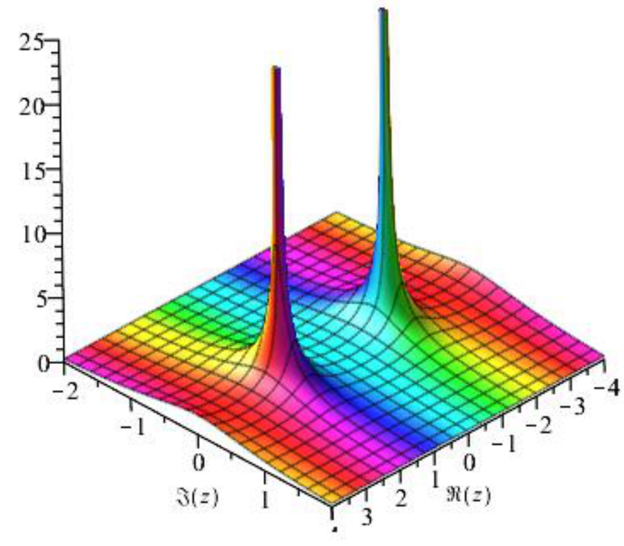
Fonctions holomorphes



Mag354 – Magistère de Maths (L3)

Université Paris-Saclay D. Hulin 2021–22

Bibliographie

Il y a abondance de belles références d'introduction à l'analyse complexe. On peut citer entre autres les textes suivants :

Rudin *Real and complex analysis*
(ou sa traduction française *Analyse réelle et complexe*)

Freitag Busam *Complex analysis*

Remmert *Theory of complex functions*

Conway *Functions of one complex variables I*

Lang *Complex analysis*

Cartan *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*

ou encore

Needham *Visual complex analysis*

pour aborder l'analyse complexe élémentaire par son aspect le plus géométrique.

Complétons cette bibliographie succinte par quelques ouvrages (bien) plus avancés pour

approfondir l'étude des fonctions d'une variable complexe :

Conway *Functions of one complex variables II*

Remmert *Classical topics in complex functions theory*

Segal *Nine introductions in complex analysis*

Audin *Un cours sur les fonctions spéciales*
`https://irma.math.unistra.fr/~maudin/fonctionsspe1109.pdf`

apercevoir quelques uns des prolongements de cette théorie

Reyssat *Quelques aspects des surfaces de Riemann*

Jarnicki Pflug *Invariant distances and metrics in complex analysis*

Ahlfors *Lectures on quasiconformal mappings*

ou encore s'aventurer dans le domaine des fonctions de plusieurs variables complexes

Range *Holomorphic functions and integral representations in several complex variables*

Hörmander *An introduction to complex analysis in several complex variables*

Introduction

Dans ce cours, il va être question de fonctions de variable complexe, par opposition aux fonctions de variable réelle. Nous étudierons les fonctions holomorphes, à qui on demande simplement d'être "dérivables" en chaque point de leur ouvert de définition.

La théorie des fonctions holomorphes a pris son essor au 19ème siècle. Les trois noms de mathématiciens qui viennent immédiatement à l'esprit lorsqu'on évoque les fonctions holomorphes sont ceux de :

Cauchy	(1789-1857)	représentation intégrale	Analyse
Riemann	(1826-1866)	applications conformes	Géométrie
Weierstrass	(1815-1897)	séries entières	Algèbre

chacun étant associé à un point de vue différent. L'interaction, fascinante, de ces trois points de vue fait la richesse et la beauté de ce sujet.



Cauchy, Riemann et Weierstrass

A priori, la condition d'holomorphie est très rigide. Prenons pour exemple le théorème de Liouville qui affirme qu'une fonction holomorphe $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, si elle est bornée, est automatiquement constante !

Cependant, la théorie abonde en théorèmes profonds, qui ont des applications ou des prolongements dans d'innombrables domaines des mathématiques, de la géométrie à la théorie des nombres.

Le point de vue géométrique ne sera qu'effleuré dans ce cours. Si le temps le permet, nous traiterons cependant le théorème de représentation conforme, au chapitre 13.

Table des matières

1. Fonctions holomorphes

On présente les protagonistes : fonctions holomorphes et fonctions analytiques. On démontrera bientôt que ce sont deux avatars d'un même personnage.

A Fonctions holomorphes

A.1 La $\mathbb{C}$-dérivabilité

Dans tout le cours, $U \subset \mathbb{C}$ désignera un ouvert de $\mathbb{C}$.

Définition 1.1 *Soit $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. On dit que f est $\mathbb{C}$-dérivable au point $z_0 \in U$ lorsqu'il existe un nombre complexe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \alpha \,.$$

On note alors $f'(z_0) = \alpha$: c'est la dérivée (au sens complexe) de f en z_0.

Dans cette définition, l'accroissement h prend des valeurs complexes. De façon équivalente, la fonction f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 avec $f'(z_0) = \alpha$ si et seulement si

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + \alpha h + o(h) \,. \qquad (*)$$

La notation de Landau $o(h)$ signifie que $|o(h)|/|h| \to 0$ lorsque $h \to 0$.

Une fonction holomorphe est *a fortiori* continue.

Exercice 1.2 Montrer que la fonction $z \mapsto z$ est $\mathbb{C}$-dérivable sur $\mathbb{C}$, de dérivée constante égale à 1, mais que la fonction $z \mapsto \bar{z}$ n'est $\mathbb{C}$-dérivable en aucun point.

L'espace vectoriel complexe $\mathbb{C}$, de dimension 1, est naturellement un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2. L'application $h \in \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2 \mapsto \alpha h \in \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, qui est $\mathbb{C}$-linéaire, est *a fortiori* $\mathbb{R}$-linéaire.

On identifie $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ par l'application $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x + iy \in \mathbb{C}$. La condition $(*)$ exprime que l'application $f : U \subset \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ est $\mathbb{R}$-différentiable en z_0, avec une différentielle très spécifique qui se lit :

$$D_{z_0} f : h \in \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2 \mapsto \alpha h \in \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2 \,.$$

Prenons le temps d'étudier soigneusement cette condition.

A travers l'identification $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, notre application $f = P+iQ : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (où P et Q sont les parties réelle et imaginaire de f) se lit $\tilde{f} : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ ou encore $\tilde{\tilde{f}} = (P, Q) : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, avec

$$\tilde{f}(x, y) = f(x + iy) \text{ et } \tilde{\tilde{f}}(x, y) = (P(x + iy), Q(x + iy)).$$

Notation 1.3 On notera f' la dérivée complexe de f, ainsi que $\tilde{f}_x = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}$ et $\tilde{f}_y = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}$ les dérivées partielles de $\tilde{f}$ par rapport aux coordonnées x et y, lorsque celles-ci sont définies.

Rappel 1.4 Dans $\mathbb{R}^2$ euclidien, un élément du groupe linéaire $GL(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ est une similitude directe si, et seulement si, il s'écrit comme produit d'une rotation et d'une homothétie de rapport non nul. C'est le cas si, et seulement si, il conserve les angles et l'orientation.

Proposition 1.5 *Munissons $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne canonique. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *$f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 ;*
2. *$\tilde{f} : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{R}$-différentiable en z_0, avec $\tilde{f}_y(z_0) = i\tilde{f}_x(z_0)$; dans ce cas, on a l'égalité $f'(z_0) = \tilde{f}_x(z_0)$;*
3. *$\tilde{\tilde{f}} : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est $\mathbb{R}$-différentiable en z_0 et sa différentielle $D_{z_0}\tilde{\tilde{f}} \in L_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ est nulle, ou bien est une similitude directe. Dans ce cas, sa matrice jacobienne s'écrit $J_{z_0}\tilde{\tilde{f}} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ où $f'(z_0) = a + ib$.*

Preuve On a vu que f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 ssi $\tilde{f}$ est $\mathbb{R}$-différentiable en z_0 et si il existe $\alpha = a + ib \in \mathbb{C}$ tel que, pour $h = x + iy$, on ait

$$D_{z_0}\tilde{f}.(x + iy) = \alpha(x + iy) = \alpha x + (i\alpha)\, y = (ax - by) + i(bx + ay)\,. \quad \square$$

Par la suite, on aura rarement besoin de distinguer f de ses alter ego $\tilde{\tilde{f}}$ ou $\tilde{f}$! On obtient, comme conséquence immédiate de la proposition 1.5(3), le critère bien utile suivant.

Corollaire 1.6 Equations de Cauchy-Riemann
Soit $f = P + iQ : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Alors f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 si et seulement si P et Q (parties réelle et imaginaire de f) sont $\mathbb{R}$-différentiables en z_0 avec, en ce point :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \quad \textit{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}\,.$$

A.2 Holomorphie

Définition 1.7 *Une fonction $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est holomorphe si elle est $\mathbb{C}$-dérivable en chaque point de U, et si sa dérivée $f' : U \to \mathbb{C}$ est continue.*

Les fonctions holomorphes sont donc les fonctions continûment dérivables, au sens complexe, sur tout leur domaine de définition.

La définition ci-dessus est redondante, mais elle nous permettra d'obtenir rapidement l'analyticité des fonctions holomorphes. On a en effet le résultat suivant (dont on peut se passer en première lecture).

Théorème 4.18 : *Soit $f : U \to \mathbb{C}$, que l'on suppose $\mathbb{C}$-dérivable en chaque point de U. Alors sa dérivée $f' : U \to \mathbb{C}$ est continue !*

Une fonction $f : U \to \mathbb{C}$ est donc holomorphe si et seulement si elle est $\mathbb{C}$-dérivable en chaque point. La deuxième condition dans la définition 1.7 de l'holomorphie (continuité de la dérivée) est finalement superflue.

Proposition 1.8 – *L'ensemble $\mathcal{H}(U)$ des fonctions holomorphes sur U constitue une algèbre unitaire : c'est un espace vectoriel ($\mathcal{H}(U)$ est stable par addition, et par multiplication par un scalaire), le produit de deux fonctions holomorphes est holomorphe ; la fonction constante égale à 1 est holomorphe.*

– Si $f \in \mathcal{H}(U)$ et ne s'y annule pas, $1/f \in \mathcal{H}(U)$.

– Si les fonctions $f : U \to V$ et $g : V \to \mathbb{C}$ sont holomorphes, la composée $g \circ f : U \to \mathbb{C}$ est holomorphe.

Preuve Immédiate, avec les expressions “habituelles” pour les dérivées. En particulier, $(f \circ g)' = (f' \circ g)\, g'$ et $(1/f)' = -f'/f^2$. □

Exemple 1.9 – *Une fonction polynomiale $z \mapsto \sum_0^k a_n z^n$ est holomorphe.*

– La fonction $z \mapsto 1/z$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$.

– Plus généralement une fraction rationnelle P/Q, avec $P, Q \in \mathbb{C}[X]$, est holomorphe en dehors des zéros de Q.

– Par contre une fonction $x + iy \in \mathbb{C} \mapsto P(x, y) \in \mathbb{C}$ pour $P \in \mathbb{C}[X, Y]$ ne sera en général pas holomorphe. Par exemple, les fonctions $z \mapsto \bar{z}$ et $z \mapsto \mathrm{Re}\, z$ ne sont $\mathbb{C}$-dérivables en aucun point.

Proposition 1.10 *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe.*
Une fonction holomorphe $f \in \mathcal{H}(U)$ est constante si et seulement si $f' = 0$.

Preuve $\Rightarrow$ Immédiat.

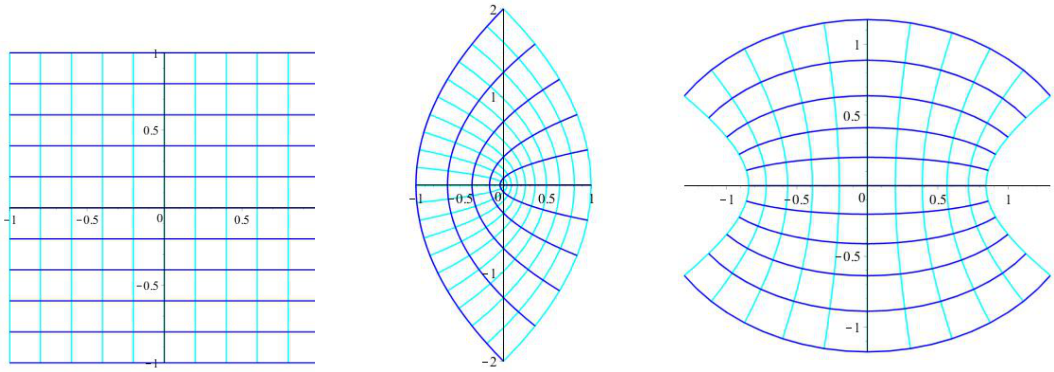
$\Leftarrow$ Appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction de variable réelle $\tilde{\tilde{f}} : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ associée à f, qui est de différentielle nulle sur U. □

A.3 Représentations graphiques de fonctions holomorphes

Il n'est pas facile de représenter graphiquement une fonction holomorphe, son graphe vivant dans $\mathbb{C}^2 \sim \mathbb{R}^4$! On peut tourner la difficulté des deux façons suivantes.

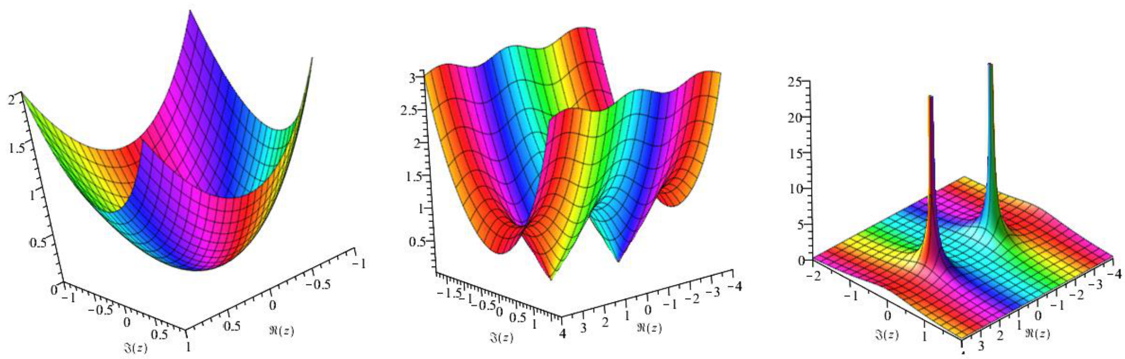
• On peut dessiner l'image par f d'un quadrillage régulier de son domaine de définition.

Rappelons que la différentielle de $\tilde{\tilde{f}}$, en un point où f est $\mathbb{C}$-dérivable de dérivée non nulle, est une similitude. Lorsque l'application $f : U \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-dérivable au point z_0, avec $f'(z_0) \neq 0$, les images par f de deux courbes régulières se coupant à angle droit en z_0 sont donc également deux courbes se coupant à angle droit en $f(z_0)$. Lorsque f est holomorphe sur U, cette propriété a lieu en tout point où $f' \neq 0$: f est une application conforme.



Ici les images par $z \mapsto z$ (pour comprendre le modèle), puis par $z \mapsto z^2$ ou par $z \mapsto \sin(z)$, de droites $x = cste$ (en bleu clair) et $y = cste$ (en bleu foncé) au voisinage de l'origine. Ces images se coupent à angles droits.

• On peut dessiner le "paysage analytique" de la fonction holomorphe $f : U \to \mathbb{C}$, qui est le graphe de son module $|f| : U \to \mathbb{R}$. L'ordinateur, ici avec le logiciel Maple, peut même ajouter des couleurs à ce graphe pour indiquer l'argument $\arg f$ (défini modulo 2π).



Les paysages analytiques de $z \mapsto z^2$, $z \mapsto \cos z$ et $z \mapsto \sec z = 1/\cos z$, au voisinage de l'origine. La fonction $\cos z = (e^{iz} + e^{-iz})/2$ sera introduite au chapitre 2.

B Séries entières

On étudie maintenant une famille d'exemples fondamentaux qui englobe les fonctions polynomiales, et dont nous verrons bientôt que ce sont des modèles locaux pour toutes les fonctions holomorphes (théorème 3.18). Il s'agit des sommes de séries entières convergentes.

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes, et la “série entière” (formelle) associée $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$.

Définition 1.11 *Le rayon de convergence de la série entière est*

$$R := \sup\{r \geq 0\,,\ \ |a_n|r^n \text{ est borné}\} \in [0,\infty]\,.$$

Rappelons le résultat fondamental suivant, qui doit être connu ainsi que sa démonstration.

Proposition 1.12 *– On a $1/R = \limsup |a_n|^{1/n}$. De plus, si les (a_n) ne s'annulent pas à partir d'un certain rang, on a $1/R \leq \limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$.*

– Pour tout $0 \leq r < R$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ converge normalement sur le disque fermé $\overline{D(0,r)} = \{z \in \mathbb{C}\,,\, |z| \leq r\}$.

– Pour $|z| > R$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ ne converge pas.

Il se peut que la série entière ait un rayon de convergence nul : prendre par exemple $a_n = n^n$.

Définition 1.13 *Le disque ouvert $D(0,R)$ est appelé disque de convergence de la série entière.*

Proposition 1.14 *Supposons le rayon de convergence $R > 0$ strictement positif. On définit $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ pour $|z| < R$.*

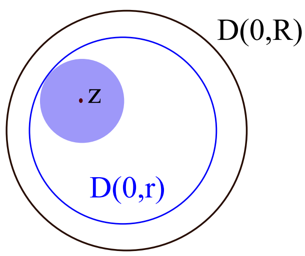
(1) *Le rayon de convergence de la série dérivée $\sum_{n\in\mathbb{N}} n a_n z^{n-1}$ est R.*

(2) *La fonction f est holomorphe sur $D(0,R)$, et on a pour $|z| < R$,*

$$f'(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} n a_n z^{n-1} \quad :$$

sur son disque de convergence, la série entière se dérive terme à terme.

Preuve L'assertion sur le rayon de convergence découle de la proposition précédente. La continuité de f' sur $D(0,R)$ résultera de son expression comme somme d'une série entière convergente.



Soit $z \in D(0,R)$: on va montrer que f est $\mathbb{C}$-dérivable en z, et calculer sa dérivée $f'(z)$. Comme on ne veut pas trop s'approcher du bord du disque de convergence (attention, danger !), on choisit r tel que $|z| < r < R$. Pour $h \in \mathbb{C}$ tel que $|z| + |h| < r$, on aura donc :

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - \sum_0^\infty n a_n z^{n-1} = \sum_1^\infty a_n \Big(\frac{(z+h)^n - z^n}{h} - n z^{n-1} \Big)$$
$$= \sum_2^\infty a_n \, v_n(h) \, .$$

A n fixé, $v_n(h) \to 0$ lorsque $h \to 0$. Il faut en déduire que la somme de la série $\sum a_n v_n(h)$ tend vers 0 lorsque $h \to 0$.

Pour cela, on cherche à majorer uniformément les $a_n v_n(h)$ par le terme général d'une série convergente : le résultat suivra. Or l'identité

$$X^n - Y^n = (X-Y)(X^{n-1} + \cdots + Y^{n-1})$$

montre que

$$v_n(h) = (z+h)^{n-1} + (z+h)^{n-2} z + \cdots + z^{n-1} - n z^{n-1} \, .$$

On a donc, uniformément en h tel que $|z|+|h| < r$, $|a_n v_n(h)| \leq 2n \, |a_n| \, r^{n-1}$: majoration par le terme général d'une série convergente, c'est gagné. □

Corollaire 1.15 *La somme $f : z \mapsto \sum a_n z^n$ de la série entière admet des dérivées (au sens complexe) de tous ordres sur son disque de convergence, qui sont toutes développables en série entière sur $D(0,R)$ et qui s'obtiennent en dérivant la série terme à terme.*

On a en particulier l'égalité $a_n = f^{(n)}(0)/n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

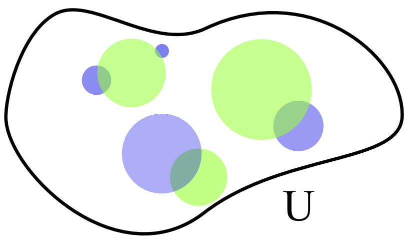
Corollaire 1.16 Unicité du développement en série entière
Si $f : D(0,R) \to \mathbb{C}$ est somme de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$, cette série est la série de Taylor de f en 0.

C Fonctions analytiques

Ce sont les fonctions qui sont localement développables en série entière.

Définition 1.17 *Une fonction $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est analytique lorsque, pour tout $z_0 \in U$, il existe un disque $D(z_0, r) \subset U$ et une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R \geq r$ tels qu'on ait, pour tout $z \in D(z_0, r)$:*

$$f(z) = \sum_0^\infty a_n (z - z_0)^n \, .$$

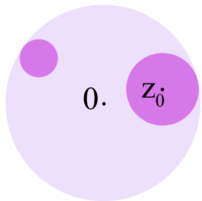


Bien entendu, les coefficients a_n de la série entière qui restitue f sur le disque $D(z_0, r)$ dépendent du point z_0, avec $a_n = a_n(z_0) = f^{(n)}(z_0)/n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction analytique. Il suit du corollaire 1.15 que f est holomorphe sur cet ouvert. Mieux, elle admet des dérivées complexes de tous ordres, qui sont encore des fonction holomorphes.

Exercice 1.18 Montrer les propriétés suivantes :
- Un polynôme $P \in \mathbb{C}[z]$ définit une fonction analytique sur $\mathbb{C}$. Sa série de Taylor en chaque point a un nombre fini de termes non nuls.
- La fonction $z \mapsto 1/z$ est analytique sur $\mathbb{C}^*$ (voir également l'exercice 2.19).

Proposition 1.19 Analyticité des séries entières
Soient $\sum_0^\infty a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, et $f : D(0, R) \to \mathbb{C}$ sa somme.
Alors f est analytique. Plus précisément : si $z_0 \in D(0, R)$, f est somme de sa série de Taylor en z_0 sur tout le disque $D(z_0, R - |z_0|)$.



Preuve Ce sera une conséquence de la sommation par paquets pour les séries à termes positifs, et pour les séries absolument convergentes.

Etape 1 : Le rayon de convergence de la série de Taylor de f au point z_0 est au moins $R - |z_0|$. On a en effet

$$f^{(p)}(z_0) = \sum_{n=p}^{\infty} n \cdots (n - p + 1) a_n z_0^{n-p} = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(p + q)!}{q!} a_{p+q} z_0^q$$

$$\text{d'où} \quad |f^{(p)}(z_0)| \leq \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(p + q)!}{q!} |a_{p+q}|\, |z_0^q|\,.$$

Puisque tous les termes de la série ci-dessous sont positifs, on peut utiliser une sommation par paquets (ici en regroupant selon $p+q = n$) pour obtenir

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} |f^{(p)}(z_0)| r^p \leq \sum_{p,q=0}^{\infty} \frac{(p + q)!}{p!q!} |a_{p+q}||z_0^q| r^p = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\, (|z_0| + r)^n < \infty$$

dès lors que $r < R - |z_0|$.

Etape 2 : La série de Taylor de f en z_0 a pour somme f sur le disque $D(z_0, R - |z_0|)$.

On a vu que, pour $|h| < R - |z_0|$, la série double

$$\sum_{p,q=0}^{\infty} \frac{(p + q)!}{p!q!} a_{p+q} z_0^q h^p$$

est abolument convergente. Comme dans l'étape 1, on calcule sa somme de deux façons :

- en sommant en p à l'extérieur : on reconnaît la série de Taylor de f en z_0, évaluée en h
- en sommant selon $p + q = n$: on obtient $\sum_0^\infty a_n (z_0 + h)^n = f(z_0 + h)$. $\square$

2. Exponentielle complexe ; logarithmes

Avant de passer à des théorèmes généraux, nous étudions un exemple fondamental : la fonction exponentielle complexe ainsi que ses réciproques locales, qui sont les fonctions logarithmes. Au passage, on introduit la notion de primitive.

A La fonction exponentielle

Définition 2.1 *Une fonction entière est une fonction holomorphe définie sur le plan complexe $\mathbb{C}$ tout entier.*

Proposition 2.2 – *La série entière* $\sum_0^\infty \frac{z^n}{n!}$ *définit une fonction entière* $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. *On notera également* $\exp(z) = e^z$ *pour tout* $z \in \mathbb{C}$.
– *On a* $\exp(0) = 1$ *et* $(\exp)'(z) = \exp(z)$ *pour tout* $z \in \mathbb{C}$.
– *Pour* $z, w \in \mathbb{C}$ *on a* $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$ *et* $e^{w+z} = e^w e^z$. *En particulier,* $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ *ne s'annule pas.*
– *La restriction de* $\exp$ *à* $\mathbb{R}$ *est l'application exponentielle réelle, qui est une bijection croissante* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ *(et même un difféomorphisme).*
– *On a* $|e^z| = 1$ *si et seulement si* $z \in i\mathbb{R}$.

Preuve Posons $a_n = 1/n!$. Puisque $a_{n+1}/a_n \to 0$, il suit de la proposition 1.12 que la série entière $\sum_0^\infty \frac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini.

Le fait que $e^0 = 1$ est immédiat. Une série entière se dérivant terme à terme sur son disque de convergence (ici $\mathbb{C}$), l'égalité $\exp' = \exp$ suit.

L'identité $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$ suit de ce que la conjugaison $z \in \mathbb{C} \mapsto \bar{z} \in \mathbb{C}$ est continue, en passant par l'intermédiaire des sommes partielles.

Pour $a, b \in \mathbb{C}$, on introduit $g(z) = e^z\, e^{a+b-z}$. On calcule la dérivée de ce produit de fonctions holomorphes. Il vient $g' = 0$, donc $g(z) \equiv g(0) = e^{a+b}$ par la proposition 1.10. Pour $z = a$, on obtient $e^a e^b = e^{a+b}$. En particulier, e^a est non nul, d'inverse e^{-a}. Ces propriétés justifient *a posteriori* la notation $\exp(z) = e^z$, pour tout $z \in \mathbb{C}$, en posant $e := \exp(1)$.

On étudie d'abord la fonction exponentielle réelle sur l'intervalle $[0, \infty[$, en remarquant que sa dérivée y est minorée par 1, et on complète l'étude en utilisant la relation $e^{-x} = 1/e^x$.

On écrit, pour $x, y \in \mathbb{R}$, l'égalité $e^{x+iy} = e^x e^{iy}$ avec $|e^{iy}|^2 = e^{iy} e^{-iy} = 1$, tandis que $e^x = 1$ si et seulement si $x = 0$ (x est réel !). $\square$

Remarque 2.3 L'exponentielle complexe exp est l'unique application entière $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ qui vérifie simultanément $f(0) = 1$ et $f'(z) = f(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Ceci résulte de la proposition 1.10, appliquée à $z \in \mathbb{C} \mapsto f(z)e^{-z} \in \mathbb{C}$.

Nous voulons maintenant démontrer que l'application $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ est surjective. Nous allons utiliser un argument de topologie. Nous commençons par énoncer la variante holomorphe du théorème d'inversion locale.

Proposition 2.4 Inversion locale holomorphe

Soient $f : U \to \mathbb{C}$ une application holomorphe et $z_0 \in U$. On suppose que $f'(z_0) \neq 0$.

Alors f est un biholomorphisme au voisinage de z_0 : il existe un voisinage $V \subset U$ de z_0 pour lequel $f(V) \subset \mathbb{C}$ est ouvert, et tel que l'application $f : V \to f(V)$ soit bijective d'inverse $f^{-1} : f(V) \to V$ holomorphe.

Preuve Rappelons que, pour f holomorphe, on a l'équivalence

$$f'(z_0) = a + ib \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad J_{z_0}\tilde{\tilde{f}} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathrm{Gl}_2\mathbb{R}\,,$$

où $\tilde{\tilde{f}} : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ désigne l'application de variable réelle sous-jacente, qui est de classe C^1 comme f. Il suit donc du théorème d'inversion locale que $\tilde{\tilde{f}}$ est un difféomorphisme d'un voisinage V de z_0 sur son image $f(V)$. L'inverse d'une similitude directe est une similitude directe. La proposition 1.5 assure que l'application réciproque $f^{-1} : f(V) \to V$ est également holomorphe. □

Corollaire 2.5 Application ouverte, version préliminaire

Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une application holomorphe dont la dérivée ne s'annule pas. Alors f est une application ouverte.

Nous démontrerons un énoncé bien plus fort au corollaire 6.22.

Exemple 2.6 *L'application* $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ *est ouverte.*

Théorème 2.7 – *L'application exponentielle* $\exp : (\mathbb{C}, +) \to (\mathbb{C}^*, .)$ *est un morphisme de groupes surjectif.*

– *Il existe un unique réel positif, noté π, pour lequel* $\mathrm{Ker}\,(\exp) = 2\mathrm{i}\pi\mathbb{Z}$.

– *On a $e^{i\pi} = -1$ et $e^{i\pi/2} = i$.*

Tout nombre complexe non nul $z \in \mathbb{C}^*$ admet donc une expression polaire $z = re^{i\theta}$, avec $r = |z| \in \,]0, \infty[$ et où $\theta \in \mathbb{R}$ est défini à $2\pi\mathbb{Z}$ près.

Preuve On a vu ci-dessus que l'application exponentielle est un morphisme de groupes, et que son image est ouverte.

Surjectivité. L'image $H = \exp(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}^*$ est un sous-groupe ouvert de $\mathbb{C}^*$. C'est donc aussi un sous-groupe fermé de $\mathbb{C}^*$. En effet on a

$$\mathbb{C}^* = H \bigsqcup \bigcup_{a \in \mathbb{C}^*,\, a \notin H} aH\,,$$

où $\bigsqcup$ indique une union disjointe et où chaque classe $aH \subset \mathbb{C}^*$ modulo H est ouverte comme H, puisque la multiplication $z \in \mathbb{C} \mapsto az \in \mathbb{C}$ par $a \in \mathbb{C}^*$ est un homéomorphisme de $\mathbb{C}$ et induit donc un homéomorphisme de $\mathbb{C}^*$. On conclut par connexité de $\mathbb{C}^*$.

Noyau de exp. Il nous reste à étudier le noyau du morphisme de groupes $\exp : (\mathbb{C}, +) \to (\mathbb{C}^*, .)$.

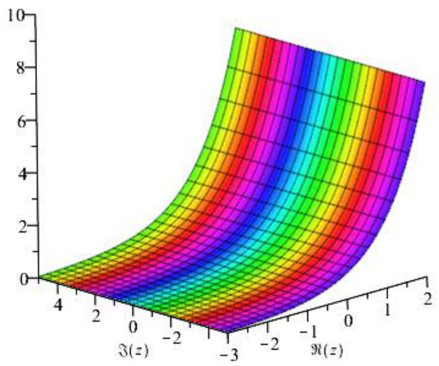
On a vu (proposition 2.2) que $\mathrm{Ker}\,(\exp) \subset \mathrm{i}\mathbb{R}$. On peut donc se contenter de chercher le noyau du morphisme de groupes $h : t \in (\mathbb{R}, +) \mapsto e^{it} \in (\mathbb{S}^1, .)$. Ce morphisme est surjectif et continu. Son noyau $\mathrm{Ker\,h} \subset \mathbb{R}$ est donc un sous-groupe fermé de $\mathbb{R}$, qui est :
– distinct de $\mathbb{R}$ (car h est surjectif)
– non trivial (car si $e^{it_0} = i$, on a $e^{4it_0} = 1$).
Il existe donc un unique réel $a > 0$ pour lequel $\mathrm{Ker\,h} = \mathrm{a}\mathbb{Z}$. On définit π par la relation $2\pi := a$.

Deux valeurs de exp. On a alors $e^{i\pi} = -1$, ($e^{i\pi}$ étant différent de 1, et de carré égal à 1).

Puisque de carré égal à -1, on a $e^{i\pi/2} = \pm i$. Il reste à voir que sa partie imaginaire est positive. Pour cela on considère de nouveau l'application $h : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{it} \in \mathbb{S}^1$. La partie imaginaire de $h(t)$ (autrement dit, $\sin t$!) s'annule si et seulement si $h(t) = \pm 1$. Il s'ensuit que $\mathrm{Im}\, h(t)$ garde un signe constant sur l'intervalle $]0, \pi[$. Comme $h'(0) = i$, ce signe est positif. □

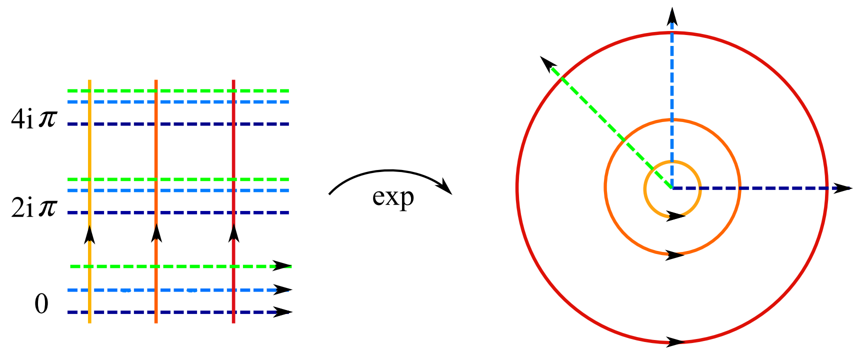
Représentations graphiques de la fonction exponentielle :

- Commençons par le paysage analytique de la fonction exponentielle.



Sur cette représentation, on lit l'égalité $|e^z| = e^{\mathrm{Re}\, z}$ ainsi que la périodicité de exp sous $2i\pi\mathbb{Z}$ (on rappelle que les couleurs indiquent l'argument de e^z modulo 2π, c'est-à-dire $\mathrm{Im}\, z \mod 2\pi$).

• Dans l'esprit de la p.10 mais avec des couleurs pour faire ressortir la périodicité, une autre représentation de l'exponentielle complexe. Celle-ci envoie les droites horizontales (partie imaginaire constante) sur les demi-droites issues de l'origine, et les droites verticales (partie réelle constante) sur les cercles. L'orthogonalité de ces deux familles de courbes est préservée.



Remarque 2.8 L'argument que nous venons de développer pour démontrer la surjectivité de l'application exponentielle $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ montre, plus généralement, qu'un sous-groupe ouvert d'un groupe topologique est toujours fermé.

Il suit par exemple que le groupe $\mathrm{Gl}_n^+\mathbb{R}$ des matrices à déterminant positif est engendré par $\exp(\mathrm{M}_n\mathbb{R})$ (la notation exp désignant ici l'exponentielle matricielle $\exp : M \in \mathrm{M}_n\mathbb{R} \mapsto \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{M^k}{k!} \in \mathrm{Gl}_n^+\mathbb{R}$) : cela signifie que toute matrice réelle de déterminant positif s'écrit comme produit d'exponentielles de matrices réelles. Cependant, l'application $\exp : \mathrm{M}_n\mathbb{R} \to \mathrm{Gl}_n^+\mathbb{R}$ n'est pas surjective.

B Logarithme(s)

Dans le domaine réel, l'application $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ est une bijection croissante. Son inverse est le logarithme néperien, noté $\log : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$.

Dans le domaine complexe, l'application $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ est surjective, mais non injective. Quand $z \in \mathbb{C}^*$ s'écrit $z = e^w = e^{a+ib} = e^a e^{ib}$, nous observons que :

— la partie réelle a de w est bien définie, avec $a = \log|z|$

— la partie imaginaire b de w n'est définie qu'à 2π près. On dit que b est **un** argument de z.

Lorsqu'on écrit $z \in \mathbb{C}^*$ sous la forme $z = e^w$, le complexe w est **un** logarithme de z : il n'est défini qu'à $2i\pi$ près. On dit que le logarithme complexe est une fonction “multiforme” (ou multivaluée).

On se pose maintenant la question de l'existence, sur un ouvert $U \subset \mathbb{C}^*$, d'un "bon" choix de fonction logarithme. On veut en effet que cette fonction logarithme soit au moins continue sur U, et l'on verra que sa continuité assure qu'elle est alors automatiquement holomorphe (proposition 2.13).

Une détermination continue du logarithme existe sur certains ouverts (voir notamment la détermination principale du logarithme au paragraphe C), mais pas sur tous (proposition 2.11). Nous renvoyons au paragraphe 4.C, puis au chapitre 12, pour une discussion aboutie.

Définition 2.9 *Soit $U \subset \mathbb{C}^*$ un ouvert. Une application $f : U \to \mathbb{C}$ est une détermination continue du logarithme lorsque*

– *f est continue*
– *pour tout $z \in U$, on a $z = e^{f(z)}$.*

Remarque 2.10 Nous venons de voir que l'existence d'une détermination continue du logarithme sur U équivaut à l'existence d'une détermination continue de l'argument sur U. Sans surprise, on a donc le résultat négatif suivant.

Proposition 2.11 *Il n'existe pas de détermination continue du logarithme sur $\mathbb{C}^*$ tout entier.*

Preuve Sinon, on disposerait d'une détermination continue de l'argument

$$z \in \mathbb{C}^* \mapsto \theta(z) \in \mathbb{R}$$

avec, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $z = |z|\, e^{i\theta(z)}$. En particulier, en se restreignant au cercle unité, on aurait pour tout $t \in \mathbb{R}$: $e^{it} = e^{i\,\theta(e^{it})}$. Puisque, pour tout $t \in \mathbb{R}$, t et $\theta(it)$ sont deux déterminations de l'argument du complexe e^{it}, l'application continue $\delta : t \in \mathbb{R} \mapsto t - \theta(e^{it}) \in \mathbb{R}$ prend ses valeurs dans $2\pi\mathbb{Z}$. L'application δ, définie sur un ensemble connexe et à valeurs dans un espace discret, serait donc constante.

On obtient une contradiction car $t \mapsto \theta(e^{it})$ est 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, mais $t \mapsto t$ ne l'est pas. □

Le même raisonnement (une fonction continue définie sur un espace connexe et à valeurs dans un espace discret est constante) donne la :

Proposition 2.12 *Soient $U \subset \mathbb{C}^*$ un ouvert connexe de $\mathbb{C}^*$ et $f_0 : U \to \mathbb{C}$ une détermination continue du logarithme sur U. Les autres déterminations continues du logarithme sur U sont exactement les fonctions*

$$f_n := f_0 + 2in\pi \quad \textit{pour } n \in \mathbb{Z}.$$

La proposition suivante nous permettra de construire, lorsqu'elles existent, les déterminations continues du logarithme sur un ouvert U de $\mathbb{C}^*$.

Proposition 2.13 *Soit $U \subset \mathbb{C}^*$ un ouvert.*

(1) *Si $f : U \to \mathbb{C}$ est une détermination continue du logarithme sur U, alors f est holomorphe et on a $f'(z) = 1/z$ pour tout $z \in U$.*

(2) *On suppose maintenant l'ouvert U connexe. Soit $g : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe telle que $g'(z) = 1/z$ pour tout $z \in U$. Alors il existe une constante $\alpha \in \mathbb{C}$ telle que $z \in U \mapsto g(z) - \alpha \in \mathbb{C}$ soit une détermination continue du logarithme.*

Preuve 1. Soit $z \in U$. Puisque $\exp(f(z)) = z$, et $\exp(f(z+h)) = z + h$ lorsque $h \in \mathbb{C}$ est assez petit pour que $z + h \in U$, il vient

$$\exp(f(z+h) - f(z)) = 1 + \frac{h}{z}\,.$$

La continuité de f au point z assure que $f(z+h) - f(z) \to 0$ lorsque $h \to 0$. Puisque $\exp(u) = 1 + u + o(u)$, on obtient

$$\exp(f(z+h) - f(z)) = 1 + (f(z+h) - f(z))\,(1 + \varepsilon(h))\,,$$

où $\varepsilon(h) \to 0$ quand $h \to 0$. Il suit

$$f(z+h) - f(z) = \frac{h}{z}\,(1 + \varepsilon(h))^{-1} \;\;:$$

la fonction f est donc $\mathbb{C}$-dérivable en z, avec $f'(z) = 1/z$ pour tout $z \in U$. Elle est donc holomorphe.

2. Supposons la fonction g holomorphe, avec $g'(z) = 1/z$. Soit $h \in \mathcal{H}(U)$ définie par $h(z) = \exp(g(z))/z$. On vérifie facilement que $h' = 0$, et donc que h est constante puisque l'ouvert U est supposé connexe (proposition 1.10). Il existe donc $a \in \mathbb{C}^*$ tel que, pour tout $z \in U$, on ait $e^{g(z)} = az$. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $a = e^\alpha$. La fonction $z \in U \mapsto g(z) - \alpha \in \mathbb{C}$ est une détermination du logarithme sur U. $\square$

Remarque 2.14 • Le fait qu'une détermination continue du logarithme soit holomorphe, ainsi que le calcul de sa dérivée, suivent également du fait que l'application $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ est un difféomorphisme local tel que $(\exp)' = \exp$.

• Lorsque l'ouvert U n'est pas connexe, on ajuste séparément la constante α (dans la proposition 2.13(2)) sur chacune de ses composantes connexes.

Dans le domaine complexe, la question de l'existence de primitives pour une fonction continue est un peu subtile, et sera étudiée au chapitre 4. La définition est cependant élémentaire, et ne nous surprendra pas.

Définition 2.15 *Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Une primitive $F : U \to \mathbb{C}$ pour f est une fonction holomorphe telle que $F' = f$.*

Remarque 2.16 • L'existence d'une détermination continue du logarithme sur U équivaut donc à l'existence d'une primitive g sur l'ouvert U pour l'application $z \in U \mapsto 1/z \in \mathbb{C}$, c'est-à-dire d'une fonction holomorphe telle que $g'(z) = 1/z$ en tout point de U.

• Le fait que la fonction $z \in \mathbb{C}^* \mapsto 1/z \in \mathbb{C}$ n'admette pas de primitive est fondamental, et contient en germe la notion d'indice et le théorème des résidus.

C Déterminations du logarithme

Nous introduisons la détermination principale du logarithme, dont la définition doit être connue. Nous donnons également d'autres exemples de déterminations continues du logarithme.

C.1 La détermination principale du logarithme

Nous avons vu que l'application exponentielle $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ est un morphisme de groupes surjectif, de noyau $\operatorname{Ker}(\exp) = 2i\pi\mathbb{Z}$. Sa restriction $\exp : \{w \in \mathbb{C} \mid -\pi \leq \operatorname{Im} w < \pi\} \to \mathbb{C}^*$ à la bande semi-fermée est donc bijective. L'image de la droite $\{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} w = -\pi\}$ est le demi-axe réel négatif $\mathbb{R}_{\leq 0} = \{x \leq 0\} \subset \mathbb{C}$. Il suit que la restriction

$$\exp : \{w \in \mathbb{C} \mid -\pi < \operatorname{Im} w < \pi\} \to \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$$

à la bande ouverte est une application holomorphe bijective, dont la dérivée est partout non nulle. Elle réalise donc un biholomorphisme entre ces deux ouverts (proposition 2.4). L'application réciproque

$$\ell_\pi : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0} \to \{w \in \mathbb{C} \mid -\pi < \operatorname{Im} w < \pi\}$$

est appelée "détermination principale du logarithme". Elle prolonge au "plan coupé" $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ le logarithme réel $\log : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$. La "détermination principale de l'argument" correspondante $\arg_\pi$ prend ses valeurs dans $]-\pi, \pi[$.

Cette détermination du logarithme est "maximale" : elle ne se prolonge pas en une détermination (continue) du logarithme sur un ouvert plus grand.

Notation 2.17 Dans le domaine complexe, la notation $\log(z)$ désignera systématiquement la détermination principale du logarithme $\log(z) := \ell_\pi(z)$ d'un complexe $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$.

Lemme 2.18 *La détermination principale du logarithme est développable en série entière sur le disque ouvert $D(1,1)$ centré en 1 et de rayon 1. On a, pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z-1| < 1$:*

$$\log(z) = \ell_\pi(z) = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{(z-1)^{n+1}}{n+1} .$$

Preuve On observe que $D(1,1) \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$. La fonction $j : z \mapsto 1/z$ est développable en série entière sur le disque ouvert $D(1,1)$ centré en 1 et de rayon 1. Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z-1| < 1$:

$$j(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{1+(z-1)} = \sum_{0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n \,.$$

Le résultat suit de ce que la fonction ℓ_π est l'unique primitive de j sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_{\leq 0}$ qui s'annule en $z = 1$ (proposition 2.13). □

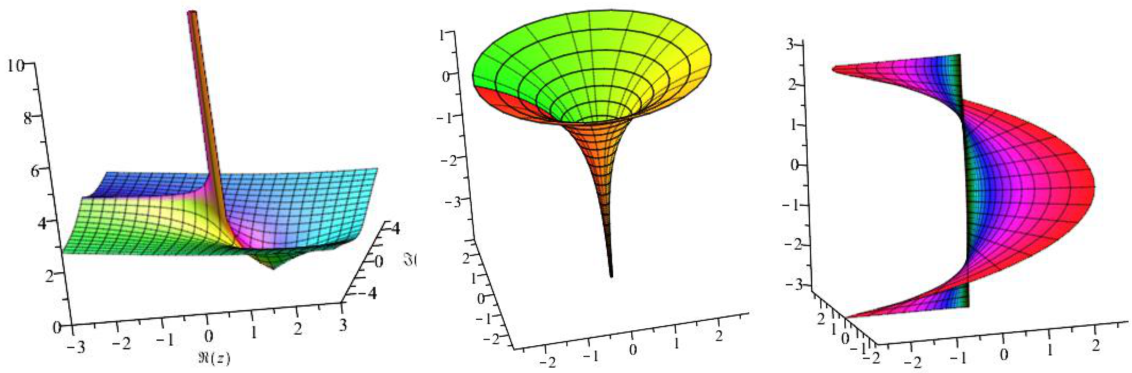
Exercice 2.19 Soit $z_0 \in \mathbb{C}^*$. Montrer que la fonction $z \mapsto 1/z$ est développable en série entière sur le disque $D(z_0, |z_0|)$. Déterminer ce développement. Montrer ensuite qu'il existe une détermination continue du logarithme $\ell : D(z_0, |z_0|) \to \mathbb{C}$, et que ℓ est développable en série entière sur tout ce disque. Expliciter son développement en série entière.

Représentations graphiques de la détermination principale du logarithme :

A gauche, on a dessiné le paysage analytique de $\log = \ell_\pi$. Mais il faut bien avouer que, dans ce cas précis, ce n'est pas très frappant. Notamment, la fonction $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0} \mapsto |\log(z)| = (|\log(|z|)^2 + (\arg_\pi(z))^2)^{1/2} \in \mathbb{R}_*^+$ dont on trace le graphe est bêtement continue sur $\mathbb{C}^*$... puisque $|-\pi| = |\pi|$!

Au milieu, on a dessiné le graphe de $z \mapsto \mathrm{Re}\,(\log z) = \log(|z|)$ colorié par la détermination principale de l'argument $\arg_\pi$. La discontinuité de $\arg_\pi$ sur la demi-droite réelle négative induit une discontinuité de couleur.

A droite, le graphe de la détermination principale de l'argument, soit $z \mapsto \mathrm{Im}\,(\log z) = \arg_\pi(z)$, colorié par les valeurs de $\mathrm{Re}\,(\log z) = \log|z|$.



C.2 Autres déterminations du logarithme

• D'une part il faut bien avouer que, même si c'est bien commode pour fixer les idées, c'est du pur favoritisme que de singulariser la droite réelle négative, ainsi que de chercher à prolonger le logarithme népérien.

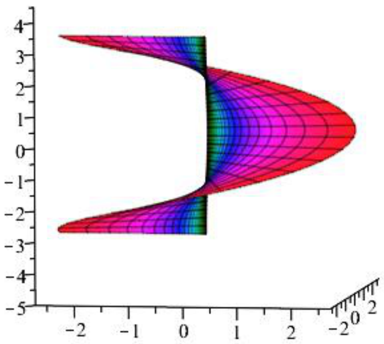
En particulier, si Δ est une demi-droite fermée issue de l'origine et si $\alpha \in \mathbb{R}$ est un argument pour (tous) les éléments de $\Delta \setminus \{0\}$, on obtient de même une détermination du logarithme

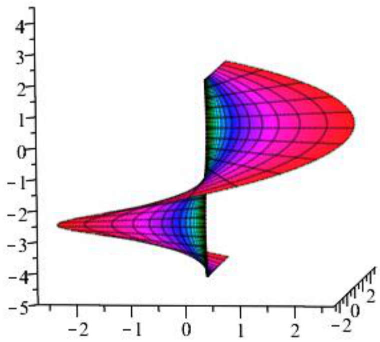
$$\ell_\alpha : \mathbb{C} \setminus \Delta \to \{w \in \mathbb{C} \mid \alpha - 2\pi < \operatorname{Im} w < \alpha\}$$

sur le nouveau plan coupé $\mathbb{C} \setminus \Delta$.

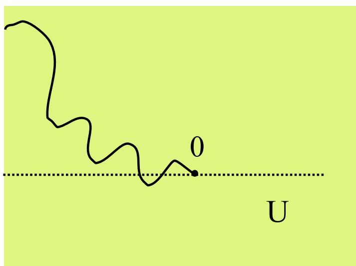
Les déterminations ℓ_α et la détermination principale $\log = \ell_\pi$ ont même partie réelle, égale à $z \mapsto \log |z|$.

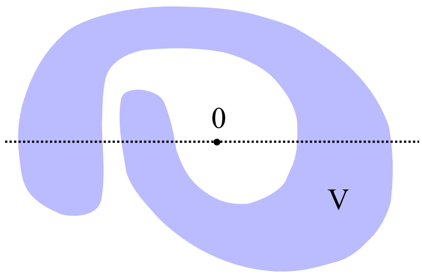
Dessinons les graphes des détermination des arguments correspondantes : à gauche le graphe de $\operatorname{Im}(\ell_\pi)$ et à droite celui de $\operatorname{Im}(\ell_{\pi/2})$.





• D'autre part, vous pourrez vous convaincre facilement de l'existence de déterminations continues du logarithme sur les ouverts baroques U et V de $\mathbb{C}^*$ dessinés ci-dessous (U est $\mathbb{C}^*$ privé de la courbe noire).





D Racines k-ièmes

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Un nombre complexe non nul possède exactement k racines k-ièmes w, telles que $w^k = z$, et qui diffèrent toutes d'une racine k-ième de l'unité. Comme pour le logarithme, on peut se poser la question de l'existence d'une détermination continue (ou holomorphe) de la fonction "racine k-ième" sur un ouvert $U \subset \mathbb{C}^*$.

Lemme 2.20 *Soit $U \subset \mathbb{C}^*$ un domaine sur lequel il existe une détermination continue (donc holomorphe) $\ell : U \to \mathbb{C}$ du logarithme. L'application*

$$r : z \in U \mapsto \exp\Big(\frac{1}{k}\ell(z)\Big) \in \mathbb{C}^*$$

fournit une détermination holomorphe de la racine k-ième sur U.

E Fonctions trigonométriques et hyperboliques

Les fonctions trigonométriques (sinus, cosinus, tangente et cotangente) et hyperboliques (sinus hyperbolique etc...) que vous connaissez sur $\mathbb{R}$ s'étendent naturellement à la variable complexe. On définit ainsi les fonctions entières

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\,, \quad \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$
$$\sinh(z) = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}\,, \quad \cosh(z) = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

de sorte que $i\sin(z) = \sinh(iz)$ et $\cos(z) = \cosh(iz)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Les quotients

$$\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}\,,\ \cot(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)}\,,\ \tanh(z) = \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)}\,,\ \coth(z) = \frac{\cosh(z)}{\sinh(z)}$$

sont des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$ (voir le chapitre 8).

Noter enfin que toutes les relations de trigonométrie et de trigonométrie hyperbolique connues sur $\mathbb{R}$ s'étendent à la variable complexe. Cela se vérifie en revenant à la définition via la fonction exponentielle ou bien, lorsqu'on est plus savant, en propageant ces identités via le principe du prolongement analytique (chapitre 6).

Attention cependant à ne pas se laisser bercer par les habitudes. Les relations $\cos t = \operatorname{Re} e^{it}$ et $\sin t = \operatorname{Im} e^{it}$ ne sont valables que lorsque $t \in \mathbb{R}$.

Par contre, la relation $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ reste vraie pour tout $z \in \mathbb{C}$.

3. La formule de Cauchy dans un disque

Nous avons vu au chapitre 1 qu'une fonction analytique est holomorphe. Nous montrons la réciproque : toute fonction holomorphe est analytique.

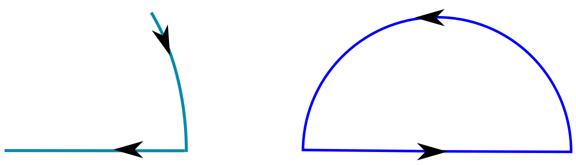
Ce résultat remarquable est une conséquence immédiate de la formule de Cauchy dont nous démontrons ici une première version.

A Intégrale d'une fonction sur un chemin

Dans le domaine réel, on a défini l'intégrale de Riemann $\int_{x_0}^{x_1} f(t)\, dt$, entre deux points $x_0, x_1 \in I$, d'une fonction continue $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$. Dans le domaine complexe, pour intégrer une fonction entre deux points $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$, il faudra au préalable choisir un chemin entre ces deux points.

Rappel 3.1 *Une application* continue $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ *est de classe* C^1 *par morceaux lorsqu'il existe une subdivision* $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ *de son intervalle de définition telle que chaque restriction* $\gamma_{|[a_i,a_{i+1}]}$ *est de classe* C^1 *(on ne considère alors que la dérivée à droite en* a_i *et à gauche en* a_{i+1}*).*

Définition 3.2 – *Un chemin est une application* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$*, continue et de classe* C^1 *par morceaux (donc à dérivée bornée). L'image* $\gamma([a,b]) \subset \mathbb{C}$ *est aussi appelée support de* γ*.*
– *Un lacet est un chemin* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ *qui est fermé, i.e. tel que* $\gamma(a) = \gamma(b)$*.*



Un chemin, un lacet

Exemple 3.3 Le chemin $\sigma_{[z_0,z_1]} : t \in [0,1] \mapsto z_0 + t(z_1 - z_0) \in \mathbb{C}$ a pour image le segment $[z_0, z_1] \subset \mathbb{C}$, parcouru de z_0 vers z_1.
Le lacet $c_n : t \in [0, 2\pi] \mapsto e^{int} \in \mathbb{C}$ $(n \in \mathbb{Z}^*)$ a pour image le cercle unité parcouru $|n|$ fois, dans le sens trigonométrique lorsque $n > 0$, dans le sens contraire sinon. Le lacet c_0 est un lacet constant.

Définition 3.4 *Soient $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert, et $f : U \to \mathbb{C}$ continue. Soit $\gamma : [a, b] \to U$ un chemin. L'intégrale de f sur γ, notée $\int_\gamma f(z)\, dz$ (ou encore parfois simplement $\int_\gamma f$), est*

$$\int_a^b f(\gamma(t))\, \gamma'(t)\, dt\,. \tag{3.1}$$

Remarque 3.5 – Ne pas se laisser impressionner par la notation $\int_\gamma f(z)\, dz$. Il s'agit simplement d'une intégrale (3.1) de fonction de variable réelle.

– Si $g = p + iq : [a, b] \to \mathbb{C}$ est une fonction continue à valeurs complexes définie sur un segment, on rappelle que son intégrale est définie par

$$\int_a^b g(t)\, dt = \int_a^b p(t)\, dt + i \int_a^b q(t)\, dt\,.$$

Lorsque la fonction $f : U \to \mathbb{C}$ admet une primitive (définition 2.15), il est facile de calculer son intégrale sur un chemin.

Proposition 3.6 *Si $f : U \to \mathbb{C}$ admet une primitive $F : U \to \mathbb{C}$, on a*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

pour tout chemin $\gamma : [a, b] \to U$.

En particulier, l'intégrale de f sur le chemin γ ne dépend alors que des extrêmités de γ, et l'intégrale de f sur un lacet γ tracé dans U est nulle.

Preuve Par composition, la fonction $t \to F(\gamma(t))$ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $[a, b]$ privé d'un nombre fini de points, de dérivée

$$(F(\gamma(t)))' = F'(\gamma(t))\, \gamma'(t) = f(\gamma(t))\, \gamma'(t)\,.$$

La fonction $I : t \in [a, b] \mapsto \int_a^t f(\gamma(s))\, \gamma'(s)\, ds \in \mathbb{C}$ est également continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $[a, b]$ privé d'un nombre fini de points avec, lorsque c'est défini, $I'(t) = (F(\gamma(t)))'$. $\square$

A.1 Exemples

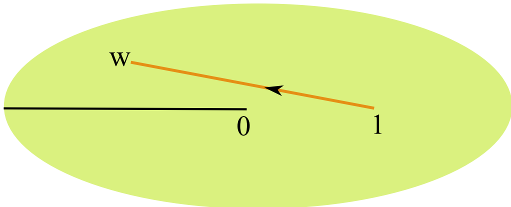
• Soit $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction continue définie sur un voisinage U de l'intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$. On note $\varphi = f_{|[a,b]} : [a, b] \to \mathbb{C}$ la restriction de f à ce segment. Alors on a (fort heureusement) l'égalité

$$\int_{\sigma_{[a,b]}} f(z)\, dz = \int_a^b \varphi(x)\, dx\,.$$

• Si $\ell_\pi : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0} \to \mathbb{C}$ désigne la détermination principale du logarithme (ℓ_π est donc, sur cet ouvert, la primitive de $z \mapsto 1/z$ telle que $\ell_\pi(1) = 0$), on a pour tout $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$:

$$\ell_\pi(w) = \int_{\sigma_{[1,w]}} \frac{dz}{z} .$$

Notons que le chemin $\sigma_{[1,w]} : t \in [0,1] \mapsto 1 + t(w-1) \in \mathbb{C}^*$ évite l'origine.



• Le lacet $c_1 : t \in [0, 2\pi] \mapsto e^{it} \in \mathbb{C}^*$ a pour image le cercle unité, parcouru dans le sens trigonométrique. On évalue facilement

$$\int_{c_1} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{c_1'(t)}{c_1(t)}\, dt = 2i\pi .$$

Ce calcul élémentaire est fondamental. Ce sera la base de la définition de l'indice, et du théorème des résidus. Le fait que cette intégrale soit non nulle reflète la non-existence d'une primitive pour la fonction holomorphe $z \mapsto 1/z$ sur l'ouvert $\mathbb{C}^*$ (propositions 2.11 et 3.6).

A.2 Opérations sur les chemins

• Reparamétrisation (croissante)

Définition 3.7 *Soit $\gamma : [a,b] \to U$ un chemin. La reparamétrisation de γ, associée à une bijection croissante $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ de classe C^1, est $\gamma \circ \varphi : [c,d] \to U$. Noter que $\varphi(c) = a$ et $\varphi(d) = b$. Le chemin $\gamma \circ \varphi$ a même image géométrique que γ, et il est parcouru dans le même sens.*

Lemme 3.8 *Soit γ un chemin tracé dans U, et $\gamma \circ \varphi$ une reparamétrisation croissante de γ. On a alors, pour toute fonction continue $f : U \to \mathbb{C}$, l'égalité*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_{\gamma\circ\varphi} f(z)\, dz .$$

Preuve En revenant à la définition (3.1), puis en utilisant le changement de variables $t = \varphi(s)$, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{\gamma\circ\varphi} f &= \int_c^d f(\gamma(\varphi(s)))\,(\gamma\circ\varphi)'(s)\, ds = \int_c^d f(\gamma(\varphi(s)))\,\gamma'(\varphi(s))\,\varphi'(s)\, ds \\ &= \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\, dt = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\, dt = \int_\gamma f .\end{aligned}$$

En effet, la reparamétrisation φ étant supposée croissante, on a bien $\varphi(c) = a$ et $\varphi(d) = b$. □

L'intégrale $\int_\gamma f$ ne dépend donc que du chemin géométrique, image de γ, et pas de la paramétrisation (on pourra donc sans restriction supposer le chemin paramétré par l'intervalle $[0,1]$). Cependant, comme on l'a vu dans la démonstration, il est essentiel que le chemin soit orienté. Plus précisément :

• **Chemin opposé :** Le chemin opposé à $\gamma : [0,1] \to U$ est $\gamma^\vee : [0,1] \to U$ défini par $\gamma^\vee(t) = \gamma(1-t)$. Ce chemin a même image géométrique que γ, mais il est parcouru en sens inverse. Par exemple, $c_{-n} = c_n^\vee$ $(n \in \mathbb{Z})$.

Lemme 3.9 *On a*

$$\int_{\gamma^\vee} f(z)\,dz = -\int_\gamma f(z)\,dz$$

pour toute fonction continue $f : U \to \mathbb{C}$ et tout chemin γ tracé dans U.

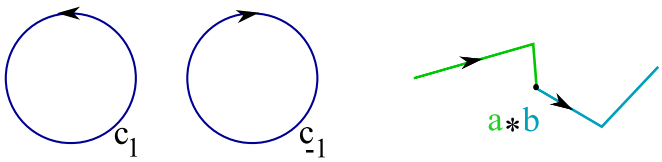
Preuve La preuve est laissée en exercice (revenir à la définition (3.1)). □

Vous comprenez maintenant pourquoi nous avons pris soin d'indiquer par des flèches les sens de parcours sur les dessins des pages 24 ou 26.
On se permettra donc de noter désormais $\int_{[z_0,z_1]} f$ l'intégrale de la fonction f sur le segment $[z_0, z_1] \subset U$, plutôt que $\int_{\sigma_{[z_0,z_1]}} f$, en omettant la référence à la paramétrisation. On a l'égalité $\int_{[z_0,z_1]} f = -\int_{[z_1,z_0]} f$. Pour mener à bien calcul de cette intégrale, il faudra cependant revenir à la définition (3.1) et passer par une paramétrisation.

• **Concaténation :** Si $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to U$ sont deux chemins dont les extrêmités vérifient $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$, on peut définir leur concaténation, soit $\gamma_1 * \gamma_2 : [0,2] \to U$, par :

$$\begin{aligned} \gamma_1 * \gamma_2(t) &= \gamma_1(t) \quad \text{pour } 0 \le t \le 1 \\ \gamma_1 * \gamma_2(t) &= \gamma_2(t-1) \quad \text{pour } 1 \le t \le 2. \end{aligned}$$

Par exemple $c_n = c_1 * \cdots * c_1$ (n fois).



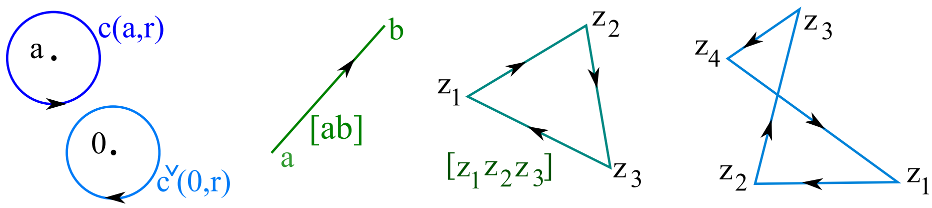
Le lacet c_1 et son opposé c_{-1} ; le concaténé de deux chemins a et b

Lemme 3.10 *On a l'égalité, pour toute fonction $f : U \to \mathbb{C}$ continue et tous chemins γ_1, γ_2 tracés dans U et concaténables :*

$$\int_{\gamma_1 * \gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz\,.$$

Preuve Laissée au lecteur, qui reviendra à la définition (3.1). □

Notation 3.11 Dans le cours ainsi que les exercices, $c(a, r)$ désignera le cercle de centre a et de rayon r parcouru dans le sens trigonométrique. Donnés trois points z_1, z_2 et z_3, on notera $[z_1, z_2, z_3]$ le bord orienté du triangle. De même pour un quadrilatère etc...



Quelques lacets et chemins, pour résumer les notations

A.3 Estimation de l'intégrale sur un chemin

La longueur d'une courbe régulière a été introduite au premier semestre. On en déduit une estimée pour l'intégrale d'une fonction sur un chemin.

Lemme-Définition 3.12 *La longueur du chemin $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ est*

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt\,.$$

On a, pour toute fonction continue $f : U \to \mathbb{C}$, la majoration

$$|\int_\gamma f(z)\, dz| \leq \; L(\gamma) \sup_{t\in[a,b]} |f(\gamma(t))|\,.$$

Preuve On revient (bien sûr !) à la définition (3.1) de l'intégrale. L'inégalité triangulaire dans l'intégrale donne alors :

$$\begin{aligned} |\int_\gamma f(z)\, dz| = |\int_\gamma f(\gamma(t))\, \gamma'(t)\, dt| &\leq \int_\gamma |f(\gamma(t))\, \gamma'(t)|\, dt \\ &\leq \sup_{t\in[a,b]} |f(\gamma(t))| \int_\gamma |\gamma'(t)|\, dt\,. \end{aligned}$$ □

On obtient immédiatement le :

Corollaire 3.13 *Soit γ un lacet tracé dans U. Soit $f_n : U \to \mathbb{C}$ une suite de fonctions continues qui converge uniformément (ou uniformément sur le support $\gamma([a, b])$ de γ) vers une fonction f. Alors*

$$\int_\gamma f_n(z)\, dz \to \int_\gamma f(z)\, dz\,.$$

Preuve En notant $M_n = \sup\{|f_n(z) - f(z)|\,,\ z \in \gamma([a, b])\}$, on a en effet

$$|\int_\gamma f_n - \int_\gamma f| \leq \int_\gamma |f_n - f| \leq M_n\, L(\gamma)\,.$$ □

B Formule intégrale de Cauchy

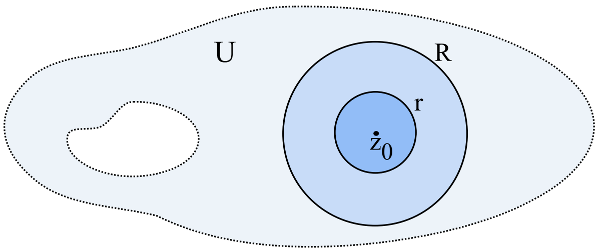
Nous pouvons maintenant démontrer la formule de Cauchy dans un disque. Soit une fonction holomorphe définie sur un voisinage d'un disque fermé. La formule de représentation intégrale de Cauchy permet, connaissant la fonction sur le bord du disque, de la restituer en tout point du disque ouvert.

Il s'agit d'un résultat fondateur, dont vont découler un grand nombre de propriétés fondamentales des fonctions holomorphes – de l'analyticité à la formule des résidus.

Ce premier énoncé de la formule de Cauchy est local. Nous en verrons plusieurs variantes ou généralisations (voir les théorème 7.6, corollaire 7.8, proposition 7.12, proposition 8.20, théorème 12.5).

Théorème 3.14 Formule de Cauchy dans un disque
Soient $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert quelconque et $\overline{D(z_0, r)} \subset U$ un disque fermé ($r > 0$). Pour toute fonction holomorphe $f : U \to \mathbb{C}$ et tout point $z \in D(z_0, r)$ à l'intérieur de ce disque, on a les égalités

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c(z_0,r)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{(z_0 + re^{it}) - z}\, re^{it}\, dt\,. \tag{3.2}$$

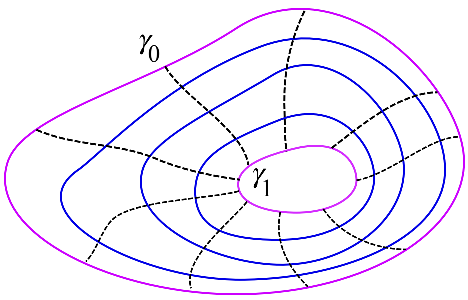


Avant d'entamer la démonstration de ce théorème, commençons par un lemme qui compare les intégrales d'une fonction holomorphe sur deux lacets que l'on peut déformer l'un vers l'autre.

Lemme 3.15 *Soient $V \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $h : V \to \mathbb{C}$ holomorphe.*

Soit $\Gamma : (s,t) \in [0,1] \times [0,1] \mapsto \gamma_s(t) \in V$ une application de classe C^2. On suppose que, pour tout s, le chemin $\gamma_s : [0,1] \to V$ est un lacet.

Alors, l'intégrale $I(s) = \int_{\gamma_s} h(z)\, dz$ ne dépend pas de $s \in [0,1]$.



On dit que l'application Γ est une homotopie entre les lacets γ_0 et γ_1.

En plein, les lacets $t \mapsto \gamma_s(t)$. En pointillé, les courbes $s \mapsto \gamma_s(t)$.

Preuve On notera respectivement ∂_s et ∂_t les dérivées partielles par rapport aux deux coordonnées s et t. En revenant à la définition d'une intégrale de chemin on a donc, pour tout $s \in [0,1]$, l'égalité

$$I(s) = \int_{\gamma_s} h(z)\,dz = \int_0^1 h(\Gamma(s,t))\,(\partial_t\Gamma)(s,t)\,dt = \int_0^1 G(s,t)\,dt\,,$$

où $G : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}$ est l'application définie par $G = (h \circ \Gamma)\,(\partial_t \Gamma)$. La fonction G étant de classe C^1, le théorème de dérivation sous l'intégrale s'applique pour montrer que I est également de classe C^1, et de dérivée

$$I'(s) = \int_0^1 (\partial_s G)(s,t)dt = \int_0^1 \partial_s[(h \circ \Gamma)\,\partial_t\Gamma](s,t)\;dt$$

pour tout $s \in [0,1]$. Par symétrie de la différentielle seconde (la fonction Γ étant supposée de classse C^2), l'intégrand ci-dessus s'écrit également :

$$\begin{aligned}\partial_s[(h \circ \Gamma)\,\partial_t\Gamma] &= (h' \circ \Gamma)\;\partial_s\Gamma\;\partial_t\Gamma + (h \circ \Gamma)\;\partial^2_{st}\Gamma\\ &= \partial_t[(h \circ \Gamma)\,\partial_s\Gamma]\,.\end{aligned}$$

On obtient donc pour tout $s \in [0,1]$ l'égalité

$$I'(s) = \int_0^1 \partial_t[(h \circ \Gamma)\,\partial_s\Gamma]\,(s,t)\,dt = [(h \circ \Gamma)\partial_s\Gamma](s,1) - [(h \circ \Gamma)\partial_s\Gamma](s,0)\,.$$

Chaque γ_s étant un lacet, on a $\gamma_s(0) = \gamma_s(1)$, soit $\Gamma(s,0) = \Gamma(s,1)$ pour tout $s \in [0,1]$. En dérivant cette égalité, on obtient $\partial_s\Gamma(s,0) = \partial_s\Gamma(s,1)$. Il suit que $I' \equiv 0$: l'intégrale $I(s)$ ne dépend donc pas de s. □

Preuve du théorème 3.14

Soient $z \in D(z_0,r)$, et un rayon $\rho > 0$ tel que $\overline{D(z,\rho)} \subset D(z_0,r)$. Commençons par évaluer l'intégrale $\int_{c(z,\varepsilon)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw$ sur un cercle $c(z,\varepsilon)$ centré au point z, et de rayon $0 < \varepsilon \leq \rho$ tendant vers 0. En revenant à la définition (3.1), on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{2i\pi}\int_{c(z,\varepsilon)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(z+\varepsilon e^{it})}{\varepsilon\,e^{it}}\,\varepsilon\,e^{it}\,dt \qquad (3.3)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z+\varepsilon e^{it})\,dt \xrightarrow{\varepsilon\to 0} f(z)\end{aligned}$$

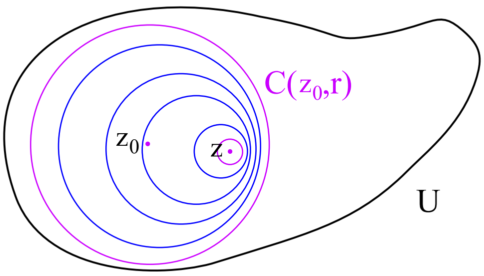
par continuité de f au point z.

Pour terminer la preuve du théorème, il nous suffit donc de montrer que les intégrales (3.2) de f sur le cercle $c(z_0,r)$ de centre z_0, et (3.3) de f sur chaque (petit) cercle $c(z,\varepsilon)$ centré en z, sont égales, ce qui va suivre du lemme 3.15.

Soient $V = U \setminus \{z\}$, et la fonction holomorphe $h : w \in V \mapsto \frac{f(w)}{w-z} \in \mathbb{C}$.

Paramétrons le cercle $c(z_0, r)$ par $\gamma_0 : t \in [0,1] \mapsto z_0 + re^{2i\pi t} \in \mathbb{C}$, et le cercle $c(z, \varepsilon)$ par $\gamma_1 : t \in [0,1] \mapsto z + \varepsilon e^{2i\pi t} \in \mathbb{C}$. Considérons l'interpolation barycentrique $\Gamma : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}$ entre γ_0 et γ_1 définie par

$$\Gamma(s,t) = (1-s)\,\gamma_0(t) + s\,\gamma_1(t) = [(1-s)z_0 + sz] + [(1-s)r + s\epsilon]e^{2i\pi t}\,.$$



L'homotopie Γ entre les cercles $c(z_0, r)$ et $c(z, \varepsilon)$.

L'application Γ est bien de classe C^2. Puisque le disque $\overline{D(z_0, r)}$ est convexe, l'application Γ prend ses valeurs dans ce disque fermé. Vérifions que Γ ne prend jamais la valeur z. Pour cela on observe que

$$\begin{aligned} \Gamma(s,t) = z \quad &\text{si et seulement si} \quad (1-s)(z-z_0) = \big((1-s)r + s\epsilon\big)\, e^{it} \\ &\text{si et seulement si} \quad z - z_0 = (r + \frac{s}{1-s}\epsilon)\, e^{it}\,, \end{aligned}$$

ce qui est impossible puisque $|z - z_0| < r$. Le résultat annoncé découle donc du lemme 3.15 appliqué à $h : V \to \mathbb{C}$. □

En particulier, la valeur de la fonction holomorphe f au centre du disque est égale à la moyenne de f sur le bord du disque : on dit qu'une fonction holomorphe satisfait la "propriété de la moyenne".

Corollaire 3.16 Propriété de la moyenne *Soient $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et $\overline{D(z_0, r)} \subset U$ un disque fermé inclus dans U. On a*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\, dt\,. \tag{3.4}$$

Preuve C'est la formule de Cauchy pour f dans un disque (théorème 3.14), exprimée au centre de ce disque. □

Remarque 3.17 Le fait de satisfaire la propriété de la moyenne n'est pas l'apanage des fonctions holomorphes.

En prenant les parties réelle ou imaginaire dans (3.4), on constate que les parties réelle et imaginaire d'une fonction holomorphe f satisfont également la propriété de la moyenne.

Les fonctions $h = \operatorname{Re} f$ ou $\operatorname{Im} f$ sont harmoniques (et réelles). Une fonction $h : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 est harmonique lorsqu'elle vérifie

$$\Delta h := \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0\,.$$

(Je vous laisse vérifier que $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont harmoniques, en utilisant les équations de Cauchy-Riemann).

On peut montrer qu'une fonction harmonique réelle $h : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ est toujours localement (sur tout ouvert convexe) la partie réelle d'une fonction holomorphe.

La notion d'harmonicité se généralise en dimension supérieure. Les fonctions harmoniques $h : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(n \geq 3)$ vérifient toujours la propriété de la moyenne, et ceci les caractérise. Mais il n'y a alors plus de fonction holomorphe sous-jacente !

C Analyticité des fonctions holomorphes

Une fois qu'on connait la formule de Cauchy dans un disque, l'analyticité des fonctions holomorphes est une conséquence facile de l'analyticité de la seule fonction

$$z \mapsto 1/z\,.$$

Théorème 3.18 Analyticité des fonctions holomorphes.
Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Alors f est analytique.

On peut préciser cette affirmation. Soient $z_0 \in U$ et $R = d(z_0, {}^cU)$ la distance de z_0 au complémentaire de U. Alors f est développable en série entière sur tout le disque $D(z_0, R) \subset U$: il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes telle que

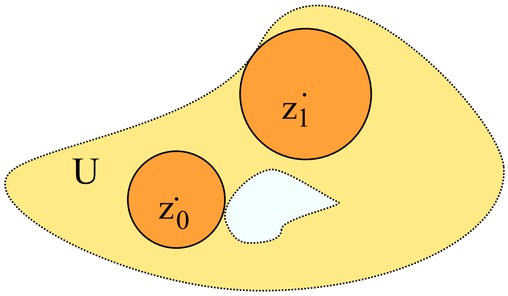
$$f(z) = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z - z_0)^n \qquad \textit{pour } |z - z_0| < R.$$

Remarque 3.19 – On peut préciser la valeur des a_n. Pour tout $0 < r < R$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a en effet les identités :

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi\, r^n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) e^{-int}\, dt\,. \tag{3.5}$$

Le terme de droite dans (3.5) ne dépend pas de r, contrairement aux apparences (voir également le corollaire 7.8).
– On contrôle le disque sur lequel f est développable en série entière autour de chaque point $z_0 \in U$. C'est le plus grand disque ouvert centré en z_0 et inclus dans le domaine de définition U de f.

– En particulier, le rayon de convergence de la série de Taylor de f en z_0 est au moins égal à la distance $d(z_0, {}^cU)$.
– Soient $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ une fonction entière et $z_0 \in \mathbb{C}$. La série de Taylor de f en z_0 a un rayon de convergence infini, et elle converge vers f sur tout $\mathbb{C}$.



Les disques maximaux, centrés en z_0 ou z_1, sur lesquels $f \in \mathcal{H}(U)$ est développable en série entière.

Exemple fondamental On rappelle, pour tout $u \in \mathbb{C}$ avec $|u| < 1$, l'identité

$$\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n . \tag{3.6}$$

La fonction $j : z \in \mathbb{C}^* \mapsto 1/z \in \mathbb{C}$ est donc analytique et son développement en série entière au point $z_0 \in \mathbb{C}^*$ est valable sur tout le disque $D(z_0, |z_0|)$. Il suit en effet de (3.6), lorsque $|z - z_0| < |z_0|$, les égalités :

$$\begin{aligned}\frac{1}{z} &= \frac{1}{z_0 + (z - z_0)} = \frac{1}{z_0}\,\frac{1}{1 + (z - z_0)/z_0} = \frac{1}{z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n (z - z_0)^n}{z_0^n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z_0^{-(n+1)} (z - z_0)^n .\end{aligned}$$

Preuve du théorème Soit $0 < r < R$. Le disque fermé $\overline{D(z_0, r)}$ est alors inclus dans U. En vertu de l'identité (3.6), la formule de Cauchy dans ce disque (théorème 3.14) donne, pour tout point $z \in D(z_0, r) \subset U$:

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{(z_0 + re^{it}) - z}\, re^{it}\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{1 - \dfrac{z - z_0}{re^{it}}}\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) \left(\sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n r^{-n} e^{-int}\right) dt .\end{aligned}$$

La fonction f, continue, est bornée sur le cercle $|z - z_0| = r$. La série $\sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n r^{-n} e^{-int}$ converge normalement sur $[0, 2\pi]$. On peut donc échanger signes somme et intégrale pour obtenir, lorsque $|z - z_0| < r$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r)\,(z - z_0)^n ,$$

où

$$a_n(r) = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})e^{-int}\, dt\,.$$

L'unicité du développement en série entière (corollaire 1.16) assure que $a_n(r)$ est indépendant de $0 < r < R$, avec l'égalité $a_n\, n! = f^{(n)}(z_0)$. La fonction f est donc, sur tout le disque $D(z_0, R)$, somme de sa série de Taylor en z_0. $\square$

Remarque 3.20 L'implication f analytique $\Rightarrow$ f holomorphe était banale.

La réciproque f holomorphe $\Rightarrow$ f analytique que nous venons de montrer ne l'est pas ! En effet, demander que f soit holomorphe, c'est "simplement" demander que f soit continûment dérivable. Le théorème affirme qu'elle est alors analytique. Ainsi :

- la fonction f est de classe C^∞ ; elle admet des dérivées complexes de tous ordres, qui sont donc également des fonctions holomorphes ;
- et f est localement somme de sa série de Taylor en chaque point.

La situation, dans le domaine complexe, est donc bien différente de ce dont nous avons l'habitude dans le domaine réel.

Rappelons en effet qu'il existe des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui sont de classe C^1 sans être C^∞ (par exemple $x \mapsto |x|^3$).

Par ailleurs, la fonction $x \mapsto e^{-1/x^2}$, prolongée par continuité en 0, est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Ses dérivées de tous ordres sont nulles en 0, donc sa série de Taylor est la série nulle. Pourtant $f(x) \neq 0$ si $x \neq 0$. Cette fonction n'est donc pas somme de sa série de Taylor.

Dans le domaine réel, il se peut également que le rayon de convergence de la série de Taylor d'une fonction de classe C^∞ soit nul (prendre par exemple $a_n = n!$ dans le théorème suivant qui permet de prescrire, en un point, la suite des dérivées d'une fonction de classe C^∞).

Théorème 3.21 Théorème de Borel

Soit (a_n) une suite arbitraire de nombres complexes.

Il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ pour laquelle, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f^{(n)}(0) = a_n$.

4. Premières conséquences de l'analyticité

A Primitives

Dans ce chapitre, il va être beaucoup question de primitives.

Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction continue définie sur un ouvert de $\mathbb{C}$. Rappelons qu'une fonction $F : U \to \mathbb{C}$ est une primitive de f lorsque F est holomorphe, de dérivée $F' = f$.

On constate d'emblée que, dans le domaine complexe, les seules fonctions qui ont une chance d'admettre une primitive sont les fonctions holomorphes !

Remarque 4.1 Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction continue, admettant une primitive $F : U \to \mathbb{C}$. La fonction F, holomorphe, est donc analytique (théorème 3.18). Il suit que sa dérivée $f = F'$ est également analytique... ou, de façon équivalente, holomorphe.
Ainsi, seule une fonction holomorphe peut espérer avoir une primitive ! ☺

Exemple 4.2 – *Pour $n \in \mathbb{Z}$ avec $n \neq -1$, l'application $F : z \mapsto z^{n+1}/(n+1)$ est primitive de $f : z \mapsto z^n$ (sur $\mathbb{C}$ lorsque $n \geq 0$, et sur $\mathbb{C}^*$ lorsque $n \leq -2$).*

– *Une détermination du logarithme $f : U \subset \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ est une primitive de la fonction $z \mapsto 1/z$ sur l'ouvert U.*

– *La fonction $z \mapsto 1/z$ n'admet pas de primitive sur tout $\mathbb{C}^*$ (remarque 2.16).*

Cependant, toute fonction holomorphe admet localement, c'est-à-dire au voisinage de chaque point de son domaine de définition, une primitive.

Proposition 4.3 Primitive dans un disque

Soit $f : D(z_0, R) \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe définie dans un disque. Alors, f possède une primitive sur ce disque.

Preuve Soit en effet $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(z - z_0)^n$ le développement en série entière de f sur le disque $D(z_0, R)$ (théorème 3.18). La fonction

$$F : z \in D(z_0, R) \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{n+1}(z - z_0)^{n+1} \in \mathbb{C}$$

est bien définie, et est une primitive de f sur ce disque. □

B Primitives sur un ouvert étoilé

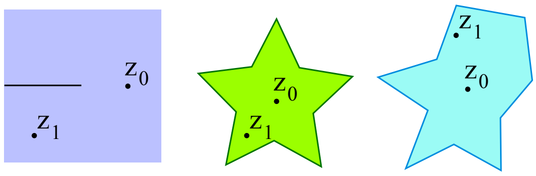
Nous allons voir plus généralement que toute fonction holomorphe définie sur un ouvert étoilé y admet une primitive.

Définition 4.4 *Un ouvert $U \subset \mathbb{C}$ est étoilé si il existe un point $z_0 \in U$ tel que, pour tout autre point $z \in U$, le segment $[z_0, z]$ soit inclus dans U.*

Notons qu'un ouvert étoilé est connexe par arcs.

Exemple 4.5 *Un ouvert convexe est étoilé par rapport à chacun de ses points. C'est notamment le cas du plan complexe $\mathbb{C}$.*

Le plan coupé $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$, non convexe, est étoilé par rapport à tout point $z_0 \in \mathbb{R}_+^*$. Le plan pointé $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ n'est pas étoilé.



Les trois ouverts sont étoilés par rapport au point z_0, mais pas par rapport à z_1

Proposition 4.6 *Soient $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert étoilé, et $f : U \to \mathbb{C}$ holomorphe. Alors f admet une primitive $F : U \to \mathbb{C}$.*

Supposons l'ouvert U étoilé par rapport au point $z_0 \in U$. Si f admet une primitive $F : U \to \mathbb{C}$ il suit de la proposition 3.6, pour tout point $z \in U$, l'égalité $F(z) - F(z_0) = \int_{[z_0,z]} f(w)\, dw$. Nous allons montrer que la fonction définie sur U par $z \mapsto \int_{[z_0,z]} f(w)\, dw$ est bien une primitive de f.

Notation 4.7 Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$. Le triangle $T(\alpha, \beta, \gamma) = \operatorname{conv}(\alpha, \beta, \gamma)$ est l'enveloppe convexe de ces trois points. Son bord (orienté) est le lacet

$$\partial T := [\alpha, \beta, \gamma] = \sigma_{[\alpha,\beta]} * \sigma_{[\beta,\gamma]} * \sigma_{[\gamma,\alpha]} .$$

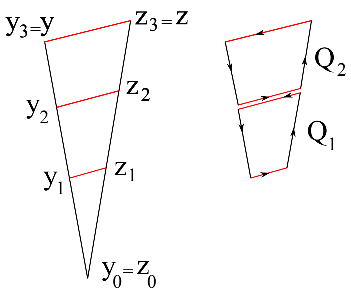
Lemme 4.8 *Soient $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert étoilé par rapport au point z_0. Soit $z \in U$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $y \in U$ avec $|y - z| \leq \varepsilon$:*

- *le triangle $T = T(z_0, z, y) \subset U$ est inclus dans U*
- *et on a l'égalité $\int_{\partial T} f = 0$ pour toute $f : U \to \mathbb{C}$ holomorphe.*

Preuve Le segment $[z_0, z]$ étant compact, sa distance ρ au complémentaire (fermé) de U est strictement positive. Choisissons $\varepsilon < \rho/10$. Soit alors $y \in \mathbb{C}$ tel que $d(y, z) \leq \varepsilon$. Le segment $[y, z]$ est tracé dans U. Puisque U est étoilé par rapport à z_0, le triangle $T = T(z_0, z, y)$ est également inclus dans U.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq k \leq n$, on introduit les points $y_k = z_0 + (k/n)(y - z_0)$ et $z_k = z_0 + (k/n)(z - z_0)$, de sorte que $y_0 = z_0$, $y_n = y$ et $z_n = z$. On choisit n suffisament grand pour que

$$\sup(d(y_k, y_{k+1}), d(z_k, z_{k+1}) \mid 0 \leq k \leq n - 1) < \varepsilon .$$



Chaque quadrilatère $Q_k = Q(z_k, z_{k+1}, y_{k+1}, y_k)$ (pour $0 \leq k \leq n-1$) sera donc inclus dans la boule $B(z_k, \rho) \subset U$, sur laquelle la fonction f admet une primitive (car f y est développable en série entière). Il suit que $\int_{\partial Q_k} f = 0$. On achève la démonstration en remarquant que la contribution de chaque arête $[z_k, y_k]$ apparaît avec deux signes opposés dans les quadrilatères Q_k et Q_{k+1}, lorsque $1 \leq k \leq n-1$. On a donc

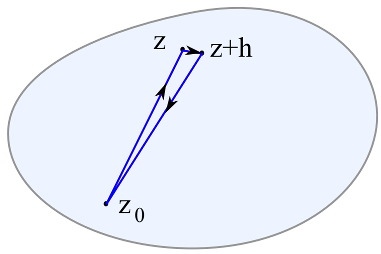
$$\int_{\partial T} f = \int_{[z_0,z]} f + \int_{[z,y]} f + \int_{[y,z_0]} f = \sum_{k=0}^{n} \int_{\partial Q_k} f = 0\,. \qquad \square$$

Remarque 4.9 Le lacet $\partial T \subset U$ étant homotope à un lacet constant, on aurait également pu prouver ce résultat en adaptant la preuve du théorème 3.14.

Preuve de la proposition 4.6

On suppose l'ouvert U étoilé par rapport au point z_0, et on introduit la fonction

$$F : z \in U \mapsto \int_{[z_0,z]} f(w)\,dw \in \mathbb{C}\,.$$



On va montrer que F est une primitive de f sur U (ce sera la primitive qui s'annule au point z_0).

Pour $h \in \mathbb{C}$ petit, le point $z+h$ appartient encore à U, et on peut appliquer le lemme 4.8 au triangle $T(z_0, z, z+h) \subset U$. On a donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h}\big(F(z+h) - F(z)\big) &= \frac{1}{h}\Big(\int_{\sigma_{[z_0,z+h]}} f(z)\,dz - \int_{\sigma_{[z_0,z]}} f(z)\,dz\Big) \\
&= \frac{1}{h}\int_{\sigma_{[z,z+h]}} f(z)\,dz \\
&= \int_0^1 f(z+th)\,dt \to f(z) \quad \text{lorsque } h \to 0,
\end{aligned}$$

par continuité de la fonction f au point z. Ainsi F est bien dérivable au point z, avec $F'(z) = f(z)$. $\square$

Remarque 4.10 L'ouvert étoilé U étant connexe, les autres primitives de f sur U sont les fonctions $z \mapsto F(z) + c$, pour $c \in \mathbb{C}$ (proposition 1.10).

Corollaire 4.11 Théorème de Cauchy pour un ouvert étoilé
Soient $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert etoilé et $f : U \to \mathbb{C}$ holomorphe. Alors, pour tout lacet γ de U, on a $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.

Preuve Se déduit de l'existence d'une primitive pour f sur U (proposition 4.6), grâce à la proposition 3.6. □

C Le théorème de Morera

Nous revenons à un ouvert quelconque. Le théorème suivant rassemble plusieurs caractérisations de l'holomorphie.

Théorème 4.12 Conditions nécessaires et suffisantes d'holomorphie
Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert quelconque. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction <u>continue</u>. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. **Holomorphie :** *f est holomorphe.*
2. **Formule de Cauchy :** *pour tout disque fermé $\overline{D(z_0, r)} \subset U$ et tout point $z \in D(z_0, r)$, on a*
$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c_r} \frac{f(w)}{w - z}\, dw\,,$$
où $c_r : t \in [0, 2\pi] \mapsto z_0 + re^{it} \subset U$.
3. **Analyticité :** *f est analytique.*
4. **Condition de Morera :** *pour tout triangle $T \subset U$, on a $\int_{\partial T} f(z)\,dz = 0$.*

Preuve On a déjà vu que $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$ (chapitres 3 et 1).

$1 \Rightarrow 4$ Appliquer le théorème de Cauchy (corollaire 4.11) appliqué dans un ouvert convexe (donc étoilé) $V \subset U$ qui contient le triangle T − prendre par exemple V égal au r-voisinage de T pour $0 < r < d(T, {}^cU)$.

$4 \Rightarrow 1$ On commence par noter que l'holomorphie est une propriété locale.

Supposons que la fonction continue f vérifie la condition de Morera. La preuve de la proposition 4.6 (l'hypothèse de Morera remplaçant la conclusion du lemme 4.8) assure que f admet localement (par exemple, sur chaque disque inclus dans U) des primitives, qui sont holomorphes donc analytiques. La fonction f elle-même est donc analytique, donc holomorphe. □

Les énoncés suivants sont des conséquences élémentaires, mais épatantes, du théorème de Morera : observer que l'on ne fait aucune hypothèse sur les dérivées des (f_n) ou des (g_t), et comparer aux énoncés réels dont vous avez l'habitude ! Les preuves sont laissées en exercices, mais nous reviendrons ultérieurement sur ces résultats (théorèmes 5.12 et 5.18).

Exercice 4.13 Déduire du critère de Morera les résultats suivants.

1. **Fonction continue holomorphe sur un ouvert pointé**
   Soient U un ouvert, et $z_0 \in U$. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction continue. On suppose que f est holomorphe sur l'ouvert $U \setminus \{z_0\}$. Alors f est holomorphe sur U.
2. **Limite uniforme de fonctions holomorphes**
   Soient $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f_n : U \to \mathbb{C}$ une suite de fonctions holomorphes. On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f : U \to \mathbb{C}$. Alors la limite f est holomorphe.
3. **Holomorphie sous l'intégrale**
   Soient $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $g : [a,b] \times U \to \mathbb{C}$ une fonction. On suppose que
   – g est continue
   – chaque fonction $g_t : z \in U \mapsto g(t,z) \in \mathbb{C}$ $(a \leq t \leq b)$ est holomorphe.

   Alors la fonction $h : U \to \mathbb{C}$ définie par
   $$h(z) = \int_a^b g(t,z)\,dt = \int_a^b g_t(z)\,dt$$
   est holomorphe sur U.

Voir éventuellement la preuve du théorème 5.18.

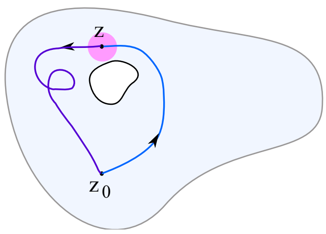
D Primitives sur un ouvert quelconque

Intéressons-nous maintenant à la question de l'existence d'une primitive pour une fonction holomorphe définie sur un ouvert quelconque.

Proposition 4.14 *Soient $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert quelconque, et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. La fonction f admet une primitive sur U si et seulement si son intégrale sur tout lacet c tracé dans U est nulle :*
$$\int_c f(z)\,dz = 0 \quad \textit{pour tout lacet } c \subset U. \qquad (*)$$

Preuve La condition $(*)$ est nécessaire d'après la proposition 3.6. On va voir qu'elle est suffisante.

Nous savons que f admet localement des primitives. Supposons que l'intégrale de f sur tout lacet soit nulle. Il s'agit de voir que f admet une primitive globale sur U.



On suppose U connexe (sinon on travaille séparément sur chacune de ses composantes connexes) ; l'ouvert U est alors connexe par arcs continus et C^1 par morceaux (voir si besoin le lemme 12.10). On choisit un point $z_0 \in U$ et l'on définit pour tout point $z \in U$
$$F(z) = \int_\gamma f(w)\,dw\,,$$

où γ est n'importe quel chemin tracé dans U joignant z_0 à z : la condition $(*)$ assure en effet que la fonction F est bien définie car l'intégrale ne dépend pas du choix du chemin entre z_0 et z.

Soit $\varepsilon > 0$ pour lequel $D(z, \varepsilon) \subset U$. Soit $|h| < \varepsilon$. Si γ est un chemin joignant z_0 à z et tracé dans U, le chemin concaténé $\gamma * \sigma_{[z,z+h]}$ joint z_0 à $z + h$ et est tracé dans U. On a alors, par définition de F, l'égalité

$$F(z+h) = F(z) + \int_{\sigma_{[z,z+h]}} f(w)\, dw\,.$$

La preuve de la proposition 4.6 assure que la restriction $F : D(z, \varepsilon) \to \mathbb{C}$ est bien primitive de f sur ce disque $D(z, \varepsilon)$. Ceci achève la preuve. □

E Logarithmes et racines

Sur un ouvert étoilé, toute fonction holomorphe $f : U \to \mathbb{C}^*$ admet un logarithme, et donc des racines k-ième holomorphes. (Ce n'est pas le cas sur un ouvert quelconque, penser de nouveau à la fonction $z \in \mathbb{C}^* \mapsto 1/z \in \mathbb{C}$).

Proposition 4.15 *Soient $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert étoilé, et $f : U \to \mathbb{C}^*$ une fonction holomorphe qui ne s'annule pas. Alors*

1. *il existe $g : U \to \mathbb{C}$ holomorphe avec $f = e^g$; deux telles fonctions diffèrent d'une constante additive dans $2i\pi\mathbb{Z}$;*
2. *il existe, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, une fonction holomorphe $h : U \to \mathbb{C}^*$ telle que $h^k = f$; deux telles fonctions diffèrent par une constante multiplicative qui est une racine k-ème de l'unité.*

Preuve 1. Soit g holomorphe sur U. Puisque U étoilé est connexe, la fonction holomorphe $e^{-g}f$ est constante sur U si et seulement si $g' = f'/f$.

Nous savons que f, holomorphe, est analytique et donc f' est également holomorphe. Une primitive convenable g de la fonction holomorphe f'/f sur l'ouvert étoilé U (proposition 4.6) sera donc une détermination holomorphe du logarithme de f (on se sert de la surjectivité de l'application exponentielle $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ pour ajuster la “constante d'intégration”).

2. Si $f = e^g$, la fonction $h = \exp(g/k)$ est une détermination holomorphe de la racine k-ième de f. L'unicité, à constante près, dans chacune de ces assertions est laissée au lecteur. □

Dans l'exercice suivant, on donne des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction holomorphe $f : U \to \mathbb{C}^*$ définie sur un ouvert quelconque admette un logarithme, ou bien une racine k-ième.

Exercice 4.16 Soit $f : U \to \mathbb{C}^*$ une fonction holomorphe ne s'annulant pas.

1. Soit $\gamma : [0, 1] \to U$ un lacet. Montrer que $\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz \in \mathbb{Z}$.
   On pourra introduire la fonction $\lambda : t \in [0, 1] \mapsto \exp(\int_{\gamma([0,t])} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz) \in \mathbb{C}$.

2. Montrer que f admet un logarithme $g : U \to \mathbb{C}$ holomorphe si et seulement si on a, pour tout lacet tracé dans U, l'égalité $\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = 0$.
3. Soit $k \geq 2$. Montrer que f admet une racine k-ième holomorphe $h : U \to \mathbb{C}$ si et seulement si $\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz \in k\,\mathbb{Z}$ pour tout lacet tracé dans U.

Remarque 4.17 Nous décrirons au chapitre 12 les ouverts $U \subset \mathbb{C}$ tels que toute fonction holomorphe $f : U \to \mathbb{C}$ (resp. $f : U \to \mathbb{C}^*$) admet une primitive (resp. un logarithme ou une racine k-ième). Nous verrons que la condition $\int_\gamma f = 0$ qui intervient dans l'énoncé de la proposition 4.14 porte uniquement sur les lacets qui “font le tour d'un trou de U”. Voir le corollaire 12.6, et la proposition 12.14.

F Holomorphie et $\mathbb{C}$-dérivabilité

Dans ce paragraphe de complément, nous prouvons un résultat qui avait été évoqué dans l'introduction.

Théorème 4.18 *Une fonction $f : U \to \mathbb{C}$ définie sur un ouvert de $\mathbb{C}$, et qui est $\mathbb{C}$-dérivable en chaque point, est de classe C^1.*

Le théorème découlera facilement du lemme suivant.

Lemme 4.19 de Goursat

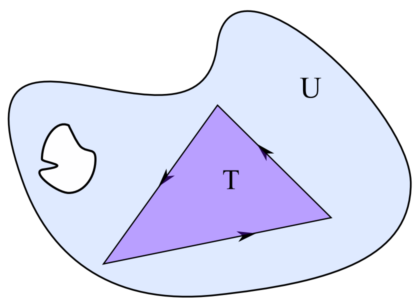
Soient $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert, et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction que l'on suppose $\mathbb{C}$-dérivable en chaque point de U. Soit $T \subset U$ un triangle (plein). Alors

$$\int_{\partial T} f(z)\, dz = 0\,.$$

Preuve du théorème La fonction f, supposée $\mathbb{C}$-dérivable en chaque point, est *a fortiori* continue. Le lemme précédent assure que f satisfait la condition de Morera. Il suit du théorème 4.12 que f est holomorphe, c'est-à-dire de classe C^1. □

Preuve du lemme

On découpe le triangle T en quatre triangles homothétiques de T dans un rapport 1/2, soient $T(1), T(2), T(3), T(4)$ que l'on oriente convenablement (se reporter au dessin ci-après) de sorte que

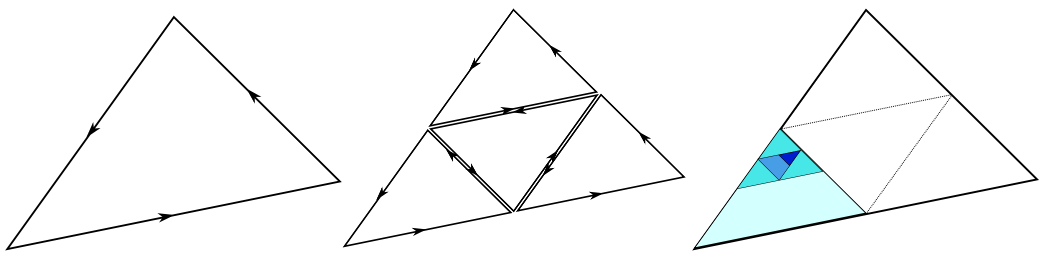


$$\int_{\partial T} f(z)\, dz = \sum_{i=1}^{4} \int_{\partial T(i)} f(z)\, dz\,.$$

Utiliser les résultat de 3.A.2 : chemin opposé, pour montrer que les contributions des arêtes intérieures se simplifient deux à deux, et concaténation.

On retient alors parmi les quatre triangles $T(i)$ celui (ou l'un de ceux) pour lequel $|\int_{\partial T(i)} f(z)\,dz|$ est maximale. On le nomme T_1. On a donc

$$|\int_{\partial T} f(z)\,dz| \leq 4\,|\int_{\partial T_1} f(z)\,dz|\,.$$



Le triangle initial T ; les quatre triangles $T(1), T(2), T(3), T(4)$; la suite de triangles T_n.

En itèrant le procédé, on obtient une suite $T_{n+1} \subset T_n \subset T$ de triangles, où T_n est homothétique de T de rapport 2^{-n} et satisfait

$$|\int_{\partial T} f(z)\,dz| \leq 4^n\,|\int_{\partial T_n} f(z)\,dz|\,.$$

Les triangles T_n forment une suite décroissante de compacts non vides donc leur intersection est non vide. Comme le diamètre de T_n tend vers 0 lorsque $n \to \infty$, cette intersection est réduite à un point : il existe $z_0 \in T$ tel que $\cap_{n\geq 1} T_n = \{z_0\}$. Puisque f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 et on a, en notant $\alpha = f'(z_0)$:

$$f(z) - f(z_0) - \alpha\,(z - z_0) = o(z - z_0)\,.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait pour tout $n \geq N$:

$$\sup_{z\in\partial T_n} |f(z) - f(z_0) - \alpha\,(z - z_0)| \leq \varepsilon\,\mathrm{diam} T_n\,.$$

La fonction $z \mapsto f(z_0) + \alpha\,(z - z_0)$ est polynomiale en z. Elle admet donc une primitive sur $\mathbb{C}$ et son intégrale sur chaque lacet ∂T_n est nulle.

On remarque que le diamètre $\mathrm{diam}\,T_n$ et la longueur du bord de T_n satisfont respectivement $\mathrm{diam}\,T_n = 2^{-n}\mathrm{diam}\,T$ et $L(\partial T_n) = 2^{-n}L(\partial T)$. Le lemme 3.12 assure donc, pour $n \geq N$, que

$$\begin{aligned} |\int_{\partial T_n} f(z)\,dz| &= |\int_{\partial T_n} f(z) - f(z_0) - \alpha\,(z - z_0)\,dz| \\ &\leq \varepsilon\,\mathrm{diam} T_n\,L(\partial T_n) \\ &= \varepsilon\,4^{-n}\,\mathrm{diam}\,T\,L(\partial T)\,. \end{aligned}$$

Il suit

$$|\int_{\partial T} f(z)\,dz| \leq 4^n \,|\int_{\partial T_n} f(z)\,dz| \leq \varepsilon \,\mathrm{diam}\, T\ L(\partial T)\,.$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, la conclusion suit. $\square$

5. Dérivées d'une fonction holomorphe

A Estimées de Cauchy

Pour une fonction holomorphe définie sur un voisinage d'un disque fermé, les estimées de Cauchy fournissent des bornes pour chacune des dérivées de cette fonction, au centre de ce disque.

Proposition 5.1 "Cauchy-Parseval"
Soient $f : U \to \mathbb{C}$ holomorphe, $\overline{D(z_0, r)} \subset U$ un disque fermé inclus dans U. On a l'égalité

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \Big| \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \Big|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})|^2 \, dt \,. \tag{5.1}$$

Preuve La série de Taylor de f au point z_0 converge normalement vers f sur le disque fermé $\overline{D(z_0, r)}$ (théorème 3.18). Il suit alors du théorème de Fubini-Tonelli que la famille $(a_{n,m})_{(n,m) \in \mathbb{N}^2}$ définie par

$$a_{n,m} = \Big| \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \frac{\overline{f^{(m)}(z_0)}}{m!} \Big| \, r^{n+m}$$

est sommable. On a donc l'égalité

$$|f(z_0 + re^{it})|^2 = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \frac{\overline{f^{(m)}(z_0)}}{m!} r^{n+m} e^{i(n-m)t}$$

pour tout $t \in [0, 2\pi]$, la convergence normale assurant qu'on peut intégrer terme à terme cette égalité sur $[0, 2\pi]$ pour obtenir

$$\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})|^2 \, dt = \sum_{m,n \in \mathbb{N}^2} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \frac{\overline{f^{(m)}(z_0)}}{m!} r^{n+m} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)t} \, dt \,.$$

Les termes pour lesquels $n \neq m$ s'annulant, le résultat suit. □

Remarque 5.2 L'égalité (5.1) n'est autre que la formule de Parseval, pour la base hilbertienne de $L^2_{2\pi}$ constituée des $(e^{int})_{n \in \mathbb{Z}}$, appliquée à la fonction $f_r : t \mapsto f(z_0 + re^{it})$ (qui n'a que des pulsations positives).

Le véritable principe du maximum sera énoncé au corollaire 6.11 (voir aussi l'exercice 6.26). Nous en proposons ici une première version.

Corollaire 5.3 Principe du maximum (version préliminaire)
Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. On suppose que le disque fermé $\overline{D(z_0, r)} \subset U$ de centre z_0 et de rayon r est inclus dans U. Alors

$$|f(z_0)| \leq \max_{|z-z_0|=r} |f(z)|\,, \tag{5.2}$$

avec égalité si et seulement si f est constante sur le disque $\overline{D(z_0, r)}$.

Preuve L'inégalité de la proposition 5.1 assure que

$$|f(z_0)|^2 \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \left|\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\right|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})|^2\, dt\,, \tag{5.3}$$

et donc (5.2) s'en déduit. Si on a égalité dans (5.2), il suit de (5.3) que

$$|f(z_0)|^2 \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \left|\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\right|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})|^2\, dt \leq |f(z_0)|^2\,.$$

Toutes les dérivées $f^{(n)}(z_0)$ sont donc nulles ($n \geq 1$), et f est constante sur le disque $D(z_0, r)$ puisqu'elle y est somme de sa série de Taylor. □

En sous-produit de la proposition 5.1 (ou bien à partir de l'expression (3.5)), on obtient les estimées de Cauchy.

Notation 5.4 Pour une fonction f définie au voisinage du disque fermé $\overline{D(z_0, r)}$, on note

$$M(r) := \max_{|z-z_0|=r} |f(z)|$$

le sup du module de f sur le cercle de rayon r centré en z_0.

Corollaire 5.5 Estimées de Cauchy
Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe définie au voisinage du disque fermé $\overline{D(z_0, r)}$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la majoration :

$$\left|\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\right| \leq \frac{M(r)}{r^n}\,. \tag{5.4}$$

La conséquence suivante des estimées de Cauchy est remarquable.

Corollaire 5.6 Théorème de Liouville
Une fonction entière $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ bornée est constante.

Preuve Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorphe. Elle est donc, sur tout $\mathbb{C}$, somme de sa série de Taylor en l'origine (théorème 3.18). Supposons $|f(z)| \leq M$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Soit $r > 0$. Les estimées de Cauchy (5.4) sur le disque $\overline{D(0,r)}$ donnent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la majoration

$$\Big|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\Big| \leq \frac{M}{r^n}\,.$$

En faisant tendre r vers $+\infty$, on obtient que toutes les dérivées $f^{(n)}(0)$ de f en l'origine sont nulles ($n \in \mathbb{N}^*$). Donc f est constante. □

Exercice 5.7 Soit f une fonction entière "à croissance polynomiale". Autrement dit, on suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}$, c et $R > 0$ tels que

$$|z| \geq R \quad \Rightarrow \quad |f(z)| \leq c\,|z|^k\,.$$

Montrer que f est une fonction polynomiale de degré au plus k.

Du théorème de Liouville suit une première démonstration du théorème de d'Alembert-Gauss.

Corollaire 5.8 d'Alembert-Gauss

Soit $P \in \mathbb{C}[z]$ un polynôme. Si P ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$, il est constant.

Preuve Supposons $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$ de degré $n \geq 1$, c'est-à-dire que $a_n \neq 0$. On peut alors écrire, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$:

$$P(z) = z^n\,(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n})$$

et donc $|P(z)| \to \infty$ lorsque $|z| \to \infty$. Supposons par l'absurde que P ne s'annule pas. La fonction $z \mapsto 1/P(z)$ est alors une fonction entière qui tend vers 0 à l'infini, et qui est donc bornée. Le théorème de Liouville assure maintenant que f est constante. Contradiction. □

B Estimées de Cauchy uniformes

On va maintenant affiner les estimées de Cauchy (5.4), pour obtenir des estimées de Cauchy uniformes pour les dérivées d'une fonction holomorphe sur une partie compacte de son domaine de définition. Commençons par un petit rappel de topologie.

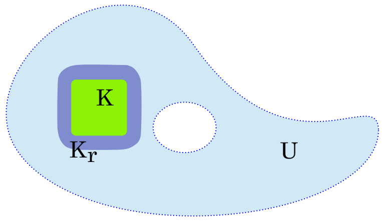
Lemme 5.9 *Soient $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $K \subset U$ un compact.*

1. *On a $d(K, {}^cU) > 0$.*
2. *Pour $0 < r < d(K, {}^cU)$, on introduit le r-voisinage K_r de K, soit*

$$K_r := \cup_{z\in K}\overline{D(z,r)} = \{w \in \mathbb{C} \mid d(w,K) \leq r\}\,.$$

La partie K_r est un voisinage compact de K inclus dans U.

Preuve Soit $A \subset \mathbb{C}$ une partie de $\mathbb{C}$. L'application $z \in \mathbb{C} \mapsto d(z, A) \in \mathbb{R}_+$ est continue (car 1-lipschitzienne).
Lorsque $A \subset \mathbb{C}$ est fermée et $z \notin A$, on a $d(z, A) \neq 0$. □



Corollaire 5.10 Estimées de Cauchy uniformes
Soient $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert, $K \subset U$ un compact et $0 < r < d(K, {}^cU)$. Pour toute fonction holomorphe $f : U \to \mathbb{C}$ et tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a l'estimation

$$\sup_{z \in K} |f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{r^n} \sup_{z \in K_r} |f(z)| \,.$$

Preuve Conséquence immédiate des estimées de Cauchy (5.4) (le r-voisinage $K_r \subset U$ de K étant compact, on a $\sup_{z \in K_r} |f(z)| < \infty$). □

Remarque 5.11 – On insiste de nouveau sur le contraste avec le cas réel. Considérer la suite de fonctions $x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(kx) \in \mathbb{R}$.

– Quitte à remplacer f par la fonction $f - f(z_0)$ pour un point $z_0 \in K$, on majore les dérivées de f par le diamètre $\mathrm{diam}(f(K_r))$ de l'image de $f(K_r)$, plutôt que par $\sup_{z \in K_r} |f|$.

Nous sommes maintenant en mesure de préciser les résultats de l'exercice 4.13 concernant les suites de fonctions holomorphes, ou bien l'holomorphie sous le signe somme.

B.1 Suites de fonctions holomorphes

Théorème 5.12 *Soient $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions holomorphes sur U.*

On suppose que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge localement uniformément vers une fonction $f : U \to \mathbb{C}$. Alors

1. *la limite f est holomorphe,*
2. *pour chaque entier $p \in \mathbb{N}^*$, la suite des dérivées $(f_n^{(p)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge localement uniformément vers la dérivée $f^{(p)}$.*

Définition 5.13 *Soient $f_n : U \to \mathbb{C}$. La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge localement uniformément vers $f : U \to \mathbb{C}$ si, pour tout point $z_0 \in U$, il existe un voisinage $V \subset U$ de ce point pour lequel la suite $(f_{n|V})_{n \in \mathbb{N}}$ des restrictions converge uniformément vers $f_{|V}$.*

Remarque 5.14 Même si l'on suppose que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur tout U, on n'aura en général qu'une convergence uniforme locale pour chaque suite dérivée. En effet, plus K se rapproche du bord de U, plus on devra prendre r petit, et plus l'estimée (5.5) se dégradera.

Lemme 5.15 *Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge localement uniformément vers f, alors elle converge uniformément vers f sur tout compact $K \subset U$.*

Preuve La propriété de Borel-Lebesgue permet de recouvrir le compact K par un nombre fini d'ouverts $(V_i)_{1\le i\le k}$ de U sur lesquels la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f. A fortiori, puisque $K \subset \cup_{i=1}^k V_i$, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur K.

En effet, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $1 \le i \le k$, il existe un rang N_i tel que $\sup_{V_i} |f_n - f| \le \varepsilon$ dès que $n \ge N_i$. Lorsqu'on prend $N = \max(N_1, \cdots, N_k)$, on obtient $\sup_K |f_n - f| \le \varepsilon$ lorsque $n \ge N$. □

Preuve du théorème 5.12

1. Ce résultat a été prouvé à l'exercice 4.13 comme conséquence du critère de Morera.

2. Soient $z_0 \in U$ et $K = \overline{D(z_0, r)} \subset U$ un voisinage compact de z_0. On choisit $r > 0$ tel que le r-voisinage K_r de K soit inclus dans U. Il suit des estimées de Cauchy uniformes appliquées aux fonctions holomorphes $f - f_n$ que l'on a pour tous $n, p \in \mathbb{N}$:

$$\sup_{z\in K} |f^{(p)}(z) - f_n^{(p)}(z)| \le \frac{p!}{r^p} \sup_{z\in K_r} |f(z) - f_n(z)| \,. \tag{5.5}$$

La suite des différences $(f_n - f)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant uniformément vers 0 sur le compact K_r, on conclut que la suite des dérivées $(f^{(p)} - f_n^{(p)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur K. □

Exercice 5.16

1. On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne canonique. Montrer que l'ensemble $E \subset L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ est fermé, où
$$E = \{L \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)\,,\ L = 0 \text{ ou bien } L \text{ est une similitude directe}\}\,.$$
2. Déduire alors du théorème sur les suites de fonctions $f_n : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de classe C^1, et des estimées de Cauchy uniformes, une nouvelle démonstration du théorème 5.12 (qui n'utilisera pas le critère de Morera).

Remarque 5.17 Noter le contraste avec les fonctions de variable réelle. Considérer la suite de fonctions $t \in \mathbb{R} \mapsto (t^2 + 1/n)^{1/2} \in \mathbb{R}$ de classe C^∞, qui converge uniformément vers la fonction $t \mapsto \sqrt{|t|}$ non dérivable en l'origine.

Penser également à la suite de fonctions $t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{k}\sin(k^2 t) \in \mathbb{R}$, qui converge uniformément vers 0 alors que ses dérivées ne sont pas bornées.

B.2 Holomorphie sous le signe intégrale

Théorème 5.18 *Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $g : I \times U \to \mathbb{C}$ une fonction. On suppose que :*

– **holomorphie :** *chaque fonction $g_t : z \in U \mapsto g(t,z) \in \mathbb{C}$ (pour $t \in I$) est holomorphe*

– **mesurabilité :** *pour chaque $z \in U$, la fonction $t \in I \mapsto g(t,z) \in \mathbb{C}$ est mesurable*

– **domination :** *il existe une fonction intégrable $\varphi \in L^1(I)$ telle qu'on ait, pour tout $z \in U$, la domination $|g(t,z)| \leq \varphi(t)$ pour $t \in I$.*

Alors la fonction $h : U \to \mathbb{C}$ définie par

$$h(z) = \int_I g(t,z)\,dt = \int_I g_t(z)\,dt$$

est holomorphe sur U. De plus on peut dériver sous le signe somme : on a en effet, pour tout $z \in U$ et tout entier $p \in \mathbb{N}$, l'égalité

$$h^{(p)}(z) = \int_I (g_t)^{(p)}(z)\,dt\,, \tag{5.6}$$

chacune de ces intégrales étant bien définie !

Remarque 5.19 L'holomorphie est une propriété locale. Le résultat du théorème précédent reste donc valable sous une hypothèse de domination locale. On demande alors plutôt que :

– **domination locale :** *tout point $z \in U$ possède un voisinage $V \subset U$ pour lequel il existe une fonction intégrable $\varphi_V \in L^1(I)$ telle qu'on ait, pour tout $z \in V$, la domination $|g(t,z)| \leq \varphi_V(t)$ pour $t \in I$.*

Preuve • La domination assure que chaque fonction $t \mapsto g(t,z)$ (pour $z \in U$) est intégrable sur I, donc h est bien définie. Pour montrer que h est holomorphe, on utilise le critère de Morera. Les fonctions g_t, holomorphes, sont continues sur U. Le théorème de convergence dominée s'applique donc pour montrer que h est également continue sur U.

Montrons que h est holomorphe, en vérifiant qu'elle satisfait le critère de Morera. Soit donc $T \subset U$ un triangle. On paramètre son bord par $\gamma : [0,1] \to U$, continue et de classe C^1 par morceaux. Le théorème de Fubini s'applique à la fonction $(t,s) \in I \times [0,1] \mapsto g(t,\gamma(s))\,\gamma'(s) \in \mathbb{C}$ puisque

$$\int_{I\times[0,1]} |g(t,\gamma(s))\,\gamma'(s)|\,dt\,ds \leq \int_{I\times[0,1]} \varphi(t)\,|\gamma'(s)|\,dt\,ds = \|\varphi\|_{L^1(I)} \sup_{[0,1]} |\gamma'(s)| < \infty\,.$$

Chaque fonction g_t étant holomorphe sur U, son intégrale sur le bord ∂T du triangle est nulle et donc

$$\int_{\partial T} h(z)\,dz = \int_{\partial T} \Big(\int_I g(t,z)\,dt\Big)\,dz = \int_I \Big(\int_{\partial T} g_t(z)\,dz\Big)\,dt = 0\,.$$

• L'expression intégrale (5.6) pour les dérivées successives de h suit alors du théorème de dérivation sous le signe intégrale. En effet, la domination uniforme des fonctions g_t induit une domination uniforme locale de chacune de leurs dérivées $g_t^{(p)}$ (pour $t \in I$). □

Exercice 5.20 Avec les notations du théorème précédent 5.18, utiliser (3.5) et le théorème de Fubini pour retrouver l'expression intégrale (5.6) des dérivées de la fonction holomorphe h.

Exercice 5.21 La fonction Γ. Soit $U_0 = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$.

1. Soient $z \in \mathbb{C}$ et un réel $t > 0$. Donner un sens à l'expression t^z.
2. Montrer que l'expression $\Gamma : z \in U_0 \mapsto \int_0^\infty e^{-t}\, t^{z-1}\, dt \in \mathbb{C}$ définit une fonction holomorphe sur le demi-plan U_0.
3. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Exprimer, pour $z \in U_0$, la dérivée $\Gamma^{(p)}(z)$ sous forme d'une intégrale.

6. Etude locale d'une fonction holomorphe

Nous étudions maintenant la structure locale d'une fonction holomorphe. Par translation, c'est-à-dire en considérant la fonction $z \mapsto f(z) - f(z_0)$, on se ramène à étudier la fonction f au voisinage d'un point z_0 où elle s'annule.

A Petits rappels de topologie

Définition 6.1 *Soit E un espace métrique.*

(1) *Un point $x \in E$ est isolé lorsqu'il existe un rayon $r > 0$ tel que $B(x, r) = \{x\}$.*

(2) *L'espace métrique E est discret si tous ses points sont isolés.*

Définition 6.2 *Soit $A \subset E$ une partie d'un espace métrique.*

Un point $\alpha \in E$ est point d'accumulation de A, si pour tout $r > 0$, l'intersection $B^*(\alpha, r) \cap A \neq \emptyset$, où $B^*(\alpha, r) = B(\alpha, r) \setminus \{\alpha\}$ est la boule pointée. C'est le cas si et seulement si il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de A avec $a_n \neq \alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$.

Remarque 6.3 Soit $A \subset E$ une partie d'un espace métrique. Tout point $z \in E$ qui est point d'accumulation de A appartient à l'adhérence $\overline{A}$ de A dans E. Tout point de $\overline{A} \setminus A$ est point d'accumulation de A.

Exemple 6.4 *L'espace métrique $A = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ est discret (pour la topologie induite par celle de $\mathbb{R}$). Par contre son adhérence $\overline{A} = A \cup \{0\}$ dans $\mathbb{R}$ ne l'est pas. Le point $0 \in \overline{A}$ est point d'accumulation de A, et de $\overline{A}$.*

Lemme 6.5 *Soit $A \subset E$ une partie d'un espace métrique E.*

(1) *La partie A est discrète si et seulement si elle ne possède pas de point d'accumulation dans A.*

(2) *Supposons $A \subset E$ fermée. Alors A est discrète si et seulement si elle n'a pas de point d'accumulation dans E.*

(3) *Si la partie A est compacte et discrète, elle est finie.*

Preuve (1) Le point $\alpha \in A$ est non isolé dans A si et seulement si il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de points de A, avec $a_n \in B^*(\alpha, 1/n)$ pour tout $n \geq 1$. L'équivalence suit.

(2) Lorsque la partie A est fermée dans E, ses points d'accumulation appartiennent à A. On conclut avec le point (1).

(2) Conséquence de la propriété de Borel-Lebesgue. On peut en effet recouvrir A par un nombre fini de boules ouvertes, qui contiennent chacune un seul point de A. $\square$

B Principe des zéros isolés

Dans les énoncés qui vont suivre, on supposera l'ouvert $U \subset \mathbb{C}$ connexe. S'il ne l'est pas, on travaille séparément sur chacune de ses composantes connexes, qui sont ouvertes.

Les zéros d'une fonction holomorphe sont de deux sortes.

Théorème 6.6 Ordre d'un zéro

Soient U un ouvert connexe et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe qui s'annule en z_0. Alors :

(1) *Soit $f^{(n)}(z_0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La fonction f est alors nulle sur U.*

(2) *Sinon, il existe un unique entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que*

$$f(z) = (z - z_0)^k \, g(z)\,,$$

où $g : U \to \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe qui ne s'annule pas en z_0.

Dans le premier cas, on dit que le zéro z_0 de f est d'ordre infini. Dans le second, l'ordre de ce zéro est l'entier $k \in \mathbb{N}^*$.

Preuve 1. On introduit $Y := \{z \in U \mid f^{(n)}(z) = 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}\}$. La partie $Y \subset U$ est fermée dans U comme intersection de fermés, puisque chaque dérivée $f^{(n)}$ de f est continue sur U. Si maintenant $z_0 \in Y$, la série de Taylor de f en z_0 est nulle et l'analyticité de f assure que f est identiquement nulle au voisinage de z_0. Ainsi $Y \subset U$ est également ouvert. Lorsque Y est non vide, on conclut que $Y = U$ par connexité de U.

2. Si l'une des dérivées de f en z_0 n'est pas nulle, on considère

$$k = \inf\{n \geq 0 \mid f^{(n)}(z_0) \neq 0\} > 0\,.$$

On introduit la fonction holomorphe $g : z \in U \setminus \{z_0\} \mapsto (z - z_0)^{-k} f(z) \in \mathbb{C}$. Puisque f est analytique on a, lorsque $|z - z_0|$ est assez petit et par définition de k :

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n = (z - z_0)^k \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n+k)}(z_0)}{(n+k)!} (z - z_0)^n \right).$$

La fonction g se prolonge donc en une fonction holomorphe sur U, avec

$$g(z_0) = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \neq 0\,.$$

Pour l'unicité, on observe que si $f(z) = (z - z_0)^{k_1} g_1(z) = (z - z_0)^{k_2} g_2(z)$ où g_1 et g_2 sont deux fonctions continues en z_0 qui ne s'y annulent pas, la fonction $z \mapsto (z - z_0)^{k_1 - k_2}$ se prolonge par continuité en z_0 avec une limite non nulle en ce point ; ceci assure que $k_1 = k_2$. $\square$

On retiendra en outre la série de conséquences fondamentales suivante.

Corollaire 6.7 *Soient U un ouvert connexe, et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe non identiquement nulle.*

1. **Principe des zéros isolés** *Chaque zéro de f est isolé. L'ensemble des zéros de f, soit*
$$Z(f) = \{z \in U \mid f(z) = 0\},$$
est fermé dans U et discret.
2. *Si $K \subset U$ est un compact, l'ensemble $Z(f) \cap K$ est fini.*
3. *L'ensemble $Z(f)$ des zéros de f est fini ou dénombrable.*

Preuve 1. Soit $z_0 \in Z(f)$. Le théorème précédent assure que z_0 est un zéro d'ordre fini k de f. On a donc

$$f(z) = (z - z_0)^k \, g(z),$$

où $g(z_0) \neq 0$. Par continuité, il existe un voisinage de z_0 sur lequel g ne s'annule pas et donc sur lequel f ne s'annule qu'en z_0. Puisque $f : U \to \mathbb{C}$ est continue, l'ensemble $Z(f)$ est un fermé de U.

2. L'intersection $Z(f) \cap K$ est compacte et discrète, donc finie (lemme 6.5).

3. On écrit l'ouvert U comme réunion dénombrable des compacts

$$K_n = \{z \in \mathbb{C} \mid d(z, {}^c U) \geq 1/n \,,\, |z| \leq n\} \subset U,$$

chaque compact K_n contenant un nombre fini de zéros de f d'après (2). $\square$

Remarque 6.8 Il suit que, pour tout $w_0 \in \mathbb{C}$, chaque ensemble de niveau

$$Z_{w_0}(f) = \{z \in U \mid f(z) = w_0\}$$

d'une fonction holomorphe non constante, sur un ouvert connexe, est discret.

Par contre, les zéros d'une fonction holomorphe peuvent s'accumuler sur le bord de son domaine de définition. On peut par exemple considérer la fonction holomorphe définie par $z \mapsto \sin(1/z)$ sur l'ouvert connexe $U = \{\operatorname{Re} z > 0\}$ (ou bien sur $\mathbb{C}^*$), et dont les zéros sont les points $z_k = 1/(k\pi)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ (ou bien $k \in \mathbb{Z}^*$). Voir également le chapitre 10.

Le principe des zéros isolés est souvent employé sous la forme suivante.

Corollaire 6.9 Principe du prolongement analytique

Soient f_1 et f_2 deux fonctions holomorphes sur l'ouvert connexe U. Si f_1 et f_2 coïncident sur une partie $A \subset U$ ayant un point d'accumulation dans U, elles sont égales.

Une fonction holomorphe est donc déterminée par ses valeurs sur un ensemble $A \subset U$ ayant un point d'accumulation dans U. (C'est bien plus fort que le "classique" prolongement des identités pour des fonctions continues qui coïncident sur une partie dense !) Dans la pratique, l'ensemble A pourra être un ouvert, un segment, une suite d'éléments de U convergeant vers un point de U...
Dans l'exercice suivant, on exprime le principe de prolongement analytique sous forme d'un résultat d'unicité de prolongement.

Exercice 6.10

1. Soient $V \subset \mathbb{C}$ un ouvert, et $f : V \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soit U un ouvert connexe contenant V. Alors f possède au plus un prolongement holomorphe $\tilde{f} : U \to \mathbb{C}$.
2. Etudier l'exemple fourni par deux déterminations du logarithme sur des plans coupés, et prolongeant la fonction $\log : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$.

Nous énonçons maintenant la version définitive du principe du maximum annoncée au corollaire 5.3.

Corollaire 6.11 Principe du maximum

Soient $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe, et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe.

(1) *Si $|f|$ admet un maximum local en $z_0 \in U$, alors f est constante.*

(2) *Si $|f|$ admet un minimum local non nul en $z_0 \in U$, alors f est constante.*

Preuve (1) Soit en effet un disque fermé $\overline{D(z_0, r)} \subset U$ pour lequel

$$|f(z_0)| = \sup\{|f(z)|\,,\ z \in \overline{D(z_0, r)}\}\,.$$

Le principe du maximum sur ce disque (corollaire 5.3) nous apprend que la restriction de f à $\overline{D(z_0, r)}$ est constante. Puisque U est connexe, on conclut avec le principe des zéros isolés que f est constante.

(2) Se déduit de (1) appliqué à la fonction $z \mapsto 1/f(z)$, qui est définie et holomorphe au voisinage de z_0. □

Exercice 6.12 Déduire du corollaire 6.11 les résultats suivants. Soient $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorphe et $z_0 \in U$. Si la partie réelle $\mathrm{Re}\, f$, ou bien imaginaire $\mathrm{Im}\, f$, admet un maximum ou un minimum local en z_0 alors la fonction f est constante.

On pourra introduire les fonctions e^f ou encore e^{if}.

Nous proposerons à l'exercice 6.26 une autre preuve, plus géométrique, du principe du maximum 6.11 ainsi que des résultats de l'exercice 6.12.

Dans le cas d'un ouvert borné, on peut préciser le principe du maximum.

Corollaire 6.13 Principe du maximum sur un ouvert borné
Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert borné connexe. Soit $f \in C^0(\overline{U}) \cap \mathcal{H}(U)$ une fonction holomorphe sur U et continue jusqu'au bord.

Alors on a $|f(z)| \leq \max_{\partial U} |f|$ pour tout $z \in U$. Et l'égalité est réalisée en un point $z_0 \in U$ si et seulement si f est constante.

Preuve La fonction continue $|f|$ atteint son maximum sur le compact $\overline{U}$. Si ce maximum est atteint en un point de U, le corollaire précédent assure que f est constante. $\square$

Terminons ce paragraphe par un énoncé de connotation algébrique.

Corollaire 6.14 *Un ouvert $U \subset \mathbb{C}$ est connexe si et seulement si l'anneau $\mathcal{H}(U)$ des fonctions holomorphes sur U est intègre.*

Preuve Si l'ouvert n'est pas connexe, on choisit une partition $U = U_1 \sqcup U_2$ de U en deux ouverts non vides. Les fonctions indicatrices de U_1 et U_2 sont localement constantes donc holomorphes sur U, non identiquement nulles, mais de produit nul.

Supposons maintenant l'ouvert U connexe. Si $f, g \in \mathcal{H}(U)$ sont deux fonctions holomorphes non identiquement nulles, l'ensemble des zéros du produit fg est réunion de l'ensemble des zéros de f et de celui de g, et est donc dénombrable. $\square$

C Théorème de l'application ouverte

Une autre conséquence spectaculaire de l'étude des zéros d'une fonction holomorphe est le théorème de l'application ouverte.

C.1 Le cas réel (pour mémoire)

Définition 6.15 *Une application $f : X \to Y$ entre deux espaces métriques est ouverte lorsque l'image $f(U) \subset Y$ de tout ouvert $U \subset X$ est un ouvert $f(U)$ de Y.*

La propriété suivante résulte immédiatement des définitions.

Lemme 6.16 *Une application $f : X \to Y$ continue, bijective et ouverte est un homéomorphisme.*

Rappelons l'énoncé du théorème de l'application ouverte réel.

Théorème 6.17 d'inversion locale *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$.*

Soit $x_0 \in U$ tel que $D_{x_0} f \in \mathrm{GL}_n\mathbb{R}$. Alors il existe un voisinage ouvert $W \subset U$ de x_0 tel que la restriction $f_{|W} : W \to f(W)$ soit un difféomorphisme sur son image $f(W)$, qui est un ouvert $\mathbb{R}^n$.

Corollaire 6.18 *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, telle que $D_{x_0} f \in \mathrm{GL}_n\mathbb{R}$ pour tout $x_0 \in U$. Alors*

1. *f est une application ouverte*
2. *si de plus f est injective, alors $f : U \to f(U)$ est un difféomorphisme de U sur son image $f(U)$, qui est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.*

Les exemple suivants montrent que ces résultats nécessitent que la différentielle de f au point x_0 (ou en tout point) soit un isomorphisme.

Exercice 6.19 Dessiner l'image d'une petite boule centrée en 0 par chacune des applications définies par $x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$, ou $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x^2, y) \in \mathbb{R}^2$, ou encore $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x^2, y^2) \in \mathbb{R}^2$.

C.2 Modèle local pour une fonction holomorphe

Nous commençons par étudier une famille d'exemples.

Soient les fonctions $\varphi_k : z \in \mathbb{C} \mapsto z^k \in \mathbb{C}$. Pour $k \geq 2$, la dérivée $\varphi'_{k-1}(z) = z^{k-1}$ s'annule en l'origine, et seulement en ce point. Chacune des restrictions $\varphi_k : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ est donc un difféomorphisme local, et même un biholomorphisme local (proposition 2.4).

Ces applications φ_k (toujours pour $k \geq 2$) ne sont injectives sur aucun voisinage de l'origine, puisque chaque complexe non nul w admet k racines k-ième distinctes, de modules égaux à $|w|^{1/k}$. Pour autant, ce sont toutes des applications ouvertes, au voisinage de l'origine et donc sur $\mathbb{C}$ tout entier. En effet, l'image $\varphi_k(B(0, \alpha))$ d'une boule ouverte centrée en 0 est la boule ouverte $B(0, \alpha^k)$.

La proposition suivante affirme que ces applications φ_k ($k \in \mathbb{N}^*$), au voisinage de l'origine, sont les seuls modèles locaux, à biholomorphismes près, pour les applications holomorphes non constantes.

Proposition 6.20 *Soit $f : U \to \mathbb{C}$ holomorphe non constante, définie sur un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Soit $z_0 \in U$.*

On introduit l'entier $k = \inf\{n \in \mathbb{N}^* \mid f^{(n)}(z_0) \neq 0\}$. Il existe alors un voisinage ouvert V de z_0, un biholomorphisme $\psi_1 : V \to \psi_1(V)$ et un biholomorphisme $\psi_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tels que

$$f = \psi_2 \circ \varphi_k \circ \psi_1 \quad \textit{sur l'ouvert } V. \tag{6.1}$$

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\psi_1"', "\simeq"] & \mathbb{C} \\
\psi_1(V) \arrow[r, "\varphi_k"] & \mathbb{C} \arrow[u, "\simeq", "\psi_2"']
\end{tikzcd}$$

Si la formulation un peu abstraite (6.1) ne vous parle pas, voir l'expression (6.2) dans la preuve ci-dessous.

Preuve Supposons en un premier temps que $z_0 = 0$ et que $f(0) = 0$. Le théorème 6.6 assure l'existence d'un entier $k \in \mathbb{N}^*$ et d'une fonction holomorphe $g : U \to \mathbb{C}$ telle que $g(0) \neq 0$, et pour lesquels $f(z) = z^k g(z)$ pour tout $z \in U$.

Puisque $g(0) \neq 0$, il existe un petit disque (étoilé) $D(0, r) \subset U$ sur lequel la fonction holomorphe g ne s'annule pas, et admet donc une racine k-ième holomorphe γ (proposition 4.15). On a donc, sur ce disque $D(0, r)$, l'égalité $f(z) = (z\,\gamma(z))^k$.

Introduisons $h : z \in D(0, r) \mapsto z\,\gamma(z) \in \mathbb{C}$, de sorte que $f(z) = (h(z))^k$ pour tout $z \in D(0, r)$. Puisque $h'(0) = \gamma(0) \neq 0$, le théorème d'inversion locale holomorphe (proposition 2.4) montre qu'il existe un voisinage ouvert W de 0 en restriction auquel la fonction h est un biholomorphisme local. On a donc le résultat annoncé avec $\psi_1 = h$ et $\psi_2 = \mathrm{Id}$.

Revenons maintenant à z_0 et $f(z_0)$ quelconques. On se ramène au cas précédent par translations, à la source et au but. Soit $V \subset U$ un voisinage ouvert de z_0 tel que $z - z_0 \in W$ pour tout $z \in V$. On a donc montré que

$$f(z) = f(z_0) + (h(z - z_0))^k \quad \text{pour tout } z \in V, \tag{6.2}$$

où h est un biholomorphisme local tel que $h(0) = 0$. D'où le résultat, pour les biholomorphismes ψ_1 et ψ_2 définis respectivement par $\psi_1 : z \in V \mapsto h(z - z_0) \in \psi_1(V)$ et $\psi_2 : w \in \mathbb{C} \mapsto w + f(z_0) \in \mathbb{C}$. □

Remarque 6.21 Le cas $k = 1$ correspond à la situation où $f'(z_0) \neq 0$, et donc où f elle-même est un biholomorphisme local.

Soit $k \geq 1$. La fonction $\varphi_k : z \mapsto z^k$ au voisinage de l'origine est donc l'unique modèle local, à biholomorphismes près, pour une fonction holomorphe dont les dérivées en z_0 s'annulent jusqu'à l'ordre $k - 1$ mais pas plus, c'est-à-dire qui vérifie $f'(z_0) = \cdots = f^{(k-1)}(z_0) = 0$ et $f^{(k)}(z_0) \neq 0$ (pour $k \in \mathbb{N}^*$).

C.3 Le cas holomorphe

Nous venons de voir qu'une fonction holomorphe non constante se comporte localement comme l'une des φ_k. Nous en déduisons les résultats suivants.

Corollaire 6.22 Application ouverte, version holomorphe

Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe. Une application holomorphe $f : U \to \mathbb{C}$ non constante est ouverte.

On remarquera l'absence de restriction sur la dérivée de f, qui a le droit de s'annuler. Comme toujours, on comparera cette situation à ce qui se passe dans le cas réel.

Preuve On a vu que chaque application modèle φ_k est ouverte ($k \geq 1$). Le résultat suit alors de la proposition 6.20. □

On peut préciser le comportement local de notre fonction holomorphe.

Proposition 6.23 *Soient $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe, $z_0 \in U$ et $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $f'(z_0) = \cdots = f^{(k-1)}(z_0) = 0$ et $f^{(k)}(z_0) \neq 0$. Alors, il existe un voisinage ouvert $V \subset U$ de z_0 (que l'on peut prendre arbitrairement petit) tel que :*

(1) pour $z \in V$ avec $z \neq z_0$ on a $f(z) \neq f(z_0)$

(2) tout point $w \in f(V) \setminus \{f(z_0)\}$ admet exactement k antécédents dans $V \setminus \{z_0\}$.

En particulier, si il existe un voisinage de z_0 sur lequel f se restreint en une application injective, on a $f'(z_0) \neq 0$.

On dit alors que l'application $f : V \to f(V)$ est un revêtement ramifié de degré k de $f(V)$ avec une unique ramification, d'ordre k, au point z_0.

Preuve Les propriétés (1) et (2) sont satisfaites pour l'application modèle φ_k, et $V = B(0, r)$ une boule ouverte. On conclut comme ci-dessus avec la proposition 6.20.

Si $k > 1$, l'application f n'est injective sur aucun voisinage de z_0. □

Le théorème d'inversion globale admet une version holomorphe, que voici. Contrairement au cas réel, on n'a pas besoin de supposer que f est un difféomorphisme local : c'est ici une conséquence de l'injectivité !

Corollaire 6.24 Inversion globale, version holomorphe

Soit $f : U \to \mathbb{C}$ holomorphe et injective. Alors f est un biholomorphisme sur son image.

Preuve On commence par remarquer que l'injectivité de f assure que f' ne s'annule pas (proposition 6.23).

La fonction $f : U \to f(U)$ est donc un biholomorphisme local (c'est la proposition 2.4), donc global en invoquant de nouveau l'injectivité de f. □

Remarque 6.25 Noter de nouveau la différence sidérante avec les fonctions de variable réelle. Considérer $x \in \mathbb{R} \mapsto x^3 \in \mathbb{R}$, injective mais dont la dérivée s'annule en l'origine.

Exercice 6.26 Principe du maximum (2)

Soient $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorphe et $z_0 \in U$. Donner une preuve géométrique des résultats suivants (corollaire 6.11 et exercice 6.12), en utilisant cette fois-ci le théorème de l'application ouverte. On fera un dessin ! Si

1. $|f|$ admet un maximum local en z_0
2. ou bien $|f|$ admet un minimum local non nul en z_0
3. ou bien $\operatorname{Re} f$, ou $\operatorname{Im} f$, a un maximum ou un minimum local en z_0,

alors la fonction f est constante.

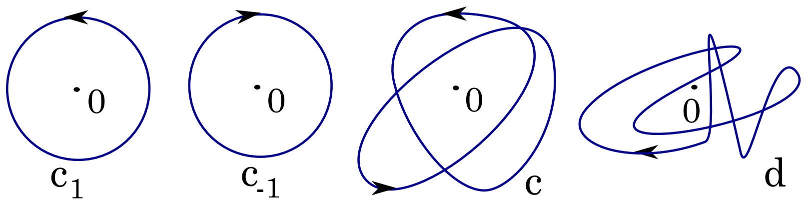
7. Variations sur la formule de Cauchy

A Indice d'un lacet par rapport à un point

En termes géométriques, l'indice $\mathrm{Ind}(\gamma, a)$ d'un lacet γ par rapport à un point a est un entier relatif qui compte le nombre de tours (avec un signe) que le lacet γ effectue autour du point a (cela suit du lemme 7.3 et de la remarque 7.4). On le définit analytiquement de la façon suivante.

Définition 7.1 *Soient $\gamma \subset \mathbb{C}$ un lacet et $a \in \mathbb{C} \setminus \gamma$ un point pris hors de l'image de γ. L'indice du lacet γ par rapport au point a est*

$$\mathrm{Ind}(\gamma, a) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dz}{z-a} .$$



Il faudra savoir calculer l'indice "de vue" dans des cas simples.
Ici $\mathrm{Ind}(c_1, 0) = 1$, $\mathrm{Ind}(c_{-1}, 0) = -1$, $\mathrm{Ind}(c, 0) = 2$, $\mathrm{Ind}(d, 0) = 0$.

L'indice vérifie les propriétés fondamentales suivantes.

Proposition 7.2 *Soit $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ un lacet.*

1. *L'application $a \in \mathbb{C} \setminus \gamma \mapsto \mathrm{Ind}(\gamma, a) \in \mathbb{C}$ est à valeurs entières.*
2. *Elle est constante sur chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \gamma$.*
3. *Elle est nulle sur l'unique composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \setminus \gamma$.*

La première assertion découlera du lemme suivant.

Lemme 7.3 *Soient $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ un chemin et $a \in \mathbb{C} \setminus \gamma$ un point pris hors du support de γ. Soit $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ tel que $e^{\lambda_0} = \gamma(0) - a$. Alors l'application continue*

$$\lambda : t \in [0,1] \mapsto \lambda_0 + \int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - a} \, ds \in \mathbb{C}$$

vérifie $\exp(\lambda(t)) = \gamma(t) - a$ *pour tout* $t \in [0,1]$.

Remarque 7.4 Il n'existe pas de détermination continue du logarithme sur tout $\mathbb{C}^*$. Le lemme 7.3 fournit cependant une détermination continue $\lambda : [0,1] \to \mathbb{C}$ du logarithme de $t \in [0,1] \mapsto \gamma(t) - a \in \mathbb{C}^*$. On dit également que λ est une "détermination continue du logarithme de $z - a$ le long du chemin γ".

Il suit alors que l'application $\operatorname{Im}\lambda : [0,1] \to \mathbb{R}$ fournit, pour chaque $t \in [0,1]$, un argument pour $\gamma(t)-a$ qui dépend continûment de t. Autrement dit, $\operatorname{Im}\lambda$ est une détermination continue de l'argument de $z-a$ le long du chemin γ. L'interprétation géométrique de l'indice suit de ce qu'on a, par définition, $\operatorname{Ind}(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi}(\operatorname{Im}\lambda(1) - \operatorname{Im}\lambda(0))$.

Preuve du lemme 7.3 La fonction $h = \exp\circ\lambda$ vérifie $h(0) = e^{\lambda_0} = \gamma(0)-a$. En dérivant h en chaque point $t \in [0,1]$ où γ est dérivable, on obtient :

$$\frac{h'(t)}{h(t)} = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-a}\,.$$

Il suit que le ratio $t \in [0,1] \mapsto \dfrac{\gamma(t)-a}{h(t)} \in \mathbb{C}^*$ est constant, donc égal à 1. □

Preuve de la proposition 7.2

1. On garde les notations du lemme. On a donc $\gamma(0) = e^{\lambda(0)}$ et $\gamma(1) = e^{\lambda(1)}$, avec $\gamma(0) = \gamma(1)$ puisque γ est un lacet. Ainsi

$$2i\pi \operatorname{Ind}(\gamma, a) = \int_0^1 \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-a}\,ds = \lambda(1) - \lambda(0) \in 2i\pi\mathbb{Z}\,.$$

2. L'application $a \in \mathbb{C}\backslash\gamma \mapsto \operatorname{Ind}(\gamma, a) \in \mathbb{Z}$ est continue (c'est une application du théorème élémentaire de continuité sous le signe $\int$: en effet, lorsque $a_n \to a \in \mathbb{C}\setminus\gamma$, l'intégrand converge uniformément sur $[0,1]$, de mesure finie). Cette application est à valeurs dans un espace discret, donc sa restriction à toute composante connexe de $\mathbb{C}\setminus\gamma$ est constante.

3. L'image du lacet γ est un compact de $\mathbb{C}$, donc inclus dans un disque $D(0,R)$. Le complémentaire ${}^cD(0,R) \subset \mathbb{C}\setminus\gamma$ de ce disque est connexe ; il est contenu dans l'unique composante connexe non bornée U_∞ de $\mathbb{C}\setminus\gamma$. Une simple majoration montre que

$$\operatorname{Ind}(\gamma, a) \to 0 \text{ lorsque } |a| \to \infty.$$

L'indice, qui est entier, est donc nul "à l'infini", et donc sur tout U_∞.

On peut également proposer une preuve plus géométrique de cette dernière assertion.
Supposons le lacet γ inclus dans la boule $B(0,R)$. Pour tout $a \in \mathbb{C}$ pour lequel $|a| > R$, le lacet γ sera inclus dans un demi-plan ouvert excluant a (et donc *a fortiori* dans un plan coupé) sur lequel la fonction $z \mapsto 1/(z-a)$ admet une primitive. □

Terminons ce paragraphe par quelques propriétés élémentaires de l'indice.

Lemme 7.5 *Soient $a \in \mathbb{C}$, γ_1, γ_2 des lacets dont l'image ne contient pas a, et dont le concaténé est bien défini.*

- **Lacet opposé :** $\operatorname{Ind}(\gamma_1^\vee, a) = -\operatorname{Ind}(\gamma_1, a)$.
- **Concaténé :** $\operatorname{Ind}(\gamma_1 * \gamma_2, a) = \operatorname{Ind}(\gamma_1, a) + \operatorname{Ind}(\gamma_2, a)$.

Preuve Immédiat. (C'est l'occasion de revoir le paragraphe 3.A.2, et les propriétés de l'intégrale sur un chemin). □

B Formules de Cauchy dans un ouvert étoilé

On démontre maintenant une première généralisation de la formule de Cauchy (3.2). Pour une fonction holomorphe f définie sur un ouvert étoilé U, il s'agit de déterminer la valeur de l'intégrale

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\, dz$$

pour un lacet γ quelconque, c'est-à-dire qui n'est plus un cercle.

Théorème 7.6 Formule de Cauchy dans un ouvert étoilé

Soient $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert étoilé et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soient γ un lacet de U et $a \in U$ pris hors du support de γ. On a alors

$$f(a) \operatorname{Ind}(\gamma, a) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\, dz\,. \tag{7.1}$$

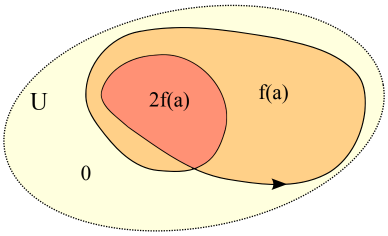
Remarque 7.7 – Lorsque $f \equiv 1$, on retrouve la définition de l'indice.
– Lorsque γ est le bord d'un disque fermé inclus dans U, et pour un point a pris à l'intérieur de ce disque, on retrouve la formule de Cauchy dans un disque (3.2).
– Le support du lacet γ est son image dans U. On se permettra désormais de noter $\gamma \subset U$, ou $a \in U \setminus \gamma$, pour indiquer que le lacet est tracé dans U, ou bien que γ évite le point a.

Preuve du théorème 7.6 Soit la fonction $q : U \to \mathbb{C}$ définie par

$$\begin{aligned} q(z) &= \frac{f(z) - f(a)}{z-a} \quad \text{si } z \neq a \\ q(a) &= f'(a)\,. \end{aligned}$$

La fonction q est holomorphe sur $U \setminus \{a\}$. Comme f est développable en série entière sur un disque $D(a, r) \subset U$, on y a l'égalité $f(z) - f(a) = (z-a) \sum_{n \in \mathbb{N}} f^{(n+1)}(a)(z-a)^n/(n!)$. Ainsi q est également holomorphe sur ce disque, et donc sur U (propriété locale).

L'ouvert U étant étoilé, l'intégrale de la fonction holomorphe q sur le lacet $\gamma \subset U$ est nulle (c'est le théorème de Cauchy étoilé, voir le corollaire 4.11). Il n'y a plus qu'à séparer les contributions du numérateur pour obtenir l'identité annoncée, en revenant à la définition de l'indice. □



Dans l'exemple ci-contre, le lacet γ découpe trois composantes connexes dans U. On a indiqué la valeur donnée par l'intégrale de Cauchy (7.1) lorsqu'on prend le point a dans chacune de ces trois régions.

La formule de représentation intégrale de Cauchy (7.1) se décline pour donner des formules de représentation intégrale pour chacune des dérivées d'une fonction holomorphe.

Corollaire 7.8 Formule de Cauchy pour les dérivées
Soient $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert étoilé et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soient γ un lacet de U. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout point $a \in U$ pris hors du support de γ, l'égalité

$$\frac{1}{n!} f^{(n)}(a) \operatorname{Ind}(\gamma, a) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} \, dz \,. \tag{7.2}$$

Preuve Supposons le lacet γ paramétré par l'intervalle $[0,1]$. Soit $n \geq 1$. La formule de Cauchy (7.1) pour la fonction holomorphe $f^{(n)}$ donne

$$f^{(n)}(a) \operatorname{Ind}(\gamma, a) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^1 \frac{f^{(n)}(\gamma(t))}{\gamma(t) - a} \gamma'(t) \, dt \,.$$

Le résultat suit par intégrations par parties, en utilisant le fait que γ est un lacet et donc que les termes de bord disparaissent. □

Exercice 7.9 Preuve alternative du corollaire 7.8
Partir de la formule de Cauchy (7.1) pour f, et dériver sous le signe intégrale (théorème 5.18).

Exercice 7.10 Formule de Cauchy dans un disque pour les dérivées
Pour f holomorphe sur U, un disque fermé $\overline{D(z_0, r)} \subset U$, un point $z \in D(z_0, r)$ dans le disque ouvert, et un entier $n \in \mathbb{N}$, montrer les égalités

$$\frac{f^{(n)}(z)}{n!} = \frac{1}{2i\pi} \int_{c(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} \, dw = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{((z_0 + re^{it}) - z)^{n+1}} re^{it} \, dt \,.$$

C Séries de Laurent

Notre objectif est de décrire les fonctions holomorphes sur un anneau. Ceci passera par une formule de représentation intégrale pour telle fonction.

C.1 Formule de Cauchy dans un anneau

Pour $0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty$, on note

$$A = A(R_1, R_2) = \{z \in \mathbb{C} \mid R_1 < |z| < R_2\}$$

l'anneau de rayon intérieur R_1 et de rayon extérieur R_2. Par exemple :

— $A(0, R) = D^*(0, R)$ (disque pointé de rayon R)

— $A(0, \infty) = \mathbb{C}^*$.

Notation 7.11 Pour $r > 0$, soit le lacet $c_r : t \in [0, 2\pi] \mapsto re^{it} \in \mathbb{C}$. Son image est le cercle de rayon r, parcouru une fois dans le sens trigonométrique.

Proposition 7.12 *Soit $f : A \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur l'anneau $A := A(R_1, R_2)$. On se donne $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$, de sorte qu'on ait l'inclusion $\overline{A(r_1, r_2)} \subset A(R_1, R_2)$.*

(1) **Théorème de Cauchy dans un anneau :** *On a $\int_{c_{r_1}} f(w)\, dw = \int_{c_{r_2}} f(w)\, dw$.*

(2) **Formule de Cauchy dans un anneau :** *Pour tout $z \in A(r_1, r_2)$, on a*

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c_{r_2}} \frac{f(w)}{w - z}\, dw - \frac{1}{2i\pi} \int_{c_{r_1}} \frac{f(w)}{w - z}\, dw\,.$$

Preuve (1) Ce résultat est une conséquence immédiate du lemme 3.15, que l'on applique à l'ouvert $V = A(R_1, R_2)$, à la fonction holomorphe f, et pour l'homotopie $\Gamma : (s, t) \in [r_1, r_2] \times [0, 2\pi] \to se^{it} \in V$. □

(2) Appliquer (1) à la fonction holomorphe $g : A(R_1, R_2) \to \mathbb{C}$ définie par

$$\begin{aligned} g(w) &= \frac{f(w) - f(z)}{w - z} \quad \text{si } w \neq z \\ g(z) &= f'(z) \end{aligned}$$

(comme pour le théorème 7.6). On conclut en séparant les contributions des numérateurs, puisqu'on a $\mathrm{Ind}\,(c_{r_1}, z) = 0$ tandis que $\mathrm{Ind}\,(c_{r_2}, z) = 1$. □

Exercice 7.13 Soit $f : D(0, R_2) \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Par restriction, la restriction de f à l'anneau $A(R_1, R_2)$ est holomorphe.
Pour $R_1 < r_1 < |z| < r_2 < R_2$, on a donc l'égalité $f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c_{r_2}} \frac{f(w)}{w-z}\, dw$.
Réconcilier cette information avec l'expression de $f(z)$ obtenue au théorème 7.12, qui semble faire apparaître un terme supplémentaire.

C.2 Décomposition de Laurent

Notre but est de décrire toutes les fonctions holomorphes sur l'anneau A.

Exemple 7.14 *Soient $0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty$. Soient alors deux fonctions holomorphes $g : D(0, R_2) \to \mathbb{C}$ et $h : D(0, 1/R_1) \to \mathbb{C}$ (avec la convention $1/0 = \infty$).*

La fonction $z \mapsto g(z) + h(1/z)$ est définie et holomorphe sur l'anneau $A(R_1, R_2)$.

Le théorème suivant affirme que toutes les fonctions holomorphes sur l'anneau admettent une telle décomposition !

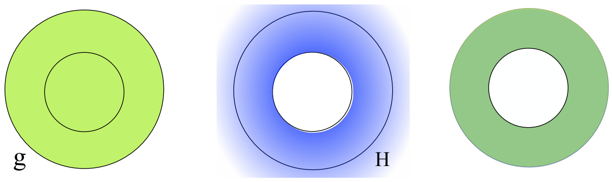
Théorème 7.15 de décomposition de Laurent

Soit $f : A(R_1, R_2) \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Il existe deux fonctions holomorphes $g : D(0, R_2) \to \mathbb{C}$ et $h : D(0, 1/R_1) \to \mathbb{C}$ telles qu'on ait, pour tout $z \in A(R_1, R_2)$, l'égalité

$$f(z) = g(z) + h(1/z)\,.$$

Si l'on impose de plus que $h(0) = 0$, cette décomposition est unique.

Définition 7.16 *Les fonctions $z \mapsto g(z)$ et $z \mapsto h(1/z)$ définies ci-dessus sont respectivement la partie régulière, et la partie principale, de f.*



Superposition des fonctions g et $H : z \mapsto h(1/z)$

Remarque 7.17 Lorsque la fonction holomorphe est définie sur un disque pointé $D^*(0, R) = A(0, R)$, la fonction h est entière. La partie principale $H : z \mapsto h(1/z)$ est donc une fonction holomorphe définie sur tout $\mathbb{C}^*$. Par contre, la partie régulière g est en général seulement définie sur le disque $D(0, R)$.

Preuve Unicité de la décomposition de Laurent

Il suffit de montrer que la fonction nulle admet une unique décomposition de Laurent. Soient donc $g : D(0, R_2) \to \mathbb{C}$ et $h : D(0, 1/R_1) \to \mathbb{C}$ deux fonctions holomorphes telles que $g(z) + h(1/z) = 0$ pour tout $z \in A(R_1, R_2)$.

Ceci signifie que les fonctions holomorphes

$$\begin{array}{ll} z \mapsto g(z) & \text{définie si } |z| < R_2 \\ z \mapsto -h(1/z) & \text{définie si } |z| > R_1 \end{array}$$

coïncident sur leur domaine commun de définition, soit $A(R_1, R_2)$. Elles sont donc toutes deux restrictions d'une même fonction entière $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ qui vérifie $\lim_{|z|\to\infty} |\varphi(z)| = 0$, puisque $h(0) = 0$. Le théorème de Liouville assure alors que φ est constante, donc nulle. Il suit que g et h sont toutes deux nulles. □

L'existence de la décomposition de Laurent utilisera les deux lemmes suivants.

Lemme 7.18 *Soient $r > 0$ et f une fonction continue définie sur le support de c_r. Alors l'expression*

$$z \mapsto \int_{c_r} \frac{f(w)}{w - z}\, dw$$

définit une fonction holomorphe sur le plan $\mathbb{C} \setminus c_r$ privé du cercle c_r.

Preuve Le théorème 5.18 d'holomorphie sous l'intégrale s'applique à

$$\begin{aligned} g : [0, 2\pi] \times (\mathbb{C} \setminus c_r) &\to \mathbb{C} && (7.3) \\ (t, z) &\mapsto \frac{f(re^{it})}{re^{it} - z}\, e^{it}\,, && (7.4) \end{aligned}$$

g étant continue avec $z \mapsto g(t, z)$ holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus c_r$ pour $t \in [0, 2\pi]$. □

Preuve **Existence de la décomposition de Laurent**

On commence par montrer que f admet une décomposition de Laurent dans chaque sous anneau ouvert $A(r_1, r_2)$, lorsque $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$ (de sorte que $\overline{A(r_1, r_2)} \subset A(R_1, R_2)$). L'unicité de la décomposition de Laurent assure alors que deux telles décompositions, pour deux anneaux $A(r_1, r_2)$ et $A(r_1', r_2')$ relativement compacts dans $A(R_1, R_2)$, coïncident sur leur anneau commun de définition. On obtient donc la décomposition de Laurent de f sur son domaine de définition $A(R_1, R_2)$ en faisant tendre r_1 vers R_1, et r_2 vers R_2.

Soient donc $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$. La formule de Cauchy dans l'anneau (corollaire 7.12) s'écrit, pour tout point $z \in A(r_1, r_2) \subset A(R_1, R_2)$:

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c_{r_2}} \frac{f(w)}{w - z}\, dw - \frac{1}{2i\pi} \int_{c_{r_1}} \frac{f(w)}{w - z}\, dw\,.$$

Le lemme 7.18 s'applique pour montrer que la première intégrale définit une fonction holomorphe g sur $\mathbb{C} \setminus c_{r_2}$, et donc sur le disque $D(0, r_2)$.

De même, la deuxième intégrale définit une fonction holomorphe H sur $\mathbb{C} \setminus c_{r_1}$, et donc a fortiori sur l'anneau $D(r_1, \infty)$. On observe que $H(z) \to 0$ lorsque $|z| \to \infty$. Introduisons la fonction $h : D(0, 1/r_1) \to \mathbb{C}$ définie par $h(0) = 0$ et $h(w) = H(1/w)$ lorsque $w \in D^*(0, 1/r_1)$. La fonction h est continue sur le disque, et holomorphe sur le disque pointé. Il suit du théorème de Morera (exercice 4.13) que h est holomorphe sur tout le disque.
Par construction, on a l'égalité

$$f(z) = g(z) + h(1/z)$$

pour tout $z \in A(r_1, r_2)$. C'est la décomposition cherchée sur $A(r_1, r_2)$. □

C.3 Développement de Laurent

Toute fonction holomorphe $f : D(0,r) \to \mathbb{C}$ définie sur un disque y est développable en série entière, soit $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ (théorème 3.18).

Nous démontrons maintenant un résultat semblable pour une fonction holomorphe définie sur un anneau $A(R_1, R_2)$: la fonction y sera développable en série de Laurent $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$. On note dans ce cas l'apparition de pulsations négatives. Ce résultat s'appliquera notamment aux fonctions définies sur un disque pointé $D^* = D(0,R)$, ce qui ouvrira la voie au théorème des résidus 8.12.

Corollaire 7.19 Développement en série de Laurent

Soit $f : A \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur l'anneau $A := A(R_1, R_2)$. La fonction f admet un unique développement en série de Laurent

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n \,,$$

la série convergeant normalement vers f sur les compacts de A.

De plus, les coefficients a_n vérifient, pour tout $r \in \,]R_1, R_2[$, l'identité

$$a_n = \frac{1}{2\pi\, r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) e^{-int}\, dt = \frac{1}{2i\pi} \int_{c_r} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz\,.$$

Preuve L'existence du développement de Laurent, et le fait que cette série converge normalement sur les sous-anneaux compacts de $A = A(R_1, R_2)$ (et donc sur les compacts de A), suit de la décomposition de Laurent, et de l'analyticité des fonctions holomorphes (théorèmes 7.15 et 3.18).

L'expression des a_n s'en déduit en échangeant somme et intégrale. □

Proposition 7.20 *Soit $f : A(R_1, R_2) \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe, de développement de Laurent $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$. Alors f admet une primitive sur l'anneau $A(R_1, R_2)$ si et seulement si le coefficient devant z^{-1} de son développement de Laurent est nul, soit $a_{-1} = 0$.*

Preuve Nous utiliserons le critère de la proposition 4.14. Soit $c \subset A(R_1, R_2)$ un lacet. Chacune des fonctions holomorphes $p_n : z \mapsto z^n$, pour $n \in \mathbb{Z}$ et $n \neq -1$, admet une primitive sur $\mathbb{C}$, donc son intégrale sur le lacet c est nulle. La série de fonctions

$$\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z} \\ n\neq -1}} a_n z^n$$

converge uniformément sur tout compact de l'anneau $A(R_1, R_2)$, donc a fortiori sur le support de c ; notons g sa somme. Il suit que $\int_c g(z)\, dz = 0$. Ceci étant vrai pour tout lacet, g admet une primitive sur $A(R_1, R_2)$.

La fonction $p_{-1} : z \mapsto 1/z$ n'admettant pas de primitive sur l'anneau, et puisque $f = g + a_{-1} p_{-1}$, le résultat est acquis. □

Exercice 7.21 Estimées de Cauchy
Soit f holomorphe sur $A(R_1, R_2)$. Pour $R_1 < r < R_2$, on note $M_r(f) = \sup_{c_r} |f|$.
Montrer, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la majoration

$$|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n},$$

qui généralise les estimées du corollaire 5.5.

Bien entendu, tout ce qui vient d'être fait dans ce chapitre pour un anneau centré en l'origine (pour simplifier les notations) se transpose sans difficulté à tout anneau $A_{z_0}(R_1, R_2) := \{z \in \mathbb{C} \mid R_1 < |z - z_0| < R_2\}$.

8. Formule des résidus

Nous avons étudié au chapitre précédent les fonctions holomorphes définies sur un anneau. Nous allons maintenant spécialiser cette étude aux fonctions holomorphes définies sur un disque pointé $D^*(z_0, R) = A_{z_0}(0, R)$. Cela nous mènera à la formule des résidus, ansi qu'à la notion de fonction méromorphe.

A Singularités isolées

On dit que $z_0 \in \mathbb{C}$ est point singulier isolé d'une fonction holomorphe lorsque cette fonction est définie et holomorphe sur un ouvert du plan contenant un disque pointé $D^*(z_0, R) = \{0 < |z - z_0| < R\}$. L'objectif de ce chapitre est d'étudier les points singuliers isolés d'une fonction holomorphe.

Commençons par étudier les trois exemples typiques avec lesquels il est indispensable de se familiariser.

• La fonction $z \mapsto \dfrac{\sin z}{z}$, définie et holomorphe sur $\mathbb{C}^*$, se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$. Cela résulte en effet du développement

$$\sin z = \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!} .$$

On parle dans ce cas de singularité effaçable (ou de singularité apparente).

• Soit $k \geq 1$. Pour la fonction $f_k : z \in \mathbb{C}^* \mapsto 1/z^k \in \mathbb{C}$, on observe que $|f_k(z)| \to \infty$ lorsque $|z| \to 0$. On dit que f_k possède un pôle en l'origine.

• Considérons enfin la fonction $g : z \in \mathbb{C}^* \mapsto e^{1/z} \in \mathbb{C}$.
L'image par l'application $z \mapsto 1/z$ du disque pointé $D^*(0, r)$ est le complémentaire $\mathbb{C} \setminus D(0, 1/r)$ du disque de rayon $1/r$. Il suit de l'étude de l'application exponentielle que, pour tout $r > 0$, l'image $g(D^*(0, r))$ est dense dans $\mathbb{C}$ (en l'occurrence, l'image d'un tel disque pointé est ici $\mathbb{C}^*$). On parle alors de singularité essentielle.

Ce sont les trois seules configurations qui peuvent apparaître. C'est ce que dit le théorème suivant.

Théorème 8.1 Classification des singularités isolées
• *Soit* $f : D^*(z_0, R) \to \mathbb{C}$ *une fonction holomorphe sur un disque pointé. Trois cas mutuellement exclusifs se présentent.*

(1) Singularité effaçable. *La fonction* f *admet un (unique) prolongement en une fonction holomorphe définie sur tout le disque* $D(z_0, R)$*.*

(2) Pôle. *Il existe un entier* $k \in \mathbb{N}^*$ *et des complexes* $\beta_1, \cdots, \beta_k$ *avec* $\beta_k \neq 0$ *tels que l'application holomorphe*

$$z \in D^*(z_0, R) \mapsto f(z) - \sum_{j=1}^{k} \frac{\beta_j}{(z - z_0)^j} \in \mathbb{C}$$

présente au point z_0 *une singularité effaçable.*

(3) Point singulier essentiel. *Pour tout* $0 < r < R$*, l'image* $f(D^*(z_0, r))$ *est dense dans* $\mathbb{C}$*.*

• *La nature de la singularité isolée (effaçable, pôle ou essentielle) se lit sur le développement en série de Laurent. Si le développement de Laurent de* f *sur le disque pointé* $D^*(z_0, R)$ *s'écrit* $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$*, on a affaire à :*

(1) une singularité effaçable *lorsque* $\{n \leq -1 \mid a_n \neq 0\} = \emptyset$*, i.e. tous les* a_n*, pour* $n \leq -1$*, sont nuls.*

(2) un pôle *lorsque* $\{n \leq -1 \mid a_n \neq 0\}$ *est non vide mais fini.*

(3) un point singulier essentiel *lorsque* $\{n \leq -1 \mid a_n \neq 0\}$ *est infini.*

Remarque 8.2 On est dans le cas (1) lorsque f est bornée au voisinage de z_0, dans le cas (2) lorsque $|f(z)| \to \infty$ quand $z \to z_0$, dans le cas (3) sinon.

Dans le cas (2), l'entier k est unique – c'est l'ordre du pôle – de même que les β_j.

Arrêtons nous un instant sur le cas d'un pôle.

Lemme 8.3 *On suppose que la fonction holomorphe* f *admet au point* a *une singularité isolée.*

La fonction admet un pôle en ce point si et seulement si $|f(z)| \to +\infty$ *quand* $z \to a$*. De plus, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) La fonction f *admet en* a *un pôle d'ordre* $k \geq 1$
(ii) $1/f$ *admet en* a *une singularité effaçable et un zéro d'ordre* k *en* a
(iii) il existe une fonction holomorphe $g : D(a, R) \to \mathbb{C}$ *telle que* $g(a) \neq 0$*, et avec*

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - a)^k}\,.$$

Preuve Conséquence immédiate du théorème 8.1. □

Nous commençons la preuve du théorème 8.1 par un résultat préliminaire.

Proposition 8.4 Théorème de prolongement de Riemann
Soit $f : D^*(z_0, R) \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe définie sur un voisinage pointé de z_0. On suppose que f est bornée ou, plus généralement, que

$$|f(z)| = o(|z - z_0|^{-1})\,.$$

Alors f présente une singularité effaçable en z_0 : la fonction f se prolonge en une fonction holomorphe sur le disque $D(z_0, R)$.

Preuve Soit $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z - z_0)^n$ le développement de f en série de Laurent sur le disque pointé $D^*(z_0, R)$. Pour $0 < r < R$, on introduit $M_r(f) = \sup_{C_r(z_0)} |f|$, qui est le sup de f sur le cercle de rayon r centré en z_0. L'hypothèse faite sur f est donc que $M(r) = o(1/r)$.

On prétend que $a_n = 0$ si $n \leq -1$. En effet l'exercice 7.21 assure, pour tout rayon $0 < r < R$, l'estimation

$$|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n} = o(r^{-n-1}) \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0\,. \qquad \square$$

Preuve du théorème Supposons que nous ne soyons pas dans le dernier cas (3). Il existe $0 < r < R$ tel que l'image $f(D^*(z_0, r)) \subset \mathbb{C}$ ne soit pas dense dans $\mathbb{C}$, et évite donc un disque $D(w, \epsilon)$. On introduit la fonction

$$g : z \in D^*(z_0, r) \mapsto \frac{1}{f(z) - w} \in \mathbb{C}^*\,.$$

Par construction, la fonction g est holomorphe sur $D^*(z_0, r)$, et bornée au voisinage de z_0. Le théorème de prolongement de Riemann (proposition 8.4) assure que g se prolonge en une fonction holomorphe (que l'on notera encore g), définie sur tout $D(z_0, r)$.

Si $g(z_0) \neq 0$, il suit que la fonction f est bornée au voisinage de z_0. Le théorème de prolongement de Riemann, appliqué cette fois à f, assure que f présente en z_0 une singularité effaçable.

Si z_0 est un zéro d'ordre $k \geq 1$ pour g, il existe une fonction holomorphe $g_1 : D(z_0, R) \to \mathbb{C}$, qui ne s'annule pas en z_0, et telle que

$$g(z) = (z - z_0)^k\, g_1(z)$$

pour tout $z \in D(z_0, R)$. Soit $0 < r < R$ tel que g_1 ne s'annule pas sur $D(z_0, r)$, et introduisons la fonction $h_1(z) := 1/g_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n$, holomorphe sur $D(z_0, r)$. On a alors, pour tout $z \in D(z_0, r)$,

$$f(z) = w + \frac{1}{g(z)} = w + (z - z_0)^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n\,.$$

Le résultat suit avec $\beta_j = b_{k-j}$ $(j = 1 \cdots k)$, et donc $\beta_k = b_0 = h_1(z_0) \neq 0$. L'unicité de k et des β_j est immédiate. $\square$

Mentionnons enfin, à titre culturel, le résultat difficile suivant qui précise le comportement d'une fonction holomorphe au voisinage d'une singularité essentielle.

Théorème 8.5 Grand théorème de Picard
Soit f une fonction holomorphe sur le disque pointé $D^*(z_0, R)$ possèdant en z_0 une singularité essentielle. Deux cas se présentent :

1. *soit, pour tout $0 < r < R$, l'image $f(D^*(z_0, r))$ est $\mathbb{C}$ tout entier*
2. *soit il existe $w \in \mathbb{C}$ tel que, pour tout $0 < r < R$ assez petit, l'image $f(D^*(z_0, r))$ est $\mathbb{C} \setminus \{w\}$.*

Les fonctions $z \mapsto \sin(1/z)$ et $z \mapsto \exp(1/z)$ illustrent, au voisinage de l'origine, l'un et l'autre cas. On déduit du théorème de Picard la propriété suivante.

Corollaire 8.6 *Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe possédant une singularité isolée au point z_0. Si il existe un voisinage pointé de z_0 dont l'image par f omet deux points de $\mathbb{C}$, alors la singularité est un pôle ou bien une singularité effaçable.*

B Formule des résidus

Le théorème des résidus s'avère être un outil formidable pour calculer des intégrales de fonctions holomorphes sur des lacets. Il permet alors "en passant dans le domaine complexe" le calcul d'intégrales de fonctions de variables réelles, notamment des intégrales semi-convergentes $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt$.

La version du théorème des résidus que nous présentons ici n'est pas la plus générale (voir le chapitre 12), mais elle suffira largement pour toutes les applications.

Définition 8.7 *Soient $f : D^*(z_0, R) \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe définie sur un disque pointé, et*

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n$$

son développement en série de Laurent. Le résidu *de f en z_0 est*

$$\operatorname{Res}(f, z_0) := a_{-1} .$$

Remarque 8.8 On se souvient que le résidu a_{-1} est l'obstruction à ce que la fonction f admette une primitive sur $D^*(z_0, R)$. C'est un cas particulier de la proposition 7.20.

Il faut être capable de déterminer rapidement des résidus. Plutôt que de connaître les résultats suivants “par coeur”, il faut savoir les retrouver sans peine.

Proposition 8.9 – *Lorsque la fonction f a un pôle simple en z_0, on a l'égalité* $\mathrm{Res}\,(f, z_0) = \lim_{z\to z_0} (z - z_0)\, f(z)$.

– *Si $f = g/h$, avec g et h holomorphes et telles que g ne s'annule pas en z_0 et h admet en ce point un zéro simple, alors la fonction f a un pôle simple en z_0 et* $\mathrm{Res}\,(f, z_0) = g(z_0)/h'(z_0)$.

– *En particulier, si h a un zéro simple en z_0,* $\mathrm{Res}\,(1/h, z_0) = 1/h'(z_0)$.

– *Si f a un pôle d'ordre au plus $k \geq 1$ en z_0 et $g(z) := (z - z_0)^k f(z)$, alors* $\mathrm{Res}\,(f, z_0) = g^{(k-1)}(z_0)/(k - 1)!$

Preuve – Puisque f a un pôle simple en z_0, cette fonction admet sur un disque pointé $D^*(z_0, r)$ un développement de Laurent

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z - z_0)^n$$

et donc $\mathrm{Res}\,(f, z_0) = a_{-1} = \lim_{z\to z_0}(z - z_0)\, f(z)$.

– On a donc ici

$$\mathrm{Res}\,(f, z_0) = \lim_{z\to z_0} (z - z_0)\, f(z) = \lim_{z\to z_0} \frac{(z - z_0)\, g(z)}{(z - z_0)\, h'(z_0) + o(z - z_0)} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}\,.$$

– C'est l'assertion précédente avec $g \equiv 1$.

– Puisque f a un pôle d'ordre au plus k en z_0, la fonction g est holomorphe au voisinage de z_0. Du développement de Laurent $f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ de f en z_0, on tire le développement $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-k}(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ de g en z_0. En particulier, $g^{(k-1)}(z_0) = (k - 1)!\, b_{k-1} = (k - 1)!\, a_{-1}$. □

Exercice 8.10 Déterminer les pôles des fonctions tan, tanh, cot et coth, leur ordre ainsi que le résidu en chaque pôle.

Remarque 8.11 Pour une singularité essentielle en z_0, le calcul du résidu n'est pas aussi simple que pour les exemples précédents. Mais, dans tous les cas, la formule intégrale suivante qui ré-exprime le fait que $\mathrm{Res}\,(f, z_0)$ est l'obstruction à ce que f admette une primitive sur le disque pointé reste valable pour tout $0 < r < R$, et suit du corollaire 7.19 (cas $n = -1$) :

$$\mathrm{Res}\,(f, z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c_r(z_0)} f(z)\, dz\,.$$

Théorème 8.12 Théorème des résidus

Soient $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert étoilé et $\gamma \subset U$ un lacet tracé dans U. Soient $z_1, \cdots, z_p$ des points distincts dans $U \setminus \gamma$, et $f : U \setminus \{z_1, \cdots, z_p\} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe, présentant des singularités isolées en $z_1, \cdots, z_p$. Alors

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} f(z)\, dz = \sum_{j=1}^{p} \mathrm{Res}\,(f, z_j)\, \mathrm{Ind}\,(\gamma, z_j)\,.$$

Preuve Soit $f = g_j + H_j$ la décomposition de Laurent de f en z_j, pour $j \in \{1, \cdots, p\}$. La partie principale H_j est définie et holomorphe sur tout $\mathbb{C} \setminus \{z_j\}$ (remarque 7.17) et elle y admet un développement

$$H_j(z) = \sum_{n \geq 1} a_{-n,j} \, (z - z_j)^{-n} \,,$$

qui est normalement convergent sur le complémentaire dans $\mathbb{C}$ de tout disque centré en z_j, et donc sur le support de γ. En particulier, $\mathrm{Res}\,(f, z_j) = a_{-1,j}$.

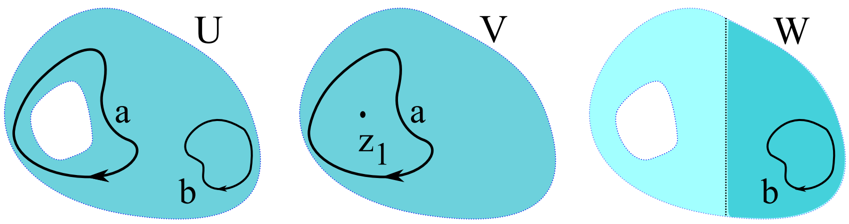
La différence $g := f - \sum_{j=1}^{p} H_j$ est bien définie sur $U \setminus \{z_1, \cdots, z_p\}$ et y est holomorphe. Cette fonction g possède en chaque z_j une singularité effaçable. Elle se prolonge donc en une fonction holomorphe sur U. Le théorème de Cauchy (corollaire 4.11) por l'ouvert étoilé U assure que $\int_\gamma g(z)\, dz = 0$. Il suit de la remarque 8.8 que

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \sum_{j=1}^{p} \int_\gamma H_j(z) = \sum_{j=1}^{p} a_{-1,j} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_j} = 2i\pi \sum_{j=1}^{p} a_{-1,j} \mathrm{Ind}\,(\gamma, z_j)\,,$$

ce qu'on voulait □

Remarque 8.13 Soit un ouvert $U \subset \mathbb{C}$ qui, comme dans le dessin de gauche, possède un "trou". Cet ouvert n'est pas étoilé.

Soit a un lacet qui fait le tour du trou. Le résultat du théorème des résidus peut être mis en défaut sur ce lacet : considérer par exemple une fonction holomorphe $f : U \to \mathbb{C}$ qui se prolonge à l'ouvert V (obtenu en "bouchant le trou") en une fonction possédant une singularité isolée au point $z_1 \in V \setminus U$!



Le théorème des résidus s'applique cependant au lacet $b \subset U$: il suffit en effet de se restreindre à l'ouvert étoilé $W \subset U$ qui contient b.

Nous reviendrons au chapitre 12 sur le théorème des résidus, donc nous présenterons un énoncé valable sur un ouvert quelconque $U \subset \mathbb{C}$ (théorème 12.12).

Cependant, l'énoncé 8.12 sera suffisant pour l'essentiel des applications (quitte, comme on l'a vu ci-dessus, à préciser un ouvert restreint sur lequel on applique ce théorème).

Exercice 8.14 Retrouver, comme cas particulier du théorème des résidus, les formules de Cauchy (7.1) et (7.2).

C Fonctions méromorphes

Les fonctions méromorphes ont des singularités isolées, qui sont toutes des pôles. La terminologie vient du grec ὅλος (entier) et μέρος (partie). Une fonction *holo*morphe sur l'ouvert U est définie et régulière sur tout U. Une fonction *méro*morphe n'est définie que sur une partie de U.

La notion de fonction méromorphe généralise celle de fraction rationnelle. Ces dernières sont des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$ tout entier.

Définition 8.15 *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. Une fonction f est dite méromorphe sur U lorsqu'il existe une partie $P \subset U$ telle que :*

1. *$P \subset U$ est une partie fermée de U, et discrète*
2. *la fonction f est définie et holomorphe sur $U \setminus P$*
3. *la fonction f admet un pôle en chaque point de P.*

Remarque 8.16 – On autorise $P = \emptyset$. Une fonction holomorphe sur U est donc également méromorphe.
– L'ensemble P n'a pas de point d'accumulation dans U (il peut cependant s'accumuler sur le bord de U). Il rencontre chaque compact de U selon un ensemble fini, et il est fini ou dénombrable.

Exemple 8.17 – *Les fractions rationnelles R/Q, où $R, Q \in \mathbb{C}[z]$ sont des fonctions polynomiales avec Q non identiquement nulle, sont méromorphes sur $\mathbb{C}$.*

– Plus généralement, tout quotient g_1/g_2, où g_1 et g_2 sont holomorphes sur U et g_2 n'est pas identiquement nulle (sur aucune composante connexe de U) est méromorphe sur U.

Proposition 8.18 *L'ensemble $\mathcal{M}(U)$ des fonctions méromorphes sur U est stable par addition, multiplication par un scalaire, multiplication interne et dérivation.*

Lorsque l'ouvert U est connexe, l'inverse d'une fonction méromorphe non identiquement nulle est encore méromorphe : $\mathcal{M}(U)$ est alors un corps.

Remarque 8.19 – On peut démontrer, mais nous n'en sommes pas encore là, qu'une fonction méromorphe sur U s'écrit toujours comme le quotient de deux fonctions holomorphes sur cet ouvert (voir le corollaire 10.17 lorsque $U = \mathbb{C}$).
– En particulier, lorsque U est connexe, $\mathcal{M}(U)$ est le corps des fractions de l'anneau $\mathcal{H}(U)$ des fonctions holomorphes sur U (dont nous avons déjà remarqué qu'il est intègre, voir 6.14).

C.1 Compter les zéros et les pôles

Nous voulons maintenant notamment déterminer le nombre de zéros, dans un disque, d'une fonction holomorphe. Les zéros (ou les pôles) doivent être comptés avec multiplicité. Il est naturel qu'un zéro d'ordre n (on parle aussi de multiplicité) doive compter comme n zéros simples. Par exemple, le polynôme $P_\varepsilon(z) = z^2 - \varepsilon$ a deux zéros simples lorsque $\varepsilon \neq 0$ et ces deux zéros deviennent lorsque $\varepsilon \to 0$ un seul même zéro, qui est alors d'ordre 2, pour le polynôme $P_0(z) = z^2$.

Proposition 8.20 Principe de l'argument
Soient $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert, f une fonction méromorphe sur U, et $\overline{D(z_0, r)} \subset U$ un disque fermé inclus dans U. On suppose que f n'a ni zéros ni pôles sur le cercle $|z - z_0| = r$. Notons $c_r : t \in [0, 2\pi] \mapsto z_0 + re^{it} \in U$. Alors

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{c_r} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \mathcal{Z}(f) - \mathcal{P}(f)\,,$$

où $\mathcal{Z}(f)$ et $\mathcal{P}(f)$ désignent respectivement le nombre de zéros et le nombre de pôles de f, comptés avec multiplicité, dans le disque $\overline{D(z_0, r)}$.

Remarque 8.21 Observer l'égalité

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{c_r} \frac{f'}{f} = \frac{1}{2i\pi} \int_{f \circ c_r} \frac{dz}{z} = \operatorname{Ind}(f \circ c_r, 0)\,.$$

Cette intégrale compte donc le nombre de tours que le lacet $f \circ c_r$ fait autour de l'origine, d'où l'étiquette "principe de l'argument".

Ce résultat découlera facilement du théorème des résidus, une fois le lemme suivant acquis.

Lemme 8.22 *Soit f une fonction méromorphe non identiquement nulle sur l'ouvert connexe U. Le quotient f'/f est une fonction méromorphe dont les pôles, qui sont tous simples, sont exactement les pôles et les zéros de f avec, pour $k \in \mathbb{N}^*$:*
- *si z_0 est un zéro d'ordre k de f,* $\operatorname{Res}(f'/f, z_0) = k$
- *si z_0 est un pôle d'ordre k de f,* $\operatorname{Res}(f'/f, z_0) = -k$.

Preuve Le quotient f'/f est holomorphe sur l'ouvert $U \setminus (Z \cup P)$ privé de la réunion des zéros $Z \subset U$ et des pôles $P \subset U$ de f. Par définition d'une fonction méromorphe et le principe des zéros isolés, $Z \cup P$ est un fermé discret de U. Au voisinage d'un zéro ou d'un pôle z_0 de f, on a $f(z) = (z - z_0)^k g(z)$ où $k \in \mathbb{Z}^*$ et g est holomorphe telle que $g(z_0) \neq 0$. On a donc $(f'/f)(z) = k(z - z_0)^{-1} + (g'/g)(z)$, avec g'/g holomorphe au voisinage de z_0. □

Preuve de la proposition 8.20 Conséquence immédiate du théorème des résidus, appliqué à la fonction f'/f sur un disque (étoilé) $D(z_0, r+\varepsilon) \subset U$, et du lemme 8.22, puisque l'indice $\mathrm{Ind}\,(c_r, a)$ vaut 1 lorsque $a \in D(z_0, r)$, et 0 si $a \notin \overline{D(z_0, r)}$. □

Remarque 8.23 – Lorsque f est une fonction holomorphe, l'expression précédente compte simplement le nombre de zéros de f dans le disque.

– D'après le corollaire 6.7, et la définition d'une fonction méromorphe, la fonction f a un nombre fini de zéros et de pôles dans le compact $\overline{D(z_0, r)}$.

On va maintenant chercher à comparer le nombre de zéros de deux fonctions holomorphes proches.

Corollaire 8.24 Théorème de Rouché

Soient f_1, f_2 deux fonctions méromorphes sur l'ouvert U. Soit $\overline{D(z_0, r)} \subset U$ un disque fermé. On suppose que f_1 et f_2 n'ont ni zéros ni pôles sur le cercle $\{|z - z_0| = r\}$, et qu'elles vérifient

$$|f_1 - f_2| < |f_1| \quad \textit{sur le cercle } \{|z - z_0| = r\}. \tag{8.1}$$

Alors on a l'égalité

$$\mathcal{Z}(f_1) - \mathcal{P}(f_1) = \mathcal{Z}(f_2) - \mathcal{P}(f_2)\,,$$

où $\mathcal{Z}(f_i)$ et $\mathcal{P}(f_i)$ désignent respectivement le nombre de zéros et le nombre de pôles de la fonction f_i, comptés avec multiplicité, dans le disque $D(z_0, r)$.

Remarque 8.25 Lorsque les fonctions considérées sont holomorphes, le théorème de Rouché affirme que si f_1 et f_2 sont proches sur le cercle (i.e. f_2 est une "petite" perturbation de f_1), alors f_1 et f_2 ont le même nombre de zéros dans le disque, comptés avec multiplicité. Revenir sur la famille d'exemples $P_\varepsilon(X) = X^2 - \varepsilon$ (pour ε, réel ou complexe, proche de 0) évoquée plus haut.

On commence par un lemme géométrique.

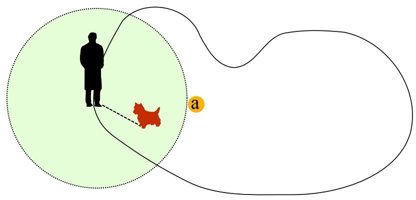
Lemme 8.26 du chien

Soient $a \in \mathbb{C}$ et deux lacets $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{a\}$ évitant le point a. On suppose que, pour tout $t \in [0,1]$, on a

$$|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)| < |\gamma_1(t) - a|\,. \tag{8.2}$$

Alors

$$\mathrm{Ind}\,(\gamma_1, a) = \mathrm{Ind}\,(\gamma_2, a)\,.$$



Penser que γ_2 est la trajectoire du chien, et γ_1 celle de son maître qui tourne autour de l'arbre a

Preuve On introduit le quotient

$$h : t \in [0,1] \mapsto \frac{\gamma_2(t) - a}{\gamma_1(t) - a} \in \mathbb{C}\,,$$

et il suit de (8.2) que

$$|h(t) - 1| = \left|\frac{\gamma_1(t) - \gamma_2(t)}{\gamma_1(t) - a}\right| < 1\,.$$

L'application h est un lacet et, puisque son image est incluse dans le disque ouvert $D(1,1)$, on a $\mathrm{Ind}\,(h,0) = 0$. De l'égalité

$$\frac{h'}{h} = \frac{\gamma_2'}{\gamma_2 - a} - \frac{\gamma_1'}{\gamma_1 - a}$$

suit la relation $0 = \mathrm{Ind}\,(h,0) = \mathrm{Ind}\,(\gamma_2, a) - \mathrm{Ind}\,(\gamma_1, a)$, ce qu'on voulait. □

Preuve du corollaire 8.24

Soient $c_r : t \in [0, 2\pi] \mapsto z_0 + re^{it} \in \mathbb{C}$, et les lacets $\gamma_1 = f_1 \circ c_r$ et $\gamma_2 = f_2 \circ c_r$. La condition (8.1) assure que $|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)| < |\gamma_1(t)|$ pour tout $t \in [0, 2\pi]$. Le lemme 8.26 montre donc que $\mathrm{Ind}\,(\gamma_1, 0) = \mathrm{Ind}\,(\gamma_2, 0)$, ce qu'on voulait (remarque 8.21). □

C.2 Séries de fonctions méromorphes

Nous souhaitons maintenant étudier les séries de fonctions méromorphes.

Définition 8.27 Séries de fonctions méromorphes
Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions méromorphes sur U. On dit que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} h_n$ converge uniformément sur les compacts de U si, pour tout compact $K \subset U$, il existe un entier $n(K) \in \mathbb{N}$ tel que

— *pour tout $n \geq n(K)$, la fonction h_n ne présente pas de pôle sur K*
— *la série $\sum_{n \geq n(K)} h_n$ est uniformément convergente sur K.*

Attention, une "série de fonctions méromorphes qui converge uniformément"... ne converge pas uniformément au sens usuel. Bien lire la définition.

Proposition 8.28 *Soient $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des fonctions méromorphes sur U.*

On suppose que la série de fonctions méromorphes $\sum_{n\in\mathbb{N}} h_n$ converge uniformément sur les compacts de U. Alors, la somme $h = \sum_{n\in\mathbb{N}} h_n$ est une fonction méromorphe sur U et l'on peut dériver terme à terme, i.e. $h' = \sum_{n\in\mathbb{N}} h_n'$.

L'ensemble $P(h)$ des pôles de h est inclus dans la réunion $\cup_{n\in\mathbb{N}} P(h_n)$ des ensembles des pôles des h_n.

Remarque 8.29 Ainsi, si $V \subset U$ est un ouvert relativement compact dans U, on peut mettre de côté les premiers termes de la série : ils donnent lieu à une somme finie de fonctions méromorphes (qui sont donc potentiellement non bornées sur V), dont la somme est méromorphe. Le reste de la série est alors constitué de fonctions qui sont toutes holomorphes sur V, avec convergence normale sur V : la somme sera holomorphe.

Preuve La propriété à démontrer est locale. Soit $z_0 \in U$. On peut donc par exemple se restreindre à un disque ouvert $D := D(z_0, r)$ d'adhérence $K := \overline{D(z_0, r)} \subset U$. Nous conservons les notations de la définition précédente. En restriction à D, on décompose la somme $h = \sum_{n<n(K)} h_n + \sum_{n \geq n(K)} h_n$.

Le premier terme est une somme finie de fonctions méromorphes, que l'on peut dériver terme à terme. Le second est, en restriction à D, une série uniformément convergente de fonctions holomorphes. Le résultat suit donc du théorème 5.12 sur les suites de fonctions holomorphes. □

Exercice 8.30 Montrer que la série (11.1) qui définit la fonction de Weierstrass $\wp$ est une série de fonctions méromorphes, uniformément convergente sur les compacts, et qu'on peut donc la dériver terme à terme (11.3).

9. Automorphismes

Dans ce chapitre de nature géométrique, nous nous intéresserons à la structure “conforme” d'un ouvert de $\mathbb{C}$, c'est-à-dire aux propriétés de cet ouvert muni de la structure complexe qu'il hérite de $\mathbb{C}$. Nous reviendrons sur ces considérations au chapitre 13, avec le théorème de représentation conforme, bien plus profond.

Définition 9.1 *Un automorphisme d'un ouvert $U \subset \mathbb{C}$ est une application $f : U \to U$ bijective et biholomorphe. L'ensemble* $\operatorname{Aut} U$ *des automorphismes de U forme un groupe pour la composition.*

A Automorphismes de $\mathbb{C}$

On commence par un résultat préliminaire, qui peut être intéressant dans d'autres contextes. La proposition suivante va suivre facilement de l'étude des singularités isolées d'une fonction holomorphe.

Proposition 9.2 *Soit $f : D^*(a, R) \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe définie sur un disque pointé. On suppose que f est injective. Alors*

- *soit f possède en a une singularité effaçable ; dans ce cas $f'(a) \neq 0$*
- *soit f présente un pôle simple au point a.*

Preuve Supposons en premier lieu que f admette en a une singularité effaçable. Puisque f est injective, il résulte de la structure locale d'une application holomorphe (remarque 6.21 ou preuve du corollaire 6.24) que $f'(a) \neq 0$.

Supposons ensuite que f admette en a un pôle d'ordre k. L'application $z \in D^*(a, r) \mapsto 1/f(z) \in \mathbb{C}$ (définie et holomorphe pour $0 < r \leq R$ assez petit) est injective, comme f, et admet en a une singularité effaçable. Il résulte de la discussion précédente que a est un zéro simple de $1/f$, et donc que f présente en a un pôle d'ordre 1.

Supposons enfin, par l'absurde, que f admette une singularité essentielle en a. Puisque l'application f est injective, elle n'est pas constante, donc elle est ouverte (corollaire 6.22). L'image de la couronne $\{0 < |z - a| < R/2\}$ est dense et rencontre donc l'ouvert non vide $f(\{R/2 < |z - a| < R\})$: une contradiction avec l'injectivité de f. $\square$

On en déduit le résultat suivant.

Théorème 9.3 *Le groupe* $\mathrm{Aut}\,\mathbb{C}$ *des automorphismes de* $\mathbb{C}$ *est l'ensemble des applications*

$$z \in \mathbb{C} \mapsto \alpha z + \beta \in \mathbb{C}\,,$$

avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$ *et* $\beta \in \mathbb{C}$.

Autrement dit, les automorphismes de $\mathbb{C}$ sont les applications affines (sur le corps $\mathbb{C}$) bijectives de la droite complexe dans elle-même.

Preuve Chaque application $z \in \mathbb{C} \mapsto \alpha z + \beta \in \mathbb{C}$, pour $\alpha \in \mathbb{C}^*$, est bien un automorphisme de $\mathbb{C}$.

Soit maintenant $f \in \mathrm{Aut}\,\mathbb{C}$. On va examiner le comportement de f à l'infini. Pour ce faire, on utilise le changement de variable $z \in \mathbb{C}^* \mapsto 1/z \in \mathbb{C}^*$ pour se ramener en l'origine.

On étudie donc le comportement en l'origine de la fonction holomorphe $g : w \in \mathbb{C}^* \mapsto f(1/w) \in \mathbb{C}$. Puisque g est injective, comme f, la proposition précédente nous dit que g présente en l'origine une singularité effaçable, ou bien un pôle d'ordre 1. Dans le premier cas, g est bornée au voisinage de 0, donc f est bornée au voisinage de l'infini et il suit du théorème de Liouville 5.6 que f est constante, ce qui est exclu.

Ainsi g a un pôle en l'origine, qui est simple puisque g est injective. La fonction $w \mapsto w\,g(w)$ est donc bornée au voisinage de l'origine. En revenant à la fonction f, cela nous dit que le quotient $z \mapsto f(z)/z$ est borné au voisinage de l'infini, ou encore que f est à croissance sous-linéaire. Le résultat de l'exercice 5.7 affirme alors que f est une fonction polynomiale de degré au plus 1. $\square$

Par contraste, il y a "infiniment plus" (☺) de difféomorphismes $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

B Automorphismes du disque

Nous allons maintenant déterminer les automorphismes du disque unité $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}\,,\ |z| < 1\}$.

L'essentiel de la preuve passe par le résultat fondamental suivant, dont l'intérêt dépasse largement l'étude de $\mathrm{Aut}\,(\mathbb{D})$.

Théorème 9.4 Lemme de Schwarz

Soit $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ *une fonction holomorphe telle que* $f(0) = 0$. *Alors*

1. $|f'(0)| \leq 1$, *et on a* $|f(z)| \leq |z|$ *pour tout* $z \in \mathbb{D}$ *;*
2. *l'égalité* $|f'(0)| = 1$ *a lieu :*
   - *si et seulement si il existe* $z_0 \in \mathbb{D}$ *non nul avec* $|f(z_0)| = |z_0|$
   - *si et seulement si il existe* $\lambda \in \mathbb{C}$ *avec* $|\lambda| = 1$ *tel que* $f(z) = \lambda z$
   - *si et si seulement si* f *est un automorphisme du disque.*

Preuve Le lemme de Schwarz sera conséquence du principe du maximum.

1. Puisque f s'annule en l'origine, la fonction $g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ définie par $g(z) = f(z)/z$ lorsque $z \neq 0$ et $g(0) = f'(0)$ est continue sur le disque et holomorphe hors de l'origine, donc holomorphe sur le disque (observer que f admet sur $\mathbb{D}$ un développement en série entière $f(z) = f'(0)\, z + \sum_{n\geq 2} a_n z^n$).

Puisque f est à valeurs dans le disque $\mathbb{D}$, on a $|f(z)| < 1$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. Soient $z \in \mathbb{D}$ et $0 < r < 1$ tel que $z \in \overline{D(0,r)}$. Le principe du maximum 6.13 appliqué à la fonction g sur le disque $\overline{D(0,r)} \subset \mathbb{D}$ montre que

$$|\frac{f(z)}{z}| = |g(z)| \leq \sup_{|w|=r} |g(w)| \leq 1/r\,.$$

En faisant tendre r vers 1, on obtient que $|f(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$, ainsi que $|f'(0)| = |g(0)| \leq 1$.

2. Si f est une homothétie de rapport λ avec $|\lambda| = 1$, les autres propriétés sont vérifiées.

Si $|f'(0)| = 1$, ou bien si il existe $z_0 \in \mathbb{D}$ non nul avec $|f(z_0)| = |z_0|$, cela signifie que la fonction $|g|$ (où g est définie ci-dessus) atteint son maximum (qui vaut alors 1) en un point du disque. La fonction holomorphe g est donc constante, égale à λ avec $|\lambda| = 1$.

Si on suppose maintenant que $f \in \operatorname{Aut}\mathbb{D}$ est un automorphisme du disque tel que $f(0) = 0$. D'après le (1), on a $|f'(0)| \leq 1$. La même conclusion vaut pour l'application réciproque f^{-1}. On a donc

$$|(f^{-1})'(0)| = |1/f'(0)| \leq 1\,,$$

et finalement $|f'(0)| = 1$. □

Le lemme de Schwarz nous a permis de décrire les automorphismes du disque qui fixent l'origine : ce sont les rotations $z \in \mathbb{D} \mapsto e^{i\theta} z \in \mathbb{D}$ où $e^{i\theta} \in \mathbb{S}^1$ décrit l'ensemble des complexes de module 1.

Nous allons maintenant construire des automorphismes du disque qui envoient un point quelconque $a \in \mathbb{D}$ sur l'origine. Ceci permettra de compléter la description de $\operatorname{Aut}\mathbb{D}$.

Lemme 9.5 *Soit $a \in \mathbb{D}$. L'application*

$$h_a : z \in \mathbb{D} \mapsto \frac{a - z}{1 - \overline{a}z} \in \mathbb{D}$$

est un automorphisme du disque tel que $h_a(a) = 0$ et $h_a(0) = a$.

Preuve Si $a = 0$, $h_a = -\mathrm{Id}$ est effectivement un automorphisme du disque. Supposons donc $a \in \mathbb{D}$ avec $a \neq 0$. Considérons l'application homographique

$$k_a : z \in \mathbb{C} \setminus \{1/\overline{a}\} \mapsto \frac{a - z}{1 - \overline{a}z} \in \mathbb{C} \setminus \{1/\overline{a}\}\,.$$

Puisque $|a| < 1$, le domaine de définition $\mathbb{C} \setminus \{1/\overline{a}\}$ de k_a contient le disque fermé $\overline{\mathbb{D}} = \{|z| \leq 1\}$. On observe que k_a est une involution, i.e. $k_a^2 = \mathrm{Id}$, ce qui résulte d'un calcul élémentaire que nous laissons au lecteur.

De plus, l'application k_a envoie le cercle unité sur lui-même. En effet on a pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$|h_a(e^{it})| = \frac{|a - e^{it}|}{|1 - \overline{a}e^{it}|} = \frac{|a - e^{it}|}{|e^{-it} - \overline{a}|} = 1\,.$$

Le principe du maximum (corollaire 6.13) montre donc que $k_a(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$.

L'application $h_a : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ obtenue par restriction de k_a est donc bien définie, et involutive. Elle est donc injective et surjective. □

Le lecteur familier avec la géométrie projective peut remarquer que $k_a^2 : \mathrm{P}^1\mathbb{C} \to \mathrm{P}^1\mathbb{C}$ étant une homographie qui fixe les trois points 0, a et ∞, c'est donc l'application Id.

Nous savons maintenant décrire tous les automorphismes du disque.

Corollaire 9.6 *Le groupe* $\mathrm{Aut}\,\mathbb{D}$ *est l'ensemble des applications*

$$h_{a,\lambda} : z \in \mathbb{D} \mapsto \lambda\,\frac{a - z}{1 - \overline{a}z} \in \mathbb{D}\,,$$

avec $a \in \mathbb{D}$ *et* $|\lambda| = 1$. *Le groupe* $\mathrm{Aut}\,\mathbb{D}$ *agit transitivement sur le disque.*

Preuve Il résulte du lemme 9.5 que chaque application $h_{a,\lambda} = j_\lambda \circ h_a$, pour $|\lambda|$ de module 1 et $a \in \mathbb{D}$, est bien un automorphisme du disque.

Soit maintenant $f \in \mathrm{Aut}\,\mathbb{D}$. Il existe un unique point $a \in \mathbb{D}$ pour lequel $f(a) = 0$. Introduisons alors $g = f \circ h_a$. Par composition, g est maintenant un automorphisme du disque qui fixe l'origine. Le lemme de Schwarz 9.4 nous assure de l'existence de $\lambda \in \mathbb{C}$ de module 1 pour lequel $g = j_\lambda$. On a donc $f = j_\lambda \circ h_a$ comme annoncé. □

Remarque 9.7 – Les automorphismes du disque sont tous des applications homographiques.
– Dire que le groupe $\mathrm{Aut}\,\mathbb{D}$ agit transitivement sur le disque, c'est dire que d'un point de vue holomorphe tous les points du disque se valent. On parle alors d'espace homogène.

Soit $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une application holomorphe qui fixe l'origine.

Munissons $\mathbb{D}$ de la distance euclidienne. Le lemme de Schwarz affirme que : soit f est une rotation, soit f rapproche tout le monde (strictement) de l'origine. Cela dit, la distance euclidienne n'est pas la bonne distance à considérer dans ce contexte.

On peut vérifier que l'expression

$$d_P(z_1, z_2) = \tanh^{-1} \frac{|z_1 - z_2|}{|1 - \overline{z_1} z_2|}$$

définit une distance sur $\mathbb{D}$, qui est invariante sous l'action du groupe $\operatorname{Aut}\mathbb{D}$. Cette distance admet une définition géométrique : c'est infiniment plus joli et plus satisfaisant, mais cela nous entraînerait trop loin.

La distance d_P est la “distance de Poincaré” (encore appelée “distance hyperbolique”) sur $\mathbb{D}$. On peut montrer que les isométries de $(\mathbb{D}, d_P)$ sont les automorphismes du disque, ou les anti-automorphismes (c'est-à-dire les applications obtenues comme composées d'un automorphisme de $\mathbb{D}$ et de l'application $z \in \mathbb{D} \mapsto \bar{z} \in \mathbb{D}$).

Le lemme de Schwarz-Pick est une version $\operatorname{Aut}\mathbb{D}$ invariante du lemme de Schwarz. Il affirme qu'une application holomorphe $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ n'augmente pas les distances hyperboliques : pour tout couple z_1, z_2 de points du disque, on a l'inégalité $d_P(f(z_1), f(z_2)) \leq d_P(z_1, z_2)$. De plus, si il y a égalité pour un couple de points $z_1 \neq z_2$ du disque, l'application f est une isométrie du disque hyperbolique $(\mathbb{D}, d_P)$.

C La sphère de Riemann

Une singularité isolée z_0 d'une fonction holomorphe f est un pôle lorsque $|f(z)| \to \infty$ quand $z \to z_0$. Pour étudier f au voisinage de ce pôle, nous avons introduit la fonction $g = 1/f$ pour nous ramener à étudier une fonction holomorphe au voisinage d'un zéro (proposition 9.2). Dans ce chapitre, nous faisons rentrer ce procédé dans un cadre géométrique.

C.1 Compactification de $\mathbb{C}$

On commence par adjoindre au plan $\mathbb{C}$ un unique point “à l'infini” que nous noterons ∞, et munir l'espace $\mathcal{S} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ainsi obtenu d'une topologie naturelle qui en fera un espace compact homéomorphe à la sphère. Si f est une fonction méromorphe sur l'ouvert U, et si on note $P \subset U$ l'ensemble de ses pôles, la fonction f se prolongera par continuité en une fonction “méromorphe” $\tilde{f} : U \to \mathcal{S} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ pour laquelle $\tilde{f}(p) = \infty$ en tout pôle $p \in P$, et qui sera maintenant définie sur tout U.

Définition 9.8 *On note $\mathcal{S} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ l'espace obtenu en adjoignant à $\mathbb{C}$ un unique point noté ∞. On munit $\mathcal{S}$ de la topologie pour laquelle une partie $\Omega \subset \mathcal{S}$ est ouverte si et seulement si*

— *soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ est un ouvert de $\mathbb{C}$*

— *soit Ω contient le point ∞, et $\mathcal{S} \setminus \Omega$ est un compact de $\mathbb{C}$.*

On vérifie facilement que l'on définit ainsi une topologie sur $\mathcal{S}$ (l'ensemble vide et $\mathcal{S}$ sont des ouverts, une union quelconque ou une intersection finie d'ouverts sont ouverts).

Par construction, cette topologie induit sur $\mathbb{C}$ sa topologie usuelle. Une base de voisinages de ∞ est constituée des ouverts

$$\Omega_n = \{z \in \mathbb{C}\ ,\ |z| > n\} \cup \{\infty\} \subset \mathcal{S}\ :$$

il faut donc penser géométriquement que l'on a rajouté un point à $\mathbb{C}$, et que ce point se trouve dans le complémentaire de tous les disques $\overline{D(0,n)}$, c'est-à-dire “à l'infini”. Cette topologie est séparée : on vérifie en effet facilement que deux points distincts de $\mathcal{S}$ admettent des voisinages disjoints.

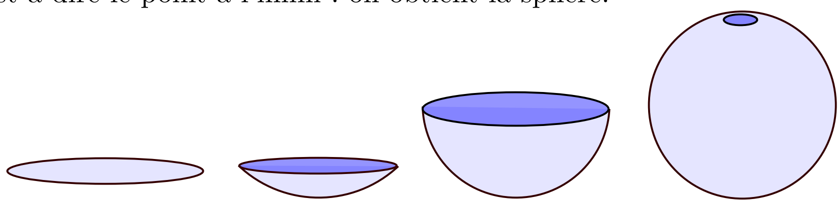
Comme nous allons le voir, cette topologie n'est pas mystérieuse : elle fait de $\mathcal{S}$ un espace homéomorphe à une sphère (et donc métrisable).

Proposition 9.9 *L'espace topologique $\mathcal{S} = \mathbb{C} \cup \infty$ est homéomorphe à la sphère euclidienne $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$.*

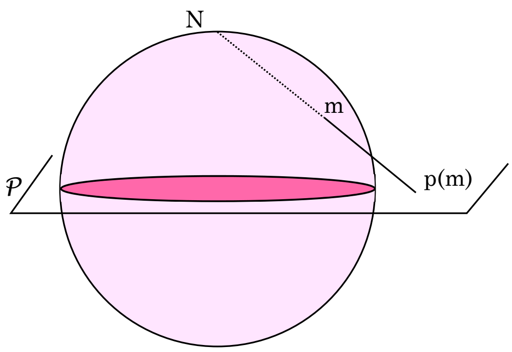
En particulier, $\mathcal{S}$ est un espace métrisable compact. L'injection naturelle $i : \mathbb{C} \to \mathcal{S}$ est un homéomorphisme sur son image $\mathcal{S} \setminus \{\infty\}$.

On identifiera alors systématiquement $\mathbb{C}$ et son image $i(\mathbb{C}) = \mathcal{S} \setminus \{\infty\}$.

Avant de démontrer cette proposition, convainquons nous intuitivement du résultat. Le plan est homéomorphe à un disque, donc à une soucoupe, ou à un bol, et finalement à un ballon sans sa valve. Rajoutons la valve, c'est-à-dire le point à l'infini : on obtient la sphère.



Preuve Soient $\mathbb{S}^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^3$ euclidien, et $N = (0,0,1)$ le pôle nord. On introduit le plan équatorial $\mathcal{P} = \{(x,y,0)\} \subset \mathbb{R}^3$, que l'on identifie naturellement à $\mathbb{C}$ par l'application $(x,y,0) \in \mathcal{P} \overset{\simeq}{\longmapsto} x+iy \in \mathbb{C}$.



La projection stéréographique

$$p : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \to \mathcal{P} \simeq \mathbb{C}$$

associe à tout point $m \in \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ le point d'intersection de la droite Nm et du plan $\mathcal{P}$. Pour $m = (x,y,z) \in \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$, on a donc

$$p(x,y,z) = (\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}, 0) \simeq \frac{x+iy}{1-z}\,.$$

L'application p réalise un homéomorphisme entre $\mathbb{S}^2\setminus\{N\}$ et $\mathbb{C}$, d'inverse

$$p^{-1}(a+ib)=\Big(\frac{2a}{a^2+b^2+1},\frac{2b}{a^2+b^2+1},\frac{a^2+b^2-1}{a^2+b^2+1}\Big)\,.$$

On vérifie facilement que p se prolonge par continuité, en posant $\tilde{p}(N)=\infty$, en un homéomorphisme $\tilde{p}:\mathbb{S}^2\to\mathcal{S}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$. □

Exercice 9.10 Montrer que si, par une construction semblable, on rajoute un (un seul!) point à l'infini à la droite réelle $\mathbb{R}$, on obtient un espace topologique $\mathbb{R}\cup\infty$ qui est homéomorphe au cercle $\mathbb{S}^1$.

Remarque 9.11 La construction de la définition 9.8 se généralise à un espace topologique localement compact X, et fournit un espace compact qui est le compactifié d'Alexandrov de X.

Le compactifié d'Alexandrov de $\mathbb{R}^n$, pour $n\geq 1$, est la sphère $\mathbb{S}^n$.

C.2 Structure complexe sur $\mathcal{S}$

A ce stade une fonction méromorphe f sur U se prolonge par continuité, en associant à chaque pôle de f la valeur ∞, en une fonction $\hat{f}:U\to\mathcal{S}$ qui est maintenant définie sur tout U et à valeurs dans $\mathcal{S}=\mathbb{C}\cup\infty$, et dont on dira encore qu'elle est méromorphe.

Définition 9.12 *Soit $U\subset\mathbb{C}$ un ouvert. Une fonction continue $\hat{f}:U\to\mathcal{S}$ est méromorphe lorsqu'il existe une partie fermée et discrète $P\subset U$ telle que la restriction $f:U\setminus P\to\mathbb{C}$ de $\hat{f}$ soit holomorphe, et possède un pôle en chaque point de P (on a donc $f(p)=\infty$ si et seulement si $p\in\mathcal{P}$).*

On a ainsi identifié les fonctions f méromorphes sur U, et les fonctions méromorphes $\hat{f}:U\to\mathcal{S}$. Une fois que cela est dit, on ne s'embarrasse plus de notations et l'on confond les fonctions f et $\hat{f}$.

On ne va pas s'en tenir là ! Nous allons maintenant définir ce qu'est une fonction méromorphe définie sur un ouvert de $\mathcal{S}=\mathbb{C}\cup\infty$. Autrement dit, nous allons munir $\mathcal{S}$ d'une “structure complexe”. Comment faire ?

Nous avons vu qu'une fonction méromorphe $f:D(z_0,r)\to\mathcal{S}$ possède un pôle en z_0 si et seulement si la fonction $1/f:D(z_0,r)\to\mathcal{S}$ s'annule en z_0 : en introduisant la fonction $1/f$, nous faisons intervenir l'involution $j:w\in\mathbb{C}^*\mapsto 1/w\in\mathbb{C}^*$ pour échanger, dans l'espace d'arrivée, ce qui se passe au voisinage de l'infini (la nouveauté) et ce qui se passe au voisinage de l'origine (la routine). Dans la définition 9.14, nous allons jouer le même jeu, mais cette fois-ci dans l'espace de départ.

Lemme 9.13 *L'application $j:w\in\mathbb{C}^*\mapsto 1/w\in\mathbb{C}^*$ est un biholomorphisme de $\mathbb{C}^*$. Cette application se prolonge en un homéomorphisme de $\mathcal{S}$, encore noté $j:\mathcal{S}\to\mathcal{S}$, en posant $j(0)=\infty$ et $j(\infty)=0$.*

Preuve Immédiat. □

Définition 9.14 *Soit $\Omega \subset \mathcal{S}$ un ouvert. Une application $f : \Omega \to \mathcal{S}$ est méromorphe lorsque*

(1) *la restriction de f à l'ouvert $\Omega \cap \mathbb{C} \subset \mathbb{C}$ est méromorphe ;*

(2) *lorsque $\infty \in \Omega$ avec $A(R, \infty) \subset \Omega$, la fonction méromorphe définie sur le disque pointé par*

$$\tilde{f} : w \in D^*(0, 1/R) \mapsto f(1/w) \in \mathcal{S}$$

possède un pôle ou bien une singularité effaçable en l'origine.

Exercice 9.15

1. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que la fonction $p_n : z \in \mathbb{C}^* \mapsto z^n \in \mathbb{C}^*$ se prolonge en une fonction méromorphe $\hat{p}_n : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$.
2. Soient $P, Q \in \mathbb{C}[Z]$ deux polynômes avec $Q \not\equiv 0$. Montrer que la fraction rationnelle P/Q se prolonge en une fonction méromorphe $R : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$.

Définition 9.16 *La sphère $\mathcal{S}$, munie de la structure complexe ainsi définie, est appelé sphère de Riemann.*

Remarque 9.17 Il suit de ces définitions que les propriétés locales qui sont satisfaites par les fonctions holomorphes $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sont également satisfaites par les fonctions méromorphes $f : \Omega \subset \mathcal{S} \to \mathcal{S}$: principe des zéros isolés 6.7, théorème de l'application ouverte 6.22, modèle local pour une fonction méromorphe 6.20...

C.3 Fonctions définies au voisinage de l'infini dans $\mathbb{C}$

Un anneau $A(R, \infty)$ est un voisinage pointé de ∞ dans $\mathcal{S}$.

Définition 9.18 *La fonction holomorphe $f : A(R, \infty) \to \mathbb{C}$ a, à l'infini :*

(1) *une singularité effaçable*
(2) *un pôle*
(3) *une singularité essentielle*

quand la fonction holomorphe $\tilde{f} : w \in D^*(0, 1/R) \mapsto f(1/w) \in \mathbb{C}$ admet une singularité effaçable, un pôle ou bien une singularité essentielle en l'origine.

On a bien évidemment les équivalences suivantes.

Lemme 9.19 *La fonction holomorphe $f : A(R, \infty) \to \mathbb{C}$ possède au point $\infty \in \mathcal{S}$ une singularité effaçable ou un pôle lorsqu'elle se prolonge en une fonction méromorphe $f : \Omega \to \mathcal{S}$ sur l'ouvert $\Omega = A(R, \infty) \cup \infty \subset \mathcal{S}$ (avec $f(\infty) \in \mathbb{C}$ dans le premier cas, et $f(\infty) = \infty$ dans le second). On dit alors que f est méromorphe à l'infini.*

Exemple 9.20 – Un polynôme de degré $n \geq 1$, soit $P : z \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ avec $a_n \neq 0$ a donc un pôle d'ordre n en l'infini, puisque $\tilde{P}(w) = \frac{a_n}{w^n} + \cdots + a_0$.
– Soient P et Q deux polynômes non nuls, de degrés respectifs n et m. Le quotient $f = P/Q : \mathbb{C} \to \mathcal{S}$ est une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec un nombre fini de pôles. Elle possède en l'infini une singularité effaçable si $n \leq m$, et un pôle de degré $n - m$ si $n > m$.

– La fonction $z \in \mathbb{C} \mapsto e^z \in \mathbb{C}$ possède en ∞ une singularité essentielle (comme la fonction $w \mapsto e^{1/w}$ en l'origine), et ne se prolonge donc pas en une fonction méromorphe sur $\mathcal{S}$.

Etudions maintenant les fonctions holomorphes, ou bien méromorphes, sur la sphère de Riemann $\mathcal{S}$.

Proposition 9.21 1. *Une fonction holomorphe $f : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ est constante.*

2. *Une fonction entière $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ admet un prolongement $f : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ en une fonction méromorphe si et seulement si f est un polynôme.*

3. *Les fonctions méromorphes $f : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ sont les fractions rationnelles.*

L'assertion (2) affirme qu'une fonction entière qui n'est pas un polynôme admet en l'infini une singularité essentielle.

Preuve (1) La restriction $f_{|\mathbb{C}}$ est entière et bornée au voisinage de l'infini, elle est donc constante par le théorème de Liouville.

(2) Soit $f : z \in \mathbb{C} \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n \in \mathbb{C}$ notre fonction entière. Elle admet une singularité isolée en l'infini.

Le développement de Laurent de $\tilde{f} : w \mapsto f(1/w)$ en l'origine est $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n w^{-n}$. Donc, f étant méromorphe à l'infini si et seulement si $\tilde{f}$ est méromorphe en l'origine, c'est le cas si les a_n sont presque tous nuls (i.e. nuls sauf un nombre fini d'entre eux), autrement dit si f est un polynôme.

(3) Soit $f : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ méromorphe. Sur un voisinage pointé de l'infini, mettons un anneau $A(R, \infty)$, elle possède donc un nombre fini de pôles. De même, elle admet un nombre fini de pôles sur le compact $\overline{D(0,R)}$. Soient donc $a_1, \cdots, a_p \in \mathbb{C}$ l'ensemble des pôles de f sur $\mathbb{C}$, dont on note $k_1, \cdots, k_p$ les multiplicités. Le produit $g : z \in \mathbb{C} \mapsto f(z) \prod_{j=1}^{p} (z - a_j)^{k_j} \in \mathbb{C}$ est maintenant une fonction entière. Et g est méromorphe sur $\mathcal{S}$, comme f. L'assertion (2) assure que g est un polynôme, ce qui achève la preuve. $\square$

C.4 Automorphismes de la sphère de Riemann

La description des automorphismes de la sphère de Riemann se déduit très facilement de celle des automorphismes de $\mathbb{C}$.

Il faut commencer par définir ce qu'est un automorphisme de $\mathcal{S}$. Il faut penser (comme pour les ouverts de $\mathbb{C}$, définition 9.1) qu'un automorphisme de $\mathcal{S}$ est une application $f : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ bijective et “biholomorphe”.

Nous avons choisi de distinguer le point $\infty \in \mathcal{S}$ des autres points $z_0 \in \mathbb{C} \subset \mathcal{S}$ (notre intérêt premier étant l'étude des fonctions méromorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$). On définira donc les automorphismes de $\mathcal{S}$ dans les termes suivants.

Définition 9.22 Automorphismes de la sphère de Riemann

Un automorphisme de la sphère de Riemann est une application méromorphe bijective $f : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$, dont la réciproque est également méromorphe.

Exercice 9.23 Soit $f : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ une application méromorphe et bijective. Montrer que la réciproque $f^{-1} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ est également méromorphe.

Théorème 9.24 *Les automorphismes de la sphère de Riemann $\mathcal{S}$ sont les homographies*

$$f : z \in \mathcal{S} \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \in \mathcal{S}$$

où $ad - bc \neq 0$, en convenant que $f(-d/c) = \infty$ et $f(\infty) = a/c$.

Preuve Les homographies sont des automorphismes de $\mathcal{S}$. On observe que l'ensemble des homographies forme un groupe, et que ce groupe agit transitivement sur $\mathcal{S}$.

Soit maintenant $h : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ un automorphisme. Quitte à composer h par une homographie, on peut supposer que $h(\infty) = \infty$. La restriction de h à $\mathbb{C}$ est donc un automorphisme de $\mathbb{C}$, c'est-à-dire une application affine $z \in \mathbb{C} \mapsto az + b \in \mathbb{C}$, avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ (théorème 9.3). $\square$

10. Produits infinis

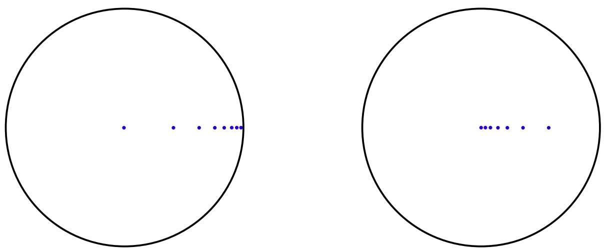
A Prescrire les zéros d'une fonction holomorphe

Rappelons que si $U \subset \mathbb{C}$ est un ouvert connexe, et $f : U \to \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe non identiquement nulle, l'ensemble $Z(f) \subset U$ de ses zéros est une partie fermée et discrète de U (de façon équivalente, $Z(f)$ n'a pas de point d'accumulation dans U). En particulier, $Z(f)$ est fini ou dénombrable.

Il est facile de prescrire un nombre fini de zéros $A = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_p\} \subset U$, de multiplicités respectives $m_k \in \mathbb{N}^*$: considérer le polynôme $\prod_{k=1}^{p}(z - \alpha_k)^{m_k}$.

Le théorème suivant affirme plus généralement que l'on peut prescrire l'ensemble des zéros d'une fonction holomorphe sur U, avec leurs multiplicités, du moment que cet ensemble ne s'accumule pas dans U.

Théorème 10.1 Fonction holomorphe avec zéros prescrits
Soient $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert, $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de points distincts de U, et une suite $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'entiers strictement positifs. On suppose que l'ensemble $A = \{\alpha_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ n'a pas de point d'accumulation dans U. Il existe alors une fonction holomorphe $f : U \to \mathbb{C}$ telle que
— *l'ensemble des zéros de f est A*
— *chaque α_k est un zéro de f de multiplicité m_k.*



Les zéros peuvent s'accumuler sur le bord de l'ouvert (dessin de gauche).
Sur le dessin de droite, les zéros s'accumulent dans U : la fonction est donc nulle.

Exercice 10.2 Montrer que :

– Il existe une fonction holomorphe f sur le demi-plan $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$ dont l'ensemble des zéros soit $Z(f) = \{1/k \mid k \in \mathbb{N}^*\}$.

– La seule fonction holomorphe sur le disque qui s'annule en chaque point de $\{1/k \mid k \geq 2\}$ est la fonction nulle.

L'idée de la preuve est bien sûr de prendre des produits comme dans le cas où A est un ensemble fini. Mais il faudra cette fois-ci considérer des produits infinis en s'assurant d'une part de la convergence du produit, et d'autre part que le produit ne s'annule que lorsque l'un des facteurs s'annule. Nous nous contenterons de démontrer le théorème lorsque $U = \mathbb{C}$. Le cas général reprend les mêmes idées, mais la preuve est plus technique.

B Produits infinis

Nous commençons par les produits infinis de nombres complexes, avant de passer aux produits infinis de fonctions.

Définition 10.3 *Soit $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. On dit que le produit infini $\prod_{k\in\mathbb{N}} w_k$ converge lorsque les produits finis $P_n := \prod_{k=0}^n w_k$ ont une limite lorsque $n \to \infty$, et on définit*

$$\prod_{k\in\mathbb{N}} w_k = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n} w_k\,.$$

Remarque 10.4 – Supposons que le produit infini $\prod_{k\in\mathbb{N}} w_k$ existe et soit non nul. Alors chaque facteur w_k est non nul, et $w_k = P_k/P_{k-1} \to_{k\to\infty} 1$.

– Par contre il se peut que chaque facteur soit non nul, mais que le produit soit nul. Prendre $w_k = 1/2$ pour tout n.

Nous noterons désormais $w_k = 1 + u_k$, où u_k a vocation à tendre vers 0.

Proposition 10.5 *Supposons que $\sum_{k\in\mathbb{N}} |u_k| < \infty$ (convergence absolue). Alors le produit infini $\prod_{k\in\mathbb{N}}(1 + u_k)$ converge, et n'est nul que si l'un des facteurs est nul.*

Remarque 10.6 La réciproque est fausse. Choisir en effet une suite $\varepsilon_k > 0$ tendant lentement vers 0, de sorte que $\sum \varepsilon_k = \infty$, et définir $z_{2k} = (1 + \varepsilon_k)$ et $z_{2k+1} = (1 + \varepsilon_k)^{-1}$.

Preuve L'hypothèse assure que $u_k \to 0$, et donc que $1 + u_k \to 1$ lorsque $k \to \infty$.

Désignons par $\ell : \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_- \to \mathbb{C}$ la détermination principale du logarithme. Puisque $\ell(1) = 0$ et $\ell'(1) = 1$, on a $|\ell(1 + u)| \leq 2|u|$ pour tout complexe u de module suffisamment petit.

On peut donc supposer, quitte à oublier les premiers termes du produit, que $\ell(1 + u_k)$ est bien défini pour tout $k \in \mathbb{N}$ et vérifie $|\ell(1 + u_k)| \leq 2|u_k|$. La série $\sum_{k\in\mathbb{N}} \ell(1 + u_k)$ converge donc vers un nombre complexe $b \in \mathbb{C}$. La relation $\exp(\ell(u) + \ell(v)) = \exp(\ell(u))\, \exp(\ell(v)) = uv$, et la continuité de la fonction exponentielle, assurent alors que le produit infini converge vers $e^b \neq 0$. D'où le résultat. $\square$

Exercice 10.7 Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. On suppose que $\sum_{k\in\mathbb{N}} |u_k| < \infty$. Montrer, pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N})$, l'égalité des produits infinis $\prod_{k\in\mathbb{N}}(1+u_k) = \prod_{k\in\mathbb{N}}(1+u_{\sigma(u_k)})$.

Passons aux produits infinis de fonctions. La fonction exponentielle complexe étant uniformément continue sur tout demi-plan $\{\mathrm{Re}\, z \leq M\}$, on en déduit le lemme suivant.

Lemme 10.8 *Soient $g_k : E \to \mathbb{C}$ (pour $k \in \mathbb{N}$) des fonctions, définies sur un ensemble E. On suppose que $g_k \to g$ uniformément sur E et qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in E$, on ait $\mathrm{Re}\, g(x) \leq M$. Alors la suite de fonctions $(e^{g_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers e^g sur E.*

Preuve Le résultat suit de $|e^{g_k} - e^g| = |e^g|\, |e^{g_k - g} - 1| \leq e^M\, |e^{g_k-g} - 1|$, et de la continuité de la fonction exponentielle. □

Définition 10.9 *Soient $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert, et $f_k : U \to \mathbb{C}$ des fonctions holomorphes ($k \in \mathbb{N}$). On écrit $f_k = 1 + u_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.*

On dit que le produit infini $\prod_{k\in\mathbb{N}} f_k$ converge normalement sur une partie A de U lorsque la série de fonctions $\sum_{k\in\mathbb{N}} u_k$ converge normalement sur A.

Rappelons que cela signifie que chaque fonction u_k est bornée sur A, et que $\sum_{k\in\mathbb{N}} \|u_k\|_{\infty,A} < \infty$, où $\|u\|_{\infty,A} = \sup_{z\in A} |u(z)|$.

Théorème 10.10 *Soient $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert, et $f_k : U \to \mathbb{C}$ des fonctions holomorphes ($k \in \mathbb{N}$). On suppose que le produit infini $\prod_{k\in\mathbb{N}} f_k$ converge normalement sur les compacts de U. Alors*

1. *la suite des produits $z \mapsto P_n(z) := \prod_{k=0}^n f_k(z)$ converge uniformément sur tout compact de U ; on note $P = \prod_{k\in\mathbb{N}} f_k$ sa limite*
2. *le produit infini $P = \prod_{k\in\mathbb{N}} f_k$ est holomorphe sur U*
3. *si $P(z_0) = 0$, l'un des facteurs $f_k(z_0)$ est nul*
4. *un zéro z_0 du produit P annule un nombre fini des facteurs (f_k), et les multiplicités (ou ordres) s'additionnent*

$$o_{z_0}(P) = \sum_{k\in\mathbb{N}} o_{z_0}(f_k)\,.$$

Remarque 10.11 En particulier lorsque l'ouvert U est connexe et si aucun des facteurs f_k n'est identiquement nul, alors le produit infini P n'est pas identiquement nul.

Preuve On écrit $f_k = 1 + u_k$. Soit $K \subset U$ un compact. L'hypothèse assure qu'il existe un entier $N = N(K)$ tel que pour tous $k \geq N$ et tout $z \in K$, le logarithme $\ell(1 + u_k(z))$ soit bien défini et vérifie $|\ell(1 + u_k(z))| \leq 2\, |u_k(z)|$.

Le lemme 10.8 et la preuve de la proposition 10.5 assurent la convergence uniforme du produit infini sur le compact K.

La fonction P est donc holomorphe comme limite uniforme locale de fonctions holomorphes (théorème 5.12). Les assertions sur les zéros et les multiplicités suivent de la proposition 10.5. □

On souhaitera également savoir dériver un produit infini. Pour un produit de fonctions il est plus judicieux de considérer la dérivée logarithmique, qui sera une fonction méromorphe. Lorsque $f : D(0,r) \to \mathbb{C}^*$ est une fonction holomorphe définie sur un disque, et qui ne s'y annule pas, rappelons que sa dérivée logarithmique f'/f est la dérivée $h' = f'/f$ de tout logarithme holomorphe h de f sur cet ouvert convexe.

Proposition 10.12 *Soient $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert, et $f_k : U \to \mathbb{C}$ des fonctions holomorphes ($k \in \mathbb{N}$). On suppose que le produit infini $\prod_{k\in\mathbb{N}} f_k$ converge normalement sur les compacts de U.*

Soit $Z(P) \subset U$ l'ensemble des zéros de $P = \prod_{k\in\mathbb{N}} f_k$.

Alors la série de fonctions $\sum_{k\in\mathbb{N}} f_n'/f_k$ converge uniformément, sur tout compact de l'ouvert $U_0 := U \setminus Z(P)$, vers la dérivée logarithmique du produit infini P :

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{f_k'}{f_k}.$$

Preuve Pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$, la dérivée logarithmique du produit fini $P_n = \prod_{k=0}^n f_k$ est bien définie sur U_0 et vaut

$$\frac{P_n'}{P_n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f_k'}{f_k}.$$

Soit $K \subset U_0 \subset U$ un compact. Il suit des théorèmes 10.10 et 5.12 que les deux suites de fonctions holomorphes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(P_n')_{n\in\mathbb{N}}$ convergent uniformément sur K, respectivement vers P et P'.

Puisque ni P, ni aucun des produits finis P_n, ne s'annule sur le compact K, il existe donc deux constantes $0 < m \leq M$ telles que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in K$, on ait $m \leq |P_n(z)|, |P(z)| \leq M$. La suite de fonctions $(P_n'/P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc uniformément sur K vers le quotient P'/P. □

C Fonction holomorphe avec zéros prescrits

Nous démontrons ici le théorème 10.1 lorsque $U = \mathbb{C}$. Si $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de points distincts de $\mathbb{C}$ sans point d'accumulation et $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une d'entiers strictement positifs, on veut donc construire une fonction entière dont les zéros sont les points (α_k) avec multiplicités (m_k).

Il suffit de répondre à cette question lorsque tous les $\alpha_k \in \mathbb{C}^*$ sont non nuls (multiplier la fonction entière ainsi obtenue par un facteur z^{m_0} pour obtenir une fonction qui s'annule également à l'ordre m_0 en l'origine, sans perturber les autres zéros).

Pour simplifier la construction, on préfère se donner une suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes non nuls telle que $|a_k| \to \infty$ lorsque $k \to \infty$. On ne suppose plus les complexes a_k deux à deux distincts, c'est ce qui apportera la multiplicité : α_p apparaissant avec multiplicité m_p il sera répété m_p fois dans la suite (a_k). La première chose à laquelle on pense est de considérer le produit infini

$$\prod_{k\in\mathbb{N}} \left(1 - \frac{z}{a_k}\right) .$$

(On choisit cette expression plutôt que le produit $\prod_{k\in\mathbb{N}}(a_k - z)$ pour mettre en évidence le fait que chaque facteur doive tendre vers 1.)

Si ce produit infini converge normalement, i.e. si $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{|a_k|} < \infty$, il définit une fonction entière dont les zéros et les multiplicités sont ceux que nous souhaitions prescrire. Mais, en général, ce produit ne converge pas. On va donc pondérer chaque facteur pour assurer la convergence.

Il faut choisir un poids qui ne s'annule pas, on pense donc à introduire une exponentielle pour assure la convergence du produit infini

$$\prod_{k\in\mathbb{N}} (1 - z/a_k)\, e^{g_k(z/a_k)} ,$$

où chaque g_k est une fonction entière, que l'on préfère évaluer en z/a_k plutôt qu'au point z pour respecter l'"homogénéité" de l'expression. On va voir que l'on peut prendre g_k polynomiale.

Définition 10.13 *On introduit les facteurs élémentaires de Weierstrass, définis pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$ par*

$$E_k(w) = (1 - w) \exp\Big(w + w^2/2 + \cdots + w^k/k\Big)$$
$$E_0(z) = 1 - w .$$

On reconnaît dans la somme $w+w^2/2+\cdots+w^k/k$ le début du développement en série entière, en l'origine, de la fonction

$$w \mapsto -\log(1 - w) = \log(1/(1 - w)) = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} w^k/k$$

(rappelons que log désigne la détermination principale du logarithme). Par construction, la suite de fonctions $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge donc uniformément vers 1 sur tout disque fermé $\overline{D(0,r)} \subset D(0,1)$ inclus dans le disque unité ($r < 1$) lorsque $k \to \infty$. On a plus précisément l'estimation suivante.

Lemme 10.14 *Pour tous* $|w| \leq 1$ *et* $k \in \mathbb{N}^*$*, on a*

$$|E_k(w) - 1| \leq |w^{k+1}|.$$

Preuve On vérifie facilement que $E_k'(w) = -w^k \exp(w + w^2/2 + \cdots + w^k/k)$. Le développement de Taylor de E_k' en l'origine s'écrit donc

$$E_k'(w) = -\sum_{p=k}^{\infty} b_p \, w^p$$

où tous les coefficients $b_p \geq 0$ sont positifs ou nuls. Puisque $E_k(0) = 1$, le développement de Taylor de la fonction entière E_k en l'origine est

$$E_k(w) = 1 - \sum_{p=k}^{\infty} (b_p/(p+1)) \, w^{p+1}.$$

On remarque alors que $E_k(1) = 0 = 1 - \sum_{p=k}^{\infty} |b_p/(p+1)|$. On a donc, pour tout $|w| \leq 1$:

$$|E_k(w) - 1| \leq \sum_{p=k}^{\infty} |b_p/(p+1)| \, |w^{p+1}| \leq |w^{k+1}| \sum_{p=k}^{\infty} |b_p/(p+1)| = |w^{k+1}|. \quad \square$$

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème 10.1 lorsque $U = \mathbb{C}$.

Corollaire 10.15 Fonction entière avec zéros prescrits

Soit $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *une suite de nombres complexes non nuls telle que* $|a_k| \to \infty$ *lorsque* $k \to \infty$*. On définit, pour* $z \in \mathbb{C}$*,*

$$f(z) = \prod_{k \in \mathbb{N}} E_k\left(\frac{z}{a_k}\right).$$

La fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *est une fonction entière telle que*

- *l'ensemble des zéros de* f *est* $A = \{a_k \mid k \in \mathbb{N}\}$
- *si* $z_0 \in A$ *apparaît* m *fois dans la suite* (a_k)*, alors* z_0 *est un zéro d'ordre* m *de* f*.*

Remarque 10.16 On rappelle que, si l'on veut en outre prescrire un zéro d'ordre m_0 en l'origine, il suffit de rajouter un facteur z^{m_0} à ce produit.

Preuve Chaque facteur $z \mapsto E_k(z/a_k)$ a un unique zéro simple au point a_k. Le résultat annoncé suivra donc du théorème 10.10 si l'on montre que la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} \big(E_k(z/a_k) - 1\big)$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{C}$.

Fixons $r > 0$. Puisque la suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tend vers ∞, il existe un rang n_r à partir duquel $|a_k| \geq 2r$. Le lemme 10.14 assure que l'on a, pour $|z| \leq r$ et $k \geq n_r$,

$$\left| E_k\left(\frac{z}{a_k}\right) - 1 \right| \leq \left| \frac{z}{a_k} \right|^{k+1} \leq \frac{1}{2^{k+1}},$$

terme général d'une série convergente. $\square$

Corollaire 10.17 Corps des fractions méromorphes

Toute fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ est quotient de deux fonctions entières. En d'autres termes, le corps $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$ est le corps des fractions de l'anneau intègre $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ des fonctions entières.

Preuve Soit h une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$. Le corollaire précédent permet de construire une fonction entière f qui admet en chaque pôle de h un zéro de même multiplicité. Le produit fh n'a que des singularités effaçables, et se prolonge donc en une fonction entière g. Par construction, $h = g/f$. □

On peut maintenant se demander dans quelle mesure une fonction entière est déterminée par l'ensemble de ses zéros.

Corollaire 10.18 Théorème de factorisation de Weierstrass

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction entière non identiquement nulle. Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la liste de ses zéros non nuls, répétés avec multiplicité. On suppose que f possède en l'origine un zéro d'ordre $m_0 \in \mathbb{N}$.

Il existe une fonction entière $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle qu'on ait, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$f(z) = e^{g(z)}\, z^{m_0} \prod_{k\in\mathbb{N}} E_k\left(\frac{z}{a_k}\right) .$$

Preuve Le quotient

$$g : z \mapsto \frac{f(z)}{z^{m_0}\ \prod_{k\in\mathbb{N}} E_k(z/a_k)}$$

est holomorphe sur $\mathbb{C}$ privé de l'origine et de l'ensemble $A = \{a_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ et admet en chacun de ces points une singularité effaçable. Plus précisément, g se prolonge en une fonction entière qui ne s'annule pas. On conclut avec la proposition 4.15, puisque $\mathbb{C}$ est étoilé. □

11. Fonctions elliptiques

A De quoi s'agit-il ?

Nous allons nous intéresser aux fonctions holomorphes $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, ou plutôt méromorphes $f : \mathbb{C} \to \mathcal{S}$, qui sont invariantes sous l'action d'un groupe $\Gamma \subset \mathbb{C}$ de translations. On demande donc que, pour tout $\gamma \in \Gamma$ et tout complexe $z \in \mathbb{C}$, on ait l'égalité $f(z+\gamma) = f(z)$.

Nous avons déjà rencontré un tel exemple, associé à un groupe $\Gamma \subset \mathbb{C}$ isomorphe à $\mathbb{Z}$. Il s'agit de la fonction exponentielle complexe $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Observons que, si une fonction méromorphe non constante $f : \mathbb{C} \to \mathcal{S}$ est Γ-invariante, alors le sous-groupe $\Gamma \subset \mathbb{C}$ est discret. En effet, si Γ n'est pas discret, il existe une suite (γ_n) dans $\Gamma \setminus \{0\}$ convergeant vers 0 (utiliser le fait que Γ est un groupe). On a donc pour tout $z \in \mathbb{C}$ l'égalité $f(z+\gamma_n) = f(z)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui contredit le principe des zéros isolés.

Le résultat suivant généralise ce que vous savez déjà des sous-groupes discrets de $\mathbb{R}$.

Proposition 11.1 Sous-groupes discrets de $\mathbb{C}$
Soit $\Gamma \subset \mathbb{C}$ un sous-groupe discret non trivial. Alors :

– soit il existe un complexe non nul $u \in \mathbb{C}^*$ tel que $\Gamma = \mathbb{Z}u$; dans ce cas Γ est isomorphe à $\mathbb{Z}$;

– soit il existe deux complexes $u, v \in \mathbb{C}^*$, linéairement indépendants sur $\mathbb{R}$, et tels que $\Gamma = \mathbb{Z}u \oplus \mathbb{Z}v$; dans ce cas, Γ est isomorphe à $\mathbb{Z}^2$. On dit alors que Γ est un réseau de $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$.

Preuve Soit $u \in \Gamma \setminus \{0\}$ un élément de module minimal. Il en existe, puisque Γ est discret. On a donc $\Gamma \cap \mathbb{R}u = \mathbb{Z}u$.

Si $\Gamma \subset \mathbb{R}u$, c'est terminé. On suppose donc que $\Gamma \not\subset \mathbb{R}u$. On considère alors un élément v de module minimal dans $\Gamma \setminus \mathbb{R}u$. Par construction, on a $|u| \leq |v|$ et les deux vecteurs $u, v \in \mathbb{C}$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{R}$ donc constituent une base de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}$. On veut montrer qu'ils engendrent le groupe Γ. Si ce n'était pas le cas, il existerait $\omega = xu + yv \in L$, où $|x| \leq 1/2$ et $0 < |y| < 1/2$. On a alors $|\omega| < |v|$, une contradiction avec le choix de v (si en effet $x \neq 0$, on a inégalité stricte dans l'inégalité triangulaire et donc $|\omega| < |u|/2 + |v|/2 \leq |u|$). □

Définition 11.2 Fonction elliptique
Soit $L \subset \mathbb{C}$ un réseau. Une fonction elliptique pour le réseau L est une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ et L-périodique.

Si $L = \mathbb{Z}u \oplus \mathbb{Z}v$, une fonction méromorphe $f : \mathbb{C} \to \mathcal{S}$ est elliptique pour L si et seulement si on a, pour tout complexe $z \in \mathbb{C}$, les égalités

$$f(z) = f(z+u) = f(z+v)\,.$$

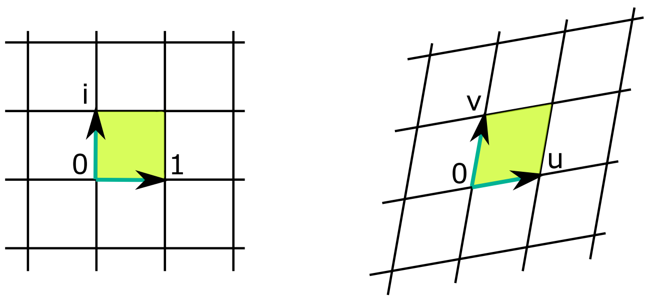
Définition 11.3 Domaine fondamental

L'ensemble $\mathcal{D} := \{xu + yv \mid 0 \leq x < 1\,,\ 0 \leq y < 1\}$ est un "domaine fondamental" pour le réseau L. Cela signifie que ses translatés sous l'action de L par translation forment une partition de $\mathbb{C}$:

- $\cup_{\omega \in L}(\mathcal{D} + \omega) = \mathbb{C}$
- $(\mathcal{D} + \omega_1) \cap (\mathcal{D} + \omega_2) = \emptyset$ *pour* $\omega_1 \neq \omega_2$ *dans* L.

Tout élément de l'espace quotient $\mathbb{C}/L$ possède donc un unique représentant dans $\mathcal{D}$.

Une fonction L-elliptique est connue dès lors qu'elle est connue sur $\mathcal{D}$, ou *a fortiori* dès qu'elle est connue sur son adhérence $\mathcal{K} = \overline{\mathcal{D}}$ qui est compacte.



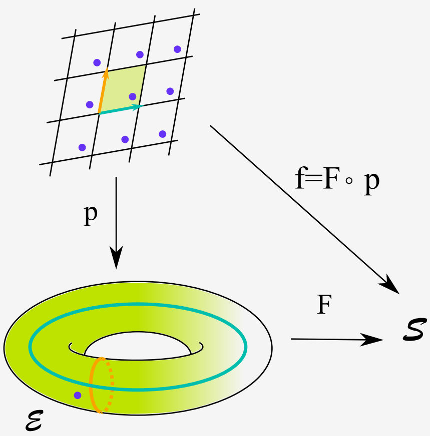
Le réseau carré $L_0 = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i$ engendré par 1 et i, un autre réseau $L = \mathbb{Z}\,u + \mathbb{Z}\,v$, ainsi que des domaines fondamentaux pour chacun

Les fonctions L-elliptiques, où $L \subset \mathbb{C}$ est un réseau, s'identifient à des fonctions "méromorphes" définies sur le quotient $\mathcal{E} = \mathbb{C}/L$. Un tel quotient est ce qu'on appelle une courbe elliptique.

Topologiquement, le quotient $\mathcal{E} = \mathbb{C}/L$ est un tore (la surface d'une bouée, homéomorphe au produit $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$). Mieux, ce quotient est muni d'une "structure complexe", c'est-à-dire que l'on sait définir ce que sont les fonctions holomorphes, ou méromorphes, sur $\mathcal{E}$.

Définition 11.4 *Soit $p : \mathbb{C} \to \mathcal{E} = \mathbb{C}/L$ la projection canonique sur le quotient. Une fonction $F : \mathcal{E} \to \mathcal{S}$ est méromorphe si elle se relève à $\mathbb{C}$ en une fonction méromorphe $f : \mathbb{C} \to \mathcal{S}$, autrement dit si la fonction $f = F \circ p : \mathbb{C} \to \mathcal{S}$ (qui est L-périodique) est méromorphe.*

Une fonction elliptique pour le réseau $L \subset \mathbb{C}$ est donc indifféremment une fonction méromorphe L-périodique $f : \mathbb{C} \to \mathcal{S}$, ou bien une fonction méromorphe $F : \mathcal{E} \to \mathcal{S}$ définie sur la **courbe elliptique** $\mathcal{E} = \mathbb{C}/L$.



Pourquoi est-ce une **courbe** ? Il s'agit bien d'un objet de dimension 2 réelle... mais de dimension 1 complexe. Puisque nous faisons ici de la géométrie complexe, il est naturel d'adhérer à ce second point de vue, et de considérer $\mathcal{E}$ comme une courbe... complexe.

Pourquoi est-elle **elliptique** ? Les “intégrales elliptiques” tirent leur nom de ce que certaines d'entre elles sont reliées au calul de la longueur d'un arc d'ellipse. Un exemple d'intégrale elliptique est $I : x \mapsto \int_0^x \frac{dt}{(t(t+1)(t+2))^{1/2}}$, qui dépend du paramètre $x \in \,]0, \infty[$. L'application I étant strictement croissante, elle admet une réciproque f, qui est a priori seulement définie sur l'intervalle ouvert $I(]0, \infty[)$. Coup de théâtre : la fonction f se prolonge en une fonction méromorphe doublement périodique, c'est-à-dire en une fonction elliptique (Abel, circa 1830) ! On donnera quelques explications supplémentaires au paragraphe F.

Le plan complexe, un ouvert de $\mathbb{C}$ tel le disque unité (aussi appelé disque de Poincaré), la sphère de Riemann, ou encore les courbes elliptiques que nous venons de construire sont des exemples de surfaces de Riemann : ce sont des surfaces (réelles 😄) munies d'une structure complexe.

Pour une magnifique introduction aux surfaces de Riemann, voir le livre de Reyssat mentionné dans l'introduction. Il y est question de topologie, d'algèbre et d'arithmétique, de géométrie complexe, d'analyse et de géométrie projective... de quoi vous motiver pour apprendre plein de mathématiques.

B Propriétés des fonctions elliptiques

Avant même d'avoir construit une seule fonction elliptique, les outils que nous avons développés dans les chapitres précédents vont nous permettre d'en étudier les premières propriétés.

En poussant un peu ces arguments, nous serons même en mesure de décrire le corps de toutes les fonctions L-elliptiques (paragraphe D) !

Lemme 11.5 *Soit $L \subset \mathbb{C}$ un réseau et $f : \mathbb{C} \to \mathcal{S}$ une fonction L-elliptique. Si f est holomorphe, ou plus généralement si f évite une valeur quelconque $\alpha \in \mathcal{S}$, alors f est constante.*

Preuve Une fonction L-elliptique est une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, et L-périodique. L'image $f(\mathbb{C}) \subset \mathcal{S}$ est donc égale à l'image $f(\mathcal{K})$ de l'adhérence, compacte, du domaine fondamental $\mathcal{D}$ (définition 11.3).

Supposons que f est holomorphe. Alors, $f(\mathbb{C}) = f(\mathcal{K}) \subset \mathbb{C}$ est compact, donc borné, et le théorème de Liouville assure que f est constante.

Si f évite la valeur $\alpha \in \mathbb{C}$. On introduit la fonction L elliptique définie par $g : z \mapsto \frac{1}{f(z)-\alpha}$, de sorte que g est maintenant holomorphe et reste L-elliptique. La fonction g est donc constante, et f aussi. □

Dans la preuve précédente on a utilisé (sans le dire en ces termes) le fait que le groupe $\mathrm{Aut}\,\mathcal{S}$ agit transitivement sur $\mathcal{S}$ pour se ramener, du cas où f évite une valeur quelconque $\alpha \in \mathcal{S}$, au cas où f ne prend pas la valeur ∞.

Proposition 11.6 *Soit $f : \mathbb{C} \to \mathcal{S}$ une fonction L-elliptique non constante.*

(1) *Si f présente un pôle au point $z_0 \in \mathbb{C}$, alors elle présente un pôle en tout point $z_0+\omega$ lorsque $\omega \in L$, et on a l'égalité* $\mathrm{Res}\,(f, z_0) = \mathrm{Res}\,(f, z_0+\omega)$.

(2) *La fonction f a un nombre fini de pôles dans $\mathcal{D}$.*

(3) *On a l'égalité* $\sum_{z\in\mathcal{D}} \mathrm{Res}\,(f, z) = 0$.

(4) *La fonction f a au moins deux pôles, comptés avec multiplicité, dans le domaine fondamental $\mathcal{D}$.*

C'est le point (3) de cet énoncé qui contient véritablement de l'information, et dont le (4) découlera.

Preuve (1) est conséquence immédiate de la L-périodicité de f.

(2) L'ensemble $\mathcal{K} = \overline{\mathcal{D}}$, qui est compact, contient un nombre fini de pôles de f (puisque ceux-ci forment un ensemble fermé et discret de $\mathbb{C}$). Le résultat suit.

(3) • Supposons en un premier temps que f n'ait pas de pôle sur le bord du domaine fondamental $\mathcal{D}$. Soit γ un lacet dont l'image est le bord $\partial\mathcal{D}$ de $\mathcal{D}$ (un carré), orienté positivement. Nous allons utiliser le théorème des résidus pour calculer l'intégrale de f sur γ.

On introduit l'ouvert étoilé

$$U = \{z \in \mathbb{C} \,|\, -1 < \operatorname{Re} z < 2\,, -1 < \operatorname{Im} z < 2\}\,.$$

Le lacet γ est tracé dans U, et f a un nombre fini de pôles dans cet ouvert. Le théorème des résidus 8.12 s'applique donc à la restriction $f_U : U \to \mathcal{S}$ pour donner :

$$\int_\gamma f(w)\,dw = (2i\pi) \sum_{z\in U} \operatorname{Res}(f,z) \operatorname{Ind}(\gamma, z) = (2i\pi) \sum_{z \in \mathcal{D}} \operatorname{Res}(f,z)\,.$$

En effet, le lacet γ est d'indice 1 par rapport aux points de $\mathcal{D}$ et d'indice 0 par rapport aux autres points. En revenant ensuite à la définition d'une intégrale sur un chemin, on obtient que

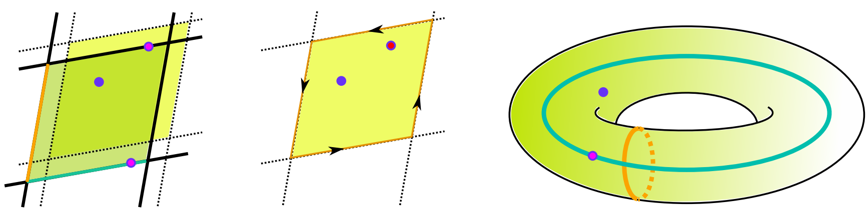
$$\begin{aligned}\int_\gamma f(w)\,dw = u\int_0^1 f(xu)\,dx + v\int_0^1 f(u+yv)\,dy \\ - u\int_0^1 f(v+xu)\,dx - v\int_0^1 f(yv)\,dy = 0\,,\end{aligned}$$

la dernière égalité suivant de la périodicité de f, puisque $f(v+xu) = f(xu)$ et $f(yv) = f(u+yv)$ pour tous $x, y \in [0,1]$. Autrement dit les contributions, dans l'intégrale de f sur le lacet γ, des quatres côtés du parallélogramme ∂D se compensent deux à deux.

• Si, par manque de chance, la fonction f possède un pôle sur le bord du domaine fondamental $\mathcal{D}$... il n'y a qu'à changer de domaine fondamental. Puisqu'il n'y a (localement) qu'un nombre fini de pôles à éviter, on peut trouver un réel $0 < \varepsilon < 1$ tel que le bord du domaine $\mathcal{D}_\varepsilon := \mathcal{D} + \varepsilon(u+v)$, obtenu en translatant $\mathcal{D}$, ne contienne pas de pôle de f. On note γ_ε le lacet correspondant.

Le raisonnement ci-dessus montre que $\int_{\gamma_\varepsilon} f(w)\,dw = 0$, tandis que la périodicité de f assure que $\sum_{z\in\mathcal{D}_\varepsilon} \operatorname{Res}(f,z) = \sum_{z\in\mathcal{D}} \operatorname{Res}(f,z)$.

(4) En un pôle simple, le résidu n'est jamais nul. □



Preuve de 11.6 Sur l'exemple du dessin, la fonction elliptique F possède deux pôles dans $\mathcal{E}$. Un (et donc deux) pôles de f sont sur le bord du domaine fondamental $\mathcal{D}$. On considère donc un second domaine fondamental translaté de $\mathcal{D}$ (au milieu) dont le bord ne contient pas de pôle de f, et donc dont l'intérieur contient deux pôles de f. Le contour d'intégration est indiqué (avec des flèches).

En termes de la fonction $F : \mathcal{E} \to \mathbb{C}$ associée sur le quotient $\mathcal{E} = \mathbb{C}/L$, la proposition 11.6 s'exprime comme suit.

Corollaire 11.7 *Soit $F : \mathcal{E} \to \mathcal{S}$ une fonction méromorphe.*

$(1')$ *La fonction F a un nombre fini de pôles dans $\mathcal{E}$. Si elle n'est pas constante, elle a au moins deux pôles dans $\mathcal{E}$ lorsque deux-ci sont comptés avec multiplicité.*

$(2')$ *On sait définir le résidu* $\mathrm{Res}\,(F, m)$ *de F en chacun de ses pôles, et on a la relation* $\sum_{m\in\mathcal{E}} \mathrm{Res}\,(F, m) = 0$.

Preuve On a dit qu'on identifiait la fonction méromorphe L-périodique $f : \mathbb{C} \to \mathcal{S}$ avec une fonction "méromorphe" $F : \mathbb{C}/L \to \mathcal{S}$ définie sur le quotient $\mathcal{E} = \mathbb{C}/L$. On note $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/L$ la projection canonique.

(1) affirme que si f admet un pôle en $z_0 \in \mathbb{C}$, alors F admet un pôle en $m_0 = p(z_0) \in \mathcal{E}$ et on peut définir le résidu de F au point m_0 par $\mathrm{Res}\,(F, m_0) := \mathrm{Res}\,(f, z_0)$, qui est la valeur commune des résidus de f en tous les points de $\mathbb{C}$ qui se projettent sur m_0.

(2) affirme que F a un nombre fini de pôles dans $\mathcal{E}$, puis (3) nous dit que la somme des résidus de F en ces pôles est nulle. Si F n'est pas constante, elle possède au moins deux pôles dans $\mathcal{E}$, comptés avec multiplicité (4). □

Notation 11.8 Si $f : \mathbb{C} \to \mathcal{S}$ est une fonction méromorphe, et $z \in \mathbb{C}$:
– lorsque z n'est pas un pôle de f, on pose $\bar{o}_z(f) = 0$
– lorsque z est un pôle de f, on note $\bar{o}_z(f) \in \mathbb{N}^*$ l'ordre de ce pôle.

Définition 11.9 Ordre d'une fonction elliptique

On note $\mathrm{ord}(f) = \sum_{z\in\mathcal{D}} \bar{o}_z(f)$ *la somme des ordres de ses pôles dans $\mathcal{D}$. On l'appelle l'ordre de la fonction elliptique.*

On peut aussi définir l'ordre de F, en posant $\mathrm{ord}F = \sum_{m\in\mathcal{E}} \bar{o}_m(F)$. L'ordre de F est égal à la somme des ordres de tous les pôles (en nombre fini !) de la fonction méromorphe F sur $\mathcal{E}$. On a l'égalité $\mathrm{ord}(f) = \mathrm{ord}(F)$.

Proposition 11.10 *L'ordre d'une fonction elliptique non constante est au moins égal à 2.*

Preuve C'est l'assertion (4) de la proposition 11.6. □

Nous montrons maintenant qu'une fonction elliptique, dans un domaine fondamental (ou, de façon équivalente, sur la courbe elliptique), prend le même nombre de fois toutes les valeurs $\alpha \in \mathcal{S} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, lorsque celles-ci sont comptées avec multiplicité.

Notation 11.11 Soit $f : \mathbb{C} \to \mathcal{S}$ une fonction elliptique. Pour $\alpha \in \mathbb{C}$, on pose $Z_\alpha = \{z \in \mathbb{C} \,|\, f(z) = \alpha\}$. Alors :

– lorsque $z \notin Z_\alpha$, on pose $o_z(f - \alpha) = 0$

– lorsque $z \in Z_\alpha$, on note $o_z(f - \alpha)$ la multiplicité de cette valeur en z, c'est-à-dire l'ordre en z du zéro de la fonction $w \mapsto f(w) - \alpha$.

Proposition 11.12 *Soit $f : \mathbb{C} \to \mathcal{S}$ une fonction elliptique non constante. On a, pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, l'égalité*

$$\sum_{z \in \mathcal{D}} o_z(f - \alpha) = \mathrm{ord}(f)\,.$$

Preuve Comme pour la preuve du théorème de Rouché, on introduit la fonction elliptique $g = f'/(f - \alpha)$ (voir le lemme 8.22). Le point $z \in \mathbb{C}$ est un pôle de g si et seulement si :

– Soit z est un pôle de f. Si ce pôle est d'ordre $k \geq 1$, alors z est un pôle simple de g, de résidu égal à $-k$.

– Soit $f(z) = \alpha$. Si $o_z(f - \alpha) = k$, alors z est un pôle simple de g, de résidu égal à k.

En appliquant la proposition 11.6 à la fonction g, on obtient

$$\sum_{z \in \mathcal{D}} \mathrm{Res}\,(g, z) = \sum_{z \in \mathcal{D}} o_z(f - \alpha) - \sum_{z \in \mathcal{D}} \bar{o}_z(f) = 0$$

et donc $\sum_{z \in \mathcal{D}} o_z(f - \alpha) = \mathrm{ord}(f)$, indépendant de α. □

Corollaire 11.13 *Soit $F : \mathcal{E} \to \mathcal{S}$ une fonction elliptique non constante. On définit son ordre* $\mathrm{ord}(F) = \sum_{m \in \mathcal{E}} \bar{o}_m(F)$, *qui est la somme des ordres de ses pôles. Alors*

– l'ordre $\mathrm{ord}(F) \geq 2$ *est au moins égal à* 2

– pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, l'équation $F(m) = \alpha$ possède $\mathrm{ord}(F)$ *solutions dans $\mathcal{E}$, lorsque celles-ci sont comptées avec multiplicité : on a en effet* $\sum_{m \in \mathcal{E}} o_m(F - \alpha) = \mathrm{ord}(F)$.

C La fonction $\wp$ de Weierstrass

Nous venons de démontrer quelques propriétés frappantes des fonctions elliptiques. Il nous faut maintenant exhiber (au moins) un exemple de telle fonction ! Nous allons en construire une qui est de d'ordre minimal (à savoir 2), et qui admet un unique pôle double en l'origine.

Proposition 11.14 *Soit $L \subset \mathbb{C}$ un réseau. L'expression*

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in L, \omega \neq 0} \left(\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) \tag{11.1}$$

définit une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$. Elle possède un pôle double en chaque point de L, et est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus L$.

Théorème 11.15 La fonction ℘ de Weierstrass

La fonction ℘ est une fonction L-elliptique.

Cette fonction est paire, et d'ordre 2. Pour $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus L$, on a l'égalité $\wp(z_1) = \wp(z_2)$ si et seulement si $z_2 \equiv \pm z_1 \, [L]$.

Il n'est pas évident, à partir de l'expression (11.1) qui définit ℘, de montrer que cette fonction est elliptique. Si nous avions considéré l'expression

$$z \mapsto \sum_{\omega \in L} \frac{1}{(z-\omega)^2} \tag{11.2}$$

cela aurait été clair. Alors pourquoi ne pas l'avoir fait ? Tout simplement parce que la série (11.2) ne converge pas : mauvaise idée ☹ ! En effet :

Lemme 11.16 *Soit $L \subset \mathbb{C}$ un réseau. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.*

La série $\sum_{\omega \in L, \omega \neq 0} |\omega|^{-2\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Preuve On écrit $L = \mathbb{Z}u \oplus \mathbb{Z}v$, où u et v sont deux complexes linéairement indépendants sur $\mathbb{R}$. Puisque toutes les normes sur $\mathbb{R}^2$ sont équivalentes, nous allons choisir de travailler avec la norme sup relativement à la $\mathbb{R}$-base (u, v) de $\mathbb{C}$.

Il existe donc une constante $c \geq 1$ telle que l'on ait, pour tout $\omega = nu + mv \in L$, l'encadrement

$$(1/c)\,(|n| + |m|)^2 \leq |nu + mv|^2 \leq c\,(|n| + |m|)^2 \,.$$

La convergence de la série positive $\sum_{\omega \in L, \omega \neq 0} |\omega|^{-2\alpha}$ est équivalente à la convergence de cette même série, en restreignant le domaine de sommation aux $\omega = nu + mv \in L$ pour lesquels $n, m \geq 0$. Occupons-nous donc de cette nouvelle série. Il vient, après sommation par paquets (licite puisque tous les termes sont positifs) :

$$\sum_{(n,m) \in \mathbb{N}^2, (n,m) \neq (0,0)} (n+m)^{-2\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)\, k^{-2\alpha} \,,$$

série à termes positifs dont le terme général est équivalent à $k^{1-2\alpha}$, et qui converge donc ssi $\alpha > 1$. □

Preuve de la proposition 11.14

Il s'agit d'une série de fonctions méromorphes. On veut voir qu'elle converge normalement (et donc uniformément) sur tout compact de $\mathbb{C}$, au sens de la définition 8.27. Soit donc $R > 0$.

La somme $z^{-2} + \sum_{\omega \in \Lambda\,,\, |\omega| \le 2R} \big((z-\omega)^{-2} - \omega^{-2}\big)$ est une somme finie.

Pour ce qui est des autres termes, nous allons montrer que la série $\sum_{\omega \in \Lambda\,,\, |\omega| \ge 2R} \big((z-\omega)^{-2} - \omega^{-2}\big)$ converge normalement sur le disque $D(0, R)$.

Pour $z \in D(0, R)$ et $|\omega| \ge 2R$, on a $|\omega| \ge 2\,|z|$ et donc

$$\Big|\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\Big| = \Big|\frac{\omega^2 - (z-\omega)^2}{\omega^2 (z-\omega)^2}\Big| = \Big|\frac{2z\omega - z^2}{\omega^2(z-\omega)^2}\Big| \le \frac{12R}{|\omega|^3}\,.$$

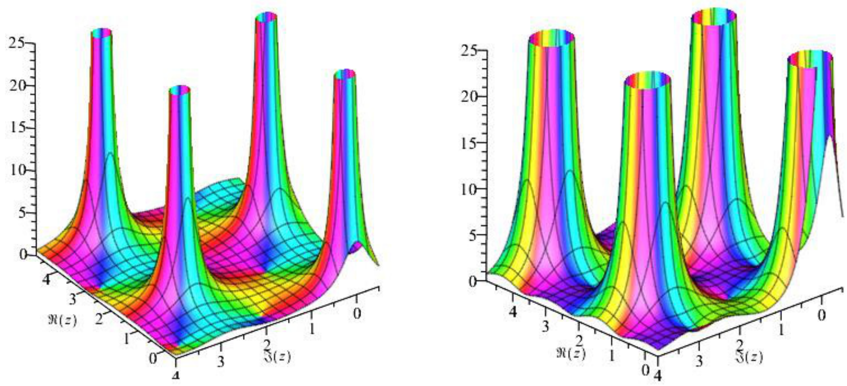
Il suit alors du lemme 11.16 que $\wp$ ainsi définie est méromorphe sur $\mathbb{C}$, avec les pôles indiqués. □

Pour montrer que $\wp$ est une fonction elliptique, c'est-à-dire qu'elle est L-périodique, on va passer par sa dérivée.

Lemme 11.17 *La dérivée $\wp'$ de la fonction de Weierstrass est la fonction elliptique définie par*

$$\wp'(z) = (-2) \sum_{\omega \in L} \frac{1}{(z-\omega)^3}\,. \tag{11.3}$$

Cette fonction elliptique est d'ordre 3, et possède un unique pôle triple (dans $\mathcal{E}$ ou dans $\mathcal{D}$) en l'origine. Elle possède exactement trois zéros (dans $\mathcal{E}$ ou dans $\mathcal{D}$), qui sont simples et situés aux points $u/2$, $v/2$ et $(u+v)/2$.



Les paysages analytiques de la fonction de Weierstrass $\wp$ (à gauche) et de sa dérivée $\wp'$ (à droite)

Preuve Une série de fonctions méromorphes normalement convergente se dérive terme à terme. Il est immédiat d'après l'expression (11.3), que $\wp'$ est une fonction elliptique. En effet, puisque L est un groupe, l'application $\omega \in L \mapsto \omega - \omega_0 \in L$ est une bijection pour tout $\omega_0 \in L$.

Dans le domaine fondamental $\mathcal{D}$, seul le terme $1/z^3$ fait apparaître un pôle, qui est d'ordre 3 et en l'origine. La fonction $\wp'$ est donc d'ordre 3.

D'après la proposition 11.12, la fonction $\wp'$ admet trois zéros, comptés avec multiplicité, dans $\mathcal{D}$. Il suffit donc pour conclure de constater que la fonction $\wp'$ s'annule en chacun des trois points indiqués.

Pour cela, on observe que $\wp'$ est impaire. Puisqu'elle est L-périodique on a de plus $\wp'(u/2) = \wp'(-u/2+u) = \wp'(-u/2)$, donc $\wp'(u/2) = 0$ (de même pour les deux autres points). $\square$

Preuve du théorème 11.15

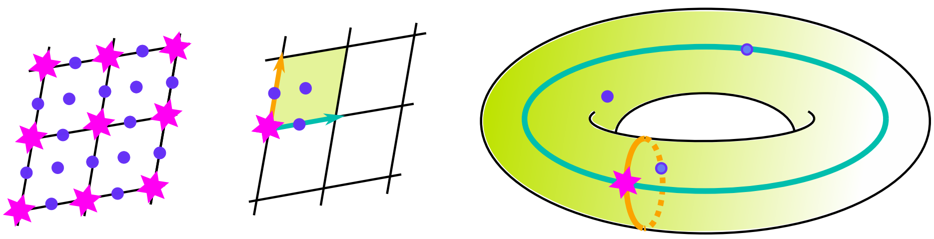
La parité de la fonction $\wp$ est claire puisque, L étant un groupe, l'application $\omega \in L \mapsto -\omega \in L$ est une bijection.

Montrons maintenant que la fonction $\wp$ est elliptique. Il sufit de montrer que $\wp$ est invariante sous les translations par les générateurs u et v que nous avons choisis pour L. Soit donc $\omega_0 = u$ ou v, et introduisons la fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ définie par $\psi : z \mapsto \wp(z) - \wp(z+\omega_0)$. Il s'agit de montrer que $\psi \equiv 0$.

Sa dérivée $\psi' : z \mapsto \wp'(z) - \wp'(z+\omega_0)$ est nulle, puisque $\wp'$ est elliptique. Il suit de la proposition 1.10 (que l'on applique sur l'ouvert connexe $\mathbb{C} \setminus L$ où ψ est holomorphe) que ψ est constante. Le point $-\omega_0/2 \notin L$ n'est pas un pôle de $\wp$, et la parité de $\wp$ assure que $\psi(-\omega_0/2) = \wp(-\omega_0/2) - \wp(\omega_0/2) = 0$. Ainsi, $\psi \equiv 0$ et $\wp$ est donc elliptique.

La fonction de Weierstrass, qui est elliptique, est de d'ordre 2 puisqu'elle admet un unique pôle double (dans $\mathcal{D}$ ou dans $\mathcal{E}$).

Soit $z_1 \in \mathbb{C} \setminus L$. Puisque $\wp$ est paire, on a $\wp(z_1) = \wp(-z_1)$. Notons $\alpha = \wp(z_1) = \wp(-z_1)$ cette valeur commune.



Les zéros et pôles de $\wp'$ dans $\mathbb{C}$; les trois zéros et le pôle de $\wp'$ dans $\mathcal{D}$, ou dans $\mathcal{E}$.

• Si $-z_1 \not\equiv z_1\,[L]$, ces points se projettent dans $\mathcal{E}$ sur deux points distincts $m_1 = p(z_1)$ et $m_2 = p(-z_1)$ où $\wp$ prend la valeur α. Puisque $\wp$ est d'ordre 2, ce sont les deux seuls points de $\mathcal{E}$ où $\wp$ prend la valeur α. Dans ce cas, on a donc $\{z \in \mathbb{C} \mid \wp(z) = \wp(z_1)\} = \{z \in \mathbb{C} \mid z \equiv \pm z_1\,[L]\}$.

• Si $-z_1 \equiv z_1\,[L]$, c'est-à-dire si $2z_1 \in L$ avec toujours $z_1 \notin L$, c'est que $z_1 \equiv u/2\,[L]$ ou bien $z_1 \equiv v/2\,[L]$ ou encore $z_1 \equiv (u+v)/2\,[L]$. On a vu que la dérivée $\wp'$ de $\wp$ s'annule en ce point, donc $\wp$ prend la valeur α, avec multiplicité 2, au point z_1. La fonction $\wp$ prend donc la valeur α en un seul point $m_1 = p(z_1)$ de $\mathcal{E}$, mais avec multiplicité 2. On a donc dans ce cas $\{z \in \mathbb{C} \mid \wp(z) = \wp(z_1)\} = \{z \in \mathbb{C} \mid z \equiv z_1\,[L]\} = \{z \in \mathbb{C} \mid z \equiv \pm z_1\,[L]\}$. $\square$

D Le corps des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}/L$

Avec la fonction $\wp$, et sa dérivée $\wp'$, que nous venons de construire... nous obtenons toutes les fonctions L-elliptiques !

Théorème 11.18 *Soient $L \subset \mathbb{C}$ un réseau, et $\wp : \mathbb{C} \to \mathcal{S}$ la fonction de Weierstrass correspondante.*

Pour toute fonction L-elliptique f, il existe deux fractions rationnelles $R, S \in \mathbb{C}(X)$ telle que

$$f = R(\wp) + S(\wp)\,\wp'\,.$$

Désignons par $\mathbb{C}(\wp)$ le corps des fractions rationnelles en $\wp$, défini par

$$\mathbb{C}(\wp) = \left\{ \frac{P(\wp)}{Q(\wp)} \mid P, Q \in \mathbb{C}[X] \text{ avec } Q \not\equiv 0 \right\}.$$

Corollaire 11.19 *Le corps des fonctions L-elliptiques est un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{C}(\wp)$, dont une base est donnée par $(\wp, \wp')$.*

Preuve C'est une conséquence immédiate du théorème 11.18.

Ce théorème affirme en effet que toute fonction elliptique s'écrit comme combinaison linéaire, à coefficients dans $\mathbb{C}(\wp)$, des deux fonctions $\wp$ et $\wp'$.

De plus, pour $R, S \in \mathbb{C}(X)$, les deux fonctions $R(\wp)$ et $S(\wp)$ sont paires. Donc la somme $R(\wp) + S(\wp)\,\wp'$ ne peut être nulle que si chacun des termes est nul puisque le premier terme est pair, et le second est impair. □

La preuve du théorème 11.18 va suivre de deux lemmes, dans lesquels nous décrivons successivement une classe plus étendue de fonctions L-elliptiques.

Lemme 11.20 *Soit f une fonction L-elliptique.*

On suppose que f est paire, et que $f : \mathbb{C} \setminus L \to \mathbb{C}$ est holomorphe.

Alors, il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $f = P(\wp)$.

Preuve Si la fonction f n'a pas de pôle en l'origine, elle est constante et le résultat est trivial.

Supposons donc que f admette un pôle en l'origine. Puisque f est paire, son développement en série de Laurent en l'origine ne fait apparaître que des puissances paires de z. L'ordre de ce pôle est donc pair, égal à $2k$ pour un entier $k \geq 1$. Soit $f = g + \varphi$ sa décomposition de Laurent en l'origine, où φ désigne la partie principale. Il existe $a_1, \cdots, a_k \in \mathbb{C}$ avec $a_k \neq 0$ tels que

$$\varphi(z) = \sum_{j=1}^{k} a_j\, z^{-2j}\,.$$

La propriété voulue se démontre par récurrence sur k. Nous avons initialisé la récurrence avec $k = 0$ (lorsque la fonction n'a pas de pôle). Montrons l'hérédité.

La décomposition de Laurent de la fonction $\wp$ en l'origine est $\wp(z) = g_0(z) + z^{-2}$, avec g_0 holomorphe au voisinage de l'origine. Il suit que la fonction elliptique $z \mapsto f(z) - a_k\,(\wp(z))^k$ est paire, avec un pôle d'ordre au plus $2(k-1)$ en l'origine. Ceci conclut la preuve. $\square$

Lemme 11.21 *Soit f une fonction L-elliptique paire.*
Alors, il existe une fraction rationnelle $R \in \mathbb{C}(X)$ tel que $f = R(\wp)$.

Preuve Si tous les pôles de f appartiennent à L, le résultat est acquis par le lemme 11.20. Sinon, la fonction f possède un nombre fini de pôles $z_1, \cdots, z_p$ dans le domaine fondamental $\mathcal{D} \setminus 0$ privé de l'origine. Il existe donc des entiers $k_1, \cdots k_p$ tels que le produit $z \mapsto f(z) \prod_{j=1}^{p} (\wp(z) - \wp(z_j))^{k_j}$ soit une fonction elliptique paire, dont tous les pôles sont dans L. Le résultat annoncé suit alors du lemme 11.20. $\square$

Preuve du théorème 11.18

Soit donc f une fonction L-elliptique. On décompose f en somme de deux fonctions elliptiques $f = f_p + f_i$ avec f_p paire et f_i impaire, en posant $f_p(z) = (1/2)\,(f(z) + f(-z))$ et $f_i(z) = (1/2)\,(f(z) - f(-z))$.

Le quotient $f_i/\wp'$ est une fonction elliptique, qui est paire comme quotient de deux fonctions impaires. Le résultat annoncé est donc conséquence du lemme 11.21 que l'on applique maintenant à f_p et à $f_i/\wp'$. $\square$

E Equation fonctionnelle pour $\wp$

Les fonctions $\wp$ et $\wp'$ sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{C}$, et même sur $\mathbb{C}(\wp)$ (l'une est paire, l'autre est impaire). Elles satisfont néanmoins une relation algébrique, de degré 3.

Notation 11.22 Soit $L \subset \mathbb{C}$ un réseau. Pour tout entier $k \geq 3$, on définit $G_k = \sum_{\omega \in L\,,\,\omega \neq 0} \omega^{-k}$ (cette série converge, voir le lemme 11.16). On observe que, lorsque k est impair, la constante G_k est nulle.

On pose $g_2 = 60\,G_4$ et $g_3 = 140\,G_6$.

Proposition 11.23 *La fonction $\wp$ satisfait l'équation fonctionnelle*

$$\begin{aligned} \wp'^2 &= 4\,\wp^3 - g_2\,\wp - g_3 \\ &= 4(\wp - e_1)(\wp - e_2)(\wp - e_3) \end{aligned} \tag{11.4}$$

où e_1, e_2, e_3 sont les valeurs prises par $\wp$ aux points $u/2, v/2, (u+v)/2$.

La différence $\wp'^2 - 4\,\wp^3 + g_2\,\wp$ est une fonction elliptique. Nous allons montrer qu'elle n'a pas de pôle. Elle sera donc constante, et il ne nous restera qu'à calculer sa valeur.

Lemme 11.24 *Le développement en série de Laurent de $\wp$ en l'origine s'écrit*

$$\wp(z) = z^{-2} + \sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)\, G_{2n+2}(L)\, z^{2n}\,.$$

Preuve Nous connaisons déjà la partie principale de $\wp$ en l'origine, c'est $\varphi_0 : z \mapsto z^{-2}$. Il s'agit donc maintenant de déterminer le développement en série de Taylor de la partie régulière $g = \wp - \varphi_0$ en l'origine , où

$$g : z \mapsto \sum_{\omega\in L, \omega\neq 0}\Big(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\Big)\,.$$

Il s'agit d'une série de fonctions méromorphes qui converge normalement sur les compacts. On peut donc dériver terme à terme. On obtient alors par récurrence sur n que la dérivée d'ordre n de g est

$$g^{(n)}(z) = (-1)^n(n+1)!\,\Big(\sum_{\omega\in L,\omega\neq 0}(z-\omega)^{n+2}\Big)\,.$$

En particulier $g(0) = 0$. Toutes les dérivées d'ordre impair de g en 0 sont nulles (ce n'est pas une surprise car $\wp$ est paire). Le résultat suit. $\square$

Preuve de la proposition 11.23

Nous venons de démontrer que le développement en série de Laurent de $\wp$ en l'origine commence comme suit

$$\wp(z) = z^{-2} + 3G_4z^2 + 5G_6z^4 + \cdots$$

En dérivant terme à terme (ce qui est licite, puisque la série de Laurent converge normalement sur des couronnes compactes autour de l'origine), puis en élevant ces développement au cube ou bien au carré, on obtient

$$\begin{aligned}\wp'(z) &= -2z^{-3} + 6G_4z \;+\; 20G_6z^3 + \cdots\\ (\wp(z))^3 &= \;\; z^{-6} + \;9\,G_4z^{-2} + 15G_6 + \cdots\\ (\wp'(z))^2 &= \;4z^{-6} - 24G_4z^{-2} - 80G_6 + \cdots\end{aligned}$$

On vérifie alors que la fonction $\wp'^2 - 4\,\wp^3 + 60G_4\,\wp$ est une fonction elliptique sans pôles, dont la valeur en 0 est $-140G_6$. On conclut avec le lemme 11.5, qui assure que cette fonction est constante. Enfin, les trois zéros de $\wp'$ correspondent aux valeurs e_1, e_2, e_3 prises par la fonction $\wp$ aux points demi-entiers du réseau. $\square$

Exercice 11.25 Déduire de l'équation fonctionnelle (11.4) les relations suivantes

$$2\wp^{(2)} = 12\wp^2 - g_2\,, \quad \wp^{(3)} = 12\wp\wp'\,, \quad \wp^{(4)} = 120\wp^3 - 18g_2\wp - 12g_3\,.$$

On peut bien sûr continuer à dériver et à substituer, et obtenir ainsi tout plein de telles relations.

En identifiant les développements de Laurent des deux membres de chaque égalité, on en déduit des relations entre les coefficients G_n (qui sont les sommes des séries dites de Eisenstein). Chaque G_n, pour $n \geq 8$, s'obtient comme un polynôme en G_4 et G_6 (ce polynôme ne dépendant évidemment pas du réseau considéré ; sinon ce n'aurait pas grand intérêt ☺).

F Lien avec les intégrales elliptiques

Comme annoncé dans l'introduction de ce chapitre, un petit paragraphe culturel pour justifier la terminologie.

Nous nous intéressons aux primitives $\int \frac{dt}{\sqrt{P(t)}}$, où P est un polynôme qui n'a que des racines simples.

• Commençons par l'exemple du polynôme $P(t) = 1 - t^2$, de degré 2. La fonction $t \mapsto 1/\sqrt{P(t)}$ admet pour primitive la fonction $g : x \mapsto \arcsin x$. Mais la bonne fonction à introduire est la fonction réciproque f de g. Il s'agit en effet de la fonction sin, qui se prolonge en une fonction méromorphe $2i\pi$-périodique $f : \mathbb{C} \to \mathcal{S}$.

• Donnons-nous maintenant un polynôme P de degré 3 à racines simples, et supposons que ce polynôme soit associé à un réseau “réel” $L = \mathbb{Z}u + \mathbb{Z}(iv)$ où $u, v \in \mathbb{R}^*$, c'est-à-dire que $P(t) = 4t^3 - g_2 t - g_3$. Le réseau étant supposé stable par conjugaison, on observe que les quantités g_2 et g_3 sont réelles, et que la fonction de Weierstrass $\wp$ prend des valeurs réelles sur la droite réelle. Notons x_0 la plus grande racine réelle de P, de sorte que $P(t) > 0$ pour $t > x_0$. La fonction $t \mapsto 1/\sqrt{P(t)}$ admet pour primitive, sur l'intervalle $]x_0, \infty[$, la fonction $g : x \mapsto -\int_x^\infty (1/\sqrt{P(t)})dt$. Cette fonction g admettant une dérivée partout strictement positive, elle admet une réciproque que nous noterons f.

Les dérivées de g, et de sa fonction réciproque f satisfont la relation $(g' \circ f)\, f' = 1$. On connaît la dérivée de g... on obtient donc la relation

$$(f')^2 = P(f) = 4f^3 - g_2 f - g_3\,,$$

valable sur tout l'intervalle de définition I de f. On reconnaît la relation fonctionnelle (11.4) satisfaite par $\wp$! Il suit que f est la restriction à I d'une translatée de la fonction de Weierstrass $\wp$ du réseau L... elle se prolonge donc en une fonction méromorphe doublement périodique sur $\mathbb{C}$.

• La construction précédente se généralise à tout polynôme P de degré 3 ou 4, ne possédant que des racines simples. On obtient de nouveau une fonction méromorphe doublement périodique.

Pour des polynômes de degré supérieur, on obtient des relations de périodicité plus subtiles.

G Courbes elliptiques comme cubiques de $\mathrm{P}^2\mathbb{C}$

Enfin, un petit peu de géométrie pour conclure ce chapitre.

On commence par réaliser à l'aide de la fonction $\wp$ la courbe elliptique $\mathcal{E}$, privée de l'origine, comme une cubique de $\mathbb{C}^2$.

Définition 11.26 *Une cubique $\mathcal{C} \subset \mathbb{C}^2$ est le l'ensemble*

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \,|\, P(x, y) = 0\}$$

des zéros d'un polynôme $P \in \mathbb{C}[X, Y]$ de degré 3.

Notons $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E} \setminus p(0)$ notre courbe elliptique, privée de l'unique pôle dans $\mathcal{E}$ de la fonction de Weierstrass.

Proposition 11.27 *Soit $\mathcal{C} \subset \mathbb{C}^2$ la cubique d'équation*

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3\} .$$

L'application $I : m \in \mathcal{E}_0 \mapsto (\wp(m), \wp'(m)) \in \mathcal{C}$ réalise une bijection (et même un homéomorphisme) entre la courbe elliptique privée du point $p(0)$, soit $\mathcal{E}_0$, et la cubique de $\mathcal{C} \subset \mathbb{C}^2$.

Pour simplifier l'écriture, on se permet désormais d'identifier ce qui se passe dans $\mathbb{C}$, et dans la courbe elliptique $\mathbb{C}/L$.

Preuve L'équation fonctionnelle (11.4) assure que l'application I est bien à valeurs dans la cubique $\mathcal{C}$.

Soit $(x, y) \in \mathcal{C}$. Il existe deux points m et $-m$ de $\mathcal{E}_0$ tels que $\wp(m) = \wp(-m) = x$.

Si $4x^3 - g_2 x - g_3 = 0$, alors $y = 0$ et $\wp'(m) = 0$, c'est-à-dire que $m = -m$. Donc m est l'unique point de $\mathcal{E}_0$ tel que $I(m) = (x, y)$.

Si $4x^3 - g_2 x - g_3 \neq 0$, alors $y \neq 0$ a deux racines carrées distinctes α et $-\alpha$. Quitte à échanger m et $-m$, on a alors $\wp(m) = \alpha$ et $\wp(-m) = -\alpha$. De nouveau, m est l'unique antécédent de (x, y) par I. □

Ce qui est bien dommage, c'est que l'on n'ait pas su où mettre le point $0 \in \mathcal{E}$ dans $\mathbb{C}^2$. Vous vous en doutez maintenant... on va le mettre à l'infini !

Comme vous n'avez jamais vu de géométrie projective, et que ce n'est pas le moment de s'y mettre, on va juste donner quelques points de repère.

Le plan projectif complexe $\mathrm{P}^2\mathbb{C}$ est l'ensemble des droites vectorielles complexes (sous-espaces vectoriels complexes de dimension 1) dans $\mathbb{C}^3$.

Le plan projectif $\mathrm{P}^2\mathbb{C}$ s'identifie au quotient $(\mathbb{C}^3 \setminus 0)/\sim$, par la relation d'équivalence qui identifie deux vecteurs non nuls de $\mathbb{C}^3$ si et seulement si ils sont proportionnels.

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ un vecteur non nul. Il engendre une droite vectorielle, qui est donc un élément de $\mathrm{P}^2\mathbb{C}$, et que nous désignerons par $[x, y, z]$. Par définition, on a l'égalité $[x, y, z] = [tx, ty, tz]$ pour tout complexe $t \neq 0$.

Notre vecteur non nul (x, y, z) possède au moins une coordonnée non nulle. Supposons que sa dernière coordonnée z soit non nulle (si on était dans $\mathbb{R}^3$, avec le repère que nous avons tous dans la tête, cela signifierait que le vecteur n'est pas horizontal). Alors on a $[x, y, z] = [x/z, y/z, 1]$.

Il suit que l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbb{C}^3$ "qui ne sont pas horizontales" (ou, plus sérieusement, qui ne sont pas dans le plan engendré par les deux premiers vecteurs de coordonnées) s'identifie naturellement à $\mathbb{C}^2$ par l'injection $(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mapsto [x, y, 1] \in \mathrm{P}^2\mathbb{C}$.

On peut donc plonger $\mathcal{E}_0$ dans $\mathrm{P}^2\mathbb{C}$ par l'application

$$\mathcal{I} : m \in \mathcal{E}_0 \mapsto [\wp(m), \wp'(m), 1] \in \mathrm{P}^2\mathbb{C}\,.$$

Qu'y a-t-on gagné ? Lorsque $m \to 0$ dans $\mathcal{E}$, nous savons que $|\wp(m)| \to \infty$, et $|\wp'(m)| \to \infty$... mais pas de la même façon car $\wp$ et $\wp'$ ont respectivement un pôle d'ordre 2, et d'ordre 3, en l'origine. On a donc $\wp(m)/\wp'(m) \to 0$ lorsque $m \to 0$.

Ecrivons alors, pour $m \in \mathcal{E}_0$ suffisament proche de l'origine pour que $\wp'(m)$ ne s'annule pas,

$$\mathcal{I}(m) = \Big[\frac{\wp(m)}{\wp'(m)}, 1, \frac{1}{\wp'(m)}\Big]\,.$$

Sous cette forme on observe que la droite $\mathcal{I}(m)$ se rapproche, quand $m \to 0$, de la droite engendrée par le vecteur $[0, 1, 0]$. L'application $\mathcal{I}$ se prolonge donc par continuité à $\mathcal{E}$, en posant $\mathcal{I}(0) = [0, 1, 0]$, en une application

$$\mathcal{I} : \mathcal{E}_0 \to \hat{C}$$

de la courbe elliptique $\mathcal{E}$ sur la cubique $\hat{C} \subset \mathrm{P}^2\mathbb{C}$ définie par l'équation homogène

$$\hat{C} = \{[x, y, z] \mid zy^2 = 4x^3 - g_2 z^2 x - g_3 z^3\}\,.$$

On vérifie facilement que cette application est encore bijective. Puisque $\mathcal{E}$ est compact, cette bijection est un homéomorphisme.

Loi de groupe sur une cubique

La cubique $\mathcal{E} = \mathbb{C}/L$ est munie d'une structure de groupe qui provient, par passage au quotient, de la structure de groupe de $\mathbb{C}$. La bijection $\mathcal{I} : \mathcal{E} \to \hat{C}$ que nous venons de construire permet de transporter cette structure de groupe sur la cubique $\hat{C}$. La structure de groupe que l'on récupère ainsi sur $\hat{C}$ a une très belle interprétation géométrique, que nous présentons dans l'exercice suivant.

Exercice 11.28 La formule d'addition. On introduit, pour $w \notin L/2$, la fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ définie par

$$f_w(z) = \wp(z+w) + \wp(z) + \wp(w) - \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(z) - \wp'(w)}{\wp(z) - \wp(w)}\right)^2 .$$

1. Montrer que f_w est une fonction L-elliptique, holomorphe en dehors des points $z \in L$ et $z = \pm w \bmod L$.
2. Montrer ensuite que f_w est constante, puis nulle.
3. En déduire la "Formule d'addition" : pour $z, w, z \pm w \notin L$, on a

$$\wp(z+w) = \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(z) - \wp'(w)}{\wp(z) - \wp(w)}\right)^2 - \wp(z) - \wp(w) .$$

Exercice 11.29 Structure de groupe sur $\hat{C}$.

1. Montrer que pour $u, v \in \mathbb{C}$ avec $u, v, u+v \notin L$, on a

$$\left(\frac{\wp'(u) - \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)}\right)^2 = \left(\frac{\wp'(u+v) + \wp'(v)}{\wp(u+v) - \wp(v)}\right)^2$$

(écrire la Formule d'addition en $(z, w) = (u, v)$ et en $(z, w) = (u+v, -v)$).
2. Tester l'identité précédente sur le couple $(u, -2u)$ pour montrer plus précisément que, pour $u, v \in \mathbb{C}$ avec $u, v, u+v \notin L$, on a

$$\frac{\wp'(u) - \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)} = -\frac{\wp'(u+v) + \wp'(v)}{\wp(u+v) - \wp(v)} .$$

3. En déduire que si $u, v, w \in \mathbb{C}$ sont trois points distincts satisfaisant l'équation $u+v+w \equiv 0\,[L]$, leurs images $(\mathcal{I}(u), \mathcal{I}(v), \mathcal{I}(w))$ sont alignées.

Illustrons notre propos par un dessin :

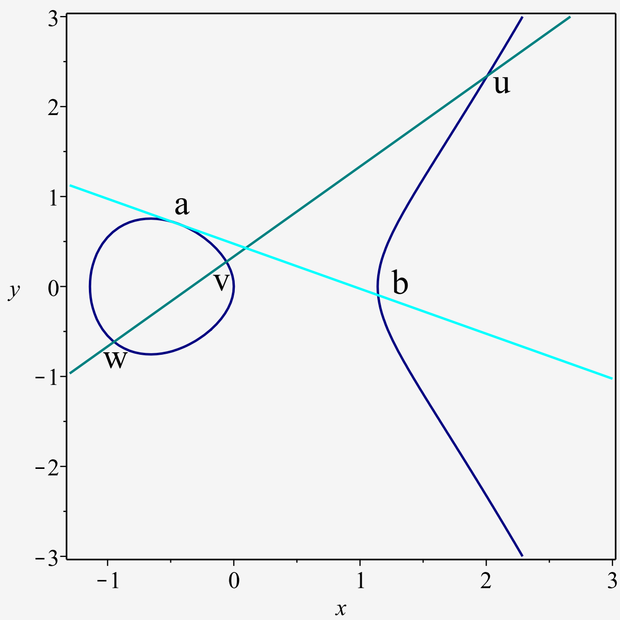
Une droite et un cercle se coupent en deux points, ou un seul – qui compte double, si la droite est tangente au cercle – ou aucun... c'est alors que ces deux points d'intersection (qui existent bel et bien) sont complexes !

De même une droite et une cubique se coupent en trois points qui peuvent parfois être confondus, ou bien imaginaires.

On a dessiné ci-dessous les points réels $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ de la cubique d'équation $y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$, pour des valeurs réelles des paramètres g_2 et g_3.

Une première droite coupe cette cubique en trois points distincts u, v, w (que l'on identifie avec leurs antécédents par $\mathcal{I}$ dans la courbe elliptique $\mathcal{E}$). Ces trois points $u, v, w \in \mathcal{E}$ vérifient donc la relation $u + v + w = 0$.

Une seconde droite est tangente à la cubique au point a (tout se passe donc comme si la droite coupait "deux fois" la cubique en a), et intersecte de nouveau la cubique au point b. Ces deux points $a, b \in \mathcal{E}$ vérifient donc la relation $2a + b = 0$.



12. Formule de Cauchy homologique

A Lacets homologues

Nous avons démontré (corollaire 4.11 et théorème 7.6) les résultats suivants, auxquels il faut penser comme des versions locales du théorème et de la formule de Cauchy que nous allons énoncer dans ce chapitre.

Rappel 12.1 *Soient $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert étoilé et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soit $\gamma \subset U$ un lacet. Alors*

(1) **Théorème de Cauchy :** $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$.

(2) **Formule de Cauchy :** *pour tout point $a \in U$ n'appartenant pas au support de γ on a*

$$f(a) \operatorname{Ind}(\gamma, a) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\, dz\,.$$

L'exemple, désormais familier, de la fonction $z \in \mathbb{C}^* \mapsto 1/z \in \mathbb{C}$ et du lacet c_1 défini par $t \in [0,1] \mapsto e^{2i\pi t} \in \mathbb{C}$ paramétrant le cercle unité nous a convaincus que le théorème de Cauchy ne pouvait se généraliser sans précautions à un ouvert non étoilé.

Il est donc naturel de se poser les deux questions suivantes :

• Donné un ouvert $U \subset \mathbb{C}$, quelle condition doit-on imposer au lacet $\gamma \subset U$ pour que les propriétés (1) et (2) soient satisfaites pour toute fonction holomorphe sur U. Nous répondrons à cette question dans le paragraphe B.

• Caractériser les ouverts $U \subset \mathbb{C}$ pour lesquels les propriétés (1) et (2) sont satisfaites pour tout lacet $\gamma \subset U$, et toute fonction holomorphe sur U. Cette question, bien plus délicate, sera évoquée au paragraphe D.

Commençons par la première question. Soit γ un lacet tracé dans U. Nous voulons que le théorème de Cauchy 12.1(1) soit satisfait, pour ce lacet γ, et pour toute fonction holomorphe sur U.

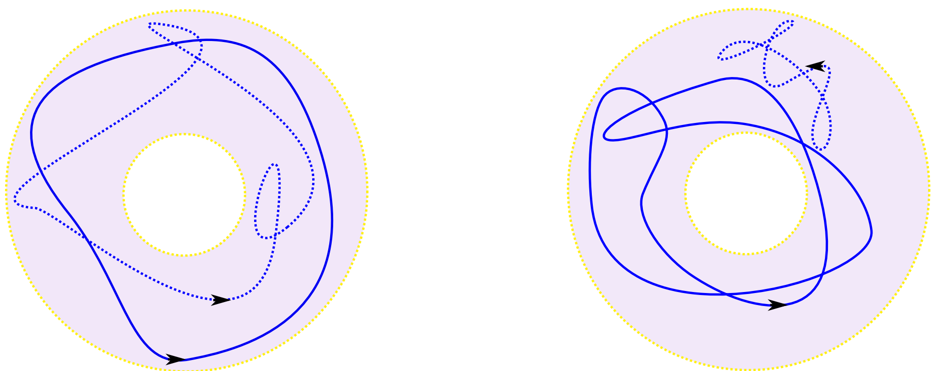
Exemple 12.2 *Pour tout point $\alpha \in \mathbb{C} \setminus U$ pris hors de U, la fonction f_α : $z \in U \mapsto 1/(z-\alpha) \in \mathbb{C}$ est holomorphe sur U. Demander à ce que 12.1(1) soit satisfait sur le lacet γ, pour cette fonction f_α équivaut à demander que l'indice* $\operatorname{Ind}(\gamma, \alpha)$ *soit nul.*

Cette famille d'exemples nous amène immédiatement à la définition suivante.

Définition 12.3 *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe.*
– *Un lacet $\gamma \subset U$ est* homologue à 0 *lorsque pour tout point $\alpha \notin U$, on a* $\mathrm{Ind}\,(\gamma, \alpha) = 0$*.*
– *Deux lacets γ_1 et γ_2 tracés dans U sont* homologues *lorsque, pour tout point $\alpha \notin U$, on a* $\mathrm{Ind}\,(\gamma_1, \alpha) = \mathrm{Ind}\,(\gamma_2, \alpha)$*.*

Noter que, sans perte de généralité, nous pouvons supposer que l'ouvert U est connexe. S'il ne l'est pas, on travaille séparément sur chacune de ses composantes connexes. La notion de lacets homologues n'est pertinente que lorsque ces deux lacets appartiennent à la même composante connexe de U.

Remarque 12.4 – La notion de lacets homologues est *relative* à l'ouvert dans lequel on travaille.
– “Homologue à 0” veut en fait dire “homologue à un lacet constant”.
– Dans un ouvert étoilé, tout lacet est homologue à 0.



Dans un anneau :
à gauche deux lacets homologues, mais pas homologues à 0 ;
à droite, deux lacets homologues à 0.

Avec la terminologie que nous venons d'introduire, une condition nécessaire pour que le théorème de Cauchy 12.1(1) soit vrai sur le lacet γ, pour toute fonction holomorphe sur U, est donc que ce lacet soit homologue à 0 (exemple 12.2). Nous allons voir dans le paragraphe B que cette condition est également suffisante. Fantastique, n'est-ce pas ?! ☺

B Théorème et formule de Cauchy homologiques

Dans un ouvert quelconque, la formule de Cauchy s'énonce comme suit.

Théorème 12.5 Formule de Cauchy homologique

Soient $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{C}$ holomorphe. Soit $\gamma \subset U$ un lacet homologue à 0. Alors, pour tout point $a \in U$ n'appartenant pas au support de γ on a

$$f(a)\,\mathrm{Ind}\,(\gamma, a) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz\,.$$

On en déduit immédiatement la version suivante du théorème de Cauchy.

Corollaire 12.6 Théorème de Cauchy homologique

Soient $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{C}$ holomorphe. Soit $\gamma \subset U$ un lacet homologue à 0. Alors,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0\,.$$

Preuve On applique simplement la formule de Cauchy homologique à la fonction holomorphe $g : U \to \mathbb{C}$ définie par $g(z) = (z-a)\,f(z)$, qui s'annule au point $a \in U \setminus \gamma$. □

Preuve du théorème 12.5 Il s'agit, comme dans la preuve du cas étoilé (théorème 7.6), de vérifier que l'on a pour tout $a \in U \setminus \gamma$:

$$\int_\gamma \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz = 0\,.$$

Pour cela, nous introduisons la fonction

$$h : a \in U \setminus \gamma \mapsto \int_\gamma \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz \in \mathbb{C}\,.$$

Nous allons montrer que la fonction $h : U \setminus \gamma \to \mathbb{C}$ se prolonge en une fonction holomorphe $h_1 : U \to \mathbb{C}$ (lemme 12.7), puis en une fonction entière $h_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ qui tend vers 0 à l'infini (lemme 12.8). Le théorème de Liouville assure alors que $h_2 \equiv 0$, et donc $h \equiv 0$ ce qu'on voulait démontrer. □

Introduisons la fonction $q : U \times U \to \mathbb{C}$ définie par

$$q(z,a) = \frac{f(z)-f(a)}{z-a} \quad \text{si } z \neq a \quad \text{et} \qquad q(a,a) = f'(a)\,.$$

Il nous reste donc, pour conclure la démonstration du théorème 12.5, à démontrer les deux lemmes suivants.

Lemme 12.7 *La fonction $h_1 : a \in U \mapsto \int_\gamma q(z,a)\,dz$ est holomorphe sur U.*

Preuve • On commence par vérifier que q est continue sur $U \times U$ et que, pour tout $z \in U$, la restriction $q_z : a \in U \mapsto q(z,a) \in \mathbb{C}$ est holomorphe.

Par construction, q est continue hors de la diagonale. La continuité de q au point (a,a) suit de la continuité de la dérivée f' au point a : pour $z_1, z_2 \in U$ proches de a de sorte que le segment $[z_1, z_2]$ soit inclus dans U, on a en effet

$$f(z_2) - f(z_1) = (z_2 - z_1) \int_0^1 f'(z_1 + t(z_2 - z_1))\, dt\,.$$

Le fait que q_z soit holomorphe est désormais bien connu de nous (preuve du théorème 7.6).

• Il est clair que h_1 prolonge h. L'holomorphie de h_1 découle du théorème 5.18 (holomorphie sous le signe intégrale). □

Dans le lemme précédent, nous n'avons pas encore utilisé l'hypothèse faite sur le lacet γ, qui doit être homologue à zéro. Introduisons maintenant

$$\Omega_\gamma := \{a \in \mathbb{C} \setminus \gamma\ ,\ \operatorname{Ind}(\gamma, a) = 0\}\,,$$

qui est un voisinage ouvert de l'infini (proposition 7.2), et la fonction

$$k : a \in \Omega_\gamma \mapsto \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\, dz \in \mathbb{C}\,.$$

Puisque le lacet $\gamma \subset U$ est homologue à 0, on a $\mathbb{C} = U \cup \Omega_\gamma$.

Lemme 12.8 *La fonction k est holomorphe, et $k(a) \to 0$ lorsque $|a| \to \infty$.*

Les fonctions h_1 et k coïncident sur leur domaine commun de définition, soit $U \cap \Omega_\gamma$, et se prolongent donc en une même fonction entière $h_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Preuve Le fait que k soit holomorphe découle de nouveau de l'holomorphie sous le signe intégrale. Et il est immédiat de voir que k tend vers 0 à l'infini. Pour $a \in \Omega_\gamma$, on a par définition de l'indice, $\int_\gamma \frac{1}{z-a}\, dz = 2i\pi \operatorname{Ind}(\gamma, a) = 0$. On a donc, lorsque $a \in U \cap \Omega_\gamma$, les égalités

$$h_1(a) = h(a) = \int_\gamma \frac{f(z) - f(a)}{z-a}\, dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\, dz - \int_\gamma \frac{f(a)}{z-a}\, dz = k(a)\,. \quad \square$$

Du théorème et de la formule de Cauchy homologique, nous allons déduire le corollaire suivant. Rappelons qu'un cas particulier du corollaire 12.9 avait déjà été obtenu à la proposition 7.12 (pour deux lacets concentriques, et une fonction holomorphe définie sur un anneau) et nous avait permis de montrer l'existence de la décomposition de Laurent.

Corollaire 12.9 *Soient $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soient γ_1 et γ_2 deux lacets dans U qui sont homologues. Alors :*

(1) **Théorème de Cauchy :** $\int_{\gamma_1} f(z)\, dz = \int_{\gamma_2} f(z)\, dz$

(2) **Formule de Cauchy :** *pour tout point $a \in U$ n'appartenant pas à la réunion des supports des lacets γ_1 et γ_2, on a*

$$f(a)\Big(\mathrm{Ind}\,(\gamma_1,a)-\mathrm{Ind}\,(\gamma_2,a)\Big)=\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_1}\frac{f(z)}{z-a}\,dz-\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_2}\frac{f(z)}{z-a}\,dz\,.$$

Avant de passer à la preuve, nous commençons par un rappel de topologie.

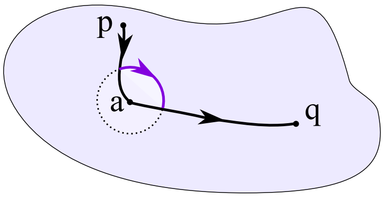
Lemme 12.10 *Soient $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe.*
– L'ouvert U est connexe par arcs continus et C^1 par morceaux.
– Soit $a \in U$. L'ouvert $U \setminus \{a\}$ est encore connexe (et donc connexe par arcs continus et C^1 par morceaux).

Preuve On définit une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur l'ouvert U en décidant que $p\mathcal{R}q$ ssi il existe un chemin continu et C^1 par morceaux, tracé dans U, et joignant p à q. Les classes de cette relation sont ouvertes (car tout point d'une boule $B(p,\varepsilon) \subset U$ est joint à p par un segment tracé dans cette boule – autrement dit l'ouvert U est localement connexe par arcs C^1 par morceaux). Les classes sont donc également fermées, ce qui prouve le premier point.

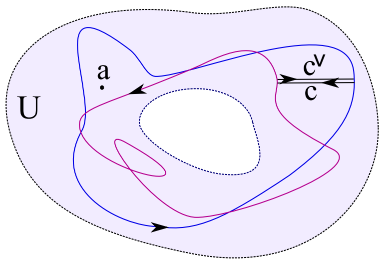
Soient maintenant $p,q \in U\setminus\{a\}$ et choisissons $\varepsilon < \inf(d(p,a),d(q,a))$ et tel que $\overline{B}(a,\varepsilon) \subset U$. Soit $\gamma : [0,1] \to U$ un chemin (continu, ou continu et C^1 par morceaux) joignant p à q. Si γ est tracé dans $U\setminus\{a\}$ on est satisfaits. Sinon on introduit

$$t_0=\inf\{t\in[0,1]\,,\ |\gamma(t)-a|=\varepsilon\} \text{ et } t_1=\sup\{t\in[0,1]\,,\ |\gamma(t)-a|=\varepsilon\}\,.$$

On définit un chemin $\tilde\gamma : [0,1] \to U\setminus\{a\}$ de p à q en posant $\tilde\gamma(t)=\gamma(t)$ pour $0\le t\le t_0$ ou $t_1\le t\le 1$, et en décidant que $\tilde\gamma([t_0,t_1])$ décrit l'un des arcs du cercle $\{|z-a|=\varepsilon\}$ joignant $\gamma(t_0)$ et $\gamma(t_1)$. □



Connexité de $U\setminus\{a\}$:
on prend la rocade pour éviter le centre.



Preuve du corollaire 12.9

Preuve du corollaire 12.9

Supposons γ_1 et γ_2 paramétrés par l'intervalle $[0,1]$ et notons $x_1=\gamma_1(0)$ et $x_2=\gamma_2(0)$. Le lemme précédent assure qu'il existe un chemin c d'extrêmités x_1 et x_2, et tracé dans $U\setminus\{a\}$. Formons le lacet $\gamma := \gamma_1 * c * \gamma_2^\vee * c^\vee$. On observe que, puisque γ_1 et γ_2 sont homologues, le lacet γ est homologue à 0. Ces deux résultats suivent donc du théorème et de la formule de Cauchy (12.5, 12.6), les contributions de c et de $c^\vee$ aux intégrales se compensant. □

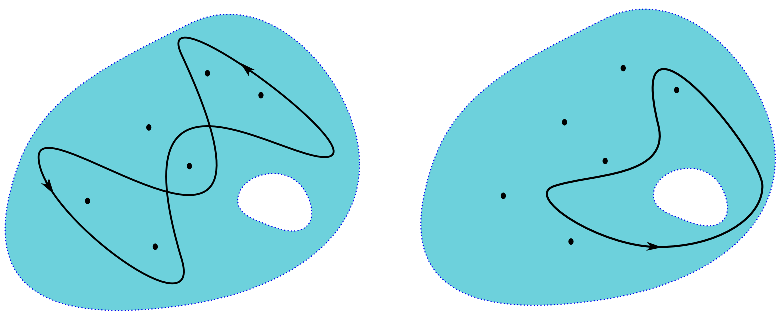
Exercice 12.11 Retrouver la formule de représentation intégrale de Cauchy dans un anneau (proposition 7.12) comme corollaire de la formule de Cauchy ci-dessus.

C De nouveau le théorème des résidus

Nous pouvons maintenant généraliser le théorème des résidus 8.12 à un ouvert quelconque de $\mathbb{C}$. La restriction sur l'ouvert (qui n'est plus supposé étoilé) est maintenant remplacée par une restriction sur le lacet, qui doit être homologue à 0 (voir la remarque 8.13).

Théorème 12.12 Théorème des résidus
Soient $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $\gamma \subset U$ un lacet homologue à 0 dans U. Soient $z_1, \cdots, z_p$ des points distincts dans $U \setminus \gamma$, et $f : U \setminus \{z_1, \cdots, z_p\} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe, présentant des singularités isolées en $z_1, \cdots, z_p$. Alors

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(z)\, dz = \sum_{j=1}^{p} \mathrm{Res}\,(f, z_j)\, \mathrm{Ind}\,(\gamma, z_j)\,.$$



A gauche le théorème des résidus s'applique (que donne-t-il ?) ; pas à droite

Preuve On reprend la preuve du théorème 8.12. Avec les mêmes notations, on justifie maintenant que l'intégrale $\int_\gamma F$ de la fonction holomorphe F sur le lacet γ est encore nulle par le corollaire 12.6. $\square$

En procédant comme dans le corollaire 12.9, on déduit du théorème des résidus l'énoncé suivant.

Corollaire 12.13 *Soient $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe, γ_1 et γ_2 deux lacets homologues de U. Soient $z_1, \cdots, z_p$ des points distincts de U pris hors des supports de γ_1 et de γ_2. Soit $f : U \setminus \{z_1, \cdots, z_p\} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe présentant des singularités isolées en $z_1, \cdots, z_p$. Alors*

$$\frac{1}{2i\pi} \Big(\int_{\gamma_1} f(z)\, dz - \int_{\gamma_2} f(z)\, dz \Big) = \sum_{j=1}^{p} \mathrm{Res}\,(f, z_j)\, \big(\mathrm{Ind}\,(\gamma_1, z_j) - \mathrm{Ind}\,(\gamma_2, z_j)\big)\,.$$

D Espaces simplement connexes

Nous nous intéresserons maintenant à la seconde question de la page 114 : quels sont les ouverts connexes $U \subset \mathbb{C}$ dans lesquels la formule et le théorème de Cauchy sont vérifiés pour tout lacet $\gamma \subset U$ et toute fonction holomorphe $f \in \mathcal{H}(U)$.

Il ressort des discussions précédentes que ce sont les ouverts dans lesquels tout lacet est homologue à zéro. Etudions cette condition.

Proposition-Définition 12.14 *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe. On dit que l'ouvert U est* homologiquement trivial *lorsqu'il satisfait l'une des conditions équivalentes suivantes :*

1. *tout lacet de U est homologue à* 0
2. *toute fonction $f : U \to \mathbb{C}$ holomorphe possède une primitive sur U.*
3. *pour tout point $a \notin U$, la fonction $f_a : z \in U \mapsto 1/(z-a) \in \mathbb{C}$ admet une primitive sur U*

Lorsque ces propriétés sont satisfaites, toute fonction holomorphe sur U ne s'y annulant pas possède un logarithme ainsi que des racines k-ièmes ($k \geq 2$) holomorphes.

Preuve L'implication $1 \Rightarrow 2$ résulte du théorème de Cauchy 12.6, et de la proposition 4.14 (critère pour l'existence d'une primitive).

$2 \Rightarrow 3$ est immédiat.

Supposons 3 vrai. Pour $a \notin U$, la fonction f_a admet une primitive sur U, et son intégrale sur tout lacet $\gamma \subset U$ est donc nulle. On a donc bien $\mathrm{Ind}\,(\gamma, a) = 0$.

L'assertion sur le logarithme et les racines k-ièmes se montre comme dans la proposition 4.15. □

Exemple 12.15 *Un ouvert étoilé est homologiquement trivial.*

Un théorème fondamental dû à Riemann (théorème 12.21) affirme que ces conditions, qui portent sur l'ensemble $\mathcal{H}(U)$ des fonctions holomorphes sur U (conditions 2 et 3) ou bien sur la façon dont U est plongé dans $\mathbb{C}$ (condition 1), reflètent en fait une propriété topologique intrinsèque de l'ouvert U. Pour énoncer ce résultat, nous devons introduire la notion d'homotopie.

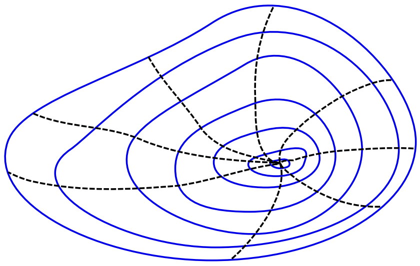
Définition 12.16 *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert.*

Un lacet $\gamma : [0,1] \to U$ est homotope à 0 *lorsqu'il existe une application continue $H : [0,1] \times [0,1] \to U$ telle que :*

— *pour tout $s \in [0,1]$, l'application $H_s : t \in [0,1] \mapsto H(s,t) \in U$ vérifie $H_s(1) = H_s(0)$ (chaque application H_s est un lacet tracé dans U)*
— *l'application H_0 est constante*
— *pour $t \in [0,1]$, on a $H(1,t) = \gamma(t)$, i.e. $H_1 = \gamma$.*

On dit que H est une homotopie *entre le lacet γ et le lacet constant H_0.*

La famille de lacets continus H_s fournit donc une déformation continue, tracée dans l'ouvert U, du lacet initial γ vers un lacet constant.



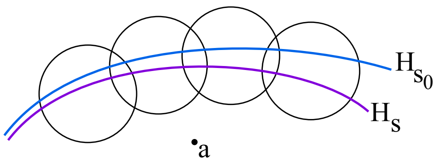
En plein, les lacets $t \mapsto H_s(t)$. En pointillés, les chemins $s \mapsto H(s,t)$.

Exemple 12.17 • *L'application* $H : (s,t) \in [0,1] \times [0,1] \mapsto s\,e^{2i\pi t} \in \mathbb{C}$ *réalise une homotopie entre le lacet constant égal à* 0 *et le lacet* $c_1 : t \in [0,1] \mapsto e^{2i\pi t}$.
• *Dans* $\mathbb{C}$*, ou dans un ouvert convexe* $U \subset \mathbb{C}$*, tout lacet est homotope à* 0.

Proposition 12.18 *Soient* $U \subset \mathbb{C}$ *un ouvert et* γ *un lacet tracé dans* U*. Si* γ *est homotope à* 0*, il est homologue à* 0.

Preuve L'idée géométrique est simple. Expliquons la sans rentrer dans les détails.
Soient $a \in \mathbb{C} \setminus U$ et H une homotopie entre $\gamma = H_0$ et un lacet constant H_1. Nous voulons montrer que l'indice $\mathrm{Ind}\,(H_0, a)$ est nul. L'indice étant à valeurs entières, il suffit de montrer que l'application $s \in [0,1] \mapsto \mathrm{Ind}\,(H_s, a) \in \mathbb{Z}$ est continue, ou localement constante (ce qui revient au même). On aura alors $\mathrm{Ind}\,(H_0, a) = \mathrm{Ind}\,(H_1, a) = 0$.

Pour cela, on revient à l'interprétation géométrique de l'indice (chapitre 7). L'uniforme continuité de H permet de recouvrir le carré $[0,1] \times [0,1]$ par n^2 petits carrés $[j/n, (j+1)/n] \times [k/n, (k+1)/n]$ dont les images par H sont contenues dans des boules dans lesquelles la fonction $f_a : z \mapsto 1/(z-a)$ a une primitive.



Pour $s_0 \in [0,1]$, le lacet H_{s_0} est recouvert par une chaîne prise parmi ces boules. Pour s proche de s_0, le lacet H_s est recouvert par cette même chaîne. Ceci permet de suivre simultanément l'évolution d'une détermination continue de l'argument le long des lacets H_{s_0} et H_s, et donc de voir que les indices $\mathrm{Ind}\,(H_{s_0}, a)$ et $\mathrm{Ind}\,(H_s, a)$ sont proches, donc égaux puisqu'à valeurs entières. □

Définition 12.19 *Un ouvert connexe* $U \subset \mathbb{C}$ *est simplement connexe lorsque tout lacet* $\gamma \subset U$ *est homotope à 0.*

On vérifie sans peine que la simple connexité est une propriété topologique, c'est-à-dire invariante par homéomorphisme.

Exercice 12.20 Montrer qu'un ouvert $U \subset \mathbb{C}$ étoilé est simplement connexe.

Nous voulons maintenant décrire les ouverts simplement connexes de $\mathbb{C}$. La réponse va être étonnament simple.

Théorème 12.21 Théorème de l'application conforme de Riemann

Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) *U est simplement connexe (tout lacet de U est homotope à 0)*

(2) *U est homologiquement trivial (tout lacet de U est homologue à 0)*

(3) *toute fonction holomorphe $f : U \to \mathbb{C}^*$ ne s'annulant pas admet une racine carrée holomorphe*

(4) *ou bien $U = \mathbb{C}$; ou bien il existe un biholomorphisme $h : U \to \mathbb{D}$ entre U et le disque unité.*

Il y a donc, à biholomorphisme près, un unique modèle pour tous les ouverts $U \subsetneq \mathbb{C}$ qui sont simplement connexes : le disque. On dit que ces ouverts sont uniformisés par le disque, le biholomorphisme $h : U \to \mathbb{D}$ étant une uniformisation de U.

Rappelons qu'une application holomorphe dont la dérivée ne s'annule pas préserve les angles orientés : elle est conforme.

Eléments de preuve On a vu
* $1 \Rightarrow 2$ (proposition 12.18)
* $2 \Rightarrow 3$ (proposition 12.14)
* $4 \Rightarrow 1$ (la simple connexité est une propriété topologique).

* Le fait que $3 \Rightarrow 4$ constitue le coeur de de ce théorème. La démonstration, même si elle reste accessible avec nos moyens, est un peu délicate, et fera l'objet du chapitre 13. Nous y évoquerons également quelques exemples. □

Exercice 12.22 Montrer qu'il n'existe pas de biholomorphisme $h : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$.

Montrer cependant que $\mathbb{C}$ et $\mathbb{D}$ sont homéomorphes.

Exercice 12.23 On introduit le demi-plan supérieur $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$. L'application

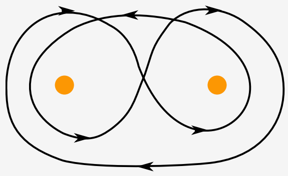
$$z \in \mathbb{H} \mapsto \frac{z-i}{z+i} \in \mathbb{D}$$

réalise un biholomorphisme entre $\mathbb{H}$ et le disque unité $\mathbb{D}$.

Ces deux ouverts $\mathbb{D}$ et $\mathbb{H}$ fournissent deux modèles classiques pour le plan hyperbolique (voir le commentaire p. 82).

Nous avons vu (proposition 12.18) qu'un lacet homotope à 0 est homologue à 0. Par contre, un lacet homologue à 0 n'est pas toujours homotope à 0. Nous donnons un exemple.

Exemple 12.24 *L'ouvert U est le plan complexe privé de deux points, ou de deux disques. Le lacet ci-contre est homologue à 0. On se convainc facilement qu'il n'est par contre pas homotope à 0.*



La démonstration rigoureuse de cette assertion requiert cependant un peu de technique, et fait intervenir le théorème de van Kampen.

Soit $U = \mathbb{C} \setminus \{1, -1\}$ le plan privé de deux points.

Soient $c : t \in [0, 2\pi] \mapsto 1 - e^{it} \in U$ et $d : t \in [0, 2\pi] \mapsto -1 + e^{it} \in U$. Ce sont deux lacets de U d'origine $c(0) = d(0) = 0$. Le théorème de van Kampen assure que le groupe fondamental de U s'identifie au groupe libre $\mathcal{F}(c, d)$ engendré par ces deux éléments. En particulier, le lacet concaténé $c{*}d{*}c^{\vee}{*}d^{\vee}$ n'est pas homotope à 0. Il est par contre évidemment homologue à 0.

13. Le théorème de l'application conforme de Riemann

A Retour sur l'uniformisation

Au chapitre précédent, nous avons introduit la notion d'ouvert $U \subset \mathbb{C}$ simplement connexe et nous avons énoncé le théorème de l'application conforme de Riemann 12.21 qui décrit, à biholomorphismes près, les ouverts simplement connexes de $\mathbb{C}$.

L'objectif de ce chapitre est d'achever la démonstration de ce théorème : il faut démontrer qu'un ouvert simplement connexe $U \subsetneq \mathbb{C}$ est biholomorphe au disque $\mathbb{D}$.

Théorème 13.1 de l'application conforme

Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe, et simplement connexe, distinct de $\mathbb{C}$. Alors il existe un biholomorphisme $h : U \to \mathbb{D}$, c'est-à-dire une bijection biholomorphe entre U et $\mathbb{D}$. On dit que l'ouvert U est uniformisé par le disque.

Remarque 13.2 – Rappelons que, d'après le théorème de Liouville, une fonction entière $f : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ à valeurs dans le disque est constante. Il n'existe donc pas de biholomorphisme entre le plan et le disque.

– Un biholomorphisme est a fortiori un homéomorphisme sur son image. Un ouvert de $\mathbb{C}$ est donc simplement connexe si et seulement si il est homéomorphe au disque (ou au plan $\mathbb{C}$, qui lui est homéomorphe).

– Si U et V sont deux ouverts simplement connexes de $\mathbb{C}$, tous deux distincts de $\mathbb{C}$, il existe donc un biholomorphisme $h : U \to V$. Du point de vue de leur structure complexe, ils sont donc indistinguables.

Exemple 13.3 Uniformisation du demi-plan

Notons $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ le demi-plan supérieur. L'application

$$\varphi : z \in \mathbb{H} \to \frac{z-i}{z+i} \in \mathbb{D}$$

réalise un biholomorphisme entre $\mathbb{H}$ et le disque unité $\mathbb{D}$.

Preuve L'application φ est obtenue comme restriction de l'homographie

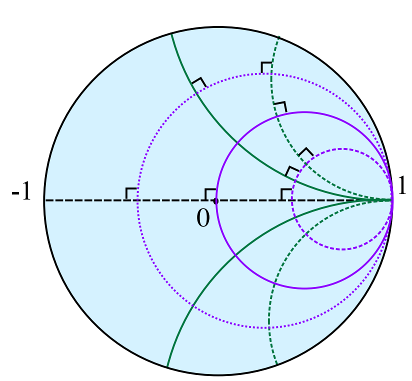
$$\hat{\varphi} : z \in \mathcal{S} \to \frac{z-i}{z+i} \in \mathcal{S}$$

qui est un homéomorphisme (et même un biholomorphisme) de la sphère de Riemann sur elle-même.

On vérifie sans peine que l'image $\hat{\varphi}(\mathbb{R} \cup \{\infty\})$ de la droite réelle complétée par le point à l'infini est le cercle unité $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$. Le complémentaire de $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ dans $\mathcal{S} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ a deux composantes connexes, qui sont le demi-plan inférieur $\mathbb{H}_- = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z < 0\}$ qinsi que le demi-plan supérieur $\mathbb{H}$.

Le complémentaire de $\mathbb{S}^1$ dans $\mathcal{S} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ a deux composantes connexes, qui sont le disque $\mathbb{D}$, et $\Omega = \{z \in \mathbb{C},\ |z| > 1\} \cup \{\infty\}$. Puisque $\varphi(i) = 0 \in \mathbb{D}$, on a bien $\varphi(\mathbb{H}) = \mathbb{D}$ comme annoncé. $\square$

Pour "dessiner" l'application $\varphi : \mathbb{H} \to \mathbb{D}$ on remarque que, comme toute homographie, $\hat{\varphi} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ envoie un cercle, ou la réunion d'une droite et du point à l'infini, sur un cercle ou bien sur la réunion d'une droite et du point à l'infini. De plus $\hat{\varphi}$ étant holomorphe, elle est conforme donc envoie deux courbes (ici, cercles ou droites) se coupant à angle droit sur deux autres courbes se coupant à angle droit. Puisque $\hat{\varphi}(0) = -1$, $\hat{\varphi}(i) = 0$, $\hat{\varphi}(-i) = \infty$ et $\hat{\varphi}(\infty) = 1$, on obtient la configuration suivante.



Uniformisation du demi-plan par le disque

Exemple 13.4 Uniformisation d'une bande

Soit $\mathcal{B} = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$. L'application

$$z \in \mathcal{B} \to e^z \in \mathbb{H}$$

réalise un biholomorphisme entre la bande $\mathcal{B}$ et le demi-plan $\mathbb{H}$. On en déduit par composition une uniformisation

$$z \in \mathcal{B}_a \to \varphi\left(\exp(\pi z/a)\right) \in \mathbb{D}$$

de la bande $\mathcal{B}_a = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Im} z < a\}$ (pour $a > 0$).

Exemple 13.5 Uniformisation d'un rectangle

– Soient a, a', b et b' des réels positifs. Supposons que $a/b = a'/b'$. Dans ce cas, l'homothétie $z \in \mathbb{C} \to a'z/a \in \mathbb{C}$ est un biholomorphisme entre les deux rectangles $\mathcal{R}(0, a, a+ib, ib)$ et $\mathcal{R}(0, a', a'+ib', ib')$.
– Considérons maintenant le carré $\mathcal{C} =]0,1[\times]0,1[$ ainsi que le rectangle $\mathcal{R} =]0,2[\times]0,1[$. L'existence d'un biholomorphisme entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{R}$ est assurée par le théorème 13.1. Cependant, il n'est pas si évident de produire un biholomorphisme entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{R}$: vous pouvez essayer par vous-même... puis vous reporter à l'exercice (un peu délicat) suivant.

Exercice 13.6 Uniformisation d'un rectangle

Soit un réel $0 < k < 1$. On introduit l'ouvert U obtenu comme $\mathbb{C}$ privé des 4 demi-droites $-1/k + i\mathbb{R}_-$, $-1 + i\mathbb{R}_-$,$1 + i\mathbb{R}_-$ et $1/k + i\mathbb{R}_-$.

1. Esquisser l'ouvert U et montrer qu'il est simplement connexe.
2. (a) Montrer que la fonction $z \in U \to (1-z^2)(1-k^2z^2) \in \mathbb{C}$ admet une unique racine carrée holomorphe $q : U \to \mathbb{C}$ pour laquelle $q(0) = 1$.
   (b) Montrer, pour tout $z \in U$, l'égalité $q(z) = q(-z)$.
3. Pour x réel avec $x \neq \pm 1$ et $x \neq \pm 1/k$, montrer les égalités

$$\begin{aligned} q(x) &= \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)} && \text{si } 0 < x < 1 \\ q(x) &= -i\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)} && \text{si } 1 < x < 1/k \\ q(x) &= -\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)} && \text{si } 1/k < x\,. \end{aligned}$$

   Pour $z \in U$, on introduit $F(z) = 1/q(z)$.
4. Montrer que la restriction $F : x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1, \pm 1/k\} \to F(x) \in \mathbb{C}$ est intégrable.
5. Pour $0 \leq \varepsilon < 1/k < R$, soient $V(R,\varepsilon) = \{z \in \mathbb{C}\,;\ |z| < R\,,\ \mathrm{Im}\, z > \varepsilon\}$ et $\gamma(R,\varepsilon)$ le bord orienté du domaine $V(R,\varepsilon)$.
   (a) On suppose que $\varepsilon > 0$. Montrer que $\int_{\gamma(R,\varepsilon)} F(w)\,dw = 0$.
   (b) En déduire que $\int_{\gamma(R,0)} F(w)\,dw = 0$, puis que $\int_{\mathbb{R}} F(t)\,dt = 0$.
6. (a) Montrer que la fonction $F : U \to \mathbb{C}$ admet une unique primitive $f : U \to \mathbb{C}$ telle que $f(0) = 0$.
   (b) Montrer que f se prolonge continûment à $\overline{\mathbb{H}} = \{\mathrm{Im}\, z \geq 0\} \cup \{\infty\} \subset \mathcal{S}$ en $f : \overline{\mathbb{H}} \to \mathbb{C}$ et que, pour $x \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, on a $f(x) = \int_0^x F(t)\,dt$.
   (c) Déduire de 2b et 3 qu'il existe deux réels positifs $a, b > 0$ tels que

$$f(1) = a,\ f(1/k) = a + ib,\ \lim_{x \to \pm\infty,\, x \in \mathbb{R}} f(x) = f(\infty) = ib\,.$$

   (d) Montrer que l'image $f(\mathbb{R})$ est le bord du rectangle $\mathcal{R}$ de sommets $a, a+ib, -a+ib, -a$, privé du point ib.
   (e) Montrer que $f(\mathbb{H}) \subset \mathcal{R}$.
   Utiliser $\overline{\mathbb{H}} \subset \mathcal{S}$ compact, et $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ ouverte.

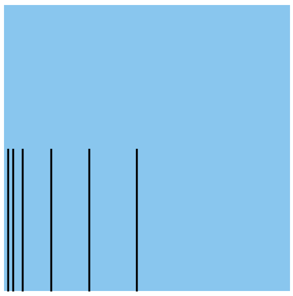
(f) On en déduit que $f(\mathbb{H}) = \mathcal{R}$, i.e. $f : \mathbb{H} \to \mathcal{R}$ est surjective (sinon on aurait une homotopie, dans $\overline{\mathcal{R}}$ privé d'un point $u \in \mathcal{R}$, entre le bord du rectangle $\mathcal{R}$ et un lacet constant).

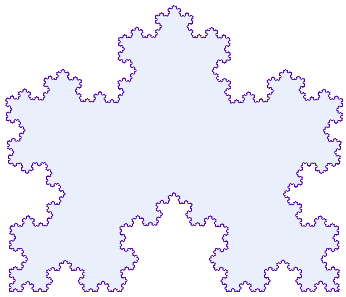
Pour conclure que $f : \mathbb{H} \to \mathcal{R}$ réalise un biholomorphisme entre $\mathbb{H}$ et le rectangle $\mathcal{R}$, on montre que $f : \mathbb{H} \to \mathcal{R}$ est injective (adapter le principe de l'argument sur le"disque" $\overline{\mathbb{H}} \cup \{\infty\} \subset \mathcal{S}$, ou bien utiliser un argument de simple connexité).

Exemple 13.7 Autres exemples d'ouverts simplement connexes

Soit $U \subsetneq \mathbb{C}$ l'ouvert égal au carré $]0,1[\times]0,1[$ privé de la réunion de tous les segments $\cup_{n\geq 2}\{1/n\}\times]0,1/2[$, esquissé (tant bien que mal) ci-après. Il n'est pas difficile de voir que U est simplement connexe. Cet ouvert est donc biholomorphe au disque. Autrement dit il existe une bijection entre U et le disque qui conserve les angles orientés. De nouveau, l'existence d'un tel biholomorphisme ne saute pas aux yeux. Son comportement "au bord de U" sera ici extrêmement compliqué.

De même dans le dessin de droite, où l'ouvert simplement connexe a pour bord une courbe fractale, réunion de courbes de von Koch.





Le carré privé d'un peigne qui s'accumule ;
un ouvert simplement connexe bordé par une courbe fractale

B Familles normales

La preuve du théorème d'uniformisation du paragraphe suivant est une jolie illustration de techniques d'"analyse fonctionnelle", où l'on fait de la "géométrie" sur des espaces de fonctions.

Soit $U \subsetneq \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe. On veut montrer qu'il existe un biholomorphisme $h : U \to \mathbb{D}$. Rappelons qu'une application holomorphe $f : U \to \mathbb{D}$ injective est d'emblée un biholomorphisme sur son image (c'est le corollaire 6.24). Introduisons la famille de fonctions

$$\mathcal{F} = \{f : U \to \mathbb{D} \mid f \text{ est holomorphe et injective}\}.$$

Il suffit donc, pour prouver notre théorème, de trouver une application $h \in \mathcal{F}$ qui soit également surjective, c'est-à-dire telle que $h(U) = \mathbb{D}$.

La belle idée de la démonstration consiste à ramener la recherche d'une application $h \in \mathcal{F}$, qui soit surjective, à la recherche d'un extremum pour une fonctionnelle sur $\mathcal{F}$. On conclura par un argument de compacité. Cet argument de compacité repose sur le théorème suivant (voir par exemple le polycopié "Donjons et dragons").

Théorème 13.8 Théorème d'Ascoli
Soient K un espace métrique compact et $f_n : K \to \mathbb{R}^p$ $(n \in \mathbb{N})$ une suite d'applications continues. On suppose que

— *la suite f_n est à valeurs dans la boule unité $\overline{B(0,1)} \subset \mathbb{R}^p$*

— *il existe une constante k telle que chaque f_n soit k-lipschitzienne.*

On peut alors extraire de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite qui converge uniformément sur K.

Corollaire 13.9 *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f_n : U \to \mathbb{C}$ $(n \in \mathbb{N})$ une suite d'applications holomorphes. On suppose que les fonctions f_n sont toutes à valeurs dans le disque $\mathbb{D}$.*

1. **Familles normales** *Il existe une suite extraite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément sur les compacts de U vers une fonction $f : U \to \mathbb{C}$.*
2. *La fonction f est holomorphe sur U.*
3. *Si f n'est pas constante, elle est à valeurs dans le disque $\mathbb{D}$.*

Preuve du corollaire 2. Une limite uniforme locale de fonctions holomorphes est encore holomorphe (théorème 5.12).

3. Les f_n étant à valeurs dans le disque ouvert, la limite f est à valeurs dans le disque fermé $\{|z| \leq 1\}$. Si f, qui est holomorphe, n'est pas constante elle est ouverte (corollaire 6.22) ; elle prend donc finalement ses valeurs dans le disque ouvert.

1. Le lecteur, s'il n'est pas familier avec le théorème d'Ascoli, et le procédé diagonal, peut admettre ce résultat.

L'ouvert U est réunion $U = \cup_{p\in\mathbb{N}^*} K_p$ de la suite de compacts

$$K_p = \overline{D(0,p)} \cap \{x \in \mathbb{C} \mid d(x, {}^cU) \geq 2/p\} \subset U\,.$$

Noter que $K_p \subset \mathring{K}_{p+1}$. En particulier, tout compact de U est inclus dans l'un des K_p.

Soit $p \geq 1$. On va montrer que la restriction de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à chacun des compacts K_p vérifie les hypothèses du théorème d'Ascoli. On pourra donc extraire, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, une sous-suite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont la restriction à K_p soit uniformément convergente. Le procédé diagonal permettra alors d'extraire de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite qui converge uniformément sur chacun des K_p, et donc uniformément sur chaque compact de U.

Fixons donc $p \geq 1$. Nous voulons montrer qu'il existe une constante k_p telle que les restrictions des (f_n) à K_p soient toutes k_p-lipschitziennes. Puisque chaque f_n est à valeurs dans le disque unité $\mathbb{D}$, les estimées de Cauchy uniformes (corollaire 5.10) assurent que $|f_n'(z)| \leq p$ pour $d(z, {}^cU) \geq 1/p$.

Soient alors $z_1, z_2 \in K_p$. On distingue selon que les points z_1 et z_2 sont proches, ou bien éloignés l'un de l'autre.
– Si $|z_1 - z_2| \leq 1/p$, tout point $z \in [z_1, z_2]$ de ce segment est à distance au moins $1/p$ du complémentaire de U. Le théorème des accroissements finis, et l'estimation ci-dessus de la dérivée des (f_n) assurent qu'on a la majoration $|f(z_1) - f(z_2)| \leq p\,|z_1 - z_2|$.
– Si $|y - z| \geq 1/p$ (le cas facile !), on aura pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|f_n(y) - f_n(z)| \leq 2 \leq 2p\,|y - z|\,. \qquad \square$$

C Preuve du théorème de l'application conforme

Nous découpons la preuve en une série de lemmes que nous énonçons d'emblée pour avoir une vue d'ensemble de la démonstration. On rappelle que $U \subsetneq \mathbb{C}$ désigne un ouvert simplement connexe distinct de $\mathbb{C}$. De la simple connexité de U, nous ne retiendrons "que" la propriété suivante.

Rappel 13.10 (Théorème 12.21.)
Soit $u : U \to \mathbb{C}^*$ holomorphe. Il existe une fonction holomorphe $v : U \to \mathbb{C}^*$ telle que $v^2 = u$.

Choissons désormais un point $z_0 \in U$. Le groupe $\operatorname{Aut}\mathbb{D}$ des automorphismes du disque agissant transitivement sur $\mathbb{D}$, on peut se contenter de chercher une uniformisation $h : U \to \mathbb{D}$ qui envoie z_0 sur l'origine.

Lemme 13.11 *L'ensemble*

$$\mathcal{F}_0 = \{f : U \to \mathbb{D} \mid f \text{ est holomorphe et injective, et } f(z_0) = 0\}\,.$$

est non vide.

On cherche maintenant $h \in \mathcal{F}_0$ qui soit surjective, autrement dit dont l'image $h(U)$ soit maximale. Cela incite à maximiser $|f'(z_0)|$, de sorte que f soit la "plus expansive possible" au point z_0.

Lemme 13.12 *Soit $f \in \mathcal{F}_0$. Si $f : U \to \mathbb{D}$ n'est pas surjective, il existe $f_1 \in \mathcal{F}_0$ telle que $|f_1'(z_0)| > |f'(z_0)|$.*

Lemme 13.13 *Il existe une fonction $h \in \mathcal{F}_0$ telle que*

$$|h'(z_0)| = \sup\{|f'(z_0)|\,,\ f \in \mathcal{F}_0\}\,.$$

Les estimées de Cauchy pour les dérivées assurent a priori que le sup ci-dessus est fini, les fonctions de $\mathcal{F}_0$ étant à valeurs dans le disque. Après ces lemmes, la preuve du théorème de l'application conforme est une formalité.

Preuve du théorème de l'application conforme

Le lemme 13.12 montre que l'application $h : U \to \mathbb{D}$ du lemme 13.13 est surjective. C'est une uniformisation de l'ouvert U. □

Nous passons maintenant à la démonstration des lemmes 13.11, 13.12 et 13.13. Rappelons que, pour tout $\alpha \in \mathbb{D}$, l'application

$$h_\alpha : z \in \mathbb{D} \to \frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha} z} \in \mathbb{D}$$

est un automorphisme du disque tel que $h_\alpha(\alpha) = 0$, et est involutive.

Preuve du lemme 13.11

On commence par construire $w : U \to \mathbb{D}$ holomorphe et injective.

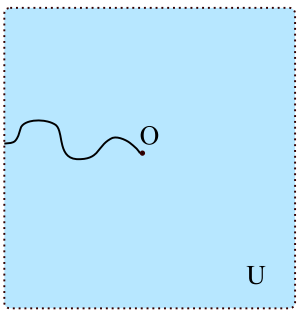
L'ouvert U étant distinct de $\mathbb{C}$, on peut choisir $a \in \mathbb{C} \setminus U$.

Puisque U est simplement connexe, le rappel 13.10 assure que la fonction $u : z \in U \to z - a \in \mathbb{C}^*$ admet une racine carrée holomorphe $v : U \to \mathbb{C}^*$. Puisque $v^2(z) = u(z) = z - a$ pour tout $z \in U$, il suit que $v(y) \neq \pm v(z)$ pour tous $y, z \in U$ distincts.

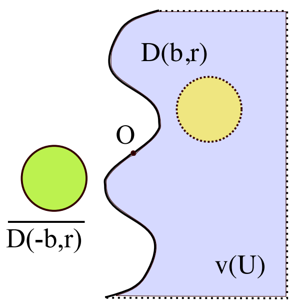
L'application v holomorphe non constante est ouverte. Son image contient un disque $D(b, r) \subset \mathbb{C}^*$; elle évite donc le disque $D(-b, r)$ et même le disque fermé $\overline{D(-b, r)}$. La fonction définie pour $z \in U$ par

$$w(z) = \frac{r}{v(z) + b}$$

est holomorphe sur U, injective comme v, et à valeurs dans le disque $\mathbb{D}$.



L'ouvert U ; ici z_0 est l'origine.



L'image $v(U)$ ("racine carrée") qui évite un disque.

On se préocupe maintenant de la condition $f(z_0) = 0$. Il suffit pour cela de composer w avec un automorphisme du disque bien choisi pour obtenir une application $f = h_{w(z_0)} \circ w \in \mathcal{F}_0$. □

Preuve du lemme 13.12

Soit $f \in \mathcal{F}_0$. On suppose que $f : U \to \mathbb{D}$ n'est pas surjective. Il existe donc $\alpha \in \mathbb{D}$ qui ne soit pas dans l'image $f(U)$. En composant par l'automorphisme h_α, on obtient une fonction $h_\alpha \circ f : U \to \mathbb{D}$ qui ne s'annule pas et admet donc une racine carrée holomorphe g, qui est injective (puisque f l'est) et toujours à valeurs dans $\mathbb{D}$. Posons enfin

$$f_1 = h_{g(z_0)} \circ g \,,$$

de sorte que $f_1(z_0) = 0$. Par construction, $f_1 \in \mathcal{F}_0$.

Il nous reste à montrer l'inégalité $|f_1'(z_0)| > |f'(z_0)|$. Soit q l'application $z \in \mathbb{D} \to z^2 \in \mathbb{D}$. On a $h_\alpha \circ f = q \circ g$, donc

$$f = h_\alpha \circ q \circ h_{g(z_0)} \circ f_1 \,.$$

Introduisons $F := h_\alpha \circ q \circ h_{g(z_0)} : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, de sorte que $f = F \circ f_1$. Puisque $f(z_0) = f_1(z_0) = 0$, on a $F(0) = 0$. Comme F n'est pas injective, le lemme de Schwarz (théorème 9.4) assure que $|F'(0)| < 1$. Le résultat suit par dérivation de fonctions composées puisque

$$f'(z_0) = F'(0)\ f_1'(z_0) \,. \qquad \square$$

Preuve du lemme 13.13

Soit $M = \sup\{|f'(z_0)|\,,\ f \in \mathcal{F}_0\}$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{F}_0$ pour lesquelles $|f_n'(z_0)| \to M$.

Ces fonctions étant à valeurs dans le disque, elles forment une famille normale (corollaire 13.9). Quitte à passer à une suite extraite, on peut donc supposer que la suite $f_n : U \to \mathbb{D}$ converge uniformément sur les compacts de U vers une fonction holomorphe $h \in \mathcal{H}(U)$, qui prend *a priori* ses valeurs dans le disque fermé $\overline{\mathbb{D}}$. Nous allons voir que cette application h est bien une uniformisation de U.

– Le théorème 5.12 assure que $h'(z_0) = \lim_{n\to\infty} {f_n}'(z_0)$. Puisque les f_n sont injectives, leurs dérivées ne s'annulent pas (proposition 6.23) donc $|h'(z_0)| = M > 0$. La fonction h n'étant pas constante, elle est donc à valeurs dans le disque ouvert (de nouveau le corollaire 13.9).

– Supposons avoir montré que h est injective (ce sera une conséquence immédiate du théorème de Hurwitz ci-dessous). La surjectivité de h est alors conséquence du lemme 13.12, et de ce que $|h'(z_0)| = M$. $\square$

Il ne nous reste donc pour conclure qu'à démontrer le résultat suivant.

Théorème 13.14 Théorème de Hurwitz

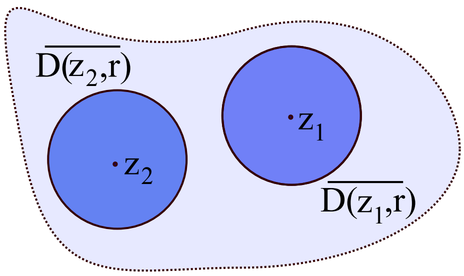
Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, et $f_n : U \to \mathbb{C}$ une suite de fonctions holomorphes qui converge, uniformément sur les compacts de U, vers une fonction holomorphe $h : U \to \mathbb{C}$. On suppose que chacune des fonctions f_n est injective. Alors

— *soit h est constante*
— *soit h est également injective.*

Preuve Supposons h non constante. On veut montrer qu'elle est injective. On va procéder par l'absurde.

Soient z_1 et z_2 deux points distincts de U tels que $h(z_1) = h(z_2) = c$. La fonction h n'étant pas constante, les points où elle prend la valeur c sont isolés. On peut donc choisir deux disques fermés disjoints $\overline{D(z_1, r)} \subset U$ et $\overline{D(z_2, r)} \subset U$ de sorte que $w \to h(w) - c$ ne s'annule pas sur les cercles $\mathcal{C}_i = \{w \ , \ |w - z_i| = r\}$ $(i = 1, 2)$.

Puisque la suite f_n converge uniformément vers h sur les compacts de U (et donc sur la réunion $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$), le théorème de Rouché (corollaire 8.24) montre que, pour n assez grand, les fonctions holomorphes $w \to h(w) - c$ et $w \to f_n(w) - c$ ont le même nombre de zéros dans chacun des disques $\overline{D(z_1, r)}$ et $\overline{D(z_2, r)}$, ce qui contredit l'injectivité de f_n. $\square$



Index