Polynômes

Corrections de Léa Blanc-Centi.

1 Opérations sur les polynômes

Exercice 1

Trouver le polynôme P de degré inférieur ou égal à 3 tel que :

$$P(0) = 1 \quad \text{et} \quad P(1) = 0 \quad \text{et} \quad P(-1) = -2 \quad \text{et} \quad P(2) = 4.$$

Correction ▼ Vidéo ■ [000427]

2 Division, pgcd

Exercice 2

1. Effectuer la division euclidienne de A par B :
   (a) $A = 3X^5 + 4X^2 + 1$, $B = X^2 + 2X + 3$
   (b) $A = 3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1$, $B = X^3 + X + 2$
   (c) $A = X^4 - X^3 + X - 2$, $B = X^2 - 2X + 4$
   (d) $A = X^5 - 7X^4 - X^2 - 9X + 9$, $B = X^2 - 5X + 4$
2. Effectuer la division selon les puissances croissantes de A par B à l'ordre k (c'est-à-dire tel que le reste soit divisible par X^{k+1}) :
   (a) $A = 1 - 2X + X^3 + X^4$, $B = 1 + 2X + X^2$, $k = 2$
   (b) $A = 1 + X^3 - 2X^4 + X^6$, $B = 1 + X^2 + X^3$, $k = 4$

Correction ▼ Vidéo ■ [006955]

Exercice 3

À quelle condition sur $a, b, c \in \mathbb{R}$ le polynôme $X^4 + aX^2 + bX + c$ est-il divisible par $X^2 + X + 1$?

Correction ▼ Vidéo ■ [006956]

Exercice 4

1. Déterminer les pgcd des polynômes suivants :
   (a) $X^3 - X^2 - X - 2$ et $X^5 - 2X^4 + X^2 - X - 2$
   (b) $X^4 + X^3 - 2X + 1$ et $X^3 + X + 1$
   (c) $X^5 + 3X^4 + X^3 + X^2 + 3X + 1$ et $X^4 + 2X^3 + X + 2$
   (d) $nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ et $X^n - nX + n - 1$ ($n \in \mathbb{N}^*$)
2. Calculer le pgcd D des polynômes A et B ci-dessous. Trouver des polynômes U et V tels que $AU + BV = D$.

(a) $A = X^5 + 3X^4 + 2X^3 - X^2 - 3X - 2$
et $B = X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 7X + 6$

(b) $A = X^6 - 2X^5 + 2X^4 - 3X^3 + 3X^2 - 2X$
et $B = X^4 - 2X^3 + X^2 - X + 1$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006957]

Exercice 5

1. Montrer que si A et B sont deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{Q}$, alors le quotient et le reste de la division euclidienne de A par B, ainsi que $\operatorname{pgcd}(A,B)$, sont aussi à coefficients dans $\mathbb{Q}$.
2. Soit $a,b,c \in \mathbb{C}^*$ distincts, et $0 < p < q < r$ des entiers. Montrer que si $P(X) = (X-a)^p(X-b)^q(X-c)^r$ est à coefficients dans $\mathbb{Q}$, alors $a,b,c \in \mathbb{Q}$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006958]

3 Racines et factorisation

Exercice 6

1. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$ les polynômes suivants :

$$a)\ X^3 - 3 \qquad b)\ X^{12} - 1 \qquad c)\ X^6 + 1 \qquad d)\ X^9 + X^6 + X^3 + 1$$

2. Factoriser les polynômes suivants :

$$a)\ X^2 + (3i-1)X - 2 - i \qquad b)\ X^3 + (4+i)X^2 + (5-2i)X + 2 - 3i$$

Correction ▼ Vidéo ■ [006959]

Exercice 7

Pour quelles valeurs de a le polynôme $(X+1)^7 - X^7 - a$ admet-il une racine multiple réelle ?

Correction ▼ Vidéo ■ [000410]

Exercice 8

Chercher tous les polynômes P tels que $P+1$ soit divisible par $(X-1)^4$ et $P-1$ par $(X+1)^4$.

Indications. Commencer par trouver une solution particulière P_0 avec l'une des méthode suivantes :

1. à partir de la relation de Bézout entre $(X-1)^4$ et $(X+1)^4$;
2. en considérant le polynôme dérivé P_0' et en cherchant un polynôme de degré minimal.

Montrer que P convient si et seulement si le polynôme $P - P_0$ est divisible par $(X-1)^4(X+1)^4$, et en déduire toutes les solutions du problème.

Correction ▼ Vidéo ■ [000370]

Exercice 9

Quels sont les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que P' divise P ?

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000378]

Exercice 10

Trouver tous les polynômes P qui vérifient la relation

$$P(X^2) = P(X)P(X+1)$$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006960]

Exercice 11

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$\forall z \in \mathbb{C}^* \qquad P\left(z+\frac{1}{z}\right) = z^n + \frac{1}{z^n}$$

Montrer alors que toutes les racines de P sont réelles, simples, et appartiennent à l'intervalle $[-2,2]$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006961]

Exercice 12

1. Soit $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$ un polynôme de degré $n \geqslant 1$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Démontrer que si P admet une racine dans $\mathbb{Z}$, alors celle-ci divise a_0.
2. Les polynômes $X^3 - X^2 - 109X - 11$ et $X^{10} + X^5 + 1$ ont-ils des racines dans $\mathbb{Z}$?

Correction ▼ Vidéo ■ [006962]

Exercice 13

Soient $a_0, \dots, a_n$ des réels deux à deux distincts. Pour tout $i = 0, \dots, n$, on pose

$$L_i(X) = \prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$$

(les L_i sont appelés *polynômes interpolateurs de Lagrange*). Calculer $L_i(a_j)$.

Soient $b_0, \dots, b_n$ des réels fixés. Montrer que $P(X) = \sum_{i=0}^{n} b_i L_i(X)$ est l'unique polynôme de degré inférieur ou égal à n qui vérifie :

$$P(a_j) = b_j \qquad \text{pour tout } j = 0, \dots, n.$$

Application. Trouver le polynôme P de degré inférieur ou égal à 3 tel que

$$P(0) = 1 \quad \text{et} \quad P(1) = 0 \quad \text{et} \quad P(-1) = -2 \quad \text{et} \quad P(2) = 4.$$

Correction ▼ Vidéo ■ [006963]

Indication pour l'exercice 4 ▲

Le calcul du pgcd se fait par l'algorithme d'Euclide, et la "remontée" de l'algorithme permet d'obtenir U et V.

Indication pour l'exercice 5 ▲

Calculer $\mathrm{pgcd}(P, P')$.

Indication pour l'exercice 9 ▲

Si $P = P'Q$ avec $P \neq 0$, regarder le degré de Q.

Indication pour l'exercice 10 ▲

Montrer que si P est un polynôme non constant vérifiant la relation, alors ses seules racines possibles sont 0 et 1.

Indication pour l'exercice 11 ▲

Pour l'existence, preuve par récurrence sur n. Pour les racines, montrer que $P(x) = 2\cos(n \arccos(x/2))$.

Correction de l'exercice 1 ▲

On cherche P sous la forme $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$, ce qui donne le système linéaire suivant à résoudre :

$$\begin{cases} & & & & & & d & = & 1 \\ a & + & b & + & c & + & d & = & 0 \\ -a & + & b & - & c & + & d & = & -2 \\ 8a & + & 4b & + & 2c & + & d & = & 4 \end{cases}$$

Après calculs, on trouve une unique solution : $a = \frac{3}{2}$, $b = -2$, $c = -\frac{1}{2}$, $d = 1$ c'est-à-dire

$$P(X) = \frac{3}{2}X^3 - 2X^2 - \frac{1}{2}X + 1.$$

Correction de l'exercice 2 ▲

1. (a) $3X^5 + 4X^2 + 1 = (X^2 + 2X + 3)(3X^3 - 6X^2 + 3X + 16) - 41X - 47$
   (b) $3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1 = (X^3 + X + 2)(3X^2 + 2X - 3) - 9X^2 - X + 7$
   (c) $X^4 - X^3 + X - 2 = (X^2 - 2X + 4)(X^2 + X - 2) - 7X + 6$
   (d) $X^5 - 7X^4 - X^2 - 9X + 9$
   $= (X^2 - 5X + 4)(X^3 - 2X^2 - 14X - 63) - 268X + 261$
2. (a) $1 - 2X + X^3 + X^4 = (1 + 2X + X^2)(1 - 4X + 7X^2) + X^3(-9 - 6X)$
   (b) $1 + X^3 - 2X^4 + X^6 = (1 + X^2 + X^3)(1 - X^2 - X^4) + X^5(1 + 2X + X^2)$

Correction de l'exercice 3 ▲

La division euclidienne de $A = X^4 + aX^2 + bX + c$ par $B = X^2 + X + 1$ donne

$$X^4 + aX^2 + bX + c = (X^2 + X + 1)(X^2 - X + a) + (b - a + 1)X + c - a$$

Or A est divisible par B si et seulement si le reste $R = (b - a + 1)X + c - a$ est le polynôme nul, c'est-à-dire si et seulement si $b - a + 1 = 0$ et $c - a = 0$.

Correction de l'exercice 4 ▲

1. L'algorithme d'Euclide permet de calculer le pgcd par une suite de divisions euclidiennes.
   (a) $X^5 - 2X^4 + X^2 - X - 2 = (X^3 - X^2 - X - 2)(X^2 - X) + 2X^2 - 3X - 2$
   puis $X^3 - X^2 - X - 2 = (2X^2 - 3X - 2)(\frac{1}{2}X + \frac{1}{4}) + \frac{3}{4}X - \frac{3}{2}$
   puis $2X^2 - 3X - 2 = (\frac{3}{4}X - \frac{3}{2})(\frac{8}{3}X + \frac{4}{3})$
   Le pgcd est le dernier reste non nul, divisé par son coefficient dominant :
   $$\operatorname{pgcd}(X^3 - X^2 - X - 2, X^5 - 2X^4 + X^2 - X - 2) = X - 2$$
   (b) $X^4 + X^3 - 2X + 1 = (X^3 + X + 1)(X + 1) - X^2 - 4X$
   puis $X^3 + X + 1 = (-X^2 - 4X)(-X + 4) + 17X + 1$
   $$\begin{aligned} \text{donc } \operatorname{pgcd} & (X^4 + X^3 - 2X + 1, X^3 + X + 1) \\ & = \operatorname{pgcd}(-X^2 - 4X, 17X + 1) = 1 \end{aligned}$$
   car $-X^2 - 4X$ et $17X + 1$ n'ont pas de racine (même complexe) commune.
   (c) $X^5 + 3X^4 + X^3 + X^2 + 3X + 1 = (X^4 + 2X^3 + X + 2)(X + 1) - X^3 - 1$
   puis $X^4 + 2X^3 + X + 2 = (-X^3 - 1)(-X - 2) + 2X^3 + 2$
   $$\operatorname{pgcd}(X^5 + 3X^4 + X^3 + X^2 + 3X + 1, X^4 + 2X^3 + X + 2) = X^3 + 1$$

(d) $nX^{n+1}-(n+1)X^n+1$
$\quad = (X^n-nX+n-1)(nX-(n+1))+n^2(X-1)^2$
Si $n=1$ alors $X^n-nX+n-1=0$ et le pgcd vaut $(X-1)^2$. On constate que 1 est racine de $X^n-nX+n-1$, et on trouve $X^n-nX+n-1=(X-1)(X^{n-1}+X^{n-2}+\cdots+X^2+X-(n-1))$.
Si $n\geqslant 2$: 1 est racine de $X^{n-1}+X^{n-2}+\cdots+X^2+X-(n-1)$ et on trouve
$X^{n-1}+X^{n-2}+\cdots+X^2+X-(n-1)$
$\quad = (X-1)(X^{n-2}+2X^{n-3}+\cdots+(n-1)X^2+nX+(n+1))$, donc finalement $(X-1)^2$ divise $X^n-nX+n-1$ (on pourrait aussi remarquer que 1 est racine de multiplicité au moins deux de $X^n-nX+n-1$, puisqu'il est racine de ce polynôme et de sa dérivée). Ainsi

$$\text{si } n\geqslant 2,\ \operatorname{pgcd}(nX^{n+1}-(n+1)X^n+1, X^n-nX+n-1)=(X-1)^2$$

2. (a) $A=X^5+3X^4+2X^3-X^2-3X-2$ et $B=X^4+2X^3+2X^2+7X+6$
donc $A=BQ_1+R_1$ avec $Q_1=X+1$, $R_1=-2X^3-10X^2-16X-8$
puis $B=R_1Q_2+R_2$ avec $Q_2=-\frac{1}{2}X+\frac{3}{2}$ et $R_2=9X^2+27X+18$
et enfin $R_1=R_2Q_3$ avec $Q_3=-\frac{2}{9}X-\frac{4}{9}$
Donc $D=X^2+3X+2$, et on obtient

$$9D=B-R_1Q_2=B-(A-BQ_1)Q_2=-AQ_2+B(1+Q_1Q_2)$$

soit

$$\begin{cases} U=\frac{1}{9}(-Q_2)=\frac{1}{18}X-\frac{1}{6} \\ V=\frac{1}{9}(1+Q_1Q2)=-\frac{1}{18}X^2+\frac{1}{9}X+\frac{5}{18} \end{cases}$$

(b) On a $A=BQ_1+R_1$ avec $Q_1=X^2+1$, $R_1=X^2-X-1$
puis $B=R_1Q_2+R_2$ avec $Q_2=X^2-X+1$ et $R_2=-X+2$
et enfin $R_1=R_2Q_3+R_3$ avec $Q_3=-X-1$ et $R_3=1$
Donc $D=1$, et on obtient

$$\begin{aligned} 1 &= R_1-R_2Q_3=R_1-(B-R_1Q_2)Q_3=R_1(1+Q_2Q_3)-BQ_3 \\ &= (A-BQ_1)(1+Q_2Q_3)-BQ_3 \\ &= A(1+Q_2Q_3)-B(Q_1(1+Q_2Q_3)+Q_3) \end{aligned}$$

soit

$$\begin{cases} U=1+Q_2Q_3=-X^3 \\ V=-Q_1(1+Q_2Q_3)-Q_3=1+X+X^3+X^5 \end{cases}$$

Correction de l'exercice 5 ▲

1. Lorsqu'on effectue la division euclidienne $A=BQ+R$, les coefficients de Q sont obtenus par des opérations élémentaires (multiplication, division, addition) à partir des coefficients de A et B : ils restent donc dans $\mathbb{Q}$. De plus, $R=A-BQ$ est alors encore à coefficients rationnels.

   Alors $\operatorname{pgcd}(A,B)=\operatorname{pgcd}(B,R)$ et pour l'obtenir, on fait la division euclidienne de B par R (dont le quotient et le reste sont encore à coefficients dans $\mathbb{Q}$), puis on recommence... Le pgcd est le dernier reste non nul, c'est donc encore un polynôme à coefficients rationnels.

2. Notons $P_1=\operatorname{pgcd}(P,P')$: comme P est à coefficients rationnels, P' aussi et donc P_1 aussi. Or $P_1(X)=(X-a)^{p-1}(X-b)^{q-1}(X-c)^{r-1}$. En itérant le processus, on obtient que $P_{r-1}(X)=(X-c)$ est à coefficients rationnels, donc $c\in\mathbb{Q}$.

   On remonte alors les étapes : $P_{q-1}(X)=(X-b)(X-c)^{r-q+1}$ est à coefficients rationnels, et $X-b$ aussi en tant que quotient de P_{q-1} par le polynôme à coefficients rationnels $(X-c)^{r-q+1}$, donc $b\in\mathbb{Q}$. De même, en considérant P_{p-1}, on obtient $a\in\mathbb{Q}$.

Correction de l'exercice 6 ▲

1. (a) $X^3-3=(X-3^{1/3})(X^2+3^{1/3}X+3^{2/3})$ où $X^2+3^{1/3}X+3^{2/3}$ est irréductible sur $\mathbb{R}$. On cherche ses racines complexes pour obtenir la factorisation sur $\mathbb{C}$:

$$X^3-3=(X-3^{1/3})(X+\frac{1}{2}3^{1/3}-\frac{i}{2}3^{5/6})(X+\frac{1}{2}3^{1/3}+\frac{i}{2}3^{5/6})$$

(b) Passons à $X^{12}-1$. $z=re^{i\theta}$ vérifie $z^{12}=1$ si et seulement si $r=1$ et $12\theta\equiv 0[2\pi]$, on obtient donc comme racines complexes les $e^{ik\pi/6}$ $(k=0,\dots,11)$, parmi lesquelles il y en a deux réelles (-1 et 1) et cinq couples de racines complexes conjuguées ($e^{i\pi/6}$ et $e^{11i\pi/6}$, $e^{2i\pi/6}$ et $e^{10i\pi/6}$, $e^{3i\pi/6}$ et $e^{9i\pi/6}$, $e^{4i\pi/6}$ et $e^{8i\pi/6}$, $e^{5i\pi/6}$ et $e^{7i\pi/6}$), d'où la factorisation sur $\mathbb{C}[X]$:

$$\begin{aligned}X^{12}-1= \; &(X-1)(X+1)(X-e^{i\pi/6})(X-e^{11i\pi/6})(X-e^{2i\pi/6})\\ &(X-e^{10i\pi/6})(X-e^{3i\pi/6})(X-e^{9i\pi/6})(X-e^{4i\pi/6})\\ &(X-e^{8i\pi/6})(X-e^{5i\pi/6})(X-e^{7i\pi/6})\end{aligned}$$

Comme $(X-e^{i\theta})(X-e^{-i\theta})=(X^2-2\cos(\theta)X+1)$, on en déduit la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$:

$$\begin{aligned}X^{12}-1 &=(X-1)(X+1)(X^2-2\cos(\pi/6)X+1)\\ &\quad(X^2-2\cos(2\pi/6)X+1)(X^2-2\cos(3\pi/6)X+1)\\ &\quad(X^2-2\cos(4\pi/6)X+1)(X^2-2\cos(5\pi/6)X+1)\\ &=(X-1)(X+1)(X^2-\sqrt{3}X+1)\\ &\quad(X^2-X+1)(X^2+1)(X^2+X+1)(X^2+\sqrt{3}X+1)\end{aligned}$$

(c) Pour X^6+1, $z=re^{i\theta}$ vérifie $z^6=-1$ si et seulement si $r=1$ et $6\theta\equiv\pi[2\pi]$, on obtient donc comme racines complexes les $e^{i(\pi+2k\pi)/6}$ $(k=0,\dots,5)$. D'où la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$:

$$\begin{aligned}X^6+1 &=(X-e^{i\pi/6})(X-e^{3i\pi/6})(X-e^{5i\pi/6})(X-e^{7i\pi/6})\\ &\quad(X-e^{9i\pi/6})(X-e^{11i\pi/6})\end{aligned}$$

Pour obtenir la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$, on regroupe les paires de racines complexes conjuguées :

$$X^6+1=(X^2+1)(X^2-\sqrt{3}X+1)(X^2+\sqrt{3}X+1)$$

(d) $X^9+X^6+X^3+1=P(X^3)$ où $P(X)=X^3+X^2+X+1=\frac{X^4-1}{X-1}$: les racines de P sont donc les trois racines quatrièmes de l'unité différentes de 1 (i, $-i$, -1) et

$$\begin{aligned}X^9+X^6+X^3+1 &= P(X^3)\\ &= (X^3+1)(X^3-i)(X^3+i)\\ &= (X^3+1)(X^6+1)\end{aligned}$$

On sait déjà factoriser X^6+1, il reste donc à factoriser le polynôme $X^3+1=(X+1)(X^2-X+1)$, où X^2-X+1 n'a pas de racine réelle. Donc

$$\begin{aligned}X^9+X^6+X^3+1 &=(X+1)(X^2-X+1)(X^2+1)\\ &\quad(X^2-\sqrt{3}X+1)(X^2+\sqrt{3}X+1)\end{aligned}$$

Pour la factorisation sur $\mathbb{C}$: les racines de X^2-X+1 sont $e^{i\pi/3}$ et $e^{5i\pi/3}$, ce qui donne

$$\begin{aligned}X^9+X^6+X^3+1 &=(X+1)(X-e^{i\pi/3})(X-e^{5i\pi/3})\\ &\quad(X-e^{i\pi/6})(X-e^{3i\pi/6})(X-e^{5i\pi/6})\\ &\quad(X-e^{7i\pi/6})(X-e^{9i\pi/6})(X-e^{11i\pi/6})\end{aligned}$$

2. (a) Pour $X^2+(3i-1)X-2-i$, on calcule le discriminant

$$\Delta = (3i-1)^2 - 4(-2-i) = -2i$$

et on cherche les racines carrées (complexes !) de Δ : $w = a+ib$ vérifie $w^2 = \Delta$ si et seulement si $w = 1-i$ ou $w = -1+i$. Les racines du polynômes sont donc $\frac{1}{2}(-(3i-1)\pm(1-i))$ et $P(X) = (X+i)(X-1+2i)$.

(b) Pour $X^3+(4+i)X^2+(5-2i)X+2-3i$: -1 est racine évidente, et $P(X) = (X+1)(X^2+(3+i)X+2-3i)$. Le discriminant du polynôme $X^2+(3+i)X+2-3i$ vaut $\Delta = 18i$, ses deux racines carrées complexes sont $\pm(3+3i)$ et finalement on obtient $P(X) = (X+1)(X-i)(X+3+2i)$.

Correction de l'exercice 7 ▲

Soit $x \in \mathbb{R}$; x est une racine multiple de P si et seulement si $P(x) = 0$ et $P'(x) = 0$:

$$\begin{aligned}
P(x) = P'(x)0 \quad &\iff \begin{cases} (x+1)^7 - x^7 - a = 0 \\ 7(x+1)^6 - 7x^6 = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} (x+1)x^6 - x^7 - a = 0 & \text{en utilisant la deuxième équation} \\ (x+1)^6 = x^6 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x^6 = a \\ (x+1)^3 = \pm x^3 & \text{en prenant la racine carrée} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x^6 = a \\ x+1 = \pm x & \text{en prenant la racine cubique} \end{cases}
\end{aligned}$$

qui admet une solution ($x = -\frac{1}{2}$) si et seulement si $a = \frac{1}{64}$.

Correction de l'exercice 8 ▲

1. On remarque que si P est solution, alors $P+1 = (X-1)^4 A$ et par ailleurs $P-1 = (X+1)^4 B$, ce qui donne $1 = \frac{A}{2}(X-1)^4 + \frac{-B}{2}(X+1)^4$. Cherchons des polynômes A et B qui conviennent : pour cela, on écrit la relation de Bézout entre $(X-1)^4$ et $(X+1)^4$ qui sont premiers entre eux, et on obtient

$$\frac{A}{2} = \frac{5}{32}X^3 + \frac{5}{8}X^2 + \frac{29}{32}X + \frac{1}{2}$$
$$\frac{-B}{2} = -\frac{5}{32}X^3 + \frac{5}{8}X^2 - \frac{29}{32}X + \frac{1}{2}$$

On a alors par construction

$$(X-1)^4 A - 1 = 2\left(1 + (X+1)^4 \frac{-B}{2}\right) = 1 + (X+1)^4 B$$

et $P_0 = (X-1)^4 A - 1$ convient. En remplaçant, on obtient après calculs :

$$P_0 = \frac{5}{16}X^7 - \frac{21}{16}X^5 + \frac{35}{16}X^3 - \frac{35}{16}X$$

2. Si $(X-1)^4$ divise $P+1$, alors 1 est racine de multiplicité au moins 4 de $P+1$, et donc racine de multiplicité au moins 3 de P' : alors $(X-1)^3$ divise P'. De même $(X+1)^3$ divise P'. Comme $(X-1)^3$ et $(X+1)^3$ sont premiers entre eux, nécessairement $(X-1)^3(X+1)^3$ divise P'. Cherchons un polynôme de degré minimal : on remarque que les primitives de

$$\lambda(X-1)^3(X+1)^3 = \lambda(X^2-1)^3 = \lambda(X^6 - 3X^4 + 3X^2 - 1)$$

sont de la forme $P(X) = \lambda(\frac{1}{7}X^7 - \frac{3}{5}X^5 + X^3 - X + a)$. Si P convient, nécessairement 1 est racine de $P+1$ et -1 est racine de $P-1$, ce qui donne $\lambda(\frac{-16}{35}+a) = -1$ et $\lambda(\frac{16}{35}+a) = 1$. D'où $\lambda a = 0$ et comme on cherche P non nul, il faut $a = 0$ et $\lambda = \frac{35}{16}$. On vérifie que

$$P_0(X) = \frac{35}{16}(\frac{1}{7}X^7 - \frac{3}{5}X^5 + X^3 - X) = \frac{5}{16}X^7 - \frac{21}{16}X^5 + \frac{35}{16}X^3 - \frac{35}{16}X$$

est bien solution du problème : le polynôme $A = P_0 + 1$ admet 1 comme racine, i.e. $A(1) = 0$, et sa dérivée admet 1 comme racine triple donc $A'(1) = A''(1) = A'''(1) = 0$, ainsi 1 est racine de multiplicité au moins 4 de A et donc $(X-1)^4$ divise $A = P+1$. De même, $(X+1)^4$ divise $P-1$.

Supposons que P soit une solution du problème. On note toujours P_0 la solution particulière obtenue ci-dessus. Alors $P+1$ et P_0+1 sont divisibles par $(X-1)^4$, et $P-1$ et P_0-1 sont divisibles par $(X+1)^4$. Ainsi $P-P_0 = (P+1)-(P_0+1) = (P-1)-(P_0-1)$ est divisible par $(X-1)^4$ et par $(X+1)^4$. Comme $(X-1)^4$ et $(X+1)^4$ sont premiers entre eux, nécessairement $P-P_0$ est divisible par $(X-1)^4(X+1)^4$. Réciproquement, si $P = P_0 + (X-1)^4(X+1)^4 A$, alors $P+1$ est bien divisible par $(X-1)^4$ et $P-1$ est divisible par $(X+1)^4$.
Ainsi les solutions sont exactement les polynômes de la forme

$$P_0(X) + (X-1)^4(X+1)^4 A(X)$$

où P_0 est la solution particulière trouvée précédemment, et A un polynôme quelconque.

Correction de l'exercice 9 ▲

Le polynôme nul convient. Dans la suite on suppose que P n'est pas le polynôme nul.
Notons $n = \deg P$ son degré. Comme P' divise P, alors P est non constant, donc $n \geqslant 1$. Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = P'Q$. Puisque $\deg(P') = \deg(P) - 1 \geqslant 0$, alors Q est de degré 1. Ainsi $Q(X) = aX + b$ avec $a \neq 0$, et donc

$$P(X) = P'(X)(aX+b) = aP'(X)(X + \frac{b}{a})$$

Donc si $z \neq \frac{-b}{a}$ et si z est racine de P de multiplicité $k \geqslant 1$, alors z est aussi racine de P' avec la même multiplicité, ce qui est impossible. Ainsi la seule racine possible de P est $\frac{-b}{a}$.
Réciproquement, soit P un polynôme avec une seule racine $z_0 \in \mathbb{C}$: il existe $\lambda \neq 0$, $n \geqslant 1$ tels que $P = \lambda(X - z_0)^n$, qui est bien divisible par son polynôme dérivé.

Correction de l'exercice 10 ▲

Si P est constant égal à c, il convient si et seulement si $c = c^2$, et alors $c \in \{0;1\}$.
Dans la suite on suppose P non constant. Notons Z l'ensemble des racines de P. On sait que Z est un ensemble non vide, fini.
Analyse
Si $z \in Z$, alors $P(z) = 0$ et la relation $P(X^2) = P(X)P(X+1)$ implique $P(z^2) = 0$, donc $z^2 \in Z$. En itérant, on obtient $z^{2k} \in Z$ (pour tout $k \in \mathbb{N}^*$). Si $|z| > 1$, la suite $(|z^{2k}|)_k$ est strictement croissante donc Z contient une infinité d'éléments, ce qui est impossible. De même si $0 < |z| < 1$, la suite $(|z^{2k}|)_k$ est strictement décroissante, ce qui est impossible pour la même raison. Donc les éléments de Z sont soit 0, soit des nombres complexes de module 1.
De plus, si $P(z) = 0$, alors toujours par la relation $P(X^2) = P(X)P(X+1)$, on a que $P((z-1)^2) = 0$ donc $(z-1)^2 \in Z$. Par le même raisonnement que précédemment, alors ou bien $z-1 = 0$ ou bien $|z-1| = 1$.
En écrivant $z = a+ib$, on vérifie que $|z| = |z-1| = 1$ équivaut à $z = e^{\pm i\pi/3}$. Finalement, $Z \subset \{0, 1, e^{i\pi/3}, e^{-i\pi/3}\}$.
Or si $e^{\pm i\pi/3}$ était racine de P, alors $(e^{\pm i\pi/3})^2$ devrait aussi être dans Z, mais ce n'est aucun des quatre nombres complexes listés ci-dessus. Donc ni $e^{i\pi/3}$, ni $e^{-i\pi/3}$ ne sont dans Z. Les deux seules racines (complexes) possibles sont donc 0 et 1. Conclusion : le polynôme P est nécessairement de la forme $\lambda X^k(X-1)^\ell$.

Synthèse
La condition $P(X^2) = P(X)P(X+1)$ devient

$$\lambda X^{2k}(X^2-1)^\ell = \lambda^2 X^k (X-1)^\ell (X+1)^k X^\ell$$

qui équivaut à $\begin{cases} \lambda^2 = \lambda \\ 2k = k+\ell \\ k = \ell \end{cases}$.
Autrement dit $k = \ell$ et $\lambda = 1$ (puisqu'on a supposé P non constant).
Conclusion Finalement, les solutions sont le polynôme nul et les polynômes $(X^2-X)^k$, $k \in \mathbb{N}$ ($k = 0$ donne le polynôme 1).

Correction de l'exercice 11 ▲

1. Commençons par remarquer que si P et Q sont deux polynômes qui conviennent, alors pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $P\left(z+\frac{1}{z}\right) - Q\left(z+\frac{1}{z}\right) = 0$. En appliquant cette égalité à $z = e^{i\theta}$, on obtient $(P-Q)(2\cos\theta) = 0$. Le polynôme $P-Q$ a une infinité de racines, donc il est nul, ce qui montre $P = Q$.
2. Montrons l'existence de P par récurrence forte sur n :
   — Pour $n = 0$, $P = 2$ convient et pour $n = 1$, $P = X$ convient.
   — Passage des rangs $k \leqslant n$ au rang $n+1$. Si on note P_k le polynôme construit pour $k \leqslant n$, on a
   $$z^{n+1} + \frac{1}{z^{n+1}} = (z+\frac{1}{z})(z^n + \frac{1}{z^n}) - (z^{n-1} + \frac{1}{z^{n-1}}) = (z+\frac{1}{z})P_n(z+\frac{1}{z}) - P_{n-1}(z+\frac{1}{z})$$
   donc $P_{n+1}(X) = XP_n(X) - P_{n-1}(X)$ convient.
   — On a ainsi construit P_n pour tout n (avec $\deg P_n = n$).
3. Fixons n et notons P le polynôme obtenu. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $P(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = e^{in\theta} + e^{-in\theta}$ donc $P(2\cos(\theta)) = 2\cos(n\theta)$.
   En posant $x = 2\cos(\theta)$ et donc $\theta = \arccos(\frac{x}{2})$ on obtient la relation Ainsi,
   $$P(x) = 2\cos(n\arccos(\frac{x}{2})) \qquad \forall x \in [-2,2]$$
   Le polynôme dérivée est $P'(x) = \frac{n}{\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}}\sin(n\arccos(\frac{x}{2}))$, il s'annule en changeant de signe en chaque $\alpha_k = 2\cos(\frac{k\pi}{n})$, ainsi $P'(\alpha_k) = 0$ pour $k = 0,\ldots,n$.
   On calcule aussi que $P(\alpha_k) = \pm 2$. Le tableau de signe montre que P est alternativement croissante (de -2 à $+2$) puis décroissante (de $+2$ à -2) sur chaque intervalle $[\alpha_{k+1},\alpha_k]$, qui forment une partition de $[-2,2]$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, P possède n racines simples (une dans chaque intervalle $[\alpha_{k+1},\alpha_k]$) dans $[-2,2]$. Puisque P est de degré n, on a ainsi obtenu toutes ses racines.

Correction de l'exercice 12 ▲

1. Si $k \in \mathbb{Z}$ est racine de P, alors $k^n + a_{n-1}k^{n-1} + \cdots + a_1 k = -a_0$ ce qui donne $k(k^{n-1} + \cdots + a_1) = -a_0$, donc k divise a_0.
2. Si $X^3 - X^2 - 109X - 11$ a une racine $k \in \mathbb{Z}$, nécessairement k divise 11, donc k vaut -1, 1, -11 ou 11. En testant ces quatre valeurs, on trouve que seul 11 est racine.
   De même, si $X^{10} + X^5 + 1$ admettait une racine entière k, celle-ci diviserait 1 donc vaut $k = \pm 1$, or on vérifie que ni $+1$, ni -1 ne sont racines. Ainsi $X^{10} + X^5 + 1$ n'a pas de racine entière.

Correction de l'exercice 13 ▲

On a
$$L_i(a_i) = \prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} \frac{a_i - a_j}{a_i - a_j} = 1 \qquad \text{et} \quad L_i(a_j) = 0 \text{ si } j \neq i$$
puisque le produit contient un facteur qui est nul : $(a_j - a_j)$. Puisque les L_i sont tous de degré n, le polynôme P est de degré inférieur ou égal à n, et $P(a_j) = \sum_{i=0}^n b_i L_i(a_j) = b_i$.
Il reste à montrer qu'un tel polynôme est unique. Supposons que Q convienne aussi, alors $P-Q$ est de degré inférieur ou égal à n et s'annule en $n+1$ points (les a_i), donc il est identiquement nul, i.e. $P = Q$.

Pour l'application on utilise utilise les polynômes interpolateurs de Lagrange avec $a_0 = 0$, $b_0 = 1$; $a_1 = 1$, $b_1 = 0$; $a_2 = -1$, $b_2 = -2$; $a_3 = 2$, $b_3 = 4$. On sait qu'un tel polynôme $P(X)$ est unique et s'écrit
$$P(X) = 1 \cdot L_0(X) + 0 \cdot L_1(X) - 2 \cdot L_2(X) + 4L_3(X)$$

où

$$L_0(X) = \frac{(X-1)(X+1)(X-2)}{(0-1)(0+1)(0-2)} = \frac{1}{2}(X^3 - 2X^2 - X + 2)$$

$$L_1(X) = \frac{(X-0)(X+1)(X-2)}{(1-0)(1+1)(1-2)} = \frac{-1}{2}(X^3 - X^2 - 2X)$$

$$L_2(X) = \frac{(X-0)(X-1)(X-2)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)} = \frac{-1}{6}(X^3 - 3X^2 + 2X)$$

$$L_3(X) = \frac{(X-0)(X-1)(X+1)}{(2-0)(2-1)(2+1)} = \frac{1}{6}(X^3 - X)$$

Ainsi :

$$P(X) = \frac{3}{2}X^3 - 2X^2 - \frac{1}{2}X + 1.$$
