

Analisi di un circuito RLC serie in regime sinusoidale

Autori: Niccolò Zanotti mat. 970919, Michael Mancini mat. 987056

Data di svolgimento: 01/06/2022

1 Abstract

In questa esperienza di laboratorio si è analizzato il comportamento di un circuito RLC serie sottoposto a una tensione in regime sinusoidale con pulsazione variabile. In particolar modo si è cercato di stimare il valore della frequenza di risonanza, andando a confrontare il comportamento del circuito per valori della frequenza prossimi al valore cercato per poi, acquisendo e analizzando i dati relativi alla tensione in entrata e nei rami, verificare l'andamento atteso dell'ampiezza della tensione.

Uno dei valori della frequenza di risonanza ottenuto per via sperimentale mediante l'utilizzo dei parametri del fit dell'ampiezza della tensione sulla resistenza risulta essere $f = (18.95 \pm 0.05)kHz$, compatibile con il valore della frequenza di risonanza atteso pari a $f = (19.13 \pm 0.14)kHz$.

2 Introduzione

In un circuito RLC in regime sinusoidale si assiste al fenomeno fisico della risonanza; in particolare, dati i valori caratteristici di resistenza, induttanza e capacità del circuito, si osserva tale fenomeno in corrispondenza di un preciso valore di frequenza, detta, appunto, di risonanza. La larghezza della curva di risonanza è legato al valore del cosiddetto fattore di qualità Q del circuito determinato dai componenti circuitali utilizzate. È stato utilizzato un generatore di tensione sinusoidale il cui scopo principale è stato quello di indurre oscillazioni della corrente all'interno circuito e per valutare la sua risposta in frequenza.

La frequenza di risonanza si ha quando la tensione generata ai capi del circuito oscilla con pulsazione

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (1)$$

In corrispondenza di questo valore il comportamento previsto è che la differenza di potenziale ai capi della resistenza sia in fase con quella ai capi del generatore e che, inoltre, sia massimizzata l'ampiezza di tali segnali di tensione. Tale circuito si classifica tra i filtri di tipo "passa banda", ovvero tra quei dispositivi passivi che permettono il passaggio di frequenze all'interno di un dato intervallo, la cosiddetta banda passante, ed attenua le frequenze al di fuori di esso.

3 Apparato sperimentale

Il circuito utilizzato è composto da una resistore, un induttore e da un condensatore collegati in serie sulla breadboard della scheda di acquisizione dati NI Elvis II®. I valori scelti per i componenti

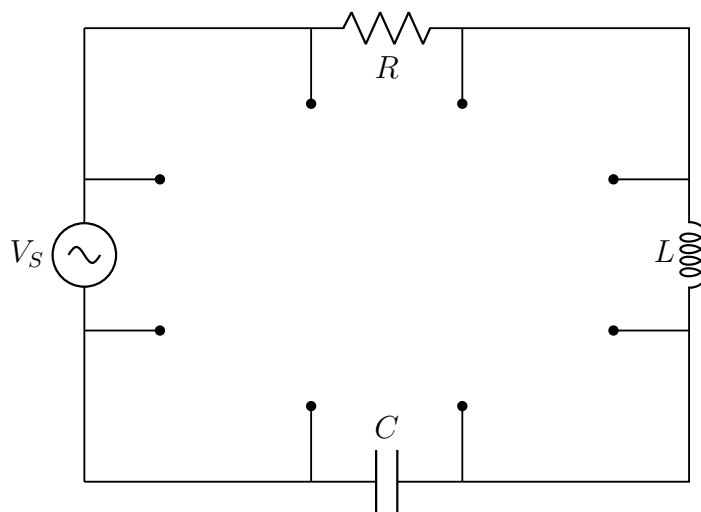


Figura 1: *Schema del circuito realizzato.*

sono i seguenti: $R_r = (996.7 \pm 1.4) \Omega$, $C = (1.46 \pm 0.01)10^{-9} F$, $L = (47.41 \pm 0.05)10^{-2}H$ con resistenza interna $R_{ind} = (125.82 \pm 0.16) \Omega$. La resistenza interna del generatore ammonta a $R_{gen} = 50\Omega$. Avendo utilizzato il multimetro digitale di ELVIS II per effettuare le precedenti misurazioni sono state calcolate le incertezze in accordo con quanto riportato sulla scheda tecnica di tale strumento. Si è valutata l'entità delle possibili fluttuazioni statistiche mediante misurazioni ripetute per poi confrontare i dati ottenuti con i precedenti. Sono risultate essere predominanti le incertezze standard.

I valori precedenti sono stati scelti in maniera tale da ottenere un fattore di qualità Q ragionevole per una buona osservazione del fenomeno della risonanza.

I capi di ogni componente, così come gli estremi del circuito, illustrato in Figura 1, sono stati collegati ad un canale della scheda per poter eseguire la lettura dei valori di ampiezza e fase della tensione su di essi. Le suddette misure sono state ottenute tramite l'utilizzo del subVI "Extract Single Tone Information" del software di acquisizione *LabView*.

Per realizzare questa esperienza di laboratorio sono stati raccolti 500 campioni a frequenza costante in varie condizioni con una frequenza di 250000 campioni al secondo, poi, effettuando uno sweep di frequenza, si sono raccolti dati ad intervalli di $50Hz$ fra $5kHz$ e $35kHz$.

4 Analisi dei risultati

4.1 Osservazione qualitativa degli andamenti

Una volta realizzato il circuito, ne è stato valutato il comportamento qualitativo. A tal proposito si è valutato visivamente l'andamento temporale delle differenze di potenziale sui vari elementi circuitali mediante l'utilizzo dell'oscilloscopio digitale disponibile in laboratorio. In secondo luogo, per una valutazione a posteriori, sono stati raccolti tali dati tramite la DAQ configurata. Ciò è stato fatto mantenendo la frequenza del generatore costante. In figura 2 sono mostrati tali andamenti per due valori significativi di f in quanto vicini ai valori di taglio della frequenza, caratteristici di questo circuito. l'andamento della tensione sulla resistenza è risultato essere in fase con quello indotto sul generatore, come ci si aspettava dal punto di vista teorico.

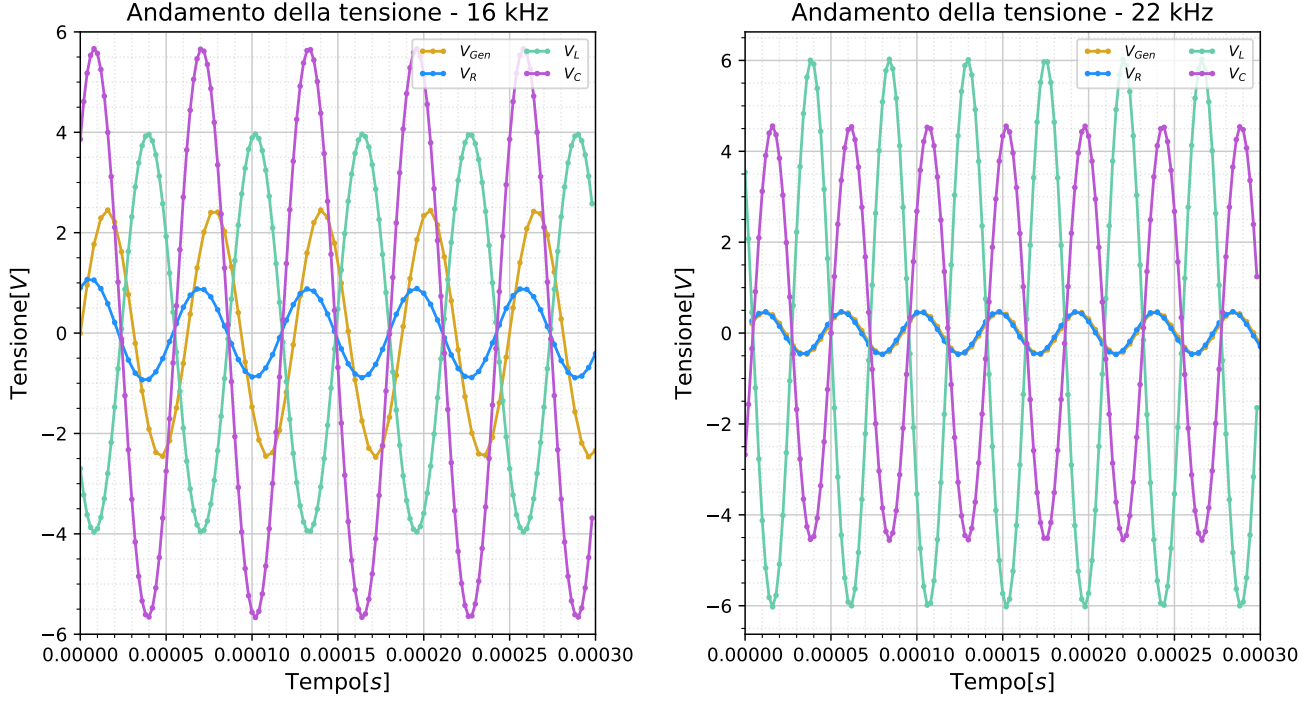


Figura 2: I grafici mostrano gli andamenti della tensione ai capi dei vari componenti quando il generatore oscilla ad una frequenza di $f = 16\text{kHz}$ e di $f = 22\text{kHz}$; questi sono valori prossimi a quelli che definiscono la banda del filtro.

4.2 Analisi delle ampiezze

Quella che segue è l'analisi della risposta in frequenza del circuito. I dati relativi alle ampiezza della tensione ai capi dei vari elementi, sono visibili in Figura 3 dove sono stati riportati anche i fit secondo i modelli ipotizzati.

Non conoscendo in maniera precisa il funzionamento del subVI 'Extract singleton information', che ha fornito le misurazioni di ampiezze e fasi, è stato scelto di stimare le incertezze su tali dati tramite il rumore di fondo. E stata quindi calcolata la deviazione standard delle misure associate all'ampiezza della tensione agli estremi, che sono posti come costanti, ottenendo $\sigma = 3.910^{-3}\text{Hz}$

Gli andamenti attesi per le varie ampiezze della tensione sono i seguenti(vedi Appendice):

$$V_R = \frac{R_r V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (2)$$

$$V_L = \frac{\omega L V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (3)$$

$$V_C = \frac{\frac{V_0}{\omega C}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (4)$$

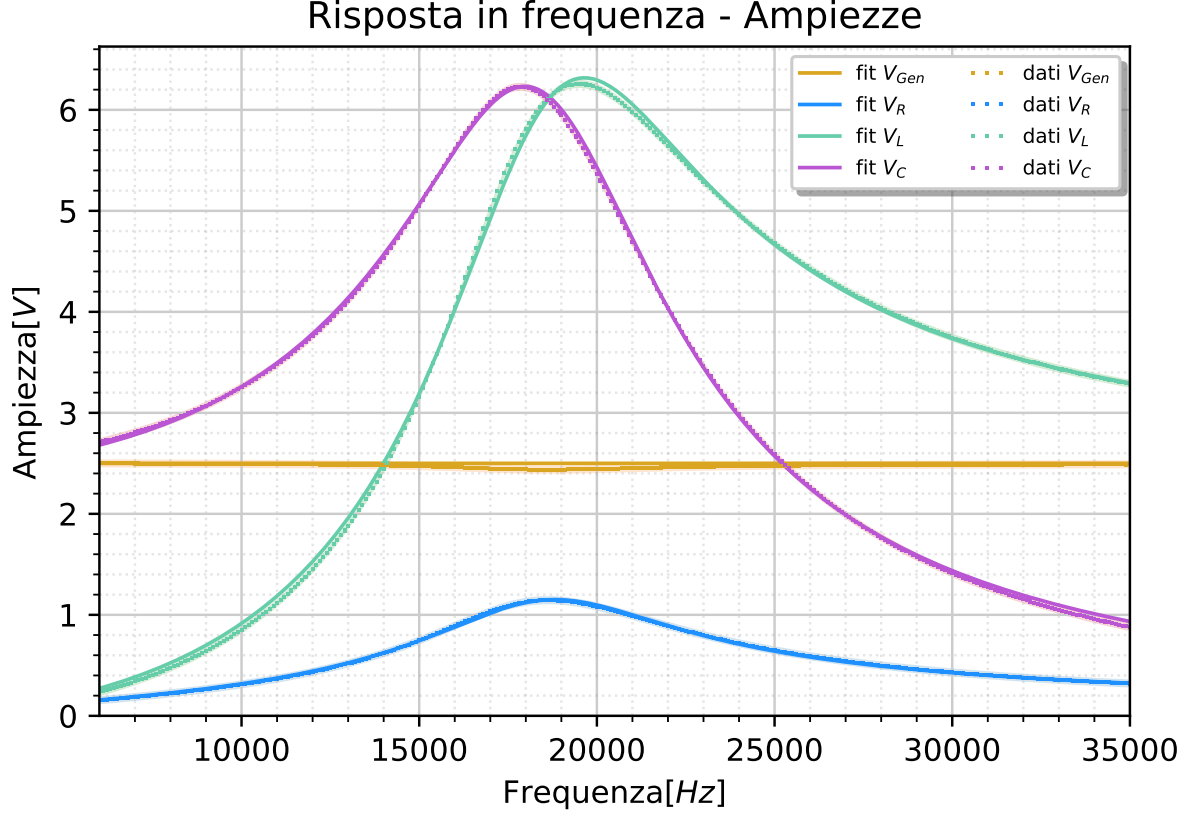


Figura 3: Andamento dell'ampiezza della tensione sulle componenti del circuito al variare della frequenza del generatore con sovrapposte relative curve best-fit.

Si è distinto tra il valore della resistenza del resistore stesso, R_r , e quello della resistenza totale opposta nel circuito, R . Da una prima analisi dei dati è stato verificato l'andamento caratteristico del filtro, con le ampiezze massimizzate in corrispondenza di un valore specifico di frequenza.

Dai fit sono emersi valori del $\tilde{\chi}^2$ piuttosto elevati. Questo è dovuto ad una sottostima della valutazione dell'incertezza sui valori di ampiezza di V . Si è, pertanto, scelto di utilizzare come indice della goodness-of-fit il cosiddetto coefficiente di determinazione R^2 . Il fit più significativo è risultato essere quello dell'ampiezza di V_R , mostrato in Figura 4, con un valore di $R^2 = 0.99946$. Da tale fit i valori dei componenti risultano essere $R_r = (1011.8 \pm 7.2) \Omega$, $L = (4.705 \pm 0.017)10^{-2}$ e $C = (1.500 \pm 0.005)10^{-9}$ F. Si è scelto di utilizzare le "incertezze standard" calcolate come

$$\delta p_k = \sqrt{\tilde{\chi}^2 C_{kk}}$$

dove C_{kk} è l'elemento corrispondente a p_k nella diagonale della matrice di covarianza.

Si è valutata la frequenza di risonanza con i parametri ottenuti dal fit associato alla resistenza usando l'equazione 1 ottenendo $f_0 = (18.95 \pm 0.05)kHz$, con le incertezze propagate in quadratura.

In secondo luogo, studiando il massimo dell'ampiezza di V_R , si è stimato un range di valori centrato in una certa frequenza f che corrisponde teoricamente a quella di risonanza, per quanto detto in precedenza.

Preso l'estremo inferiore della barra di errore relativa al punto di massimo estratto dal fit, si sono poi cercati i punti in cui l'estremo superiore della barra di errore corrispondesse a tale

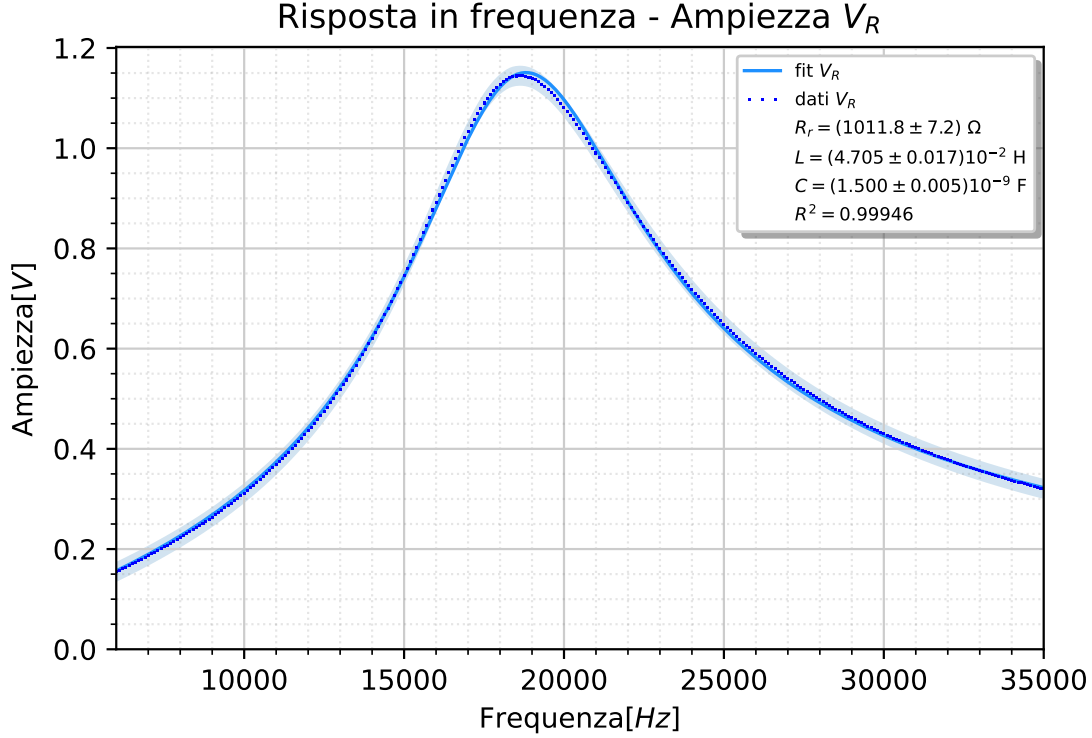


Figura 4: Il grafico mostra in dettaglio l'ampiezza della tensione sul resistore, con sovrapposto relativo fit (equazione 2).

valore massimo. In questo modo, però, si è sovrastimata l'incertezza relativa alla frequenza di risonanza, calcolandola come il valore medio di questi due estremi. Da tale procedura si è ottenuto un valore $f_0 = (18.80 \pm 0.28) kHz$. La significatività di tale risultato è ridotta, avendo utilizzato una sovrastima dell'incertezza.

Un'anomalia emersa dall'analisi dei dati raccolti riguarda il valore della resistenza totale del circuito, che, dai fit dei dati raccolti risulta sempre essere largamente superiore al valore teorico. In Appendice si analizza meglio questa evenienza.

4.3 Analisi delle fasi

Le funzioni che descrivono gli andamenti attesi delle fasi sono le seguenti:

$$\phi_R = \arctan \frac{1 - \omega^2 LC}{R\omega C}$$

$$\phi_L = \arctan \frac{1 - \omega^2 LC}{R\omega C} + \frac{\pi}{2}$$

$$\phi_C = \arctan \frac{1 - \omega^2 LC}{R\omega C} - \frac{\pi}{2}$$

I dati sullo sfasamento della tensione sono stati raccolti in concomitanza con quelli sulle ampiezze. È stato scelto di sottrarre ai dati sulle fasi di R, L, C i corrispondenti valori di ϕ_{gen} in quanto quello che si dovrebbe misurare è lo sfasamento rispetto al generatore. In figura 5 sono visibili

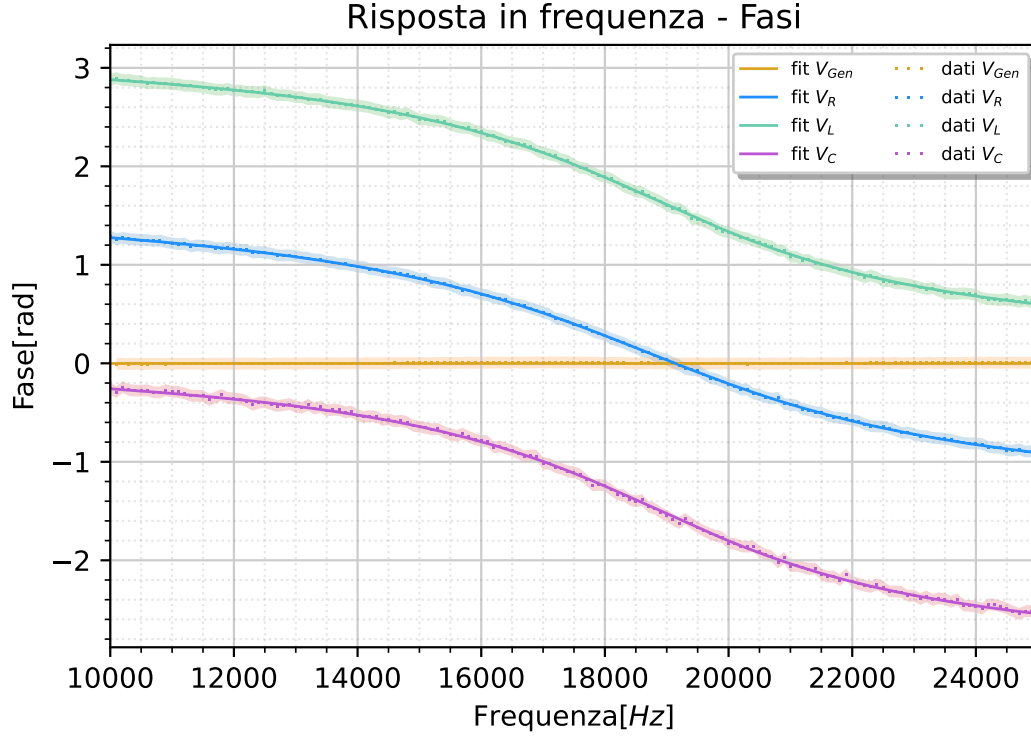


Figura 5: Andamento dello sfasamento della tensione sulle componenti al variare della frequenza del generatore.

tali dati assieme alle curve best-fit, ottenute considerando solamente i valori fra 10 e 25kHz con un valore caratteristico di $R^2 = 0.986$. Il rumore di fondo è stato valutato in maniera analoga a quanto fatto per le ampiezze, estraendo la deviazione standard degli sfasamenti a f costante, con $\sigma_\phi = 0.002$ rad. Considerando la curva associata alla resistenza, si è pensato di estrarre il punto della funzione ottenuta dal fit di valore nullo e stimare un range, definito dalla barra di errore. Il valore corrispondente a quando questa curva si trova ad avere fase nulla con il generatore è quindi $f_0 = (19.10 \pm 0.10)kHz$, prossimo al valore atteso. Ripetendo il procedimento con la curva dell'induttanza, ma stavolta cercando uno sfasamento di $\frac{\pi}{2}$, si è avuto nuovamente un esito vicino ai precedenti, ovvero $f_0 = (19.35 \pm 0.15)kHz$.

5 Conclusione

In conclusione il comportamento del filtro è risultato essere in accordo con la teoria. Per quanto riguarda il fenomeno della risonanza, dall'analisi delle ampiezze per f_0 sono stati ottenuti i valori $f_0 = (18.95 \pm 0.05)kHz$ e $f_0 = (18.80 \pm 0.28)kHz$, mentre da quella delle fasi $f_0 = (19.10 \pm 0.10)kHz$ e $f_0 = (19.35 \pm 0.15)kHz$. Si è ipotizzato che le discrepanze dal valore atteso $f_0 = (19.13 \pm 0.14)kHz$, dove presenti, siano dovute ai diversi fattori ambientali, primo fra tutti la temperatura variabile delle componenti della scheda di acquisizione NI ELVIS II, dovuta all'effetto Joule.

È stata inoltre evidenziata un'errata stima iniziale della resistenza totale del circuito, in quanto i valori di tale grandezza sono risultati sistematicamente superiori in tutti i fit realizzati. Per avere

un'idea di quanto tale valore risulti superiore a quello atteso di $R_{\text{tot}} = (1172.5 \pm 1.6) \, \Omega$ si riporta tale dato nel caso del fit più significativo, ossia quello dell'ampiezza di V_R , $R = (2.15 \pm 0.15) 10^3 \, \Omega$.

6 Appendice

Al fine di studiare il comportamento del circuito analizzato in questa esperienza di laboratorio, si è utilizzato il concetto di impedenza, che generalizza il concetto più specifico di resistenza nel caso di correnti sinusoidali. L'impedenza totale è data dalla somma delle impedenze di ciascun componente, sfruttando il fatto che questi siano posti in serie. Perciò avremo...

dove j indica l'unità immaginaria, mentre il termine tra parentesi indica la reattanza, costituita in parte dal contributo induttivo e in parte da quello capacitivo. Per trovare la corrente nel circuito invece è stata applicata la legge di Ohm simbolica, sfruttando il formalismo dei fasori e, moltiplicando poi il valore ottenuto per l'impedenza ai campi di ciascun componente, si può trovare l'andamento della tensione su di essi.

Si è ipotizzato che la resistenza ag- giuntiva potesse essere dovuta a un difetto del condensatore, unico componente per il quale non si era precedentemente cercato un valore di resistenza, non dovendola avere. Tuttavia, anche con una successiva verifica, isolandolo dal circuito, esso risulta non essere il problema. Con prove ripetute si ottiene lo stesso risultato e si è ipotizzato quindi che la causa dell'anomalia possa essere il modo in cui i dati sono raccolti dal LabView.