0.1 Vettori e Sistemi di riferimento

Le trasformazioni di Galileo

Considerando due sistemi di riferimento, S ed S' in cui il secondo ha un moto di *traslazione rettilinea uniforme* rispetto al primo, il vettore posizione e i principali vettori cinematici si trasformano nel modo seguente:

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}' + \vec{V}'t' \\ t = t' \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{v} = \vec{v}' + \vec{V} \\ \vec{a} = \vec{a}' \end{cases}$$

Da queste trasformazioni si deduce che la velocità non è invariante e dipende dal sistema di riferimento:essa varia secondo la classica legge di composzione della velocità.
Al contrario l'accelerazione è invariante.
Il principio Galileiano afferma, quindi, che non è possibile distinguere due fenomeni fisici

Teorema del triplo prodotto vettoriale

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \times (\vec{a} \times \vec{c}) - \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b})$$

Derivate di vettori e versori

$$\hat{\mathbf{v}} \equiv \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

Derivata di un versore (da mettere in sezione apposita) Definendo un vettore $\omega = \hat{\mathbf{u}} \times \hat{\mathbf{n}}$ con modulo $\frac{d\varphi}{dt}$

$$\frac{d\hat{\mathbf{u}}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\hat{\mathbf{n}} = \vec{\omega} \times \hat{\mathbf{u}}$$

Coordinate polari piane

Un sistema di riferimento di coordinate polari piane è un sistema di coordinate caratterizzato da un **polo**, l'origine O, e da un **asse polare**, la semiretta orientata uscente da O. La direzione di ogni punto P è caratterizzata da due versori:

$$\hat{\mathbf{u}}_r \quad \text{(versore radiale)} \qquad \text{e} \qquad \hat{\mathbf{u}}_\theta \quad \text{(versore trasverso)}$$

con $\hat{\mathbf{u}}_r$ indicante la direzione del vettore direzione $\vec{r}$, che infatti si scrive come $\vec{r} = r\,\hat{\mathbf{u}}_r$, e con $\hat{\mathbf{u}}_\theta$ versore tangente alla circonferenza e diretto verso angoli θ crescenti ($\hat{\mathbf{u}}_r \perp \hat{\mathbf{u}}_\theta$).
Nel caso in cui la direzione dell'asse polare sia quella del versore $\hat{\mathbf{i}}$ allora la relazione tra le coordinate polari piane (r, θ) e quelle cartesiane (x, y) è il seguente:

$$\begin{cases} x = rcos\theta \\ y = rsin\theta \end{cases} ; \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = arctan\frac{y}{x} \end{cases}$$

e tra i versori polari e cartesiani:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{u}}_r = (\hat{\mathbf{u}}_r \cdot \hat{\mathbf{i}})\hat{\mathbf{i}} + (\hat{\mathbf{u}}_r \cdot \hat{\mathbf{j}})\hat{\mathbf{j}} = cos\theta\hat{\mathbf{i}} + sin\theta\hat{\mathbf{j}} \\ \hat{\mathbf{u}}_\theta = (\hat{\mathbf{u}}_\theta \cdot \hat{\mathbf{i}})\hat{\mathbf{i}} + (\hat{\mathbf{u}}_\theta \cdot \hat{\mathbf{j}})\hat{\mathbf{j}} = -sin\theta\hat{\mathbf{i}} + cos\theta\hat{\mathbf{j}} \end{cases}$$

Il vettore direzione $\vec{r} = \hat{\mathbf{u}}_r$ in relazione alle coordinate cartesiane:

$$\vec{r} = rcos\theta\hat{\mathbf{i}} + rsin\theta\hat{\mathbf{j}}$$

Mentre il vettore $\vec{\varphi}$ sempre tangente alla curva con direzione $\hat{\mathbf{u}}_\theta$ (in un moto circolare corrisponde alla velocità tangenziale):

$$\vec{\varphi} = -\varphi sin\theta + \varphi cos\theta$$

Coordinate polari sferiche

0.2 Cinematica

Un corpo è in moto, *rispetto ad un sistema di riferimento* S, quando la sua posizione in S cambia nel tempo. Le caratteristiche del moto del *punto materiale* sono note se è noto il vettore posizione $\vec{r}$ in funzione del tempo, ovvero:

$$\vec{r}(t) = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

nel sistema di riferimento S. Conoscere il vettore posizione significa conoscere come variano tutte le coordinate, x, y, z in funzione del tempo. Nell'ipotesi implicita di continuità del moto(il tempo è una variabile continua) il moto può essere descritto attraverso l' **equazione vettoriale**

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

L'insieme delle posizioni occupate dal punto nel suo moto è la sua **traiettoria** γ. Nota la traiettoria γ, chiamiamo con s il numero reale detto *ascissa curvilinea*, il cui modulo, $|s|$, fornisce la lunghezza dell'arco di curva dall'origine scelta alla posizione sulla traiettoria del punto P. Introducendo la variabile s possiamo descrivere il moto anche con le seguenti due funzioni:

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}(s) \\ s = s(t) \end{cases}$$

dove in un sistema di coordinate cartesiane, $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{r} = \vec{r}(s) \Longrightarrow \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \longrightarrow \text{equazione della traiettoria in forma parametrica}$$

$$s = s(t) \longrightarrow \text{equazione oraria}$$

Il vettore velocità

Si definisce **velocità media** il vettore:

$$\vec{v}_m \equiv \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

Esso è indipendente dal percorso compiuto dal punto materiale nei vari istanti di tempo ma solo dalla posizione inziale e finale. Definiamo poi il vettore **velocità istantanea** nel modo seguente:

$$\vec{v} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

$$\vec{v}(t) \equiv \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

Questa è la rappresentazione *intrinseca* della velocità. Considerando due posizioni successive occuppate dal punto lungo la traiettoria γ, il vettore $\Delta \vec{r}$ ha direzione secante alle due posizioni sulla traiettoria. Quando l'arco di traiettoria Δs tende a 0 allora:

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} = 1$$

In questa situazione il vettore velocità tende ad assumere direzione tangente alla traiettoria. A questo punto il **versore tangente** alla curva nel punto P sarà:

$$\hat{\mathbf{u}}_t = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} = \frac{d\vec{r}}{ds}$$

Questo versore rappresenta la direzione del vettore velocità istantea che può quindi essere riscritta come:

$$\vec{v}(t) \equiv \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt}\hat{\mathbf{u}} = v_s \hat{\mathbf{u}}_t = \dot{s}\hat{\mathbf{u}}_t$$

$$v_s = \frac{ds}{dt} \longrightarrow \text{modulo della velocità}$$

La rappresentazione cartesiana della velocità è la seguente:

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{dy}{dt}\hat{\mathbf{j}} + \frac{dz}{dt}\hat{\mathbf{k}}$$

$$\vec{v} = \dot{x}\hat{\mathbf{i}} + \dot{y}\hat{\mathbf{j}} + \dot{z}\hat{\mathbf{k}}$$

Il vettore accelerazione

Si definisce **accelerazione media** il vettore:

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

Il vettore **accelerazione** istantanea è definito dal limite:

$$\vec{a} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

In coordinate cartesiane l'accelerazione corrisponde a:

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{dv_y}{dt}\hat{\mathbf{j}} + \frac{dv_z}{dt}\hat{\mathbf{k}} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{\mathbf{i}} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{\mathbf{j}} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{\mathbf{k}}$$

Dal calcolo di derivazione rispetto alla velocità:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v_s\hat{\mathbf{u}}_t) = \frac{dv_s}{dt}\hat{\mathbf{u}}_t + \frac{d\hat{\mathbf{u}}_t}{dt}$$

si nota come l'accelerazione sia composta da due contributi: uno parrallelo a $\hat{\mathbf{u}}_t$ e uno normale a $\hat{\mathbf{u}}_t$:

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

$$\vec{a}_t = \frac{d^2s}{dt^2}\hat{\mathbf{u}}_t \equiv \ddot{s}\hat{\mathbf{u}}_t \qquad \textbf{(accelerazione tangenziale)}$$

$$\vec{a}_n = \frac{d\hat{\mathbf{u}}_t}{dt} = \frac{d\hat{\mathbf{u}}_t}{ds}\frac{ds}{dt} = \dot{s}\frac{d\hat{\mathbf{u}}_t}{ds} = \dot{s}\frac{d\varphi}{ds}\hat{\mathbf{u}}_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho}\hat{\mathbf{u}}_n \quad \textbf{(accelerazione normale)}$$

dove ρ è il raggio della *circonferenza osculatrice*, ovvero la circonferenza che approssima localmente il moto di un punto materiale, $\hat{\mathbf{u}}_n$ è il versore $\perp$ a $\hat{\mathbf{u}}_n$. Gli ultimi due passaggi sono ottenuti derivando il versore $\hat{\mathbf{u}}_t$ secondo il metodo noto trovando quindi una forma che è caratteristica della traiettoria γ in esame.
Si deduce quindi che qualsiasi moto con traiettoria curva è *accelerato* dal momento che la componente normale dell'accelerazione $\hat{\mathbf{a}}_n$ non è nulla(come nel caso di un moto rettilineo $\longrightarrow \rho = cost$).

I moti piu elementari di cui è nota la traiettoria γ possono essere descritti tramite le due equazioni:

$$\begin{cases} \vec{v} = \dot{s}\hat{\mathbf{u}}_t \\ \vec{a} = \ddot{s}\hat{\mathbf{u}}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\hat{\mathbf{u}}_n \end{cases}$$

Moti elementari: moto rettilineo uniforme

Determinare l'equazione del moto significa conoscendo le espressioni di velocità e accelerazione e nota la traiettoria γ significa risolvere il *problema inverso* della cinematica. In un moto rettilineo uniforme il punto materiale percorre spazi uguale in tempi uguali: si ha $\dot{s}(t) = \dot{s}_0 \equiv v_0 = cost.$
Per determinare l'espressione di $s(t)$:

$$s(t) = \int \dot{s}dt = \dot{s}_0 \int dt = \dot{s}_0 t + C = v_0 t + C$$

Sapendo quanto vale $s(t_0) = s_0$ si ha che la **legge oraria** è :

$$s = \dot{s_0}t + s_0 = v_0 t + s_0$$

In coordinate cartesiane:

$$\vec{v} = v_0\hat{\mathbf{i}}$$

Dato che il moto avviene solo su un asse, la legge oraria è:

$$x(t) = v_0 t + x_0$$

L'accelerazione in ogni istante $\vec{a}(t) = 0$.

Moti elementari: moto rettilineo uniformemente accelerato

Questo tipo di moto è caratterizzato da un'accelerazione costante ovvero $\ddot{s}(t) = \frac{d\dot{s}}{dt} \equiv a(t) = cost$. Attraverso l'integrazione come per il moto rettilineo uniforme, e preso $t(0) = 0$:

$$\dot{s} = \ddot{s}_0 t + \dot{s}_0$$

si ottiene l'equazione differenziale che descrive il cambiamento nel tempo della velocità che, risolta, fornisce l'espressione della funzione di $s(t)$:

$$s = \frac{1}{2}\ddot{s_0}t^2 + \dot{s_0}t + s_0 f$$

Nel caso in cui $t_0 \neq 0$ risolvendo il sistema dato dalle due relazioni precedenti considerando un tempo $(t - t_0)$:

$$\begin{cases} \dot{s} = \ddot{s}_0(t - t_0) + \dot{s}_0 \\ s = \frac{1}{2}\ddot{s_0}(t - t_0)^2 + \dot{s_0}(t - t_0) + s_0 \end{cases}$$

si ottiene l'utile relazione:

$$v^2 = {v_0}^2 + 2\ddot{s_0}(s - s_0) \equiv {v_0}^2 + 2a_t(s - s_0)$$

Analogamente all'altro moto rettilineo trattato, il moto avviene solo su un asse, quindi le leggi che descrivono il moto sono:

$$x(t) = \frac{1}{2}a_0 t^2 + v_0 t + x_0 \qquad \textbf{(legge oraria)}$$

$$\dot{x}(t) = a_0 t + v_0 \quad \textbf{(variazione di velocità)}$$

Moti elementari: moto circolare

Descrivendo la traiettoria di un moto circolare una circonferenza, questa avrà un'equazione del tipo:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

Fissando un sistema di riferimento ottimale a questa situazione, ovvero un sistema cartesiano rappresentante il piano xy con $z = 0$ con origine nel centro della traiettoria circolare. Vi è una relazione fissa tra arco di circonfernza s percorso e l'angolo θ relativo:

$$s = r \cdot \theta$$

Nel caso moto circolare uniforme, la condizione di uniformità consiste nel fatto che il punto materiale percorre angoli uguali in tempi uguali ovvero:

$$\dot{\theta} = cost$$

In particolare questa costante è definita **velocità angolare** del punto materiale:

$$\omega \equiv \frac{d\theta}{dt} = cost$$

e, essendo costante, vale in ogni punto la relazione $\theta = \omega t$.
Considerando il **periodo** T di rotazione, ovvero il tempo necessario per percorrere un giro completo della traiettoria(ritornando al punto di partenza), la velocità angolare vale:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Sapendo che la frequenza f è l'inverso del periodo, $f \equiv \frac{1}{T}$ allora:

$$\omega = 2\pi f$$

A questo punto possiamo definire l'**accelerazione angolare** del punto come:

$$\alpha \equiv \ddot{\theta} \equiv \frac{d\omega}{dt}$$

La condizione di uniformità può essere rappresentata con $\alpha = 0$ in quanto ciò è equivalente a $\omega = cost$. Durante il moto il vettore direzione $\vec{r}$ ha modulo costante coincidente con il raggio R e direzione data dal versore radiale $\hat{\mathbf{u}}_r$:

$$\vec{r} = r\hat{\mathbf{u}}_r = rcos\theta\hat{\mathbf{i}} + rsin\theta\hat{\mathbf{j}} = rcos(\omega t)\hat{\mathbf{i}} + rsin(\omega t)\hat{\mathbf{j}}$$

Andiamo a definire il vettore velocità $\vec{v}$:

$$\vec{v} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -r\omega sin(\omega t) \\ \frac{dy}{dt} = r\omega cos(\omega t) \end{cases}$$

$$\vec{v} = r\omega(-sin(\omega t)\hat{\mathbf{i}} + cos(\omega t)\hat{\mathbf{j}})$$

Il versore che definisce la direzione di $\vec{v}$ è:

$$\hat{\mathbf{u}}_\theta \equiv \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{\vec{v}}{r\omega} = -sin(\omega t)\hat{\mathbf{i}} + cos(\omega t)\hat{\mathbf{j}}$$

Da qui si ricava un'importante risultato, ovvero il fatto che la velocità è sempre tangente alla traiettoria, è quindi una **velocità tangenziale**. Ciò è dimostrato dalla perpendicolarità di $\hat{\mathbf{u}}_r$ e $\hat{\mathbf{u}}_\theta$ in ogni punto:

$$\hat{\mathbf{u}}_r \cdot \hat{\mathbf{u}}_\theta = -cos(\omega t)sin(\omega t) + cos(\omega t)sin(\omega t) = 0$$

Introducendo il vettore $\vec{\omega} = \omega \cdot \hat{\mathbf{k}}$ (uscente dal piano) che ha il modulo della velocità angolare posso definire intrinsecamente il vettore velocità nei moti circolari:

$$\vec{v}(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t)$$

Andiamo a questo punto a trovare l'espressione del vettore accelerazione:

$$\vec{a} \equiv \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = -r\omega^2 cos(\omega t) \\ \frac{dv_y}{dt} = -r\omega^2 sin(\omega t) \end{cases}$$

$$\vec{a} = -r\omega^2(cos(\omega t)\hat{\mathbf{i}} + sin(\omega t)\hat{\mathbf{j}})$$
$$\vec{a} = -r\omega^2\,\hat{\mathbf{u}}_r$$

Da cui notiamo che l'accelerazione ha verso opposto a quello del versore radiale e quindi è una **accelerazione centripeta** che in un moto uniforme vale:

$$\vec{a} = -\frac{v_0^2}{R}\hat{\mathbf{u}}_r \quad \text{oppure se scelgo il versore normale} \quad \vec{a} = \frac{v_0^2}{R}\hat{\mathbf{u}}_n$$

Sfruttando la definizione intrinseca di velocità attraveso un semplice calcolo, sfruttando il teorema del prodotto triplo, si arriva alla definzione intrinseca di accelerazione in un moto circolare:

$$\vec{a} = \underbrace{\alpha \cdot r \cdot \hat{\mathbf{u}}_\theta}_{\text{tangenziale}} - \underbrace{\omega^2 \cdot r \cdot \hat{\mathbf{u}}_r}_{\text{centripeta}}$$

Se il moto circolare è uniforme($\alpha = 0$) allora $\vec{a} = -\omega^2\vec{r}$, quindi permane solo la componente centripeta.

Nel caso di un moto circolare **non uniforme** riassiumiamo le grandezze in questione:

Vettore direzione:

$$\vec{r}(t) = \begin{cases} rcos\theta(t) \\ rsin\theta(t) \end{cases} \qquad \text{dove } \theta(t) \text{ è una funzione non lineare}$$

Velocità angolare e accelerazione angolare:

$$\omega \equiv \dot{\theta}(t) \neq cost$$

$$\alpha \equiv \ddot{\theta}(t) \neq 0$$

Velocità:

$$\vec{v}(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t) \qquad \text{dove } \vec{\omega}(t) = \omega(t) \cdot \hat{\mathbf{k}} = \dot{\theta}(t) \cdot \hat{\mathbf{k}} \quad \text{intrinseca}$$

$$\vec{v}(t) = \begin{cases} \dot{x} = -rsin\theta(t) \cdot \dot{\theta} \\ \dot{y} = \ \ rcos\theta(t) \cdot \dot{\theta} \end{cases} \qquad \text{cartesiana}$$

$$\vec{v}(t) = r \cdot \omega(t)\hat{\mathbf{u}}_\theta \qquad \text{in coordinate polari}$$

Accelerazione:

$$\vec{a} = \alpha \cdot r\hat{\mathbf{u}}_\theta - \omega^2 \cdot r\hat{\mathbf{u}}_r \qquad \text{intrinseca}$$

$$\vec{a}(t) = \begin{cases} \ddot{x} = -r(cos\theta(t) \cdot \dot{\theta}^2 + sin\theta(t) \cdot \ddot{\theta}) \\ \ddot{y} = r(-sin\theta(t) \cdot \dot{\theta}^2 + cos\theta(t) \cdot \ddot{\theta}) \end{cases} \qquad \text{cartesiana}$$

$$\vec{a}(t) = r\omega^2(\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{u}}_\theta) \qquad \text{in coordinate polari}$$

0.3 Dinamica

Esistono due categorie principali di forze

- Le forze di contatto
- Le forze con azione a distanza(per esempio la forza centrale)

TRASFORMAZIONI DI GALILEO

Considerando due sistemi di riferimento, S ed S' in cui il secondo ha un moto di *traslazione rettilinea uniforme* rispetto al primo, il vettore posizione e i principali vettori cinematici si trasformano nel modo seguente:

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}' + \vec{V}'t' \\ t = t' \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{v} = \vec{v}' + \vec{V} \\ \vec{a} = \vec{a}' \end{cases}$$

Da queste trasformazioni si deduce che la velocità non è invariante e dipende dal sistema di riferimento:essa varia secondo la classica legge di composzione della velocità.
Al contrario l'accelerazione è invariante.
Il principio Galileiano afferma, quindi, che non è possibile distinguere due fenomeni fisici.

Per quanto riguarda le leggi di Newton queste hanno come contesto di validità quello dei sistemi di riferimento **inerziali**, altrimenti devono subire delle modifiche. Per verificare che un sistema di riferimento è inerziale bisogna individuare almeno un *corpo libero*, ovvero isolato, non soggetto a forze esterne, oppure tale che la risultante agente su questo sia nulla: se questo corpo è in quiete oppure si muove con velocità costante(in un moto rettilineo) allora quello in esame è un sistema di riferimento inerziale. Una volta assicurata l'esistenza di un sistema di riferimento inerziale allora si può affermare l'esistenza di infiniti sistemi di riferimento di questo tipo in quanto, grazie al principio di relatività galileaiana, è noto che qualsiasi sistema S' che stia traslando rispetto ad S a velocità costante ed in linea retta costituisce un nuovo sistema di riferimento inerziale.

Legge Fisica (Prima Legge della dinamica)**.** *Esiste almeno un sistema di riferimento (inerziale) rispetto al quale ogni punto materiale libero ha velocità costante*

La prima legge della dinamica assicura l'esistenza non solo di un sistema di riferimento in cui un corpo inizialmente in quiete resta in quiete, ma di infiniti sistemi, ottenuti attraverso una traslazione

Legge Fisica (Seconda legge della dinamica)**.** *In un sistema di riferimento inerziale , l'accelerazione di un corpo è sempre dovuta all'azione di forze; tra forza risultante ed accelerazione sussiste, in ogni istante, la relazione*

$$\vec{F}(t) = m\vec{a}(t)$$

IL PENDOLO SEMPLICE

Si tratta di un punto materiale di massa m attaccato ad un sostegno rigido tramite un filo *insestensibile* e di massa trascurabile, di lunghezza l. Viene poi trascurato ogni attrito dovuto all'aria o al filo.
Le forze in gioco sono le seguenti:

$$\vec{F}_p + \vec{R} = m\vec{a}$$

Il sistema che descrive le relazioni scalari delle forze in gioco:

$$\begin{cases} -mgsin\theta = m\ddot{s} \\ -mgcos\theta + R = m\frac{\dot{s}^2}{L} \end{cases}$$

Utilizzando il fatto che $\theta = \frac{s}{L}$ la prima equazione diventa:

$$\ddot{s} + gsin(\frac{s}{L}) = 0$$

Essendo questa un'equazione differenziale trascendente senza soluzione analitica, operiamo l'approssimazione

$$sin(\frac{s}{L}) \approx \frac{s}{L}$$

sviluppando la serie di Taylor al primo ordine(la percentuale di errore è molto piccola per angoli piccoli). A questo punto si ottiene l'equazione

$$\ddot{s} + \frac{g}{L}s = 0$$

che è la nota equazione del moto oscillatorio armonico con legge oraria:

$$s(t) = Acos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

e di pulsazione e periodo:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

La legge orari

Applicazione delle leggi della dinamica

LE FORZE ELASTICHE

Le forze esercitate dalle molle sono un'esempio di forze che dipendono solo dalla posizione. Nel caso di una molla ideale si ha che la forza di richiamo agisce solo sull'asse della molla, in verso opposto alla deformazione di questa ed è proporzionale all'allungamento. Ciò viene descritto attraverso la relazione empirica seguente.

Legge Fisica (Legge di Hooke)**.**

$$\vec{\boldsymbol{F}} = -kx\,\hat{\mathbf{i}}$$

Analizziamo il moto di una molla ideale.
Applicando il secondo principio della dinamica:

$$m\ddot{x} = -\frac{k}{m}x$$

Dalla risoluzione dell'equazione differenziale caratterizzante il moto oscillatorio armonico si ha:

$$x(t) = x_0 cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

da cui:

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 x_0 cos(\omega_0 t)$$

Da cui si ottiene:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$