

## 0.1 Sistemi di riferimento

Versore

$$\hat{v} \equiv \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

*Derivata di un versore* (da mettere in sezione apposita) Definendo un vettore  $\omega = \hat{u} \times \hat{n}$  con modulo  $\frac{d\varphi}{dt}$

$$\frac{d\hat{u}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \hat{n} = \vec{\omega} \times \hat{u}$$

## 0.2 Cinematica

Un corpo è in moto, *rispetto ad un sistema di riferimento*  $S$ , quando la sua posizione in  $S$  cambia nel tempo. Le caratteristiche del moto del *punto materiale* sono note se è noto il vettore posizione  $\vec{r}$  in funzione del tempo, ovvero:

$$\vec{r}(t) = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

nel sistema di riferimento  $S$ . Conoscere il vettore posizione significa conoscere come variano tutte le coordinate,  $x, y, z$  in funzione del tempo. Nell'ipotesi implicita di continuità del moto (il tempo è una variabile continua) il moto può essere descritto attraverso l' **equazione vettoriale**

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

L'insieme delle posizioni occupate dal punto nel suo moto è la sua **traiettoria**  $\gamma$ . Nota la traiettoria  $\gamma$ , chiamiamo con  $s$  il numero reale detto *ascissa curvilinea*, il cui modulo,  $|s|$ , fornisce la lunghezza dell'arco di curva dall'origine scelta alla posizione sulla traiettoria del punto P. Introducendo la variabile  $s$  possiamo descrivere il moto anche con le seguenti due funzioni:

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}(s) \\ s = s(t) \end{cases}$$

dove in un sistema di coordinate cartesiane,  $\mathbb{R}^3$ :

$$\vec{r} = \vec{r}(s) \implies \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \longrightarrow \text{equazione della traiettoria in forma parametrica}$$

$$s = s(t) \longrightarrow \text{equazione oraria}$$

### Il vettore velocità

Si definisce **velocità media** il vettore:

$$\vec{v}_m \equiv \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

Esso è indipendente dal percorso compiuto dal punto materiale nei vari istanti di tempo ma solo dalla posizione iniziale e finale. Definiamo poi il vettore **velocità istantanea** nel modo seguente:

$$\vec{v} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{v}_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

$$\vec{v}(t) \equiv \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

Questa è la rappresentazione *intrinseca* della velocità. Considerando due posizioni successive occupate dal punto lungo la traiettoria  $\gamma$ , il vettore  $\Delta \vec{r}$  ha direzione secante alle due posizioni sulla traiettoria. Quando l'arco di traiettoria  $\Delta s$  tende a 0 allora:

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} = 1$$

In questa situazione il vettore velocità tende ad assumere direzione tangente alla traiettoria. A questo punto il **versore tangente** alla curva nel punto P sarà:

$$\hat{\mathbf{u}}_t = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\mathbf{r}}}{\Delta s} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{ds}$$

Questo versore rappresenta la direzione del vettore velocità istantanea che può quindi essere riscritta come:

$$\vec{\mathbf{v}}(t) \equiv \frac{d\vec{\mathbf{r}}(t)}{dt} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt} \hat{\mathbf{u}} = v_s \hat{\mathbf{u}}_t = \dot{s} \hat{\mathbf{u}}_t$$

$$\|\vec{\mathbf{v}}\| = \left| \frac{ds}{dt} \right| \rightarrow \text{modulo della velocità}$$

La rappresentazione cartesiana della velocità è la seguente:

$$\vec{\mathbf{v}} = \frac{dx}{dt} \hat{\mathbf{i}} + \frac{dy}{dt} \hat{\mathbf{j}} + \frac{dz}{dt} \hat{\mathbf{k}}$$

$$\vec{\mathbf{v}} = \dot{x} \hat{\mathbf{i}} + \dot{y} \hat{\mathbf{j}} + \dot{z} \hat{\mathbf{k}}$$

## Il vettore accelerazione

Si definisce **accelerazione media** il vettore:

$$\vec{\mathbf{a}}_m = \frac{\vec{\mathbf{v}}(t + \Delta t) - \vec{\mathbf{v}}(t)}{\Delta t}$$

Il vettore **accelerazione** istantanea è definito dal limite:

$$\vec{\mathbf{a}} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{\mathbf{a}}_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\mathbf{v}}}{\Delta t}$$

$$\vec{\mathbf{a}}(t) = \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = \frac{d^2 \vec{\mathbf{r}}}{dt^2}$$

In coordinate cartesiane l'accelerazione corrisponde a:

$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{dv_x}{dt} \hat{\mathbf{i}} + \frac{dv_y}{dt} \hat{\mathbf{j}} + \frac{dv_z}{dt} \hat{\mathbf{k}} = \frac{d^2 x}{dt^2} \hat{\mathbf{i}} + \frac{d^2 y}{dt^2} \hat{\mathbf{j}} + \frac{d^2 z}{dt^2} \hat{\mathbf{k}}$$

Dal calcolo di derivazione rispetto alla velocità:

$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = \frac{d}{dt}(v_s \hat{\mathbf{u}}_t) = \frac{dv_s}{dt} \hat{\mathbf{u}}_t + \frac{d\hat{\mathbf{u}}_t}{dt}$$

si nota come l'accelerazione sia composta da due contributi: uno parallelo a  $\hat{\mathbf{u}}_t$  e uno normale a  $\hat{\mathbf{u}}_t$ :

$$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}_t + \vec{\mathbf{a}}_n$$

$$\vec{\mathbf{a}}_t = \frac{d^2 s}{dt^2} \hat{\mathbf{u}}_t \equiv \ddot{s} \hat{\mathbf{u}}_t \quad (\text{accelerazione tangenziale})$$

$$\vec{\mathbf{a}}_n = \frac{d\hat{\mathbf{u}}_t}{dt} = \frac{d\hat{\mathbf{u}}_t}{ds} \frac{ds}{dt} = \dot{s} \frac{d\hat{\mathbf{u}}_t}{ds} = \dot{s} \frac{d\varphi}{ds} \hat{\mathbf{u}}_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho} \hat{\mathbf{u}}_n \quad (\text{accelerazione normale})$$

Gli ultimi due passaggi sono ottenuti derivando il versore  $\hat{\mathbf{u}}_t$  secondo il metodo noto trovando quindi una forma che è caratteristica della traiettoria  $\gamma$  in esame (vedi moto circolare).

Si deduce quindi che qualsiasi moto con traiettoria curva è *accelerato* dal momento che la componente normale dell'accelerazione  $\hat{\mathbf{a}}_n$  non è nulla (come nel caso di un moto rettilineo).

## Moto rettilineo uniforme

## Moto rettilineo uniformemente accelerato

## Moto circolare uniforme