

0.1 Vettori e Sistemi di riferimento

Teorema del triplo prodotto vettoriale

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \times (\vec{a} \times \vec{c}) - \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b})$$

Derivate di vettori e versori

$$\hat{v} \equiv \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

Derivata di un versore (da mettere in sezione apposita) Definendo un vettore $\omega = \hat{u} \times \hat{n}$ con modulo $\frac{d\varphi}{dt}$

$$\frac{d\hat{u}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \hat{n} = \vec{\omega} \times \hat{u}$$

Coordinate polari piane

Un sistema di riferimento di coordinate polari piane è un sistema di coordinate caratterizzato da un **polo**, l'origine O, e da un **asse polare**, la semiretta orientata uscente da O. La direzione di ogni punto P è caratterizzata da due versori:

$$\hat{u}_r \quad (\text{versore radiale}) \quad \text{e} \quad \hat{u}_\theta \quad (\text{versore trasverso})$$

con \hat{u}_r indicante la direzione del vettore direzione \vec{r} , che infatti si scrive come $\vec{r} = r \hat{u}_r$, e con \hat{u}_θ versore tangente alla circonferenza e diretto verso angoli θ crescenti ($\hat{u}_r \perp \hat{u}_\theta$).

Nel caso in cui la direzione dell'asse polare sia quella del versore \hat{i} allora la relazione tra le coordinate polari piane (r, θ) e quelle cartesiane (x, y) è il seguente:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} ; \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan \frac{y}{x} \end{cases}$$

e tra i versori polari e cartesiani:

$$\begin{cases} \hat{u}_r = (\hat{u}_r \cdot \hat{i})\hat{i} + (\hat{u}_r \cdot \hat{j})\hat{j} = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j} \\ \hat{u}_\theta = (\hat{u}_\theta \cdot \hat{i})\hat{i} + (\hat{u}_\theta \cdot \hat{j})\hat{j} = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j} \end{cases}$$

Il vettore direzione $\vec{r} = \hat{u}_r$ in relazione alle coordinate cartesiane:

$$\vec{r} = r \cos \theta \hat{i} + r \sin \theta \hat{j}$$

Mentre il vettore $\vec{\varphi}$ sempre tangente alla curva con direzione \hat{u}_θ (in un moto circolare corrisponde alla velocità tangenziale):

$$\vec{\varphi} = -\varphi \sin \theta + \varphi \cos \theta$$

Coordinate polari sferiche

0.2 Cinematica

Un corpo è in moto, *rispetto ad un sistema di riferimento S*, quando la sua posizione in *S* cambia nel tempo. Le caratteristiche del moto del *punto materiale* sono note se è noto il vettore posizione \vec{r} in funzione del tempo, ovvero:

$$\vec{r}(t) = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

nel sistema di riferimento *S*. Conoscere il vettore posizione significa conoscere come variano tutte le coordinate, x, y, z in funzione del tempo. Nell'ipotesi implicita di continuità del moto (il tempo è una variabile continua) il moto può essere descritto attraverso l' **equazione vettoriale**

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

L'insieme delle posizioni occupate dal punto nel suo moto è la sua **traiettoria** γ . Nota la traiettoria γ , chiamiamo con s il numero reale detto *ascissa curvilinea*, il cui modulo, $|s|$, fornisce la lunghezza dell'arco di curva dall'origine scelta alla posizione sulla traiettoria del punto P. Introducendo la variabile s possiamo descrivere il moto anche con le seguenti due funzioni:

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}(s) \\ s = s(t) \end{cases}$$

dove in un sistema di coordinate cartesiane, \mathbb{R}^3 :

$$\vec{r} = \vec{r}(s) \implies \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \longrightarrow \text{equazione della traiettoria in forma parametrica}$$

$$s = s(t) \longrightarrow \text{equazione oraria}$$

Il vettore velocità

Si definisce **velocità media** il vettore:

$$\vec{v}_m \equiv \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

Esso è indipendente dal percorso compiuto dal punto materiale nei vari istanti di tempo ma solo dalla posizione iniziale e finale. Definiamo poi il vettore **velocità istantanea** nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \vec{v} &\equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{v}_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \\ \vec{v}(t) &\equiv \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \end{aligned}$$

Questa è la rappresentazione *intrinseca* della velocità. Considerando due posizioni successive occupate dal punto lungo la traiettoria γ , il vettore $\Delta \vec{r}$ ha direzione secante alle due posizioni sulla traiettoria. Quando l'arco di traiettoria Δs tende a 0 allora:

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} = 1$$

In questa situazione il vettore velocità tende ad assumere direzione tangente alla traiettoria. A questo punto il **versore tangente** alla curva nel punto P sarà:

$$\hat{u}_t = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} = \frac{d\vec{r}}{ds}$$

Questo versore rappresenta la direzione del vettore velocità istantanea che può quindi essere riscritta come:

$$\vec{v}(t) \equiv \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt} \hat{u} = v_s \hat{u}_t = \dot{s} \hat{u}_t$$

$$v_s = \frac{ds}{dt} \longrightarrow \text{modulo della velocità}$$

La rappresentazione cartesiana della velocità è la seguente:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{dx}{dt} \hat{i} + \frac{dy}{dt} \hat{j} + \frac{dz}{dt} \hat{k} \\ \vec{v} &= \dot{x} \hat{i} + \dot{y} \hat{j} + \dot{z} \hat{k} \end{aligned}$$

Il vettore accelerazione

Si definisce **accelerazione media** il vettore:

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

Il vettore **accelerazione istantanea** è definito dal limite:

$$\vec{a} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{a}_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$
$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

In coordinate cartesiane l'accelerazione corrisponde a:

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt} \hat{i} + \frac{dv_y}{dt} \hat{j} + \frac{dv_z}{dt} \hat{k} = \frac{d^2 x}{dt^2} \hat{i} + \frac{d^2 y}{dt^2} \hat{j} + \frac{d^2 z}{dt^2} \hat{k}$$

Dal calcolo di derivazione rispetto alla velocità:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v_s \hat{u}_t) = \frac{dv_s}{dt} \hat{u}_t + \frac{d\hat{u}_t}{dt}$$

si nota come l'accelerazione sia composta da due contributi: uno parrallelo a \hat{u}_t e uno normale a \hat{u}_t :

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

$$\vec{a}_t = \frac{d^2 s}{dt^2} \hat{u}_t \equiv \ddot{s} \hat{u}_t \quad (\text{accelerazione tangenziale})$$

$$\vec{a}_n = \frac{d\hat{u}_t}{dt} = \frac{d\hat{u}_t}{ds} \frac{ds}{dt} = \dot{s} \frac{d\hat{u}_t}{ds} = \dot{s} \frac{d\varphi}{ds} \hat{u}_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho} \hat{u}_n \quad (\text{accelerazione normale})$$

dove ρ è il raggio della *circonferenza osculatrice*, ovvero la circonferenza che approssima localmente il moto di un punto materiale, \hat{u}_n è il versore \perp a \hat{u}_t . Gli ultimi due passaggi sono ottenuti derivando il versore \hat{u}_t secondo il metodo noto trovando quindi una forma che è caratteristica della traiettoria γ in esame.

Si deduce quindi che qualsiasi moto con traiettoria curva è *accelerato* dal momento che la componente normale dell'accelerazione \hat{a}_n non è nulla (come nel caso di un moto rettilineo $\rightarrow \rho = \text{cost}$).

I moti più elementari di cui è nota la traiettoria γ possono essere descritti tramite le due equazioni:

$$\begin{cases} \vec{v} = \dot{s} \hat{u}_t \\ \vec{a} = \ddot{s} \hat{u}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho} \hat{u}_n \end{cases}$$

Moti elementari: moto rettilineo uniforme

Determinare l'equazione del moto significa conoscendo le espressioni di velocità e accelerazione e nota la traiettoria γ significa risolvere il *problema inverso* della cinematica. In un moto rettilineo uniforme il punto materiale percorre spazi uguali in tempi uguali: si ha $\dot{s}(t) = \dot{s}_0 \equiv v_0 = \text{cost}$.

Per determinare l'espressione di $s(t)$:

$$s(t) = \int \dot{s} dt = \dot{s}_0 \int dt = \dot{s}_0 t + C = v_0 t + C$$

Sapendo quanto vale $s(t_0) = s_0$ si ha che la **legge oraria** è :

$$s = \dot{s}_0 t + s_0 = v_0 t + s_0$$

In coordinate cartesiane:

$$\vec{v} = v_0 \hat{i}$$

Dato che il moto avviene solo su un asse, la legge oraria è:

$$x(t) = v_0 t + x_0$$

L'accelerazione in ogni istante $\vec{a}(t) = 0$.

Moti elementari: moto rettilineo uniformemente accelerato

Questo tipo di moto è caratterizzato da un'accelerazione costante ovvero $\ddot{s}(t) = \frac{d\dot{s}}{dt} \equiv a(t) = cost$. Attraverso l'integrazione come per il moto rettilineo uniforme, e preso $t(0) = 0$:

$$\dot{s} = \ddot{s}_0 t + \dot{s}_0$$

si ottiene l'equazione differenziale che descrive il cambiamento nel tempo della velocità che, risolta, fornisce l'espressione della funzione di $s(t)$:

$$s = \frac{1}{2}\ddot{s}_0 t^2 + \dot{s}_0 t + s_0$$

Nel caso in cui $t_0 \neq 0$ risolvendo il sistema dato dalle due relazioni precedenti considerando un tempo $(t - t_0)$:

$$\begin{cases} \dot{s} = \ddot{s}_0(t - t_0) + \dot{s}_0 \\ s = \frac{1}{2}\ddot{s}_0(t - t_0)^2 + \dot{s}_0(t - t_0) + s_0 \end{cases}$$

si ottiene l'utile relazione:

$$v^2 = v_0^2 + 2\ddot{s}_0(s - s_0) \equiv v_0^2 + 2a_t(s - s_0)$$

Analogamente all'altro moto rettilineo trattato, il moto avviene solo su un asse, quindi le leggi che descrivono il moto sono:

$$x(t) = \frac{1}{2}a_0 t^2 + v_0 t + x_0 \quad (\text{legge oraria})$$

$$\dot{x}(t) = a_0 t + v_0 \quad (\text{variazione di velocità})$$

Moti elementari: moto circolare

Descrivendo la traiettoria di un moto circolare una circonferenza, questa avrà un'equazione del tipo:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

Fissando un sistema di riferimento ottimale a questa situazione, ovvero un sistema cartesiano rappresentante il piano xy con $z = 0$ con origine nel centro della traiettoria circolare. Vi è una relazione fissa tra arco di circonferenza s percorso e l'angolo θ relativo:

$$s = r \cdot \theta$$

Nel caso moto circolare uniforme, la condizione di uniformità consiste nel fatto che il punto materiale percorre angoli uguali in tempi uguali ovvero:

$$\dot{\theta} = cost$$

In particolare questa costante è definita **velocità angolare** del punto materiale:

$$\omega \equiv \frac{d\theta}{dt} = cost$$

e, essendo costante, vale in ogni punto la relazione $\theta = \omega t$.

Considerando il **periodo** T di rotazione, ovvero il tempo necessario per percorrere un giro completo della traiettoria (ritornando al punto di partenza), la velocità angolare vale:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Sapendo che la frequenza f è l'inverso del periodo, $f \equiv \frac{1}{T}$ allora:

$$\omega = 2\pi f$$

A questo punto possiamo definire l'**accelerazione angolare** del punto come:

$$\alpha \equiv \ddot{\theta} \equiv \frac{d\omega}{dt}$$

La condizione di uniformità può essere rappresentata con $\alpha = 0$ in quanto ciò è equivalente a $\omega = cost$. Durante il moto il vettore direzione \vec{r} ha modulo costante coincidente con il raggio R e direzione data dal versore radiale \hat{u}_r :

$$\vec{r} = r\hat{u}_r = r\cos\theta\hat{i} + r\sin\theta\hat{j} = r\cos(\omega t)\hat{i} + r\sin(\omega t)\hat{j}$$

Andiamo a definire il vettore velocità \vec{v} :

$$\vec{v} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -r\omega \sin(\omega t) \\ \frac{dy}{dt} = r\omega \cos(\omega t) \end{cases}$$

$$\vec{v} = r\omega(-\sin(\omega t)\hat{\mathbf{i}} + \cos(\omega t)\hat{\mathbf{j}})$$

Il versore che definisce la direzione di \vec{v} è:

$$\hat{\mathbf{u}}_\theta \equiv \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{\vec{v}}{r\omega} = -\sin(\omega t)\hat{\mathbf{i}} + \cos(\omega t)\hat{\mathbf{j}}$$

Da qui si ricava un'importante risultato, ovvero il fatto che la velocità è sempre tangente alla traiettoria, è quindi una **velocità tangenziale**. Ciò è dimostrato dalla perpendicolarità di $\hat{\mathbf{u}}_r$ e $\hat{\mathbf{u}}_\theta$ in ogni punto:

$$\hat{\mathbf{u}}_r \cdot \hat{\mathbf{u}}_\theta = -\cos(\omega t)\sin(\omega t) + \cos(\omega t)\sin(\omega t) = 0$$

Introducendo il vettore $\vec{\omega} = \omega\hat{\mathbf{k}}$ (uscente dal piano) che ha il modulo della velocità angolare posso definire intrinsecamente il vettore velocità nei moti circolari:

$$\vec{v}(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t)$$

Andiamo a questo punto a trovare l'espressione del vettore accelerazione:

$$\vec{a} \equiv \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = -r\omega^2 \cos(\omega t) \\ \frac{dv_y}{dt} = -r\omega^2 \sin(\omega t) \end{cases}$$

$$\vec{a} = -r\omega^2(\cos(\omega t)\hat{\mathbf{i}} + \sin(\omega t)\hat{\mathbf{j}})$$

$$\vec{a} = -r\omega^2 \hat{\mathbf{u}}_r$$

Da cui notiamo che l'accelerazione ha verso opposto a quello del versore radiale e quindi è una **accelerazione centripeta**.

Sfruttando la definizione intrinseca di velocità attraverso un semplice calcolo, sfruttando il teorema del prodotto triplo, si arriva alla definizione intrinseca di accelerazione in un moto circolare:

$$\vec{a} = \underbrace{\alpha \cdot r \cdot \hat{\mathbf{u}}_\theta}_{\text{tangenziale}} - \underbrace{\omega^2 \cdot r \cdot \hat{\mathbf{u}}_r}_{\text{centripeta}}$$