0.1 Vettori e Sistemi di riferimento

Teorema del triplo prodotto vettoriale

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \times (\vec{a} \times \vec{c}) - \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b})$$

Derivate di vettori e versori

$$\hat{\mathbf{v}} \equiv \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

Derivata di un versore (da mettere in sezione apposita) Definendo un vettore $\omega = \hat{\mathbf{u}} \times \hat{\mathbf{n}}$ con modulo $\frac{d\varphi}{dt}$

$$\frac{d\hat{\mathbf{u}}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\hat{\mathbf{n}} = \vec{\omega} \times \hat{\mathbf{u}}$$

Coordinate polari piane

Un sistema di riferimento di coordinate polari piane è un sistema di coordinate caratterizzato da un **polo**, l'origine O, e da un **asse polare**, la semiretta orientata uscente da O. La direzione di ogni punto P è caratterizzata da due versori:

$$\hat{\mathbf{u}}_r \quad \text{(versore radiale)} \qquad \text{e} \qquad \hat{\mathbf{u}}_\theta \quad \text{(versore trasverso)}$$

con $\hat{\mathbf{u}}_r$ indicante la direzione del vettore direzione $\vec{r}$, che infatti si scrive come $\vec{r} = r\,\hat{\mathbf{u}}_r$, e con $\hat{\mathbf{u}}_\theta$ versore tangente alla circonferenza e diretto verso angoli θ crescenti ($\hat{\mathbf{u}}_r \perp \hat{\mathbf{u}}_\theta$).
Nel caso in cui la direzione dell'asse polare sia quella del versore $\hat{\mathbf{i}}$ allora la relazione tra le coordinate polari piane (r, θ) e quelle cartesiane (x, y) è il seguente:

$$\begin{cases} x = rcos\theta \\ y = rsin\theta \end{cases} ; \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = arctan\frac{y}{x} \end{cases}$$

e tra i versori polari e cartesiani:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{u}}_r = (\hat{\mathbf{u}}_r \cdot \hat{\mathbf{i}})\hat{\mathbf{i}} + (\hat{\mathbf{u}}_r \cdot \hat{\mathbf{j}})\hat{\mathbf{j}} = cos\theta\hat{\mathbf{i}} + sin\theta\hat{\mathbf{j}} \\ \hat{\mathbf{u}}_\theta = (\hat{\mathbf{u}}_\theta \cdot \hat{\mathbf{i}})\hat{\mathbf{i}} + (\hat{\mathbf{u}}_\theta \cdot \hat{\mathbf{j}})\hat{\mathbf{j}} = -sin\theta\hat{\mathbf{i}} + cos\theta\hat{\mathbf{j}} \end{cases}$$

Il vettore direzione $\vec{r} = \hat{\mathbf{u}}_r$ in relazione alle coordinate cartesiane:

$$\vec{r} = rcos\theta\hat{\mathbf{i}} + rsin\theta\hat{\mathbf{j}}$$

Mentre il vettore $\vec{\varphi}$ sempre tangente alla curva con direzione $\hat{\mathbf{u}}_\theta$ (in un moto circolare corrisponde alla velocità tangenziale):

$$\vec{\varphi} = -\varphi sin\theta + \varphi cos\theta$$

Coordinate polari sferiche

0.2 Cinematica

Un corpo è in moto, *rispetto ad un sistema di riferimento S*, quando la sua posizione in S cambia nel tempo. Le caratteristiche del moto del *punto materiale* sono note se è noto il vettore posizione $\vec{r}$ in funzione del tempo, ovvero:

$$\vec{r}(t) = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

nel sistema di riferimento S. Conoscere il vettore posizione significa conoscere come variano tutte le coordinate, x, y, z in funzione del tempo. Nell'ipotesi implicita di continuità del moto(il tempo è una variabile continua) il moto può essere descritto attraverso l' **equazione vettoriale**

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

L'insieme delle posizioni occupate dal punto nel suo moto è la sua **traiettoria** γ. Nota la traiettoria γ, chiamiamo con s il numero reale detto *ascissa curvilinea*, il cui modulo, $|s|$, fornisce la lunghezza dell'arco di curva dall'origine scelta alla posizione sulla traiettoria del punto P. Introducendo la variabile s possiamo descrivere il moto anche con le seguenti due funzioni:

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}(s) \\ s = s(t) \end{cases}$$

dove in un sistema di coordinate cartesiane, $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{r} = \vec{r}(s) \Longrightarrow \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \longrightarrow \text{equazione della traiettoria in forma parametrica}$$

$$s = s(t) \longrightarrow \text{equazione oraria}$$

Il vettore velocità

Si definisce **velocità media** il vettore:

$$\vec{v}_m \equiv \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

Esso è indipendente dal percorso compiuto dal punto materiale nei vari istanti di tempo ma solo dalla posizione inziale e finale. Definiamo poi il vettore **velocità istantanea** nel modo seguente:

$$\vec{v} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

$$\vec{v}(t) \equiv \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

Questa è la rappresentazione *intrinseca* della velocità. Considerando due posizioni successive occuppate dal punto lungo la traiettoria γ, il vettore $\Delta \vec{r}$ ha direzione secante alle due posizioni sulla traiettoria. Quando l'arco di traiettoria Δs tende a 0 allora:

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} = 1$$

In questa situazione il vettore velocità tende ad assumere direzione tangente alla traiettoria. A questo punto il **versore tangente** alla curva nel punto P sarà:

$$\hat{\mathbf{u}}_t = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} = \frac{d\vec{r}}{ds}$$

Questo versore rappresenta la direzione del vettore velocità istantea che può quindi essere riscritta come:

$$\vec{v}(t) \equiv \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt}\hat{\mathbf{u}} = v_s \hat{\mathbf{u}}_t = \dot{s}\hat{\mathbf{u}}_t$$

$$v_s = \frac{ds}{dt} \longrightarrow \text{modulo della velocità}$$

La rappresentazione cartesiana della velocità è la seguente:

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{dy}{dt}\hat{\mathbf{j}} + \frac{dz}{dt}\hat{\mathbf{k}}$$

$$\vec{v} = \dot{x}\hat{\mathbf{i}} + \dot{y}\hat{\mathbf{j}} + \dot{z}\hat{\mathbf{k}}$$

Il vettore accelerazione

Si definisce **accelerazione media** il vettore:

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

Il vettore **accelerazione** istantanea è definito dal limite:

$$\vec{a} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

In coordinate cartesiane l'accelerazione corrisponde a:

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{dv_y}{dt}\hat{\mathbf{j}} + \frac{dv_z}{dt}\hat{\mathbf{k}} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{\mathbf{i}} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{\mathbf{j}} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{\mathbf{k}}$$

Dal calcolo di derivazione rispetto alla velocità:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v_s\hat{\mathbf{u}}_t) = \frac{dv_s}{dt}\hat{\mathbf{u}}_t + \frac{d\hat{\mathbf{u}}_t}{dt}$$

si nota come l'accelerazione sia composta da due contributi: uno parrallelo a $\hat{\mathbf{u}}_t$ e uno normale a $\hat{\mathbf{u}}_t$:

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

$$\vec{a}_t = \frac{d^2s}{dt^2}\hat{\mathbf{u}}_t \equiv \ddot{s}\hat{\mathbf{u}}_t \qquad (\textbf{accelerazione tangenziale})$$

$$\vec{a}_n = \frac{d\hat{\mathbf{u}}_t}{dt} = \frac{d\hat{\mathbf{u}}_t}{ds}\frac{ds}{dt} = \dot{s}\frac{d\hat{\mathbf{u}}_t}{ds} = \dot{s}\frac{d\varphi}{ds}\hat{\mathbf{u}}_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho}\hat{\mathbf{u}}_n \quad (\textbf{accelerazione normale})$$

dove ρ è il raggio della *circonferenza osculatrice*, ovvero la circonferenza che approssima localmente il moto di un punto materiale, $\hat{\mathbf{u}}_n$ è il versore $\perp$ a $\hat{\mathbf{u}}_n$. Gli ultimi due passaggi sono ottenuti derivando il versore $\hat{\mathbf{u}}_t$ secondo il metodo noto trovando quindi una forma che è caratteristica della traiettoria γ in esame.
Si deduce quindi che qualsiasi moto con traiettoria curva è *accelerato* dal momento che la componente normale dell'accelerazione $\hat{\mathbf{a}}_n$ non è nulla(come nel caso di un moto rettilineo $\longrightarrow \rho = cost$).

I moti piu elementari di cui è nota la traiettoria γ possono essere descritti tramite le due equazioni:

$$\begin{cases} \vec{v} = \dot{s}\hat{\mathbf{u}}_t \\ \vec{a} = \ddot{s}\hat{\mathbf{u}}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\hat{\mathbf{u}}_n \end{cases}$$

Moti elementari: moto rettilineo uniforme

Determinare l'equazione del moto significa conoscendo le espressioni di velocità e accelerazione e nota la traiettoria γ significa risolvere il *problema inverso* della cinematica. In un moto rettilineo uniforme il punto materiale percorre spazi uguali in tempi uguali: si ha $\dot{s}(t) = \dot{s}_0 \equiv v_0 = cost$.
Per determinare l'espressione di $s(t)$:

$$s(t) = \int \dot{s}dt = \dot{s}_0 \int dt = \dot{s}_0 t + C = v_0 t + C$$

Sapendo quanto vale $s(t_0) = s_0$ si ha che la **legge oraria** è :

$$s = \dot{s_0}t + s_0 = v_0 t + s_0$$

In coordinate cartesiane:

$$\vec{v} = v_0\hat{\mathbf{i}}$$

Dato che il moto avviene solo su un asse, la legge oraria è:

$$x(t) = v_0 t + x_0$$

L'accelerazione in ogni istante $\vec{a}(t) = 0$.

Moti elementari: moto rettilineo uniformemente accelerato

Questo tipo di moto è caratterizzato da un'accelerazione costante ovvero $\ddot{s}(t) = \frac{d\dot{s}}{dt} \equiv a(t) = cost$. Attraverso l'integrazione come per il moto rettilineo uniforme, e preso $t(0) = 0$:

$$\dot{s} = \ddot{s}_0 t + \dot{s}_0$$

si ottiene l'equazione differenziale che descrive il cambiamento nel tempo della velocità che, risolta, fornisce l'espressione della funzione di $s(t)$:

$$s = \frac{1}{2}\ddot{s_0}t^2 + \dot{s_0}t + s_0 f$$

Nel caso in cui $t_0 \neq 0$ risolvendo il sistema dato dalle due relazioni precedenti considerando un tempo $(t - t_0)$:

$$\begin{cases} \dot{s} = \ddot{s}_0(t - t_0) + \dot{s}_0 \\ s = \frac{1}{2}\ddot{s_0}(t - t_0)^2 + \dot{s_0}(t - t_0) + s_0 \end{cases}$$

si ottiene l'utile relazione:

$$v^2 = {v_0}^2 + 2\ddot{s_0}(s - s_0) \equiv {v_0}^2 + 2a_t(s - s_0)$$

Analogamente all'altro moto rettilineo trattato, il moto avviene solo su un asse, quindi le leggi che descrivono il moto sono:

$$x(t) = \frac{1}{2}a_0t^2 + v_0t + x_0 \qquad \textbf{(legge oraria)}$$

$$\dot{x}(t) = a_0t + v_0 \quad \textbf{(variazione di velocità)}$$

Moti elementari: moto circolare

Descrivendo la traiettoria di un moto circolare una circonferenza, questa avrà un'equazione del tipo:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

Fissando un sistema di riferimento ottimale a questa situazione, ovvero un sistema cartesiano rappresentante il piano xy con $z = 0$ con origine nel centro della traiettoria circolare. Vi è una relazione fissa tra arco di circonferenza s percorso e l'angolo θ relativo:

$$s = r \cdot \theta$$

Nel caso moto circolare uniforme, la condizione di uniformità consiste nel fatto che il punto materiale percorre angoli uguali in tempi uguali ovvero:

$$\dot{\theta} = cost$$

In particolare questa costante è definita **velocità angolare** del punto materiale:

$$\omega \equiv \frac{d\theta}{dt} = cost$$

e, essendo costante, vale in ogni punto la relazione $\theta = \omega t$.
Considerando il **periodo** T di rotazione, ovvero il tempo necessario per percorrere un giro completo della traiettoria(ritornando al punto di partenza), la velocità angolare vale:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Sapendo che la frequenza f è l'inverso del periodo, $f \equiv \frac{1}{T}$ allora:

$$\omega = 2\pi f$$

A questo punto possiamo definire l'**accelerazione angolare** del punto come:

$$\alpha \equiv \ddot{\theta} \equiv \frac{d\omega}{dt}$$

La condizione di uniformità può essere rappresentata con $\alpha = 0$ in quanto ciò è equivalente a $\omega = cost$. Durante il moto il vettore direzione $\vec{r}$ ha modulo costante coincidente con il raggio R e direzione data dal versore radiale $\hat{\mathbf{u}}_r$:

$$\vec{r} = r\hat{\mathbf{u}}_r = rcos\theta\hat{\mathbf{i}} + rsin\theta\hat{\mathbf{j}} = rcos(\omega t)\hat{\mathbf{i}} + rsin(\omega t)\hat{\mathbf{j}}$$

Andiamo a definire il vettore velocità $\vec{\boldsymbol{v}}$:

$$\vec{\boldsymbol{v}} \equiv \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt} = \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -r\omega sin(\omega t) \\ \frac{dy}{dt} = r\omega cos(\omega t) \end{cases}$$

$$\vec{\boldsymbol{v}} = r\omega(-sin(\omega t)\hat{\mathbf{i}} + cos(\omega t)\hat{\mathbf{j}})$$

Il versore che definisce la direzione di $\vec{\boldsymbol{v}}$ è:

$$\hat{\mathbf{u}}_\theta \equiv \frac{\vec{\boldsymbol{v}}}{\|\vec{\boldsymbol{v}}\|} = \frac{\vec{\boldsymbol{v}}}{r\omega} = -sin(\omega t)\hat{\mathbf{i}} + cos(\omega t)\hat{\mathbf{j}}$$

Da qui si ricava un'importante risultato, ovvero il fatto che la velocità è sempre tangente alla traiettoria, è quindi una **velocità tangenziale**. Ciò è dimostrato dalla perpendicolarità di $\hat{\mathbf{u}}_r$ e $\hat{\mathbf{u}}_\theta$ in ogni punto:

$$\hat{\mathbf{u}}_r \cdot \hat{\mathbf{u}}_\theta = -cos(\omega t)sin(\omega t) + cos(\omega t)sin(\omega t) = 0$$

Introducendo il vettore $\vec{\boldsymbol{\omega}} = \omega \cdot \hat{\mathbf{k}}$ (uscente dal piano) che ha il modulo della velocità angolare posso definire intrinsecamente il vettore velocità nei moti circolari:

$$\vec{\boldsymbol{v}}(t) = \vec{\boldsymbol{\omega}}(t) \times \vec{\boldsymbol{r}}(t)$$

Andiamo a questo punto a trovare l'espressione del vettore accelerazione:

$$\vec{\boldsymbol{a}} \equiv \frac{d\vec{\boldsymbol{v}}}{dt} = \vec{\boldsymbol{v}} \equiv \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt} = \begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = -r\omega^2 cos(\omega t) \\ \frac{dv_y}{dt} = -r\omega^2 sin(\omega t) \end{cases}$$

$$\vec{\boldsymbol{a}} = -r\omega^2(cos(\omega t)\hat{\mathbf{i}} + sin(\omega t)\hat{\mathbf{j}})$$
$$\vec{\boldsymbol{a}} = -r\omega^2\,\hat{\mathbf{u}}_r$$

Da cui notiamo che l'accelerazione ha verso opposto a quello del versore radiale e quindi è una **accelerazione centripeta** che in un moto uniforme vale:

$$\vec{\boldsymbol{a}} = -\frac{v_0^2}{R}\hat{\mathbf{u}}_r \quad \text{oppure se scelgo il versore normale} \quad \vec{\boldsymbol{a}} = \frac{v_0^2}{R}\hat{\mathbf{u}}_n$$

Sfruttando la definizione intrinseca di velocità attraveso un semplice calcolo, sfruttando il teorema del prodotto triplo, si arriva alla definzione intrinseca di accelerazione in un moto circolare:

$$\vec{\boldsymbol{a}} = \underbrace{\alpha \cdot r \cdot \hat{\mathbf{u}}_\theta}_{\text{tangenziale}} - \underbrace{\omega^2 \cdot r \cdot \hat{\mathbf{u}}_r}_{\text{centripeta}}$$

Se il moto circolare è uniforme($\alpha = 0$) allora $\vec{\boldsymbol{a}} = -\omega^2\vec{\boldsymbol{r}}$, quindi permane solo la componente centripeta.

Nel caso di un moto circolare **non uniforme** riassiumiamo le grandezze in questione:

Vettore direzione:

$$\vec{\boldsymbol{r}}(t) = \begin{cases} rcos\theta(t) \\ rsin\theta(t) \end{cases} \qquad \text{dove } \theta(t) \text{ è una funzione non lineare}$$

Velocità angolare e accelerazione angolare:

$$\omega \equiv \dot{\theta}(t) \neq cost$$
$$\alpha \equiv \ddot{\theta}(t) \neq 0$$

Velocità:

$$\vec{\boldsymbol{v}}(t) = \vec{\boldsymbol{\omega}}(t) \times \vec{\boldsymbol{r}}(t) \qquad \text{dove } \vec{\boldsymbol{\omega}}(t) = \omega(t) \cdot \hat{\mathbf{k}} = \dot{\theta}(t) \cdot \hat{\mathbf{k}} \quad \text{intrinseca}$$

$$\vec{\boldsymbol{v}}(t) = \begin{cases} \dot{x} = -rsin\theta(t) \cdot \dot{\theta} \\ \dot{y} = \ rcos\theta(t) \cdot \dot{\theta} \end{cases} \qquad \text{cartesiana}$$

$$\vec{\boldsymbol{v}}(t) = r \cdot \omega(t)\hat{\mathbf{u}}_\theta \qquad \text{in coordinate polari}$$

Accelerazione:

$$\vec{\boldsymbol{a}} = \alpha \cdot r\hat{\mathbf{u}}_\theta - \omega^2 \cdot r\hat{\mathbf{u}}_r \qquad \text{intrinseca}$$

$$\vec{\boldsymbol{a}}(t) = \begin{cases} \ddot{x} = -r(cos\theta(t) \cdot \dot{\theta}^2 + sin\theta(t) \cdot \ddot{\theta}) \\ \ddot{y} = r(-sin\theta(t) \cdot \dot{\theta}^2 + cos\theta(t) \cdot \ddot{\theta}) \end{cases} \qquad \text{cartesiana}$$

$$\vec{\boldsymbol{a}}(t) = r\omega^2(\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{u}}_\theta) \qquad \text{in coordinate polari}$$

0.3 Dinamica