretazione sembrava meno problematica. Tale equazione la si può ottenere seguendo esattamente lo stesso tipo di procedimento partendo però dalla espressione **energia-impulso classica delle particelle libere**

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

Compreso questo fatto, possiamo puntare direttamente a costruire l'**equazione d'onda non relativistica per le 'onde quantomeccaniche' in presenza di forze** aggiungendo il loro potenziale alla espressione precedente

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(\mathbf{r})$$

Nel caso di una generica componente di Fourier otteniamo allora

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(\mathbf{r}) \rightarrow E\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{p^2}{2m}\psi(\mathbf{r}, t) + V(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}, t)$$

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\right) \psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2m}(-i\hbar \nabla)(-i\hbar \nabla)\psi(\mathbf{r}, t) + V(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}, t)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\mathbf{r}, t) + V(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r})\right] \psi(\mathbf{r}, t)$$

Data la linearità della equazione, concludiamo che l'espressione ottenuta deve essere valida non solo per la generica componente di Fourier ma per una qualunque funzione d'onda. Definendo allora l'operatore tra parentesi come **operatore hamiltoniano** \hat{H} , otteniamo

la seguente **equazione d'onda di Schroedinger** valida per le **'onde quantomeccaniche'** scalari (senza spin) non relativistiche in presenza di forze

Equazione d'onda di Schroendinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) = \hat{H} \psi(\mathbf{r}, t) \quad \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \quad (14)$$

Tale equazione rese possibile una interpretazione della funzione d'onda che - pur non essendo di validità generale - permetteva comunque di descrivere in modo appropriato i fenomeni quantomeccanici in regime non relativistico ovvero alle basse e medie energie dove non avvengono processi di creazione e/o distruzione di particelle. Tale interpretazione fu proposta da M. Born ed afferma che **il modulo quadrato della funzione d'onda nella posizione \mathbf{r} ed al tempo t rappresenta la densità di probabilità di trovare la particella materiale in quella posizione ed in quell'istante di tempo a seguito di una misura di posizione**. Questa ipotesi va a costituire uno dei fondamentali assiomi interpretativi della meccanica quantistica e comporta che l'espressione

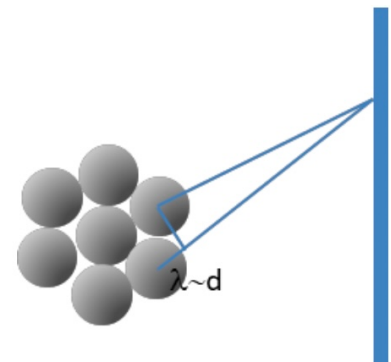
$$|\psi(\mathbf{r}, t)|^2 dV \quad (15)$$

rappresenti la probabilità di misurare la particella materiale al tempo t all'interno del volume dV centrato nella posizione \mathbf{r} .

I fatti appena richiamati chiariscono che **l'interazione particella-proiettile/particella-bersaglio non deve essere pensata come un processo d'urto meccanico ma, piuttosto, come un processo di diffrazione/rifrazione dell'onda quantomeccanica associata alla particella proiettile a seguito della sua interazione con l'ostacolo-bersaglio**. Dunque essenzialmente un processo di **'ottica delle onde quantomeccaniche'** dipendente dal tipo di interazione in gioco.

Se il bersaglio è totalmente riflettente risulterà un processo di diffrazione simile a quello di un tratto di muro piazzato sul percorso di un'onda in acqua. Se il bersaglio è totalmente assorbente risulterà un processo di diffrazione simile a quello di un tratto di scogliera. Se invece il bersaglio opera come un potenziale di forza avremo un processo di rifrazione assimilabile alle distorsioni dei fronti d'onda determinate dalle variazioni di profondità del fondale. Al netto di questi dettagli è comunque evidente che **gli esperimenti fascio-bersaglio con particelle microscopiche devono essere interpretati in chiave ondulatoria**.

Ad esempio, se vogliamo esplorare la struttura di un nucleo atomico dovremo essere in grado di risolvere almeno i singoli nucleoni. Ma l'interferenza di due onde provenienti da due diversi nucleoni è apprezzabile solo se i cammini differiscono di una quantità dell'ordine della lunghezza d'onda.



D'altra parte la differenza di tali cammini è anche dell'ordine delle dimensioni del singolo nucleone. Ciò significa che dovremo impiegare particelle proiettile aventi una lunghezza d'onda di De Broglie dell'ordine delle dimensioni del singolo nucleone ovvero dell'ordine di $1fm$. In questo modo saremo sensibili agli effetti diffrattivi-interferenziali indotti dalla struttura nucleare che potremo osservare raccogliendo le particelle diffuse su di un rivelatore capace di misurarne la posizione angolare. Per quanto riguarda invece la scelta del proiettile converrà utilizzare i neutroni dato che non risentono della interazione elettromagnetica che andrebbe a complicare il fenomeno (si tenga però presente che è più difficile avere a che fare con fasci e rivelatori di neutroni!).

Ricordando che

$$\frac{\hbar c}{200MeV} \sim 1fm$$

si ha

$$p = \hbar k = \hbar \frac{2\pi}{\lambda} = \hbar \frac{2\pi}{1} fm^{-1} = \hbar 2\pi \frac{200MeV}{\hbar c} \sim 1.2 \frac{GeV}{c}$$

$$\epsilon = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \sim \sqrt{(1.2)^2 + (1.0)^2} \sim 1.5 GeV$$

da cui si verifica che con un fascio di particelle di circa $1.2GeV/c$ di impulso ed $1.5GeV$ di energia si raggiunge lo scopo. Se invece vogliamo esplorare la struttura del singolo nucleone dovremo avere un potere risolutivo almeno 100 volte superiore ovvero un impulso 100 volte maggiore e dunque fasci di particelle di impulso dell'ordine di $100GeV$.

Teoria della diffrazione di Kirchhoff

Dato che l'interazione fascio-bersaglio consiste essenzialmente nella diffrazione delle onde di De Broglie associate alle particelle del fascio da parte delle particelle del bersaglio, la corretta soluzione del problema può essere ottenuta cercando l'espressione della funzione d'onda che:

- i) soddisfa l'equazione di Schroedinger con potenziale nella regione in cui il fascio interagisce con il bersaglio;
- ii) soddisfa l'equazione d'onda di Schroedinger libera nella regione esterna alla interazione prima e dopo il bersaglio;
- iii) soddisfa la condizione al contorno di essere un'onda piana prima di incidere sul bersaglio.

Come noto, la diffrazione delle onde scalari classiche da parte di una apertura può essere trattata in modo rigoroso per mezzo della **teoria di Kirchhoff**, dettagliatamente esposta in Appendice 1 .

In particolare, se una apertura A è investita da un'onda monocromatica, la funzione d'onda diffratta $\psi(\mathbf{r})$ in un generico punto dello spazio \mathbf{r} oltre lo schermo è data dalla seguente espressione:

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \iint_{A_p} \left[\psi(\mathbf{r}') (\mathbf{n}' \cdot \nabla') \frac{e^{iks}}{s} - \frac{e^{iks}}{s} (\mathbf{n}' \cdot \nabla') \psi(\mathbf{r}) \right] da' \quad (16)$$

dove

- \mathbf{r} è il vettore posizione del punto di osservazione
- \mathbf{r}' è il vettore posizione di un punto dell'apertura
- $\psi(\mathbf{r}')$ è la funzione d'onda calcolata nel punto \mathbf{r}' dell'apertura
- \mathbf{n}' è la normale allo schermo nel punto \mathbf{r}' dell'apertura
- ∇' è il gradiente della funzione d'onda nel punto \mathbf{r}' dell'apertura
- k è il modulo del vettore d'onda della funzione d'onda incidente
- $s = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ è il modulo del vettore congiungente il punto dell'apertura con quello di osservazione

Dato che la funzione d'onda $\psi(\mathbf{r})$ compare in entrambi i membri, tale espressione richiede la conoscenza della funzione () stessa che si vuole determinare (questo fatto è noto come 'Paradosso di Kirchhoff'). Un circolo vizioso che viene evitato attraverso l'**approssimazione di Kirchhoff** la quale assume che la funzione $\psi(\mathbf{r})$ sia non nulla nei soli punti dell'apertura A dove coincide con la funzione d'onda monocromatica incidente. Consideriamo allora il caso di onda piana monocromatica diretta lungo l'asse delle z positive incidente su di uno schermo piano normale all'asse stesso. Si ha

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = \psi_0 e^{ik\hat{k}(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})} = \psi_0 e^{ikz}$$

$$\mathbf{n}' = \mathbf{k}$$

$$\psi(\mathbf{r}') = \psi_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'} = \psi_0 e^{ik\hat{k}(x'\hat{i} + y'\hat{j} + z'\hat{k})} = \psi_0 e^{ikz'}$$

e inoltre

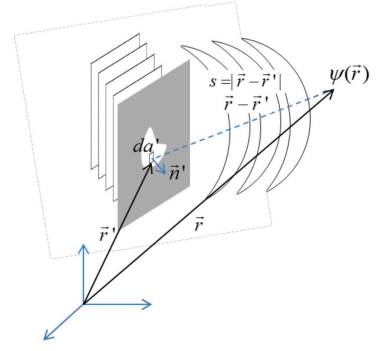
$$s = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

Sviluppiamo ora i termini presenti nell'equazione di Kirchhoff:

$$(\mathbf{n}' \cdot \nabla') \frac{e^{iks}}{s} = \frac{\partial}{\partial z'} \frac{e^{iks}}{s} = ik \frac{e^{iks}}{s} \frac{\partial s}{\partial z'} - \frac{e^{iks}}{s^2} \frac{\partial s}{\partial z'} = \left(ik \frac{e^{iks}}{s} - \frac{e^{iks}}{s^2} \right) \frac{\partial s}{\partial z'}$$

$$(\mathbf{n}' \cdot \nabla') \psi(\mathbf{r}') = \frac{\partial}{\partial z'} \psi_0 e^{ikz'} = ik \psi_0 e^{ikz'}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial z'} &= \frac{\partial}{\partial z'} |\mathbf{r}' - \mathbf{r}| = \frac{\partial}{\partial z'} \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} \\ &= -\frac{1}{2s} s(z - z') = -\frac{z - z'}{s} = \cos \vartheta \end{aligned}$$



con $\cos \vartheta = \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|}$. Da qui ottengo lo sviluppo del primo termine presente nell'equazione di Kirchhoff:

$$(\mathbf{n}' \cdot \nabla') \frac{e^{iks}}{s} = -\left(ik \frac{e^{iks}}{s} - \frac{e^{iks}}{s^2}\right) \cos \vartheta$$

Sostituendo infine le espressioni di $(\mathbf{n}' \cdot \nabla') \frac{e^{iks}}{s}$ e di $(\mathbf{n}' \cdot \nabla') \psi(\mathbf{r}')$ in (16) otteniamo

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\text{Foro}} \left[-\psi_0 e^{ikz'} \left(ik \frac{e^{iks}}{s} - \frac{e^{iks}}{s^2} \right) \cos \vartheta - \frac{e^{iks}}{s} ik \psi_0 e^{ikz'} \right] da'$$

Compriamo la seguente *approssimazione*: se il punto di osservazione è a grande distanza, al primo ordine il termine $1/s^2$ può essere trascurato. Abbiamo

$$\psi(\mathbf{r}) \simeq \frac{1}{4\pi} \iint_{\text{Foro}} \left[-\psi_0 e^{ikz'} ik \frac{e^{iks}}{s} \cos \vartheta - \frac{e^{iks}}{s} ik \psi_0 e^{ikz'} \right] da'$$

$$\psi(\mathbf{r}) \simeq -\psi_0 \frac{ik}{4\pi} \iint_{\text{Foro}} \frac{e^{i(ks+kz')}}{s} (\cos \vartheta + 1) da' \simeq -\psi_0 \frac{ik}{2\pi} \iint_{\text{Foro}} \frac{e^{i(ks+kz')}}{s} da'$$

dove nell'ultimo passaggio si è usato $\vartheta \ll 1 \rightarrow \cos \vartheta \simeq 1$. Si noti che l'espressione integrale ottenuta corrisponde al ben noto principio di Huygens completato dal **fattore di obliquità** che modula l'ampiezza in modo tale da fornire le onde in avanti ed annullare quelle all'indietro.

Nell'integrale appena ottenuto vogliamo esprimere la fase dell'esponentiale in forma generale attraverso vettori

$$\begin{aligned} k(s + z') &= k(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| + z') = k(\sqrt{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \mathbf{n}' \cdot \mathbf{r}'}) \\ &= k \left(r \sqrt{1 - \frac{2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2}} + \mathbf{n}' \cdot \mathbf{r}' \right) = k \left(r + \frac{r'^2}{2r} - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r} + \mathbf{n}' \cdot \mathbf{r}' \right) \\ &= kr + k \frac{r'^2}{2r} - k \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r} + k \mathbf{n}' \cdot \mathbf{r}' \end{aligned}$$

I valori assunti da r' sono molto minori rispetto a quelli di r ; in particolare se D è il diametro del foro ed L la distanza dallo schermo

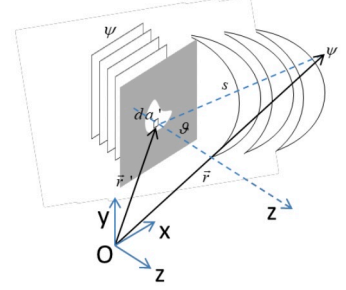
$$k \frac{r'^2}{2r} \simeq \frac{D^2}{\lambda L}$$

Se $\frac{D^2}{\lambda L} \ll 1$ si parla di **regime di Fraunhofer** e il termine in questione può essere trascurato. Si ha quindi

$$k(s + z') = kr - (k\mathbf{n} - k\mathbf{n}') \cdot \mathbf{r}'$$

Introducendo il **vettore d'onda trasferito** (che parametrizza lo spostamento del punto di osservazione dall'asse del fascio)

$$\mathbf{q} = k\mathbf{n} - k\mathbf{n}'$$



$f(\vartheta) = 1 + \cos \vartheta$ fa sì che ci sia un fattore che modula l'ampiezza (ad esempio se $\vartheta = 0$, $f(\vartheta) = 2$ mentre è nullo per $\vartheta = \pi$)

otteniamo infine

$$k(s + z') \simeq kr - \mathbf{q} \cdot \mathbf{r}'$$

Se il riferimento è interno alla apertura, a seguito della condizione di Fraunhofer si ha (sistema \simeq al centro del foro)

$$s \simeq r - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}' \simeq r - r' \cos \vartheta \simeq r$$

da cui, si ottiene infine l'espressione cercata della **funzione d'onda in campo lontano (o di Fraunhofer) diffratta da una apertura A investita da un'onda monocromatica**

$$\psi(\mathbf{r}) \simeq -\psi_0 \frac{ik}{2\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \iint_{apA} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}'} da' \quad (17)$$

Come anticipato però, a noi interessa la situazione complementare, poiché vogliamo descrivere l'interazione fascio-bersaglio come diffrazione delle onde di De Broglie del fascio da parte di un ostacolo avente la forma del bersaglio.

La funzione d'onda ψ_{ostA} diffratta da uno schermo avente la forma di A, può essere ottenuta con il semplice **principio degli schermi complementari** o **principio di Babinet**.

La (17) fornisce la funzione d'onda diffratta dalla apertura A come integrale dei contributi degli elementi d'area di A. E' chiaro che la funzione d'onda ψ_{ostA} , diffratta da uno schermo avente la stessa forma di A, deve essere data da un integrale dei contributi degli elementi d'area della superficie complementare CA. Ne consegue che la somma delle funzioni d'onda $\psi_{apA} + \psi_{ostA}$ debba essere data da un integrale dei contributi degli elementi d'area del piano infinito contenente A, integrale che deve restituire l'onda monocromatica piana incidente

$$\psi_{apA}(\mathbf{r}) + \psi_{ostA}(\mathbf{r}) = \psi_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$$

Da questa relazione possiamo allora ricavare la seguente espressione della **funzione d'onda diffratta da uno schermo di area A investita da un'onda monocromatica**

$$\psi_{ostA}(\mathbf{r}) = \psi_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} - \psi_{apA}(\mathbf{r}) \simeq \psi_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + \psi_0 \frac{e^{ikr}}{r} \frac{ik}{2\pi} \iint_{ost} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}'} da'$$

All'interno dell'integrale di superficie di questa espressione conviene introdurre la **funzione di profilo** Γ (nota anche come “funzione pupilla” in ottica classica) la quale, nel caso di una apertura A totalmente trasparente, risulta definita nel modo seguente

$$\Gamma = \begin{cases} 1 & \text{all'interno di } A \\ 0 & \text{all'esterno di } A \end{cases}$$



Si ha allora

$$\psi_{ostA}(\mathbf{r}) \simeq \psi_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + \psi_0 \frac{e^{ikr}}{r} \frac{ik}{2\pi} \iint_{S_B} \Gamma e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}'} da'$$

dove S_B (superficie del bersaglio) è il piano infinito contenente lo schermo/ostacolo A .

Si noti che ammettendo valori di Γ interni ad A inferiori ad 1, descriviamo un ostacolo A non più totalmente assorbente come uno schermo, ma piuttosto parzialmente trasparente: nel caso limite in cui $\Gamma = 0$ abbiamo infatti un ostacolo A totalmente trasparente che non genera alcuna diffrazione e restituisce l'onda piana incidente.

Potremmo ottenere la massima generalità ammettendo che Γ possa dipendere dalla posizione \mathbf{r}' in A ed assumere anche valori immaginari in modo da descrivere eventuali effetti assorbitivi. Una simile funzione di profilo ci permette di estendere la diffrazione di un ostacolo A totalmente assorbente al caso generale della diffrazione di un ostacolo A modulante e variamente trasparente, capace di descrivere la diffrazione della funzione d'onda da parte della materia nucleare. Sulla base di queste considerazioni, la funzione d'onda assume la forma seguente (lascieremo cadere d'ora in avanti il pedice 'ost')

$$\psi_{ostA}(\mathbf{r}) \simeq \psi_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + \underbrace{\psi_0 \frac{e^{ikr}}{r} \frac{ik}{2\pi} \iint_{S_B} \Gamma(\mathbf{r}') e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}'} da'}_{f(\mathbf{q})} \quad 0 \leq \Gamma(\mathbf{r}') \leq 1$$

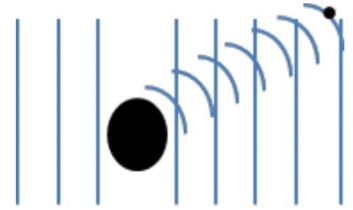
Introducendo l'**ampiezza di diffusione**, che integra i contributi modulanti e assorbenti degli elementi d'area dell'ostacolo corrispondenti ad un certo vettore d'onda trasferito \mathbf{q}

$$f(\mathbf{q}) = \frac{ik}{2\pi} \iint_{S_B} \Gamma(\mathbf{r}') e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}'} da'$$

otteniamo la seguente espressione della **funzione d'onda in campo lontano diffratta da un ostacolo modulante e assorbente**

$$\psi_0(\mathbf{r}) = \psi_0(e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}) + f(\mathbf{q}) \frac{e^{ikr}}{r} \quad (18)$$

Tale espressione mostra che la figura di diffrazione prodotta da un ostacolo in un dato punto dello spazio è il risultato della interferenza dell'onda piana incidente con l'onda circolare proveniente dall'ostacolo modulata dall'ampiezza di diffusione.



Le sezioni d'urto in meccanica quantistica

Dalla definizione generale sappiamo che il quoziente tra sezione d'urto del processo e superficie della sezione del fascio deve fornire la *probabilità del processo* stesso

$$\text{Prob}_{\text{int}} = \frac{\sigma_{diff}}{\Sigma}$$

un fatto che ci permette di affermare che la sezione d'urto del processo altro non è che la frazione di sezione del fascio che produce eventi di quel processo. D'altra parte, nella meccanica quantistica, la probabilità di un certo processo può essere calcolata mettendo a quoziente il modulo quadrato della funzione d'onda del processo integrato sulla superficie di osservazione S_O con il modulo quadrato della funzione d'onda incidente integrata sulla sezione del fascio Σ :

$$\text{Prob}_{\text{int}} = \frac{\iint_{S_O} |\psi_{diff}|^2 dS}{\iint_{\Sigma} |\psi_{inc}|^2 d\Sigma}$$

Otteniamo allora la seguente espressione della **sezione d'urto integrale del processo**

$$\sigma_{int} = \Sigma \frac{\iint_{S_O} |\psi_{diff}|^2 dS}{\iint_{\Sigma} |\psi_{inc}|^2 d\Sigma} \quad (19)$$

ed anche quella della **sezione d'urto elementare del processo**

$$d\sigma_{int} = \Sigma \frac{|\psi_{diff}|^2 dS}{\iint_{\Sigma} |\psi_{inc}|^2 d\Sigma} \quad (20)$$

dove l'elemento dS a numeratore si riferisce, come detto sopra, al generico elemento di superficie di uno schermo lontano S_O su cui osserviamo il processo in esame.

Nel caso il processo in esame consista nella diffusione da parte dell'ostacolo, risulta possibile calcolare in pochi passaggi la sezione d'urto di diffusione nell'angolo solido elementare. Infatti, dalla (18) si ottengono subito le seguenti espressioni delle funzioni d'onda incidente e diffusa

$$\psi_{inc} = \psi_o e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad \psi_{diff} = \psi_o f(\mathbf{q}) \frac{e^{ikr}}{r}$$

tenendo poi conto che l'elemento di superficie di un eventuale schermo S_O di forma sferica può essere espresso come segue

$$dS = r^2 d\Omega$$

sostituendo nella (20) otteniamo

$$d\sigma_{diff} = \Sigma \frac{|\psi_0|^2 |f(\mathbf{q})|^2 \frac{1}{r^2} r^2 d\Omega}{\iint_{\Sigma} |\psi_0|^2 d\Sigma} = \Sigma \frac{|\psi_0|^2 |f(\mathbf{q})|^2 d\Omega}{|\psi_0|^2 \Sigma} = |f(\mathbf{q})|^2 d\Omega$$

da cui, infine, si derivano le espressioni della **sezione d'urto di diffusione differenziale e totale rispetto all'angolo solido**

Significato fisico della probabilità lungo una superficie (da sistemare)

Possiamo vedere la probabilità come qualcosa che fluisce lungo la superficie. Come si scrive un flusso di probabilità su una superficie? Sappiamo già calcolare quanta probabilità fluisce all'interno di un volume. La differenza che sussiste è la stessa che c'è tra densità di carica e densità di corrente

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{J} &= -\frac{\partial \rho}{\partial t} \\ \iiint \nabla \cdot \mathbf{J} dV &= -\frac{\partial}{\partial t} \iiint \rho dV \\ \iint_{S(V)} \mathbf{J} dS &= -\frac{\partial}{\partial t} \iiint \rho dV \quad \mathbf{j} = \rho \mathbf{v} \end{aligned}$$

Questa relazione ci dice: la carica dentro il volume varia in una misura che è uguale al suo flusso di superficie → non c'è variazione totale, solo flusso da una parte all'altra → ciò vale perché le equazioni stabiliscono questo equilibrio

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= |\psi|^2 \mathbf{v} \\ \frac{\iint |\psi_1|^2 v ds}{\iint |\psi_2|^2 v ds} \end{aligned}$$

v è costante essendo in un processo di diffusione.

$$\frac{d\sigma_{diff}}{d\Omega} = |f(\mathbf{q})|^2 \quad \sigma_{diff} = \iint_{\Omega} |f(\mathbf{q})|^2 d\Omega \quad (21)$$

Tale espressione chiarisce che la sezione d'urto differenziale di diffusione rispetto all'angolo solido è data dal modulo quadrato della ampiezza di diffusione, dipendente dal vettore d'onda trasferito che parametrizza l'angolo rispetto alla direzione del fascio.

L'espressione (18) della funzione d'onda di diffrazione prodotta da un ostacolo ci permette pure il calcolo della sezione d'urto di assorbimento del fascio incidente. Tale sezione d'urto può essere ottenuta osservando che la probabilità incidente sulla superficie S_B deve essere assorbita dal bersaglio su S_B , oppure diffratta e osservata sullo schermo di osservazione S_O . Tenendo presente che la funzione d'onda incidente è non nulla sulla sezione del fascio Σ , mentre quella di assorbimento è non nulla sul bersaglio, si ottiene la relazione di bilancio:

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} |\psi_{inc}|^2 dS &= \iint_{S_O} |\psi_{diff}|^2 dS - \iint_{bers} |\psi_{ass}|^2 d\Sigma \\ \iint_{bersaglio} |\psi_{ass}|^2 dS &= \iint_{\Sigma} |\psi_{inc}|^2 d\Sigma - \iint_{S_O} |\psi_{diff}|^2 dS \end{aligned}$$

Da quest'ultima e dalla (19) otteniamo allora la seguente espressione

$$\sigma_{ass} = \Sigma \frac{\iint_{bers} |\psi_{ass}|^2 d\Sigma}{\iint_{\Sigma} |\psi_{inc}|^2 d\Sigma} = \Sigma \frac{\iint_{\Sigma} |\psi_{inc}|^2 d\Sigma - \iint_{S_O} |\psi_{diff}|^2 dS}{\iint_{\Sigma} |\psi_{inc}|^2 d\Sigma}$$

Se lo schermo di osservazione è sufficientemente lontano e soddisfa la condizione di Fraunhofer possiamo usare la funzione d'onda diffusa (18) con asse z normale allo schermo del bersaglio

$$\begin{aligned} |\psi_{inc}|^2 &= |\psi_0|^2 \\ |\psi_{diff}|^2 &= \left| \psi_0 \left(e^{ikz} + f(\mathbf{q}) \frac{e^{ikr}}{r} \right) \right|^2 \\ &= |\psi_0|^2 + |\psi_0|^2 \frac{|f(\mathbf{q})|^2}{r^2} + 2|\psi_0|^2 \Re f(\mathbf{q}) \frac{e^{ik(r-z)}}{r} \end{aligned}$$

Integrando sullo schermo si ha:

$$\iint_{S_O} |\psi_0|^2 dS + \iint_{S_O} |\psi_0|^2 |f(\mathbf{q})|^2 \frac{dS}{r^2} + \iint_{S_O} 2|\psi_0|^2 \Re f(\mathbf{q}) \frac{e^{ik(r-z)}}{r} dS$$

le quali, sostituite nella sezione d'urto d'assorbimento, forniscono

$$\sigma_{ass} = \Sigma \frac{\iint_{\Sigma} |\psi_0|^2 d\Sigma + \iint_{S_O} \left[|\psi_0|^2 \frac{|f(\mathbf{q})|^2}{r^2} + 2|\psi_0|^2 \Re f(\mathbf{q}) \frac{e^{ik(r-z)}}{r} \right] dS}{\iint_{\Sigma} |\psi_0|^2 d\Sigma}$$

$$= |\psi_0|^2 \Sigma + |\psi_0|^2 \sigma_{diff} + 2|\psi_0|^2 \Re \iint_{S_O} f(\mathbf{q}) \frac{e^{ik(r-z)}}{r} dS$$

Il primo termine si è scritto come $|\psi_0|^2 \Sigma$ (e non $|\psi_0|^2 S$) in quanto nel caso reale abbiamo identità di aree perche il nucleo è piccolissimo rispetto alla sezione del fascio e gli angoli di diffusione sono molto piccoli.

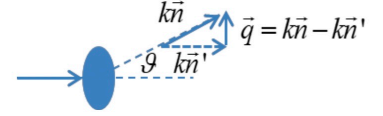
Per quanto riguarda la sezione d'urto di assorbimento si ha

$$\sigma_{ass} = \Sigma \frac{|\psi_0|^2 \Sigma - \left[|\psi_0|^2 \Sigma + |\psi_0|^2 \sigma_{diff} + 2|\psi_0|^2 \Re \iint_{S_O} f(\mathbf{q}) \frac{e^{ik(r-z)}}{r} dS \right]}{|\psi_0|^2 \Sigma}$$

da cui

$$= -\sigma_{diff} - 2|\psi_0|^2 \Re \iint_{S_O} f(\mathbf{q}) \frac{e^{ik(r-z)}}{r} dS \quad (22)$$

Per proseguire negli sviluppi è necessario calcolare l'integrale sullo schermo S_O . Assumendo l'origine del riferimento al centro dell'ostacolo e l'asse z normale al piano che lo contiene e dunque normale anche allo schermo lontano, otteniamo per la fase dell'esponenziale



$$\begin{aligned} r - z &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - z = z \sqrt{1 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2}} \\ &\simeq z \left(1 + \frac{1}{2} \frac{x^2 + y^2}{z^2} \right) - z = \frac{1}{2} \frac{x^2 + y^2}{z^2} \end{aligned}$$

Inoltre, se lo schermo è lontano la figura di diffrazione si estende sullo schermo stesso in misura trascurabile, per cui la coordinata z risulta dominare largamente le coordinate x ed y .

Risostituendo nell'integrale che compare nell'espressione di σ_{ass} abbiamo

$$\begin{aligned} -2\Re \iint_{sch} f(\mathbf{q}) \frac{e^{ik(r-z)}}{r} dS &= 2\Re f(\mathbf{o}) \iint_{sch} \frac{e^{ik \frac{x^2+y^2}{2z}}}{z} dx dy \\ &= \frac{2}{z} \Re f(\mathbf{o}) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{k}{2iz} x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{k}{2iz} y^2} dy = \frac{2}{z} \Re f(\mathbf{0}) \sqrt{\frac{2iz}{k}} \sqrt{\pi} \sqrt{\frac{2iz}{k}} \sqrt{\pi} \\ &= \frac{2}{z} \Re f(\mathbf{0}) \frac{2iz}{k} \pi = \frac{4\pi}{k} \Re i(\Re f(\mathbf{0}) + i\Im f(\mathbf{0})) \end{aligned}$$

ottenendo infine

$$\boxed{\sigma_{diff} + \sigma_{ass} = \frac{4\pi}{k} \Im f(\mathbf{0})}$$

risultato noto come **teorema ottico**.

Teorema ottico

il quale afferma che la somma delle sezioni d'urto totale di diffusione ed assorbimento, detta sezione d'urto totale d'interazione, eguaglia (a meno del fattore moltiplicativo $\frac{4\pi}{k}$ la parte immaginaria

dell'ampiezza di diffusione in avanti (ovvero a vettore d'onda trasferito nullo).

E' importante sapere che le sezioni d'urto totali di diffusione e assorbimento possono essere espresse anche attraverso integrali della funzione di profilo sulla superficie del bersaglio S_B .

Integrando l'ampiezza di diffusione su tutto l'angolo solido nella (21) si ottiene la seguente espressione della sezione d'urto totale di diffusione in funzione del profilo (vedi formula di Kirchhoff in appendice).

$$\sigma_{diff} = \iint_{S_B} |\Gamma(\mathbf{r}')|^2 da' \quad (23)$$

$$\frac{4\pi}{k} \Im \left(\frac{ik}{2\pi} \iint \Gamma da' \right) = \frac{4\pi}{k} \frac{k}{2\pi} \Im \iint (\Re \Gamma + i \Im \Gamma) da' = 2 \iint \Re \Gamma da'$$

$$\iint |\Gamma|^2 da' + \sigma_{ass} = 2 \iint \Re \Gamma da'$$

$$\sigma_{ass} = \iint (2\Re \Gamma - |\Gamma|^2) da'$$

ma $|1 - \Gamma|^2 = 1 + |\Gamma|^2 - 2\Re \Gamma$ e dunque si perviene alle espressioni della sezione d'urto totale di assorbimento in funzione del profilo

$$\boxed{\sigma_{ass} = \iint (1 - |1 - \Gamma|^2) da'} \quad (24)$$

e della sezione d'urto di diffusione

$$\boxed{\sigma_{diff} = \iint |\Gamma|^2 da'} \quad (25)$$

Diffrazione di un disco assorbente

Possiamo usare le formule del precedente paragrafo per calcolare le sezioni d'urto del processo di **diffrazione di un'onda piana su di un ostacolo circolare di raggio R completamente assorbente**.

Adottando un sistema di coordinate polari con l'origine al centro del disco, la **funzione di profilo del disco nero** è definita dalle condizioni

$$\Gamma = \begin{cases} 1 & r \leq R \\ 0 & r > R \end{cases}$$

Si assuma un riferimento con l'origine al centro del disco e l'asse z normale al piano che lo contiene. Con questa scelta, se ci limitiamo a considerare angoli di diffusione non troppo grandi, il vettore \mathbf{q} giace in un piano parallelo a al piano xy e si ha

$$\mathbf{q} = k(\mathbf{n} - \mathbf{n}') = k(\sin \vartheta \hat{i}_r + \cos \vartheta \hat{k} - \hat{k}') \simeq k \sin \vartheta \hat{i}_r$$

il vettore \mathbf{r} , che identifica i punti del disco circolare (per comodità lasciamo cadere l'accento), giace sul piano del bersaglio xy a formare un angolo φ con \mathbf{q} per cui si ha $\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} = qr \cos \varphi$, ed infine – adottate le coordinate cilindriche – l'elemento d'area vale $da = r d\varphi dr$. Ricordando l'ampiezza di diffusione

$$f(\mathbf{q}) = \frac{ik}{2\pi} \iint_{S_B} \Gamma(\mathbf{r}') e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} da$$

questa si scriverà come

$$\begin{aligned} f(\mathbf{q}) &= \frac{ik}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \Gamma(r) e^{-iq \cos \varphi r} r d\varphi dr \\ &= \frac{ik}{2\pi} \int_0^R r \left[\int_0^{2\pi} e^{-iq \cos \varphi r} d\varphi \right] dr \\ &= ik \int_0^R \underbrace{\left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-iq \cos \varphi r} d\varphi \right]}_{J_0(qr)} dr \end{aligned}$$

dove $J_0(qr)$ è nota come **funzione di Bessel di ordine zero**:

$$J_0(qr) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-iq \cos \varphi r} d\varphi$$

Abbiamo allora la seguente espressione dell'ampiezza di diffusione:

$$f(\mathbf{q}) = ik \int_0^R r J_0(qr) dr$$

che può essere integrata per ottenere (Vedi Appendice)

$$f(\mathbf{q}) = ik \frac{R}{q} J_1(qR)$$

dove $J_1(qR)$ è la funzione di Bessel di ordine 1. Tenendo ora conto che $q = k \sin \vartheta$ otteniamo infine

$$f(\mathbf{q}) = i \frac{R}{\sin \vartheta} J_1(kR \sin \vartheta) \quad (26)$$

Tenendo conto ora della funzione profilo considerata dalla (25) si ottiene la seguente espressione

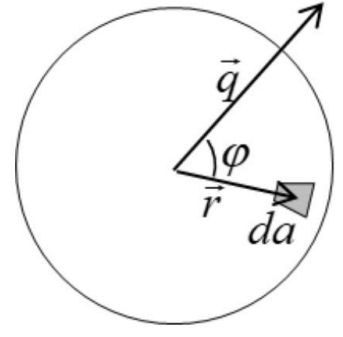
$$\sigma_{diff} = \iint_{S_B} |\Gamma(\mathbf{r})|^2 da = \iint_{S_B} da$$

dalla quale segue la **sezione d'urto totale del disco assorbente**

$$\sigma_{diff} = \pi R^2 \quad (27)$$

Calcoliamo l'ampiezza di diffusione in avanti

$$f(\mathbf{0}) = \frac{ik}{2\pi} \iint_{S_O} \Gamma(\mathbf{r}) da = \frac{ik}{2\pi} \iint_{disco} da = \frac{ik}{2\pi} \pi R^2 = i \frac{kR^2}{2}$$



qui figura a lato plottata con R delle funzioni di Bessel di ordine 0

e ricordando il teorema ottico abbiamo

$$\sigma_{tot} = \frac{4\pi}{k} \Im f(\mathbf{0}) = \frac{4\pi}{k} \Im \left(i \frac{kR^2}{2} \right) = \frac{4\pi}{k} \frac{kR^2}{2}$$

da segue la **sezione d'urto totale d'interazione del disco assorbente**

$$\sigma_{tot} = 2\pi R^2 \quad (28)$$

Dal teorema ottico infine

$$\sigma_{ass} = \sigma_{tot} - \sigma_{diff} = 2\pi^2 - \pi R^2$$

da cui segue l'espressione della **sezione d'urto totale di assorbimento del disco assorbente**

$$\sigma_{ass} = \pi R^2 \quad (29)$$

Troviamo allora che la sezione d'urto totale d'interazione di un'onda piana su di un disco assorbente è il doppio della superficie del disco stesso, poiché sia la sezione d'urto totale di diffusione che quella di assorbimento hanno entrambe il valore di quella superficie.

Appendici

Appendice 1 : La formula della diffrazione di Kirchhoff