0.1 Vettori e Sistemi di riferimento

Derivate di vettori e versori

$$\hat{\mathbf{v}} \equiv \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

Derivata di un versore (da mettere in sezione apposita) Definendo un vettore $\omega = \hat{\mathbf{u}} \times \hat{\mathbf{n}}$ con modulo $\frac{d\varphi}{dt}$

$$\frac{d\hat{\mathbf{u}}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\hat{\mathbf{n}} = \vec{\omega} \times \hat{\mathbf{u}}$$

Coordinate polari piane

Un sistema di riferimento di coordinate polari piane è un sistema di coordinate caratterizzato da un **polo**, l'origine O, e da un **asse polare**, la semiretta orientata uscente da O. La direzione di ogni punto P è caratterizzata da due versori:

$$\hat{\mathbf{u}}_r \quad \text{(versore radiale)} \qquad \text{e} \qquad \hat{\mathbf{u}}_\theta \quad \text{(versore trasverso)}$$

con $\hat{\mathbf{u}}_r$ indicante la direzione del vettore direzione $\vec{r}$, che infatti si scrive come $\vec{r} = r\,\hat{\mathbf{u}}_r$, e con $\hat{\mathbf{u}}_\theta$ versore tangente alla circonferenza e diretto verso angoli θ crescenti ($\hat{\mathbf{u}}_r \perp \hat{\mathbf{u}}_\theta$).
Nel caso in cui la direzione dell'asse polare sia quella del versore $\hat{\mathbf{i}}$ allora la relazione tra le coordinate polari piane (r, θ) e quelle cartesiane (x, y) è il seguente:

$$\begin{cases} x = rcos\theta \\ y = rsin\theta \end{cases} \quad ; \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = arctan\frac{y}{x} \end{cases}$$

e tra i versori polari e cartesiani:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{u}}_r = (\hat{\mathbf{u}}_r \cdot \hat{\mathbf{i}})\hat{\mathbf{i}} + (\hat{\mathbf{u}}_r \cdot \hat{\mathbf{j}})\hat{\mathbf{j}} = cos\theta\hat{\mathbf{i}} + sin\theta\hat{\mathbf{j}} \\ \hat{\mathbf{u}}_\theta = (\hat{\mathbf{u}}_\theta \cdot \hat{\mathbf{i}})\hat{\mathbf{i}} + (\hat{\mathbf{u}}_\theta \cdot \hat{\mathbf{j}})\hat{\mathbf{j}} = -sin\theta\hat{\mathbf{i}} + cos\theta\hat{\mathbf{j}} \end{cases}$$

Il vettore direzione $\vec{r} = \hat{\mathbf{u}}_r$ in relazione alle coordinate cartesiane:

$$\vec{r} = rcos\theta\hat{\mathbf{i}} + rsin\theta\hat{\mathbf{j}}$$

Mentre il vettore $\vec{\varphi}$ sempre tangente alla curva con direzione $\hat{\mathbf{u}}_\theta$ (in un moto circolare corrisponde alla velocità tangenziale):

$$\vec{\varphi} = -\varphi sin\theta + \varphi cos\theta$$

Coordinate polari sferiche

0.2 Cinematica

Un corpo è in moto, *rispetto ad un sistema di riferimento S*, quando la sua posizione in S cambia nel tempo. Le caratteristiche del moto del *punto materiale* sono note se è noto il vettore posizione $\vec{r}$ in funzione del tempo, ovvero:

$$\vec{r}(t) = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

nel sistema di riferimento S. Conoscere il vettore posizione significa conoscere come variano tutte le coordinate, x, y, z in funzione del tempo. Nell'ipotesi implicita di continuità del moto(il tempo è una variabile continua) il moto può essere descritto attraverso l' **equazione vettoriale**

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

L'insieme delle posizioni occupate dal punto nel suo moto è la sua **traiettoria** γ. Nota la traiettoria γ, chiamiamo con s il numero reale detto *ascissa curvilinea*, il cui modulo, $|s|$, fornisce la lunghezza dell'arco di curva dall'origine scelta alla posizione sulla traiettoria del punto P. Introducendo la variabile s possiamo descrivere il moto anche con le seguenti due funzioni:

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}(s) \\ s = s(t) \end{cases}$$

dove in un sistema di coordinate cartesiane, $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{r} = \vec{r}(s) \Longrightarrow \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \longrightarrow \text{equazione della traiettoria in forma parametrica}$$

$$s = s(t) \longrightarrow \text{equazione oraria}$$

Il vettore velocità

Si definisce **velocità media** il vettore:

$$\vec{v}_m \equiv \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

Esso è indipendente dal percorso compiuto dal punto materiale nei vari istanti di tempo ma solo dalla posizione inziale e finale. Definiamo poi il vettore **velocità istantanea** nel modo seguente:

$$\vec{v} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

$$\vec{v}(t) \equiv \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

Questa è la rappresentazione *intrinseca* della velocità. Considerando due posizioni successive occuppate dal punto lungo la traiettoria γ, il vettore $\Delta \vec{r}$ ha direzione secante alle due posizioni sulla traiettoria. Quando l'arco di traiettoria Δs tende a 0 allora:

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} = 1$$

In questa situazione il vettore velocità tende ad assumere direzione tangente alla traiettoria. A questo punto il **versore tangente** alla curva nel punto P sarà:

$$\hat{\mathbf{u}}_t = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} = \frac{d\vec{r}}{ds}$$

Questo versore rappresenta la direzione del vettore velocità istantea che può quindi essere riscritta come:

$$\vec{v}(t) \equiv \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt}\hat{\mathbf{u}} = v_s \hat{\mathbf{u}}_t = \dot{s}\hat{\mathbf{u}}_t$$

$$v_s = \frac{ds}{dt} \longrightarrow \text{modulo della velocità}$$

La rappresentazione cartesiana della velocità è la seguente:

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{dy}{dt}\hat{\mathbf{j}} + \frac{dz}{dt}\hat{\mathbf{k}}$$

$$\vec{v} = \dot{x}\hat{\mathbf{i}} + \dot{y}\hat{\mathbf{j}} + \dot{z}\hat{\mathbf{k}}$$

Il vettore accelerazione

Si definisce **accelerazione media** il vettore:

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

Il vettore **accelerazione** istantanea è definito dal limite:

$$\vec{a} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

In coordinate cartesiane l'accelerazione corrisponde a:

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{dv_y}{dt}\hat{\mathbf{j}} + \frac{dv_z}{dt}\hat{\mathbf{k}} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{\mathbf{i}} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{\mathbf{j}} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{\mathbf{k}}$$

Dal calcolo di derivazione rispetto alla velocità:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v_s\hat{\mathbf{u}}_t) = \frac{dv_s}{dt}\hat{\mathbf{u}}_t + \frac{d\hat{\mathbf{u}}_t}{dt}$$

si nota come l'accelerazione sia composta da due contributi: uno parrallelo a $\hat{\mathbf{u}}_t$ e uno normale a $\hat{\mathbf{u}}_t$:

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

$$\vec{a}_t = \frac{d^2s}{dt^2}\hat{\mathbf{u}}_t \equiv \ddot{s}\hat{\mathbf{u}}_t \qquad (\textbf{accelerazione tangenziale})$$

$$\vec{a}_n = \frac{d\hat{\mathbf{u}}_t}{dt} = \frac{d\hat{\mathbf{u}}_t}{ds}\frac{ds}{dt} = \dot{s}\frac{d\hat{\mathbf{u}}_t}{ds} = \dot{s}\frac{d\varphi}{ds}\hat{\mathbf{u}}_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho}\hat{\mathbf{u}}_n \quad (\textbf{accelerazione normale})$$

dove ρ è il raggio della *circonferenza osculatrice*, ovvero la circonferenza che approssima localmente il moto di un punto materiale, $\hat{\mathbf{u}}_n$ è il versore $\perp$ a $\hat{\mathbf{u}}_n$. Gli ultimi due passaggi sono ottenuti derivando il versore $\hat{\mathbf{u}}_t$ secondo il metodo noto trovando quindi una forma che è caratteristica della traiettoria γ in esame.
Si deduce quindi che qualsiasi moto con traiettoria curva è *accelerato* dal momento che la componente normale dell'accelerazione $\hat{\mathbf{a}}_n$ non è nulla(come nel caso di un moto rettilineo $\longrightarrow \rho = cost$).

I moti piu elementari di cui è nota la traiettoria γ possono essere descritti tramite le due equazioni:

$$\begin{cases} \vec{v} = \dot{s}\hat{\mathbf{u}}_t \\ \vec{a} = \ddot{s}\hat{\mathbf{u}}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\hat{\mathbf{u}}_n \end{cases}$$

Moti elementari: moto rettilineo uniforme

Determinare l'equazione del moto significa conoscendo le espressioni di velocità e accelerazione e nota la traiettoria γ significa risolvere il *problema inverso* della cinematica. In un moto rettilineo uniforme il punto materiale percorre spazi uguale in tempi uguali: si ha $\dot{s}(t) = \dot{s}_0 \equiv v_0 = cost$.
Per determinare l'espressione di $s(t)$:

$$s(t) = \int \dot{s}dt = \dot{s}_0 \int dt = \dot{s}_0 t + C = v_0 t + C$$

Sapendo quanto vale $s(t_0) = s_0$ si ha che la **legge oraria** è :

$$s = \dot{s_0}t + s_0 = v_0 t + s_0$$

In coordinate cartesiane:

$$\vec{v} = v_0\hat{\mathbf{i}}$$

Dato che il moto avviene solo su un asse, la legge oraria è:

$$x(t) = v_0 t + x_0$$

L'accelerazione in ogni istante $\vec{a}(t) = 0$.

Moti elementari: moto rettilineo uniformemente accelerato

Questo tipo di moto è caratterizzato da un'accelerazione costante ovvero $\ddot{s}(t) = \frac{d\dot{s}}{dt} \equiv a(t) = cost$.
Attraverso l'integrazione come per il moto rettilineo uniforme, e preso $t(0) = 0$:

$$\dot{s} = \ddot{s}_0 t + \dot{s}_0$$

si ottiene l'equazione differenziale che descrive il cambiamento nel tempo della velocità che, risolta, fornisce l'espressione della funzione di $s(t)$:

$$s = \frac{1}{2}\ddot{s_0}t^2 + \dot{s_0}t + s_0 f$$

Nel caso in cui $t_0 \neq 0$ risolvendo il sistema dato dalle due relazioni precedenti considerando un tempo $(t - t_0)$:

$$\begin{cases} \dot{s} = \ddot{s}_0(t - t_0) + \dot{s}_0 \\ s = \frac{1}{2}\ddot{s}_0(t - t_0)^2 + \dot{s}_0(t - t_0) + s_0 \end{cases}$$

si ottiene l'utile relazione:

$$v^2 = {v_0}^2 + 2\ddot{s}_0(s - s_0) \equiv {v_0}^2 + 2a_t(s - s_0)$$

Analogamente all'altro moto rettilineo trattato, il moto avviene solo su un asse, quindi le leggi che descrivono il moto sono:

$$x(t) = \frac{1}{2}a_0t^2 + v_0t + x_0 \qquad \textbf{(legge oraria)}$$

$$\dot{x}(t) = a_0t + v_0 \quad \textbf{(variazione di velocità)}$$

Moti elementare: moto circolare

La traiettoria di un moto circolare coincide con una circonferenza, che sappiamo avere equazione del tipo:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

Fissando un sistema di riferimento ottimale a questa situazione, ovvero quello con origine nel centro della traiettoria circolare e coincidente con il piano della circonferenza, cioè un piano xy con $z = 0$