0.1 Sistemi di riferimento

Versore

$$\hat{\boldsymbol{v}} \equiv \frac{\vec{\boldsymbol{v}}}{\|\vec{\boldsymbol{v}}\|}$$

Derivata di un versore (da mettere in sezione apposita) Definendo un vettore $\omega = \hat{\boldsymbol{u}} \times \hat{\boldsymbol{n}}$ con modulo $\frac{d\varphi}{dt}$

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{u}}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\hat{\boldsymbol{n}} = \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \hat{\boldsymbol{u}}$$

0.2 Cinematica

Un corpo è in moto, *rispetto ad un sistema di riferimento S*, quando la sua posizione in S cambia nel tempo. Le caratteristiche del moto del *punto materiale* sono note se è noto il vettore posizione $\vec{\boldsymbol{r}}$ in funzione del tempo, ovvero:

$$\vec{\boldsymbol{r}}(t) = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

nel sistema di riferimento S. Conoscere il vettore posizione significa conoscere come variano tutte le coordinate, x, y, z in funzione del tempo. Nell'ipotesi implicita di continuità del moto(il tempo è una variabile continua) il moto può essere descritto attraverso l' **equazione vettoriale**

$$\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{r}}(t)$$

L'insieme delle posizioni occupate dal punto nel suo moto è la sua **traiettoria** γ. Nota la traiettoria γ, chiamiamo con s il numero reale detto *ascissa curvilinea*, il cui modulo, $|s|$, fornisce la lunghezza dell'arco di curva dall'origine scelta alla posizione sulla traiettoria del punto P. Introducendo la variabile s possiamo descrivere il moto anche con le seguenti due funzioni:

$$\begin{cases} \vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{r}}(s) \\ s = s(t) \end{cases}$$

dove in un sistema di coordinate cartesiane, $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{r}}(s) \Longrightarrow \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \longrightarrow \text{equazione della traiettoria in forma parametrica}$$

$$s = s(t) \longrightarrow \text{equazione oraria}$$

Il vettore velocità

Si definisce **velocità media** il vettore:

$$\vec{\boldsymbol{v}}_m \equiv \frac{\vec{\boldsymbol{r}}(t + \Delta t) - \vec{\boldsymbol{r}}(t)}{\Delta t}$$

Esso è indipendente dal percorso compiuto dal punto materiale nei vari istanti di tempo ma solo dalla posizione inziale e finale. Definiamo poi il vettore **velocità istantanea** nel modo seguente:

$$\vec{\boldsymbol{v}} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \vec{\boldsymbol{v}}_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\boldsymbol{r}}}{\Delta t}$$

$$\vec{\boldsymbol{v}}(t) \equiv \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}(t)}{dt}$$

Questa è la rappresentazione *intrinseca* della velocità. Considerando due posizioni successive occuppate dal punto lungo la traiettoria γ, il vettore $\Delta\vec{\boldsymbol{r}}$ ha direzione secante alle due posizioni sulla traiettoria. Quando l'arco di traiettoria Δs tende a 0 allora:

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \vec{\boldsymbol{r}}}{\Delta s} = 1$$

In questa situazione il vettore velocità tende ad assumere direzione tangente alla traiettoria. A questo punto il **versore tangente** alla curva nel punto P sarà:

$$\hat{\boldsymbol{u}}_t = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \vec{\boldsymbol{r}}}{\Delta s} = \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{ds}$$

Questo versore rappresenta la direzione del vettore velocità istantea che può quindi essere riscritta come:

$$\vec{\boldsymbol{v}}(t) \equiv \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}(t)}{dt} = \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt}\hat{\boldsymbol{u}} = v_s \hat{\boldsymbol{u}}_t = \dot{s}\hat{\boldsymbol{u}}_t$$

$$v_s = \frac{ds}{dt} \longrightarrow \text{modulo della velocità}$$

La rappresentazione cartesiana della velocità è la seguente:

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \frac{dx}{dt}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \frac{dy}{dt}\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \frac{dz}{dt}\hat{\boldsymbol{k}}$$

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \dot{x}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \dot{y}\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \dot{z}\hat{\boldsymbol{k}}$$

Il vettore accelerazione

Si definisce **accelerazione media** il vettore:

$$\vec{\boldsymbol{a}}_m = \frac{\vec{\boldsymbol{v}}(t+\Delta t) - \vec{\boldsymbol{v}}(t)}{\Delta t}$$

Il vettore **accelerazione** istantanea è definito dal limite:

$$\vec{\boldsymbol{a}} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \vec{\boldsymbol{a}}_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\boldsymbol{v}}}{\Delta t}$$

$$\vec{\boldsymbol{a}}(t) = \frac{d\vec{\boldsymbol{v}}}{dt} = \frac{d^2\vec{\boldsymbol{r}}}{dt^2}$$

In coordinate cartesiane l'accelerazione corrisponde a:

$$\vec{\boldsymbol{a}} = \frac{dv_x}{dt}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \frac{dv_y}{dt}\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \frac{dv_z}{dt}\hat{\boldsymbol{k}} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{\boldsymbol{k}}$$

Dal calcolo di derivazione rispetto alla velocità:

$$\vec{\boldsymbol{a}} = \frac{d\vec{\boldsymbol{v}}}{dt} = \frac{d}{dt}(v_s\hat{\boldsymbol{u}}_t) = \frac{dv_s}{dt}\hat{\boldsymbol{u}}_t + \frac{d\hat{\boldsymbol{u}}_t}{dt}$$

si nota come l'accelerazione sia composta da due contributi: uno parrallelo a $\hat{\boldsymbol{u}}_t$ e uno normale a $\hat{\boldsymbol{u}}_t$:

$$\vec{\boldsymbol{a}} = \vec{\boldsymbol{a}}_t + \vec{\boldsymbol{a}}_n$$

$$\vec{\boldsymbol{a}}_t = \frac{d^2s}{dt^2}\hat{\boldsymbol{u}}_t \equiv \ddot{s}\hat{\boldsymbol{u}}_t \qquad (\textbf{accelerazione tangenziale})$$

$$\vec{\boldsymbol{a}}_n = \frac{d\hat{\boldsymbol{u}}_t}{dt} = \frac{d\hat{\boldsymbol{u}}_t}{ds}\frac{ds}{dt} = \dot{s}\frac{d\hat{\boldsymbol{u}}_t}{ds} = \dot{s}\frac{d\varphi}{ds}\hat{\boldsymbol{u}}_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho}\hat{\boldsymbol{u}}_n \quad (\textbf{accelerazione normale})$$

dove ρ è il raggio della *circonferenza osculatrice*, ovvero la circonferenza che approssima localmente il moto di un punto materiale, $\hat{\boldsymbol{u}}_n$ è il versore $\perp$ a $\hat{\boldsymbol{u}}_n$. Gli ultimi due passaggi sono ottenuti derivando il versore $\hat{\boldsymbol{u}}_t$ secondo il metodo noto trovando quindi una forma che è caratteristica della traiettoria γ in esame.
Si deduce quindi che qualsiasi moto con traiettoria curva è *accelerato* dal momento che la componente normale dell'accelerazione $\hat{\boldsymbol{a}}_n$ non è nulla(come nel caso di un moto rettilineo $\longrightarrow \rho = cost$).

I moti piu elementari di cui è nota la traiettoria γ possono essere descritti tramite le due equazioni:

$$\begin{cases} \vec{\boldsymbol{v}} = \dot{s}\hat{\boldsymbol{u}}_t \\ \vec{\boldsymbol{a}} = \ddot{s}\hat{\boldsymbol{u}}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\hat{\boldsymbol{u}}_n \end{cases}$$

Moti elementari: moto rettilineo uniforme

Determinare l'equazione del moto significa conoscendo le espressioni di velocità e accelerazione e nota la traiettoria γ significa risolvere il *problema inverso* della cinematica. In un moto rettilineo uniforme il punto materiale percorre spazi uguale in tempi uguali: si ha $\dot{s}(t) = \dot{s}_0 \equiv v_0 = cost.$
Per determinare l'espressione di $s(t)$:

$$s(t) = \int \dot{s}dt = \dot{s}_0 \int dt = \dot{s}_0 t + C = v_0 t + C$$

Sapendo quanto vale $s(t_0) = s_0$ si ha che la **legge oraria** è :

$$s = \dot{s_0}t + s_0 = v_0 t + s_0$$

In coordinate cartesiane:

$$\vec{\boldsymbol{v}} = v_0 \hat{\boldsymbol{i}}$$

Dato che il moto avviene solo su un asse, la legge oraria è:

$$x(t) = v_0 t + x_0$$

L'accelerazione in ogni istante $\vec{\boldsymbol{a}}(t) = 0$.

Moti elementari: moto rettilineo uniformemente accelerato

Questo tipo di moto è caratterizzato da un'accelerazione costante ovvero $\ddot{s}(t) = \frac{d\dot{s}}{dt} \equiv a(t) = cost.$
Attraverso l'integrazione come per il moto rettilineo uniforme, e preso $t(0) = 0$:

$$\dot{s} = \ddot{s}_0 t + \dot{s}_0$$

si ottiene l'equazione differenziale che descrive il cambiamento nel tempo della velocità che, risolta, fornisce l'espressione della funzione di $s(t)$:

$$s(t) = \frac{1}{2}\ddot{s_0}t^2 + \dot{s_0}t + s_0 f$$

Moto elementare: moto circolare uniforme