

# Analisi di un circuito RLC serie in regime sinusoidale

Autori: Niccolò Zanotti mat. 970919, Michael Mancini mat. 987056

Data di svolgimento: 01/06/2022

## 1 Abstract

In questa esperienza di laboratorio si è analizzato il comportamento di un circuito RLC serie, sottoposto a una tensione in regime sinusoidale con pulsazione variabile. In particolar modo si è cercato di stimare il valore della frequenza di risonanza, andando a confrontare il comportamento del circuito per valori della frequenza prossimi al valore cercato per poi, acquisendo e analizzando i dati relativi alla tensione in entrata e nei rami, verificare l'andamento atteso dell'ampiezza della tensione.

Le stime più significative della frequenza di risonanza sono  $f_0 = (18.95 \pm 0.05)kHz$ , valore ottenuto dai parametri del fit sulla curva dell'ampiezza della resistenza e  $f_0 = (19.10 \pm 0.10)kHz$ , valore per cui la tensione su di essa ha fase nulla, compatibili con il valore atteso pari a  $f_0 = (19.13 \pm 0.14)kHz$ .

## 2 Introduzione

In un circuito  $RLC$  in regime sinusoidale si assiste al fenomeno fisico della risonanza; in particolare, dati i valori caratteristici di resistenza, induttanza e capacità del circuito, si osserva tale fenomeno in corrispondenza di un preciso valore di frequenza, detta, appunto, di risonanza. La larghezza della curva di risonanza è legata al valore del cosiddetto fattore di qualità  $Q$ , determinato dai componenti circuitali utilizzati.

Quando la tensione nel circuito oscilla con pulsazione

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (1)$$

si è in condizione di risonanza con frequenza  $f_0$ . In corrispondenza di questo valore ci si aspetta che la differenza di potenziale ai capi della resistenza sia in fase con quella ai capi del generatore e che, inoltre, l'ampiezza di tali segnali di tensione, così come la corrente circolante, sia massimizzata. Tale circuito si classifica tra i filtri di tipo "passa banda", ovvero tra quei dispositivi passivi che permettono il passaggio di frequenze all'interno di un dato intervallo, la cosiddetta banda passante, ed attenua le frequenze al di fuori di esso.

## 3 Apparato sperimentale

Il circuito realizzato, illustrato in Figura 1, è composto da una resistore, un induttore e da un condensatore, collegati in serie sulla breadboard della scheda di acquisizione dati NI Elvis II®.

I valori scelti per i componenti sono i seguenti:  $R_r = (996.7 \pm 1.4) \Omega$ ,  $C = (1.46 \pm 0.01) \times 10^{-9} F$ ,  $L = (47.41 \pm 0.05) \times 10^{-2} H$  con resistenza interna  $R_{ind} = (125.82 \pm 0.16) \Omega$ . La resistenza interna del generatore ammonta a  $R_{gen} = 50\Omega$ .

Avendo utilizzato il multimetro digitale di ELVIS II, per effettuare le precedenti misurazioni sono state calcolate le incertezze in accordo con quanto riportato sulla scheda tecnica di tale strumento. Si è valutata l'entità delle possibili fluttuazioni statistiche mediante misurazioni ripetute, per poi confrontare i dati ottenuti con i precedenti. Sono risultate essere predominanti le incertezze calcolate secondo le specifiche della scheda di acquisizione. I valori precedenti sono stati scelti in maniera tale da ottenere un fattore di qualità  $Q$  ragionevole per una buona osservazione del fenomeno della risonanza.

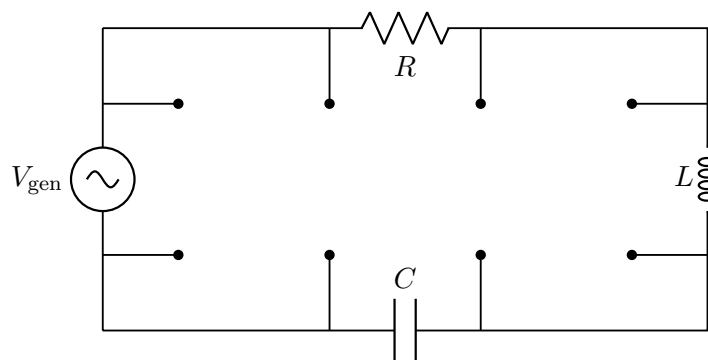


Figura 1: *Schema del circuito realizzato.*

## 4 Analisi dei risultati

### 4.1 Osservazione qualitativa degli andamenti

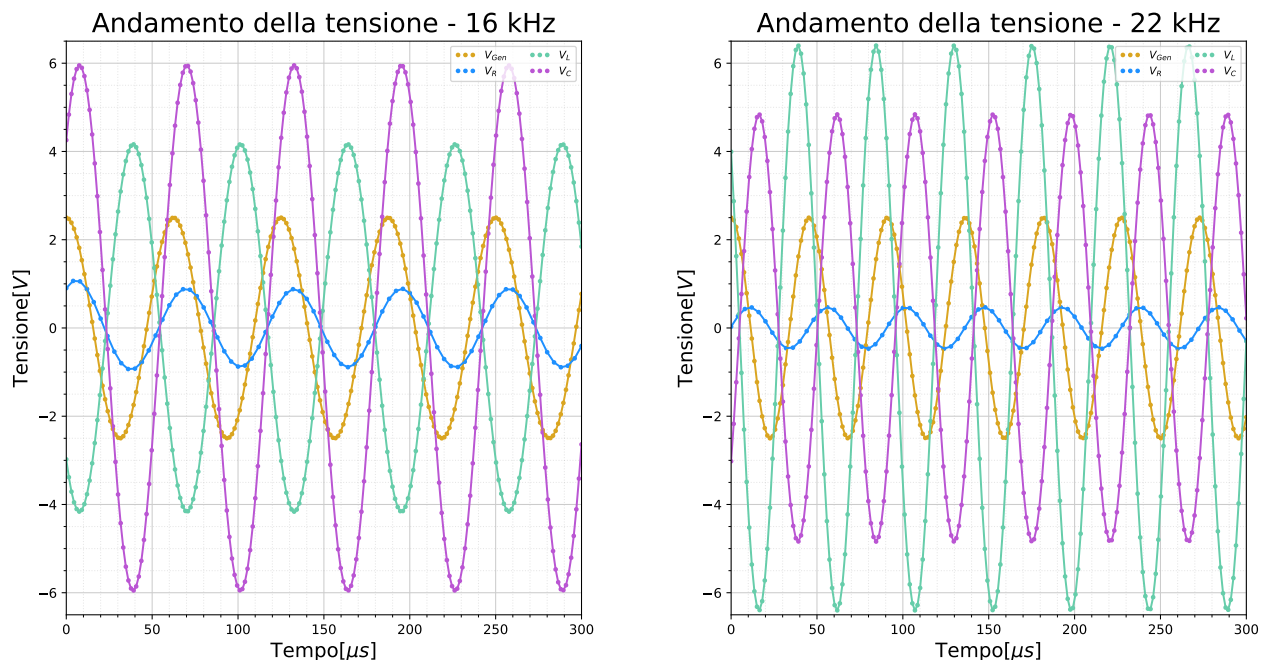


Figura 2: *I grafici mostrano gli andamenti della tensione ai capi dei vari componenti quando il generatore oscilla ad una frequenza di  $f = 16\text{kHz}$  e di  $f = 22\text{kHz}$ ; questi sono valori prossimi a quelli che definiscono la banda del filtro.*

Una volta realizzato il circuito, ne è stato valutato il comportamento qualitativo. A tal proposito si è valutato visivamente l'andamento temporale delle differenze di potenziale, a frequenza costante, sui vari elementi circuitali mediante l'utilizzo dell'oscilloscopio digitale disponibile in laboratorio.

In secondo luogo, per una valutazione a posteriori, sono stati raccolti tali dati tramite la DAQ configurata. In figura 2 sono mostrati tali andamenti per due valori significativi di  $f$  in quanto vicini ai valori di taglio della frequenza, caratteristici di questo circuito. L'ampiezza dei segnali sui vari componenti, così come lo sfasamento, è consistente con il modello atteso.

## 4.2 Analisi delle ampiezze

Quella che segue è l'analisi della risposta in frequenza del circuito. È stato effettuato uno sweep in frequenza ad intervalli di  $50Hz$  in un range di estremi  $6kHz$  e  $35kHz$ , raccogliendo 500 campioni con un sample rate di 250000 campioni al secondo. I dati relativi alle ampiezza della tensione ai capi dei vari elementi sono visibili in Figura 3 assieme ai fit realizzati secondo i modelli ipotizzati. Non conoscendo in maniera precisa il funzionamento del subVI "Extract singleton information", che ha fornito le misurazioni di ampiezze e fasi, è stato scelto di stimare le incertezze su tali dati tramite il rumore di fondo. È stata quindi calcolata la deviazione standard delle misure associate all'ampiezza della tensione agli estremi, che sono posti come costanti, ottenendo  $\sigma = 3.9 \times 10^{-3}Hz$ .

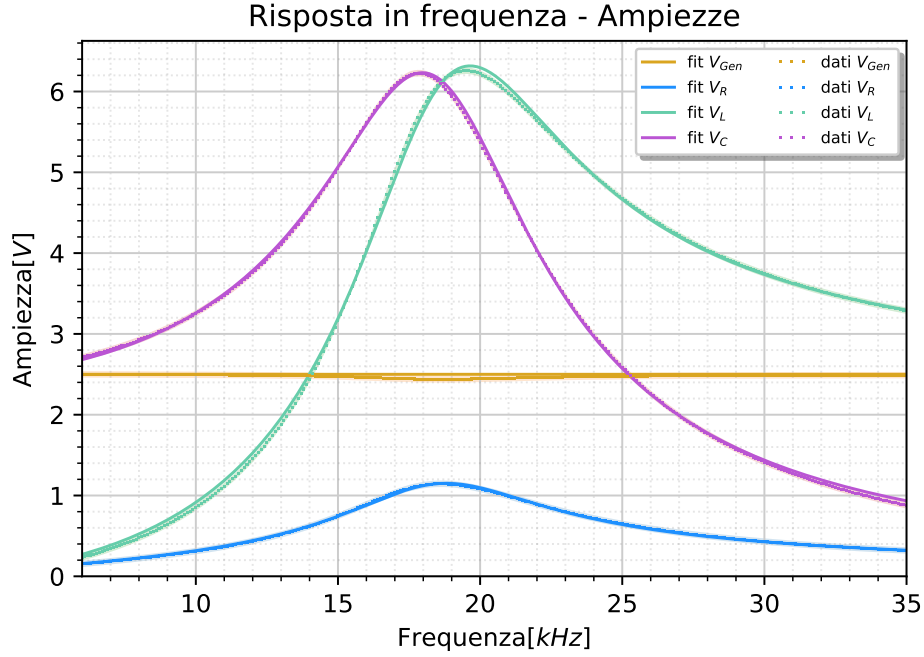


Figura 3: Andamento dell'ampiezza della tensione sui componenti del circuito al variare della frequenza del generatore con sovrapposte relative curve best-fit. Le incertezze sono state rappresentate con bande continue a causa della elevata densità di valori.

Gli andamenti attesi per le varie ampiezze della tensione sono i seguenti(vedi Appendice):

$$V_R = \frac{R_r V_0}{\sqrt{R_{tot}^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (2)$$

$$V_L = \frac{\omega L V_0}{\sqrt{R_{tot}^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (3)$$

$$V_C = \frac{\frac{V_0}{\omega C}}{\sqrt{R_{tot}^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (4)$$

dove  $\omega$  rappresenta la pulsazione del generatore e  $R_{tot}$  rappresenta la resistenza totale che si oppone al fluire della corrente.

Da una prima analisi dei dati è emerso l'andamento caratteristico del filtro, con le ampiezze massimizzate in corrispondenza di un valore specifico di frequenza.

Osservando qualitativamente il grafico, si nota una leggera diminuzione dell'ampiezza della tensione che oscilla nel filtro per valori vicini alla frequenza di risonanza stimata. Responsabile di questo effetto è la resistenza interna del generatore che provoca una caduta di potenziale tanto maggiore quanto lo è la corrente, che risulta essere massima proprio in condizioni di risonanza. Dai fit sono emersi valori del  $\tilde{\chi}^2$  piuttosto elevati; ciò è dovuto ad una sottostima dell'incertezza sui valori di ampiezza di  $V$ . Pertanto, si è scelto di utilizzare come indice della goodness-of-fit il cosiddetto coefficiente di determinazione  $R^2$ . Il fit più significativo è risultato essere quello dell'ampiezza di  $V_R$ , mostrato in Figura 4, con un valore di  $R^2 = 0.99946$ . Da tale fit i valori dei componenti risultano essere  $R_r = (1011.8 \pm 7.2)\Omega$ ,  $L = (4.705 \pm 0.017) \times 10^{-2} \text{ H}$  e  $C = (1.500 \pm 0.005) \times 10^{-9} \text{ F}$ . Si è scelto, inoltre, di utilizzare le "incertezze standard" calcolate come

$$\delta p_k = \sqrt{\tilde{\chi}^2 C_{kk}}$$

dove  $C_{kk}$  è l'elemento corrispondente al parametro  $p_k$  nella diagonale della matrice di covarianza. Una prima stima della frequenza di risonanza è stata ricavata applicando l'equazione (1) con i parametri ottenuti dal fit associato alla resistenza, ottenendo  $f_0 = (18.95 \pm 0.05) \text{ kHz}$ , dove le incertezze sono state propagate in quadratura. In secondo luogo, studiando il massimo dell'ampiezza di  $V_R$ , si è stimato un range

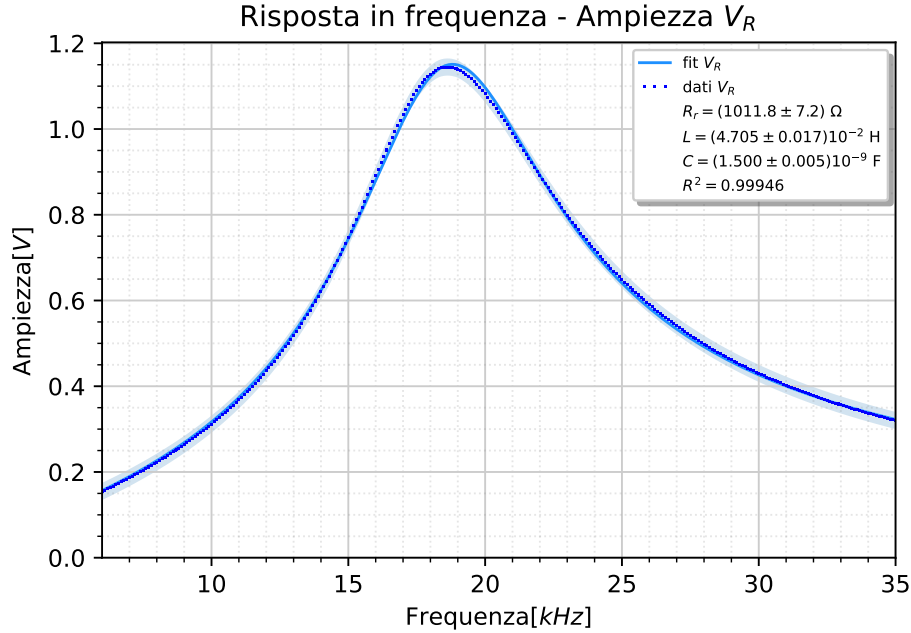


Figura 4: Il grafico mostra in dettaglio l'ampiezza della tensione sul resistore, con sovrapposto relativo fit (equazione 2). Le incertezze sono rappresentate come in Figura 3.

di valori centrato in una certa frequenza  $f$ , che corrisponde teoricamente a quella di risonanza, per quanto detto in precedenza. Individuato l'estremo inferiore della barra di errore relativa al punto di massimo estratto dal fit, si sono poi cercati i punti in cui l'estremo superiore di tale barra corrispondesse a questo valore massimo. Da tale procedura si è ottenuto un valore  $f_0 = (18.80 \pm 0.28) \text{ kHz}$ . La significatività di tale risultato, però, è ridotta, avendo sovrastimato l'incertezza, che è stata calcolata come il valore medio dei due estremi citati precedentemente.

Un'anomalia, emersa dall'analisi dei dati raccolti, riguarda la stima della resistenza totale del circuito. Tale valore risulta essere sistematicamente superiore a quello misurato inizialmente. In Appendice si analizza meglio tale fenomeno.

### 4.3 Analisi delle fasi

Le funzioni che descrivono gli andamenti attesi delle fasi sono le seguenti:

$$\phi_R = \arctan \frac{1 - \omega^2 LC}{R_{tot} \omega C} \quad (5)$$

$$\phi_L = \arctan \frac{1 - \omega^2 LC}{R_{tot} \omega C} + \frac{\pi}{2} \quad (6)$$

$$\phi_C = \arctan \frac{1 - \omega^2 LC}{R_{tot} \omega C} - \frac{\pi}{2} \quad (7)$$

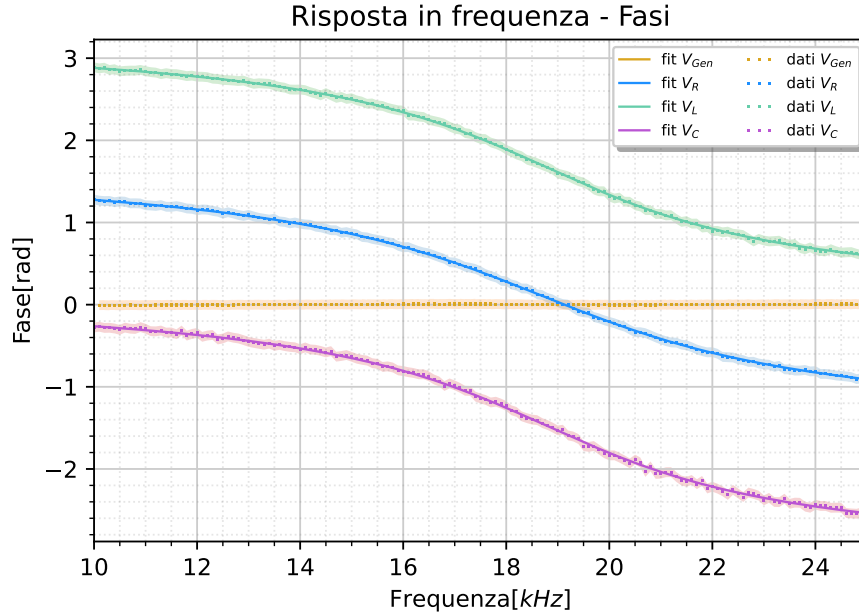


Figura 5: Andamento dello sfasamento della tensione sui componenti nello sweep in frequenza. Le incertezze sono rappresentate come bande continue per l'alta densità di valori.

I dati sullo sfasamento della tensione sono stati raccolti in concomitanza con quelli sulle ampiezze. È stato scelto di sottrarre ai dati sulle fasi di  $R, L, C$  i corrispondenti valori di  $\phi_{gen}$ , in quanto quello che si dovrebbe misurare è lo sfasamento rispetto al generatore. In figura 5 sono visibili tali dati assieme alle curve best-fit, ottenute considerando solamente i valori fra  $10kHz$  e  $25kHz$  con un valore caratteristico di  $R^2 = 0.991$ . Il rumore di fondo è stato valutato in maniera analoga a quanto fatto per le ampiezze, estraendo la deviazione standard degli sfasamenti a  $f$  costante, con  $\sigma_\phi = 0.002$  rad.

Considerando il profilo dello sfasamento della tensione sulla resistenza, si è pensato di valutare la frequenza di risonanza come la frequenza alla quale corrisponde una condizione di fase nulla tra  $V_R$  e  $V_{gen}$ . È stato ottenuto un valore di  $f_0 = (19.10 \pm 0.10)kHz$  dove il range di valori è stato individuato dal rumore sulle fasi. Alternativamente,  $f_0$  può essere individuata dalla condizione di fase pari a  $\frac{\pi}{2}$  tra  $V_L$  e  $V_{gen}$ . Con una procedura analoga a quella applicata nel caso di  $V_R$ , si ottiene  $f_0 = (19.35 \pm 0.15)kHz$ .

## 5 Conclusione

In conclusione il comportamento del filtro è risultato essere in accordo con la teoria. Per quanto riguarda il fenomeno della risonanza, dall'analisi delle ampiezze per  $f_0$  sono stati ottenuti i valori  $f_0 = (18.95 \pm$

$0.05)kHz$  e  $f_0 = (18.80 \pm 0.28)kHz$ , mentre da quella delle fasi  $f_0 = (19.10 \pm 0.10)kHz$  e  $f_0 = (19.35 \pm 0.15)kHz$ . Si è ipotizzato che le discrepanze dal valore atteso  $f_0 = (19.13 \pm 0.14)kHz$ , dove presenti, siano dovute ai diversi fattori ambientali, primo fra tutti la temperatura variabile dei componenti della scheda di acquisizione NI ELVIS II, fenomeno dovuto all'effetto Joule.

È stata inoltre evidenziata un'errata stima iniziale della resistenza totale del circuito, in quanto i valori di tale grandezza sono risultati sistematicamente superiori in tutti i fit realizzati. Per avere un'idea di quanto tale valore risulti superiore a quello atteso,  $R_{tot} = (1172.5 \pm 1.6) \Omega$ , si riporta  $R = (2.15 \pm 0.15)10^3 \Omega$ , dato ottenuto nel caso del fit, piuttosto significativo, dell'ampiezza di  $V_R$ .

## Appendice

- I parametri del fit dell'ampiezza di  $V_R$  riportati nell'analisi sono stati ottenuti considerando come parametro libero  $R^*$ , rappresentante la resistenza aggiuntiva a  $R_r$  che si oppone al fluire della corrente, in luogo di  $R_{tot}$ . Questa modifica è stata fatta a posteriori, osservando che l'esito del fit mostrava una correlazione tra i parametri  $R_r$  e  $R_{tot}$  e quindi un'hessiana(ed una matrice di covarianza) non definita positiva. Il problema è stato risolto con la modifica suddetta, ottenendo anche un miglior valore del coefficiente di determinazione.
- Per quanto riguarda il valore di  $R_{tot}$ , superiore a quello atteso, si è dapprima ipotizzato che ciò fosse dovuto ad una mancata valutazione di un possibile effetto resistivo del condensatore. Tuttavia, anche isolandolo e cercando di valutarne la resistenza con il multimetro digitale, non è stata ottenuta nessuna conferma di questa ipotesi. Si suppone quindi che questa anomalia sia dovuta alla metodologia di acquisizione dati tramite *LabView*.
- Analizzando il circuito con il formalismo dei fasori e considerando il concetto di impedenza dei bipoli elementari, che generalizza il concetto di resistenza, si ha che l'impedenza totale corrisponde a ( $j$  indica l'unità immaginaria):

$$Z_{tot} = Z_R + Z_L + Z_C = R + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$$

essendo i componenti in serie. Applicando ora la legge di Ohm simbolica si ottiene la corrente che circola nel circuito, dalla quale si ottiene la tensione agli estremi di un certo componente moltiplicando per la relativa impedenza. A titolo di esempio, per il resistore si ottiene il numero complesso

$$V_R = \frac{RV_0}{R + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}$$

da cui si estraggono ampiezza(modulo) e fase, corrispondenti alle equazioni (2) e (5), rispettivamente.

## Riferimenti bibliografici

- [1] J.R.Taylor. *Introduzione all'Analisi degli Errori*, Zanichelli
- [2] R. Perfetti, *Circuiti Elettrici*, Zanichelli