DERIVABILITE
EXERCICES CORRIGES

Exercice n°1.

Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3x^2+4x-5$. Démontrer que *f* est dérivable en 3 et calculer $f'(3)$

Exercice n°2.

Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{si } x<0 \\ x-1 & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$

La fonction *f* est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

Exercice n°3.

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sqrt{x^2+3}$

a) Pour tout réel $h\neq 0$, démontrer que : $\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\dfrac{h}{\sqrt{h^2+3}+\sqrt{3}}$

b) En déduire que *f* est dérivable en 0 et donner le nombre dérivé de *f* en 0.

Exercice n°4.

1) Etudier la dérivabilité en 0 de $x\mapsto x\sqrt{x}$

2) Soit *f* la fonction numérique définie par $f(x)=(1-x)\sqrt{1-x^2}$

a) Déterminer l'ensemble de définition de *f*

b) Etudier la dérivabilité de *f* en +1 et en –1

Exercice n°5.

1) f est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=x+\sqrt{x}$

a) Etudier la dérivabilité de *f* en 0

b) Dans un repère orthogonal, la courbe représentant *f* admet-elle une tangente au point d'abscisse 0 ?

2) g est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x)=x^2\sqrt{x}$

a) Etudier la dérivabilité de *g* en 0

b) Dans un repère orthogonal, la courbe représentant *g* admet-elle une tangente au point d'abscisse 0

Exercice n°6.

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=|x^2-1|$

a) Donner, suivant la valeur de *x*, l'expression de *f*(*x*)

b) Etudier la dérivabilité de *f* en 1

Exercice n°7.

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=|x^2-1|$

C est la courbe représentant *f* dans un repère orthonormal.

1) Tracer la courbe *C*. On note A le point de *C* d'abscisse 1.

2) a) Montrer que *f* est dérivable à droite en 1.

b) Déterminer une équation de la tangente à droite à la courbe *C* au point A. Tracer cette tangente.

3) a) Montrer que *f* est dérivable à gauche en 1.

b) Déterminer une équation de la tangente à gauche à la courbe *C* au point A. Tracer également cette tangente.

4) La fonction est-elle dérivable en 1 ?

Exercice n°8.

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x-1)|x-1|$

a) Dans un repère, tracer la courbe représentative *C* de *f*

b) Démontrer que la fonction *f* est dérivable en 1. Donner le nombre dérivé de *f* en 1

c) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe *C* au point d'abscisse 1.

Mathématiques - jgcuaz

jgcuaz@hotmail.com

Exercice n°9.

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\frac{1}{x^2}$

a) Pour tout réel h tel que $-1+h\neq 0$ et $h\neq 0$, exprimer en fonction de h le rapport $\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$

b) En déduire que f est dérivable en –1 et donner le nombre dérivé de f en -1

Exercice n°10.

En utilisant la définition du nombre dérivé, déterminer la limite des fonctions suivantes en a

1) $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ en $a=0$

2) $f(x)=\frac{\cos x-1}{x}$ en $a=0$

3) $f(x)=\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$ en $a=\frac{\pi}{2}$

4) $f(x)=\frac{\sin x-1}{\cos x}$ en $a=\frac{\pi}{2}$

Mathématiques - jgcuaz
Mathématiques - jgcuaz
Mathématiques - jgcuaz

 jgcuaz@hotmail.com

DERIVABILITE - CORRECTION

Exercice n°1

Pour tout $h \neq 0$, on calcule : $\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}=\dfrac{3(3+h)^2+4(3+h)-5-\left(3\times 3^2+4\times 3-5\right)}{h}$

$=\dfrac{3\left(9+6h+h^2\right)+12+4h-5-34}{h}=\dfrac{27+18h+3h^2+12+4h-5-34}{h}=\dfrac{3h^2+22h}{h}=3h+22$

Puisque $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}3h+22=22$, on en conclut que f est dérivable en 3 et $f'(3)=22$

Exercice n°2

f est dérivable sur $]-\infty;0[$ en tant que fonction polynôme et sur $[0;+\infty[$ en tant que fonction affine.

Pour tout $x\in\,]-\infty;0[$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{x^2-1-(-1)}{x}=x$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$ donc f est dérivable à gauche en 0 et $f_g'(0)=0$. De plus, pour tout $x\in\,]0;+\infty[$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{x-1-(-1)}{x}=1$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=1$ donc f est dérivable à droite en 0 et $f_d'(0)=1$. Mais comme $f_g'(0)\neq f_d'(0)$, on conclut que $\boxed{f \text{ n'est pas dérivable en } 0}$ **(Point anguleux)**

Exercice n°3

a) On met en œuvre la technique dite de la « multiplication par la quantité conjuguée » : Pour tout réel $h\neq 0$,

$\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\dfrac{\sqrt{h^2+3}-\sqrt{3}}{h}=\dfrac{\left(\sqrt{h^2+3}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{h^2+3}+\sqrt{3}\right)}{h\left(\sqrt{h^2+3}+\sqrt{3}\right)}$

$=\dfrac{\left(\sqrt{h^2+3}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}{h\left(\sqrt{h^2+3}+\sqrt{3}\right)}=\dfrac{h^2+3-3}{h\left(\sqrt{h^2+3}+\sqrt{3}\right)}=\dfrac{h^2}{h\left(\sqrt{h^2+3}+\sqrt{3}\right)}=\dfrac{h}{\sqrt{h^2+3}+\sqrt{3}}$

b) Puisque $\lim\limits_{h\to 0}h=0$ et $\lim\limits_{h\to 0}\sqrt{h^2+3}=\sqrt{3}$, on aura $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h}{\sqrt{h^2+3}+\sqrt{3}}=\dfrac{0}{2\sqrt{3}}=0$

$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est dérivable en 0 et } f'(0)=0.}$

Exercice n°4

1) Pour tout $h\neq 0$, on calcule : $\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\dfrac{h\sqrt{h}-0}{h}=\dfrac{h\sqrt{h}}{h}=\sqrt{h}$

Puisque $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\sqrt{h}=0$, on en conclut que f est dérivable en 0 et $f'(0)=0$

2) a) f est définie pour toutes les valeurs de x pour lesquelles $1-x^2\geq 0 \Leftrightarrow x^2\leq 1\Leftrightarrow -1\leq x\leq 1$, donc $\boxed{D_f=[-1;1]}$

b) Pour tout $x\in[-1;1[$, $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\dfrac{(1-x)\sqrt{1-x^2}-0}{x-1}=-\sqrt{1-x^2}$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}-\sqrt{1-x^2}=0$,

donc $\boxed{f \text{ est dérivable (à gauche) en 1 et } f_g'(1)=1}$.

De plus, pour tout $x\in\,]-1;1]$, $\dfrac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\dfrac{(1-x)\sqrt{1-x^2}-0}{x+1}=\dfrac{(1-x)\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}}{1+x}=\dfrac{(1-x)\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$

Puisque $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}(1-x)\sqrt{1-x}=2\sqrt{2}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}\sqrt{1+x}=0^+$, on en conclut par quotient, que $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}=+\infty$, donc que $\boxed{f \text{ n'est pas dérivable en } -1}$4) On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\left|x^2-1\right|$

 jgcuaz@hotmail.com

Mathématiques - jgcuaz

Exercice n°5

1) a) Pour tout $x>0$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\dfrac{x+\sqrt{x}-0}{x}=1+\dfrac{\sqrt{x}}{x}=1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Puisque $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\sqrt{x}=0^+$, on en déduit par limite du quotient, que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$

La fonction *f* n'est donc pas dérivable en 0

b) Dans un repère orthogonal, la courbe représentant *f* admet en son point d'abscisse 0 une demi-tangente verticale.

2) a) Pour tout $x>0$, $\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=\dfrac{x^2\sqrt{x}-0}{x}=x\sqrt{x}$

Puisque $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}x\sqrt{x}=0^+$, on en déduit que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}x\sqrt{x}=0$

La fonction *g* est donc dérivable en 0 et $g'(0)=0$

b) Dans un repère orthogonal, la courbe représentant *g* admet en son point d'abscisse 0 une demi-tangente horizontale.

Exercice n°6

a) Pour tout $x\in\left]-\infty;-1\right]\cup\left[1;+\infty\right[$, $x^2-1\geq 0$ donc $f(x)=\left|x^2-1\right|=x^2-1$

Pour tout $x\in[-1;1]$, $x^2-1\leq 0$ donc $f(x)=\left|x^2-1\right|=-\left(x^2-1\right)=1-x^2$

b) On détermine $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}x+1=2$

La fonction *f* est donc dérivable à droite en 1 et $f_d'(1)=2$

On détermine $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\dfrac{-\left(x^2-1\right)}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\dfrac{-(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}-(x+1)=-2$

La fonction *f* est donc dérivable à gauche en 1 et $f_g'(1)=-2$

Cependant, puisque $f_d'(1)\neq f_g'(1)$, *f* n'est pas dérivable en 1.

Exercice n°7

1) Pour tout $x\in\left]-\infty;-1\right]\cup\left[1;+\infty\right[$, $x^2-1\geq 0$ donc $f(x)=\left|x^2-1\right|=x^2-1$.

Pour tout $x\in[-1;1]$, $x^2-1\leq 0$ donc $f(x)=\left|x^2-1\right|=-\left(x^2-1\right)=1-x^2$.

La courbe représentative de *f* est donc constituée de l'union de deux courbes paraboles : celle de la fonction $x\to x^2-1$ pour $x\in\left]-\infty;-1\right]\cup\left[1;+\infty\right[$, et celle de la fonction $x\to 1-x^2$ pour $x\in[-1;1]$.

2) a) Pour tout *x*>1, $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\dfrac{x^2-1}{x-1}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}x+1=2$, ce qui nous permet d'affirmer que *f* est dérivable à droite en 1 et que $f_d'(1)=2$

b) Une équation de la tangente à droite à la courbe *C* au point A est $y=f_d'(1)(x-1)+f(1)=2(x-1)+0$, c'est-à-dire $\boxed{y=2x-2}$

3) a) Pour tout *x*<1, $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\dfrac{-\left(x^2-1\right)}{x-1}=\dfrac{-(x-1)(x+1)}{x-1}=-(x+1)$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}-(x+1)=-2$, ce qui nous permet d'affirmer que *f* est dérivable à gauche en 1 et que $f_g'(1)=-2$

b) Une équation de la tangente à gauche à la courbe *C* au point A est $y=f_g'(1)(x-1)+f(1)=-2(x-1)+0$, c'est-à-dire $\boxed{y=-2x+2}$

4) La fonction *f* n'est pas dérivable en 1 car $f_g'(1)\neq f_d'(1)$

Les tangentes à droite et à gauche en A étant différentes, on dit que A est un point anguleux.

Mathématiques - jgcuaz

 jgcuaz@hotmail.com

Exercice n°8

a) Pour tout $x \geq 1 \Leftrightarrow x-1 \geq 0$, $|x-1| = x-1$ donc $f(x) = (x-1)(x-1) = (x-1)^2$

Pour tout $x \leq 1 \Leftrightarrow x-1 \leq 0$, $|x-1| = -(x-1)$ donc $f(x) = (x-1)\times(-(x-1)) = -(x-1)^2$

b) Pour tout *x*>1, $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \dfrac{(x-1)^2-0}{x-1} = x-1$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} x-1 = 0$.

La fonction *f* est donc dérivable à droite en 1 et $f'_d(1) = 0$

De plus, pour tout *x*<1, $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \dfrac{-(x-1)^2-0}{x-1} = -(x-1)$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} -(x-1) = 0$.

La fonction *f* est donc dérivable à gauche en 1 et $f'_g(1) = 0$

Puisque $f'_d(1) = f'_g(1) = 0$, on conclut que $\boxed{f \text{ est dérivable en 1 et } f'(1) = 0}$

c) L'équation de la tangente T à la courbe *C* au point d'abscisse 1 est de la forme $y = f'(1)(x-1) + f(1)$, c'est-à-dire $\boxed{y=0}$. Il s'agit donc de l'axe des abscisses

Exercice n°9

a) Pour tout réel *h* tel que $-1+h \neq 0$ et $h \neq 0$,

$$\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \frac{\dfrac{1}{(-1+h)^2} - \dfrac{1}{(-1)^2}}{h} = \frac{\dfrac{1}{(-1+h)^2} - \dfrac{(-1+h)^2}{(-1+h)^2}}{h}$$

$$= \left(\frac{1}{(-1+h)^2} - \frac{1-2h+h^2}{(-1+h)^2}\right)\times\frac{1}{h} = \frac{2h-h^2}{(-1+h)^2}\times\frac{1}{h} = \frac{2-h}{(-1+h)^2}$$

b) Puisque $\lim\limits_{h\to 0} 2-h = 2$ et $\lim\limits_{h\to 0} -1+h = -1$ donc $\lim\limits_{h\to 0} (-1+h)^2 = 1$, on en déduit, par application des règles sur le quotient, que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2-h}{(-1+h)^2} = 2$, donc que $\boxed{f \text{ est dérivable en } -1 \text{ et que le nombre dérivé de } f \text{ en } -1 \text{ vaut } 2}$

Exercice n°10

1) Si on pose $g(x) = \sin x$, alors $g(0) = \sin 0 = 0$, et ainsi, pour tout $x \neq 0$,

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} = \frac{\sin x - \sin 0}{x-0} = \frac{g(x)-g(0)}{x-0}$$

La fonction *g* étant dérivable en 0, le quotient $f(x) = \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}$ admet donc une limite finie en 0 égale à $g'(0)$.

Or, pour tout réel *x*, $g'(x) = \cos x$ donc $g'(0) = 1$, et on conclut que $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1}$

2) Si on pose $g(x) = \cos x$, alors $g(0) = \cos 0 = 1$, et ainsi, pour tout $x \neq 0$,

$$f(x) = \frac{\cos x - 1}{x} = \frac{\cos x - \cos 0}{x-0} = \frac{g(x)-g(0)}{x-0}$$

La fonction *g* étant dérivable en 0, le quotient $f(x) = \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}$ admet donc une limite finie en 0 égale à $g'(0)$.

Or, pour tout réel *x*, $g'(x) = -\sin x$ donc $g'(0) = -\sin 0 = 0$, et on conclut que $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x} = 0}$

Mathématiques - jgcuaz

jgcuaz@hotmail.com

3) Si on pose $g(x)=\cos x$, alors $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, et ainsi, pour tout $x\neq\frac{\pi}{2}$,

$$f(x)=\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}=\frac{\cos x-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}=\frac{g(x)-g\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}$$

La fonction g étant dérivable en $\frac{\pi}{2}$, le quotient $f(x)=\frac{g(x)-g\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}$ admet donc une limite finie en $\frac{\pi}{2}$ égale à $g'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Or, pour tout réel x, $g'(x)=-\sin x$ donc $g'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$, et on conclut que $\boxed{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}=-1}$

4) Pour trouver cette limite, il faut « séparer » en deux la fraction

Pour tout $x\neq\frac{\pi}{2}$, $f(x)=\frac{\sin x-1}{\cos x}=\frac{\sin x-1}{x-\frac{\pi}{2}}\times\frac{x-\frac{\pi}{2}}{\cos x}$

On doit étudier séparément l'existence des deux limites $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-1}{x-\frac{\pi}{2}}$ et $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{x-\frac{\pi}{2}}{\cos x}$

Si on pose $g(x)=\sin x$, alors $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$, et ainsi, pour tout $x\neq\frac{\pi}{2}$,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-1}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}=g'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,$$

tandis que la deuxième limite $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{x-\frac{\pi}{2}}{\cos x}$ est l'inverse de celle trouvée dans la question c), donc vaut –1

Par produit des limites, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-1}{x-\frac{\pi}{2}}\times\frac{x-\frac{\pi}{2}}{\cos x}=0\times(-1)=0$, et ainsi $\boxed{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-1}{\cos x}=0}$

Mathématiques - jgcuaz