

Exercices sur les intégrales multiples

0. Intégrales multiples avec Maple.

1. Intégrales doubles.
2. Application des intégrales doubles aux intégrales simples.
3. Intégrales triples.
4. Applications au calcul d'aires et de volumes.
5. Applications au calcul de probabilités.
6. Intégrales n -uples.
7. Intégrales multiples impropres.
8. Contre-exemples.
9. Centres de gravité, moments d'inertie.
10. Intégrales curvilignes, formule de Riemann-Green.

Pierre-Jean Hormière



Or, Mrs Evangéline Scorbitt — bien que le moindre calcul lui donnât la migraine — avait du goût pour les mathématiciens, si elle n'en avait pas pour les mathématiques : Elle les considérait comme des êtres d'une espèce particulière et supérieure. Songez donc ! Des têtes où les x ballottent comme des noix dans un sac, des cerveaux qui se jouent avec les signes algébriques, des mains qui jonglent avec les intégrales triples, comme un équilibriste avec des verres et ses bouteilles, des intelligences qui comprennent quelque chose à des formules de ce genre :

$$\iiint \phi(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

Oui ! Ces savants lui paraissent dignes de toutes les admirations et bien faits pour qu'une femme se sentît attirée vers eux proportionnellement aux masses et en raison inverse du carré des distances. Et précisément, J.-T. Maston était assez corpulent pour exercer sur elle une attraction irrésistible, et, quant à la distance, elle serait absolument nulle, s'ils pouvaient jamais être l'un à l'autre.

Jules Verne, Sans dessus dessous

Voilà, pour des jeunes gens pleins de fougue, une ardente motivation pour étudier les intégrales doubles et triples : qui les maîtrise est assuré d'exercer un puissant attrait sur le sexe opposé ! J'ai presque toujours indiqué les réponses. Certains exercices sont corrigés à la fin de mon fascicule d'exercices corrigés sur les fonctions de plusieurs variables.

0. Intégrales multiples avec Maple.

Le package Student[MultivariateCalculus] de Maple 13 permet de calculer des intégrales multiples. On peut faire des calculs en polaires, cylindriques ou sphériques. J'ai préféré ici le package Student de Maple 7, plus sommaire, mais de présentation plus agréable.

> **with(student) ;**

[D, Diff, Doubleint, Int, Limit, Lineint, Product, Sum, Tripleint, changevar, completesquare, distance, equate, integrand, intercept, intparts, leftbox, leftsum, makeproc, middlebox, middlesum, midpoint, powsubs, rightbox, rightsum, showtangent, simpson, slope, summand, trapezoid]

> Doubleint(x+y,y=-x..1,x=-1..1);value(%);

$$\int_{-1}^1 \int_{-x}^1 x+y \, dy \, dx \quad \frac{4}{3}$$

> Doubleint(abs(x+y),y=-1..1,x=-1..1);value(%);

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |x+y| \, dy \, dx \quad \frac{8}{3}$$

> Doubleint(1/(1+x+y),x=0..1,y=0..1);value(%);

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1+x+y} \, dx \, dy \quad -4 \ln(2) + 3 \ln(3)$$

> Doubleint(1/(1+x+y),y=x..1,x=0..1);value(%);

$$\int_0^1 \int_x^1 \frac{1}{1+x+y} \, dy \, dx \quad \frac{3}{2} \ln(3) - 2 \ln(2)$$

> Doubleint(1/(1+x+y),y=0..1-x,x=0..1);value(%);

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{1}{1+x+y} \, dy \, dx \quad -\ln(2) + 1$$

> Doubleint(sqrt(1-r^2)*r*cos(t)*sin(t)/(1+cos(t)^2),r=0..1,t=0..Pi/2);value(%);

$$\int_0^{1/2\pi} \int_0^1 \frac{\sqrt{1-r^2} r \cos(t) \sin(t)}{1+\cos(t)^2} \, dr \, dt \quad \frac{1}{6} \ln(2)$$

> Doubleint(r^3*cos(2*t),r=0..2*cos(t),t=-Pi/2..Pi/2);value(%);

$$\int_{-1/2\pi}^{1/2\pi} \int_0^{2\cos(t)} r^3 \cos(2t) \, dr \, dt \quad \pi$$

> Tripleint(sin(x+y+z),x=0..Pi/2,y=0..Pi/2,z=0..Pi/2);value(%);

$$\int_0^{1/2\pi} \int_0^{1/2\pi} \int_0^{1/2\pi} \sin(x+y+z) \, dx \, dy \, dz \quad 2$$

> Tripleint(x*y*z,z=0..1-x-y,y=0..1-x,x=0..1);value(%);

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} x y z \, dz \, dy \, dx \quad \frac{1}{720}$$

> Tripleint(x^2*y^3*z^4*(1-x-y-z)^5,z=0..1-x-y,y=0..1-x,x=0..1);value(%);

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} x^2 y^3 z^4 (1-x-y-z)^5 \, dz \, dy \, dx \quad \frac{1}{10291881600}$$

1. Intégrales doubles.

Exercice 1 : 1) Calculer $\iint_T (x+y) \, dx \, dy$, où $T = \{ (x, y) ; x \leq 1, y \leq 1 \text{ et } x+y \geq 0 \}$.

2) Calculer $\iint_C |x+y| \, dx \, dy$, où $C = [-1, +1] \times [-1, +1]$ [Réponses : $\frac{4}{3}, \frac{8}{3}$]

Exercice 2 : Soit $C = [a, b]^2$. Calculer

$$\frac{1}{(b-a)^2} \iint_C (x+y).dxdy, \frac{1}{(b-a)^2} \iint_C |x-y|.dxdy, \frac{1}{(b-a)^2} \iint_C \max(x,y).dxdy, \frac{1}{(b-a)^2} \iint_C \min(x,y).dxdy.$$

Interprétation probabiliste. [Réponses : $a+b$, $\frac{b-a}{3}$, $\frac{a+2b}{3}$, $\frac{2a+b}{3}$; cf. § 5.]

Exercice 3 : Calculer $\iint_K \frac{dx.dy}{1+x+y}$ et $\iint_K \frac{dx.dy}{(1+x+y)^2}$ pour :

$$K = [0, 1]^2, \text{ resp. } K = \{ (x, y) ; 0 \leq x \leq y \leq 1 \}, K = \{ (x, y) \in \mathbf{R}_+^2 ; x+y \leq 1 \}.$$

[Réponses : 1^{ère} intégrale : $\ln \frac{27}{16}$, $\frac{1}{2} \ln \frac{27}{16}$, $1 - \ln 2$; 2^{ème} intégrale : $\ln \frac{4}{3}$, $\frac{1}{2} \ln \frac{4}{3}$, $-\frac{1}{2} + \ln 2$.]

Exercice 4 : Calculer $\iint_D (1+xy).dxdy$, où $D = \{ (x, y) ; x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1 \}$. [Rép. : $\frac{13}{24}$]

Exercice 5 : Soit $K = \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 ; x \geq 0, y^2 + 2x \leq 1 \}$. Calculer $\iint_K (x^2+y^2).dxdy$. [Rép. : $\frac{6}{35}$]

Exercice 6 : Calculer $\iint_K \frac{dx.dy}{(1+x^2+y^2)^2}$ pour $K = \{ (x, y) \in \mathbf{R}_+^2 ; x \leq x^2 + y^2 \leq 1 \}$,

$K = \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 ; x \leq x^2 + y^2 \leq 1 \}$, puis K limité par $y^2 = 2x$, $y = ax$, $y > 0$ ($a > 0$).

[Réponses : 1) $\frac{\pi}{8}(\sqrt{2}-1)$ 2) $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$.]

Exercice 7 : Soit $K = \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 ; (x-1)^2 + y^2 \leq 1 \}$. Calculer $\iint_K (x^2-y^2).dxdy$. [Rép. : π]

Exercice 8 : Soit $D = \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 ; \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y) \leq x^2 + y^2 \leq 1 \}$. Calculer $\iint_D (x^3+y^3).dxdy$.

Exercice 9 : Soit $a > 0$, $K = \{ (x, y) ; x^2 + y^2 \leq 2ax \text{ et } x^2 + y^2 \leq 2ay \}$. Calculer $\iint_K (x^2+y^2).dxdy$.

Soient a et $b > 0$, $D = \{ (x, y) ; x^2 + y^2 \leq 2ax \text{ et } x^2 + y^2 \leq 2by \}$. Calculer $\iint_D (x^2+y^2).dxdy$.

[Rép. : ex. 8 : 0 ; ex. 9 : $(\frac{3\pi}{4} - 2).a^4$ et $\frac{3\pi}{4}a^4 + \frac{3}{2}(b^4 - a^4). \text{Arctan} \frac{a}{b} - ab \frac{3a^4+2a^2b^2+3b^4}{2(a^2+b^2)}$.]

Exercice 10 : Soit $K = \{ (x, y) \in \mathbf{R}_+^2 ; 1 \leq x+y, x^2 + y^2 \leq 1 \}$. Calculer $\iint_K x^2y.dxdy$, directement et en polaires.

Exercice 11 : Soit $K = \{ (x, y) \in \mathbf{R}_+^2 ; x^2 + y^2 \geq 2y, x^2 + y^2 \leq 1 \}$. Calculer $\iint_K \sqrt{x^2+y^2}.dxdy$.

Exercice 12 : Soit $K = \{ (x, y) \in \mathbf{R}_+^2 ; x^2 + y^2 \leq 1 \}$. Calculer $\iint_K \frac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{2x^2+y^2}.xy.dxdy$.

Exercice 13 : Soit $D = \{ (x, y) \in \mathbf{R}_+^2 ; x^2 + y^2 \leq 1 \leq \sqrt{x} + \sqrt{y} \}$. Calculer $\iint_D (x+y).dxdy$.

[Réponses : ex. 10 : $\frac{1}{20}$; ex. 11 : $\frac{\pi}{18} + \sqrt{3} - \frac{16}{9}$; ex. 12 : $\frac{\ln 2}{6}$; ex. 13 : $\frac{3}{5}$.]

Exercice 14 : Soit $K = \{ (x, y) \in \mathbf{R}_+^2 ; x+y \leq 1 \}$, a et $b > 0$. Calculer $\iint_K a^x.b^y.dxdy$.

[Rép. : $\frac{(a-1).\ln b - (b-1).\ln a}{\ln a.\ln b.(\ln a - \ln b)}$ si $1, a, b$ distincts ; $\frac{1-a+a\ln a}{(\ln a)^2}$ si $a = b \neq 1$, etc.]

Exercice 15 : Soit $K = \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 ; x^2 + xy + y^2 \leq 1 \}$. Calculer $\iint_K \exp(-(x^2+y^2+xy)).dxdy$.

Aire et excentricité de l'ellipse correspondante. [Rép. : $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}(1-e^{-1})$, Aire = $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$, $e = \sqrt{\frac{2}{3}}$.]

Exercice 16 : Soient T le triangle plein ABC, f la forme affine valant 1 en A, 0 en B et C.

Montrer que $\iint_T f(x,y).dx.dy = \frac{1}{3} \text{Aire}(T)$.

Exercice 17 : 1) Calculer $\iint_T (\frac{1}{MA} + \frac{1}{MB} + \frac{1}{MC}).dx.dy$, où T est le triangle équilatéral ABC.

2) Calculer $\iint_K (\frac{1}{MA} + \frac{1}{MB} + \frac{1}{MC} + \frac{1}{MD}).dx.dy$, où K est le carré ABCD.

[Réponses : 1) $\frac{3a\sqrt{3}}{2}\ln 3$; 2) $8a.\ln(\sqrt{2} - 1)$, en notant a le côté du triangle, resp. du carré.]

Exercice 18 : Soient E l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, F et F' ses foyers, D l'intérieur de E.

Calculer $\iint_D x^2.dx.dy$, $\iint_D (x^2+y^2).dx.dy$, $\iint_D (\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}).dx.dy$,

$\iint_D (MF+MF').dx.dy$, $\iint_D (MF+MF')^n.dx.dy$ et $\iint_D (MF \times MF').dx.dy$.

[Réponses : 1) $\frac{\pi}{4}.a^3b$; 2) $\frac{\pi}{4}.ab.(a^2+b^2)$; 3) $\frac{\pi}{2}ab$; 4) $2\pi a^2 b - \frac{2\pi}{3}.b^3$]

Exercice 19 : Montrer que $\iint_{[0,1]^2} xy e^{xy}.dx.dy = e - 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n.n!}$.

Exercice 20 : Soient U un ouvert de \mathbf{R}^2 , $f: U \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe C^2 , $R = [a, b] \times [c, d]$ un

pavé inclus dans U. Calculer $\iint_R \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y).dx.dy$.

[Réponse : $f(b, d) - f(b, c) - f(a, d) + f(a, b)$.]

Exercice 21 : Soient I et J deux intervalles de \mathbf{R} , $(a, b) \in I \times J$, et f une fonction continue : $I \times J \rightarrow \mathbf{R}$.

Propriétés de $F(x, y) = \iint_{[a,x] \times [b,y]} f(s,t).ds.dt$. Calculer $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$.

Exercice 22 : Soit $f \in C^4([0, 1]^2, \mathbf{R})$. On suppose $\forall (x, y) \in [0, 1]^2 \quad |\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}(x,y)| \leq M$, et f nulle sur

le bord du carré. Montrer que : $|\iint_{[0,1]^2} f(x,y).dx.dy| \leq \frac{M}{144}$. [Oral X 1989, RMS n° 80]

Exercice 23 : Equivalent en $+\infty$ de la somme double $S_n = \sum_{1 \leq p, q \leq n} \frac{pq}{p+q}$ [pls. méthodes possibles.]

[Réponse : $S_n \sim \frac{2}{3} (1 - \ln 2).n^3$; cf. mes exercices corrigés sur les séries numériques.]

Exercice 24 : Le problème de Bâle. 1) Soit $D = \{ (x, y) ; 0 \leq y \leq x \leq 1 \}$. Calculer $I = \iint_D \frac{dx.dy}{1+xy}$ au

moyen du changement de variables $u = \frac{x-y}{2}$, $v = \frac{x+y}{2}$.

2) Montrer que $I = \sum_{n \geq 0} (-1)^n . a_n$, où $a_n = \iint_D x^n y^n . dx dy$. 3) En déduire $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$.

[Réponse : 1) $I = \dots = \int_0^{1/2} \frac{2}{\sqrt{1-u^2}} [\text{Arctan} \sqrt{\frac{1-u}{1+u}} - \text{Arctan} \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}].du = \frac{\pi^2}{24}$ (poser $u = \cos \theta$).]

Exercice 25 : Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $I_n = \iint_{[0,1]^2} \frac{dx.dy}{1+x^n+y^n}$. Déterminer la limite de la suite (I_n) .

[Réponse : I_n tend vers 1, et $1 - I_n \sim \frac{2}{n}$.]

Exercice 26 : Soit R un rectangle, et une partition¹ de ce rectangle en un nombre fini de rectangles de côtés parallèles à ceux de R . On suppose que chaque rectangle de la partition a au moins un côté entier. Montrer que R a au moins un côté entier. [Indication : considérer $\iint_R e^{2i\pi(x+y)} dx dy$.]

2. Application des intégrales doubles aux intégrales simples.

Exercice 1 : En considérant l'intégrale $\iint_{[0,1]^2} \frac{x dx dy}{(1+x^2)(1+xy)}$, calculer l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t^2} dt$.

Exercice 2 : Soit $a \in [0, 1]$. On se propose de calculer $I(a) = \int_0^{\pi/2} \frac{\ln(1+a \cos x)}{\cos x} dx$.

1) Calculer $I(a)$ en considérant $\iint_{[0,\pi/2] \times [0,a]} \frac{dx dy}{1+y \cos x}$.

2) Retrouver ce résultat par développement en série entière, ou autrement.

[Réponses : ex. 1 : $\frac{\pi}{8} \ln 2$; ex. 2 : $I(a) = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2} (\arccos a)^2$.]

Exercice 3 : Soit $D = \{ (x, y) ; 0 \leq y \leq x \leq 1 \}$.

1) Calculer $\iint_{[0,1]^2} \frac{dx dy}{(1+x^2)(1+y^2)}$ et en déduire $J = \iint_D \frac{dx dy}{(1+x^2)(1+y^2)}$.

2) En posant $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, puis $r^2 = u$, montrer que $J = \int_0^{\pi/4} \frac{\ln(2 \cos^2 \theta)}{2 \cos(2\theta)} d\theta$.

3) On pose $K = \int_0^{\pi/4} \frac{\ln(2 \sin^2 \theta)}{2 \cos(2\theta)} d\theta$ et $I = \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2} dt$. Exprimer $J + K$ et $J - K$ en fonction de I .

En déduire la valeur de I . Retrouver cette valeur par développement en série.

Exercice 4 : Inégalités de Cauchy-Schwarz.

1) Soient $f, g \in C([a, b], \mathbf{R})$. En considérant l'intégrale double $\iint_{[a,b]^2} [f(x).g(y) - f(y).g(x)]^2 dx dy$, démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Cas d'égalité ?

2) Soient (a_1, \dots, a_n) et (b_1, \dots, b_n) deux suites réelles.

Montrer que $(\sum_{k=1}^n a_k b_k)^2 \leq \sum_{k=1}^n (a_k)^2 \cdot \sum_{k=1}^n (b_k)^2$. Cas d'égalité ?

Exercice 5 : Inégalités de Tchebychev.

1) Soient f et g deux fonctions continues $[a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ toutes deux croissantes, ou toutes deux décroissantes. Montrer que $(\frac{1}{b-a} \int_a^b f) \cdot (\frac{1}{b-a} \int_a^b g) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f.g$. Cas d'égalité ?

2) Soient (a_1, \dots, a_n) et (b_1, \dots, b_n) deux suites réelles toutes deux croissantes, ou décroissantes.

Montrer que $(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k) \cdot (\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n b_k) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k b_k$. Cas d'égalité ?

[Ind. : Considérer l'intégrale double de $h(x, y) = (f(x)-f(y)).(g(x)-g(y))$; méthode analogue en 2.]

Exercice 6 : Soit $E = \mathcal{K}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ l'espace vectoriel des fonctions continues à support compact.

Si $(f, g) \in E^2$, on définit leur convolée $h = f * g$ par $(\forall x) \quad h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t).g(t).dt$.

¹ Il s'agit d'une partition au sens imagé du terme, d'un découpage. La méthode ici proposée consiste à introduire une fonction additive de découpage convenable. Pour des approches combinatoires, cf. F.-X. Vialard, RMS mars 2006, et F. Gabriel, RMS, mars 2007.

Montrer que $*$ est une loi interne, bilinéaire, commutative, associative, sans élément neutre.

Exercice 7 : En considérant l'intégrale double $\iint_{[0,A]^2} (\sin x).e^{-xy}.dxdy$, montrer que :

$$\int_0^A \frac{\sin x}{x} (1 - e^{-xA}).dx = \int_0^A \frac{1 - e^{-Ay} (\cos A + y \sin A)}{1 + y^2}.dy. \text{ En déduire } \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}.dx, \text{ puis } \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}.dx.$$

3. Intégrales triples.

Exercice 1 : Soit $C = [a, b]^3$. Calculer : $\frac{1}{(b-a)^3} \iiint_C (x+y+z).dxdydz$

$$\frac{1}{(b-a)^3} \iiint_C \max(x,y,z).dxdydz, \frac{1}{(b-a)^3} \iiint_C \min(x,y,z).dxdydz, \frac{1}{(b-a)^3} \iiint_C \max(x,y,z).dxdydz.$$

[Réponses : $\frac{3}{2}(a+b), \frac{1}{8}(a+3b), \frac{1}{2}(a+b), \frac{1}{8}(3a+b).$]

Exercice 2 : Calculer $\iiint_K \sin(x+y+z).dxdydz$, où $K = [0, \frac{\pi}{2}]^3$.

Exercice 3 : Calculer $\iiint_K (ax+by+cz)^2.dxdydz$ et $\iiint_K (ax+by+cz)^n.dxdydz$

Où $K = \{ (x, y, z) ; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \}$.

[Réponses : ex 2 : 2 ; ex 3 : $\frac{4\pi}{15}(a^2 + b^2 + c^2)$, $\frac{4\pi(a^2+b^2+c^2)^{n/2}}{(n+1)(n+3)}$ si n pair, 0 si n impair.]

Exercice 4 : Calculer $\iiint_K (2x+3y+6z)^2.dxdydz$, où $K = \{ \frac{x^2}{9a^2} + \frac{y^2}{4a^2} + \frac{z^2}{a^2} \leq 1 \}$.

Exercice 5 : Calculer $\iiint_K x.y.z.dxdydz$, où $K = \{ (x, y, z) \in \mathbf{R}_+^3 ; x+y+z \leq 1 \}$

Exercice 6 : Calculer $\iiint_K xyz.(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} - \frac{z}{c}).dxdydz$, où $K = \{ (x, y, z) \in \mathbf{R}_+^3 ; \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \leq 1 \}$ avec a, b et $c > 0$.

[Réponses : ex 4 : $\frac{864}{5}\pi a^5$; ex 5 : $\frac{1}{720}$; ex 6 : $\frac{a^2 b^2 c^2}{5040}$].

Exercice 7 : Calculer $\iiint_K \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$ pour $K = [0, 1]^3$, $K = \{ (x, y, z) ; 0 \leq x \leq y \leq z \leq 1 \}$, puis

$K = \{ (x, y, z) \in \mathbf{R}_+^3 ; x+y+z \leq 1 \}$. [Réponses : 1) $\frac{5 \ln 2 - 3 \ln 3}{2}$; 2) $\frac{5 \ln 2 - 3 \ln 3}{12}$; 3) $\frac{\ln 2}{2} - \frac{5}{16}$.]

Exercice 8 : Calculer $\iiint_D \frac{dxdydz}{x^2 + y^2 + 2z^2 + a^2}$, où $D = \{ (x, y, z) ; x^2 + y^2 + 2z^2 \leq a^2 \}$.

[Réponse : $2a\pi\sqrt{2} (1 - \frac{\pi}{4})$.]

Exercice 9 : Calculer $\iiint_K x.dxdydz$, $K = \{ (x, y, z) ; x+z \leq 1, z \geq 0, x \geq y^2, y \geq 0 \}$. [Rép. : $\frac{4}{35}$.]

Exercice 10 : Soient f continue : $[0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, et $K = \{ (x, y, z) \in \mathbf{R}_+^3 ; 0 \leq x \leq y \leq z \leq 1 \}$.

Montrer que $\iiint_K f(x).f(y).f(z).dxdydz = \frac{1}{6} (\int_0^1 f(t).dt)^3$.

Exercice 11 : Calculer $\iiint_K \frac{dx \cdot dy \cdot dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ pour $K = \{ (x, y, z) ; a^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2 \}$,

$K = \{ (x, y, z) ; x^2 + y^2 \leq z^2, a \leq z \leq b \}$ ($0 < a < b$), $K = \{ (x, y, z) ; x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Ry \}$.

[Réponses : 1) $2\pi(b^2 - a^2)$; 2) $\pi(b^2 - a^2)(\sqrt{2} - 1)$; 3) $\frac{4}{3}\pi R^2$].

Exercice 12 : Soit $A \in S_3^{++}(\mathbf{R})$, $K = \{ X \in \mathbf{R}^3 ; {}^tX.A.X \leq 1 \}$. Calculer $\iiint_K e^{\pm X.A.X} dx \cdot dy \cdot dz$.

[Réponse : $\frac{4\pi}{\sqrt{\det A}} \int_0^1 r^2 e^{\pm r^2} \cdot dr$.]

Exercice 13 : Soit $K = \{ (x, y, z) \in \mathbf{R}_+^3 ; x + y + z \leq 1 \}$, $w = 1 - x - y - z$.

Calculer $\iiint_K x^a \cdot y^b \cdot z^c \cdot w^d \cdot dx \cdot dy \cdot dz$, où $(a, b, c, d) \in \mathbf{N}^4$. [Réponse : $\frac{a!b!c!d!}{(a+b+c+d+3)!}$.]

Exercice 14 : Soient U un ouvert de \mathbf{R}^3 , $f : U \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe C^3 , $R = [a, b] \times [c, d] \times [p, q]$ un pavé inclus dans U . Calculer $\iiint_R \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}(x, y, z) \cdot dx \cdot dy \cdot dz$.

4. Applications au calcul d'aires et de volumes.

Exercice 1 : On considère les domaines $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ et $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} \leq 1$. Aire de leur intersection.

[Réponse : $4ab \operatorname{Arcsin} \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.]

Exercice 2 : Soient C un carré de centre O et de frontière ∂C , $K = \{ M ; OM \leq d(M, \partial C) \}$.

Dessiner K . Calculer l'aire de K . [Réponse : si a est le côté du carré, $\frac{a^2}{3}(4\sqrt{2} - 5)$.]

Exercice 3 : Aire de $D = \{ (x, y) ; \sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 1, \sqrt{1-x} + \sqrt{1-y} \geq 1 \}$.

Exercice 4 : Aire délimitée par la cardioïde $r = a(1 + \cos \theta)$.

Exercice 5 : Aire délimitée par l'astroïde : $x = a \cdot \cos^3 t$, $y = a \cdot \sin^3 t$.

Exercice 6 : Aire de la boucle du folium de Descartes : $x = \frac{3a \cdot t}{1+t^3}$, $y = \frac{3a \cdot t^2}{1+t^3}$.

Exercice 7 : Aire délimitée par la boucle de la strophoïde $x(x^2 + y^2) - a(x^2 - y^2) = 0$ ($a > 0$).

Exercice 8 : Aire intérieure à la lemniscate de Bernoulli $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

[Réponses : ex. 3 : $\frac{2}{3}$; ex. 4 : $\frac{3}{2}\pi a^2$; ex. 5 : $\frac{3}{8}\pi a^2$; ex. 6 : $\frac{3}{2}a^2$; ex. 7 : $(2 - \frac{\pi}{2})a^2$; ex. 8 : a^2 .]

Exercice 9 : Aire délimitée par $x \geq 0$, $y \geq 0$ et la courbe d'équation $x^{2/\lambda} + y^{2/\mu} = 1$ (λ et $\mu > 0$).

Cas où $\lambda = \mu = 1, 2, 2, 4$? [Réponse : $A = \frac{\lambda\mu}{2(\lambda+\mu)} B(\frac{\lambda}{2}, \frac{\mu}{2}), \frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3\pi}{32}, \frac{1}{6}$.]

Exercice 10 : Soient \mathcal{P} un plan de vecteur unitaire normal \vec{n} , K un domaine simple de ce plan.

Soient S l'aire de K , S' , S'' et S''' les aires des projections de K sur les plans xOy , yOz et zOx .

Montrer que $S^2 = S'^2 + S''^2 + S'''^2$.

[Concours général 2006]

Exercice 11 : On considère les quatre solides ($a, b, h > 0$) :

$$C_1 = \{ (x, y, z) ; x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq h \}$$

$$C_2 = \{ (x, y, z) ; (x - az)^2 + (y - bz)^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq h \}$$

$$C_3 = \{ (x, y, z) ; x^2 + (y - \sin z)^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq h \}$$

$$C_4 = \{ (x, y, z) ; (x - \cos z)^2 + (y - \sin z)^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq h \}$$

Représentez-les. Calculer et comparez leurs volumes. Généraliser.

[Réponse : les quatre colonnes, droite, oblique, torsadées, ont même volume, $\pi R^2 h \dots$]

Exercice 12 : Evaluer le volume intérieur du *Turning Torso* de Santiago Calatrava à Malmö.

Exercice 13 : Volume et aire de la sphère euclidienne de rayon R.

En déduire que le volume de cette sphère est les deux tiers du volume du cylindre de révolution qui la contient (théorème d'Archimède).

Aire et volume du secteur de cette sphère compris entre les plans parallèles $z = z_0$ et $z = z_1$.

Aire et volume d'une calotte de demi-angle au sommet α .

[Rép. : $\frac{4}{3}\pi R^3, 4\pi R^2, 2\pi R(z_1 - z_0), \pi R^2(z_1 - z_0) - \frac{\pi}{3}(z_1^3 - z_0^3), 2\pi R^2(1 - \cos \alpha), \frac{2}{3}\pi R^3(1 - \cos \alpha)$]

Exercice 14 : L'espace euclidien E est rapporté à un repère orthonormé Oxyz.

Natures des quadriques d'équation $x^2 + z^2 = r^2, y^2 + z^2 = r^2$. Etudier leur intersection Γ ?

Volume de $K = \{ (x, y, z) ; x^2 + z^2 \leq r^2, y^2 + z^2 \leq r^2 \}$.

[Réponse : $\Gamma = \{ (x, y, z) ; x^2 + z^2 = r^2, y = \pm x \}$ est réunion de deux ellipses. $V = \frac{16}{3}r^3$.]

Exercice 15 : Aire et volume de l'ellipsoïde de révolution $\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

[Réponses : $V = \frac{4\pi}{3} a^2 c$; $S = 2\pi (a^2 + \frac{ac^2}{b} \ln \frac{a+b}{c})$ si $a > c, b = \sqrt{a^2 - c^2}$,
 $S = 2\pi (a^2 + \frac{ac^2}{b} \operatorname{Arcsin} \frac{b}{c})$ si $c > a, b = \sqrt{c^2 - a^2}$.]

Exercice 16 : Soit \mathcal{K} l'hyperboloïde de révolution à deux nappes $\frac{x^2+y^2}{a^2} = \frac{z^2}{c^2} - 1$.

Volume et aire de la partie de \mathcal{K} comprise entre les plans $z = z_0$ et $z = z_1$ ($c < z_0 < z_1$).

[Réponse : $V = \frac{\pi a^2}{3c^2} (z_1 - z_0)(z_1^2 + z_1 z_0 + z_0^2 - 3c^2)$.]

Exercice 17 : Soit \mathcal{K} l'hyperboloïde de révolution à une nappe $\frac{x^2+y^2}{a^2} = \frac{z^2}{c^2} + 1$.

Volume et aire de la partie de \mathcal{K} comprise entre les plans $z = z_0$ et $z = z_1$ ($z_0 < z_1$).

Exercice 18 : Calculer le volume et l'aire comprises entre le paraboloïde de révolution \mathcal{P} :

$x^2 + y^2 = 2pz$ et le plan d'équation $z = b$, puis entre \mathcal{P} et le plan $z = a$ y + b.

[Réponses : $V = \pi p b^2$, $S = \frac{2\pi p^2}{3} [(1 + \frac{2b}{p})^{1/3} - 1]$, $V = \frac{p\pi}{4} (p a^2 + 2b)^2$.]

Exercice 19 : Soient R et $p > 0$. Calculer le volume de

$$K = \{ (x, y, z) ; x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \text{ et } x^2 + y^2 \leq 2pz \}.$$

Limite de ce volume quand $p \rightarrow 0$, quand $p \rightarrow +\infty$.

[Rép : $V = \frac{2\pi}{3} (R^3 + p^3 + 3R^2 p - (R^2 + p^2)^{3/2})$; si $p = 0, V = 0, p \rightarrow +\infty, V \rightarrow \frac{2\pi}{3} R^3$ logique].

Exercice 20 : Calculer l'aire et le volume délimités par le cône de révolution $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = z^2 \tan^2 \alpha$, et comprise entre les plans $z = a$ et $z = b$ ($0 < a < b$).

[Réponses : $V = \pi \tan^2 \alpha \frac{b^3 - a^3}{3}$, $A = \pi \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} (b^2 - a^2)$.]

Exercice 21 : 1) Etudier l'intersection des cylindres $x^2 + y^2 = a^2, x^2 + z^2 = a^2$.

2) Calculer le volume de $K = \{ (x, y, z) ; x^2 + y^2 \leq a^2, x^2 + z^2 \leq a^2 \}$ et l'aire de ∂K .

[Réponses : 1) Réunion de deux ellipses ; 2) $V = \frac{16}{3} \cdot a^3$ et $S = 16 \cdot a^2$.]

Exercice 22 : Volume du domaine $K : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq 1$. [Réponse : $1/90$]

Exercice 23 : Fenêtre de Viviani.

Soient S la surface $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, C la surface $x^2 + y^2 - x = 0$, $\Gamma = S \cap C$.

1) Volume de $K = \{ (x, y, z) ; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \text{ et } x^2 + y^2 - x \leq 0 \}$.

2) Aires de la portion de S délimitée par Γ , et de la portion de C délimitée par Γ .

3) Exprimer la longueur de sous forme d'intégrale.

Exercice 24 : La pomme de Newton.²

On fait tourner une cardioïde $r = a(1 + \cos \theta)$ autour de son axe de symétrie.

Aire et volume de la surface de révolution obtenue. [Réponses : $A = \frac{32\pi a^2}{5}$, $V = \frac{8\pi a^3}{3}$.]

Exercice 25 : Surface d'Enneper.

Soit S la surface d'équations $x = u - \frac{u^3}{3} + u \cdot v^2$, $y = v - \frac{v^3}{3} + u^2 \cdot v$, $z = u^2 - v^2$.

Représentation, aire du morceau de cette surface défini par $0 \leq u \leq 1$ et $0 \leq v \leq 1$. [Réponse : $\frac{133}{45}$.]

Exercice 26 : On considère la surface paramétrée :

$$x = (a + b \cdot \cos v) \cdot \cos u, \quad y = (a + b \cdot \cos v) \cdot \sin u, \quad z = b \cdot \sin v \quad (0 < b < a)$$

1) Montrer que c'est une surface de révolution ; la reconnaître. Equation cartésienne ?

2) Calculer son aire, ainsi que le volume qu'elle délimite.

[Réponses : 2) $A = 4\pi^2 ab$, $V = 2\pi^2 ab^2$; on peut utiliser le théorème de Guldin.]

Exercice 27 : Deux sphères S et S' de rayons r et R resp. sont tangentes extérieurement.

Montrer que l'aire et le volume de l'enveloppe convexe de $S \cup S'$ sont donnés par :

$$V = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{R^5 - r^5}{R^2 - r^2} \quad \text{et} \quad A = 4\pi \cdot \frac{R^4 - r^4}{R^2 - r^2}.$$

Exercice 28 : L'intersection d'un plan \mathcal{P} avec un cône de révolution \mathcal{C} est une ellipse \mathfrak{E} .

Montrer que l'aire A de la portion de cône comprise entre le sommet S et l'ellipse \mathfrak{E} est

$$A = \pi \frac{p+q}{2} \sqrt{pq} \sin \alpha$$

où α est le demi-angle au sommet du cône, p et q sont les distances de S aux sommets du grand axe

de \mathfrak{E} . En part., si \mathcal{P} est perpendiculaire à l'axe, $A = \pi p^2 \sin \alpha = \frac{\pi \cdot r^2}{\sin \alpha}$, où r est rayon du cercle \mathfrak{E} .

Remarque : Un joli problème de TPE 1995 porte sur l'aire et le volume d'un cornet de glace, en hommage sans doute à Bobby Lapointe...

² Newton a laissé tomber une gomme sur son plan.

5. Applications au calcul de probabilités.

Dans les exercices suivants, lorsqu'on dira qu'on « choisit un point au hasard dans un ensemble », on conviendra que ce choix se fait suivant la probabilité uniforme sur cet ensemble, autrement dit que la probabilité que le point choisi appartienne à une partie donnée est proportionnelle à la mesure (longueur, aire, volume) de cette partie.

Exercice 1 : On choisit au hasard et indépendamment deux points sur le segment $[a, b]$. Trouver la valeur moyenne M de la distance de ces deux points. Quelle est la probabilité P que cette distance soit plus grande que M ? Pour quelle valeur de m les événements « la distance est supérieure à m » et « la distance est inférieure à m » sont-ils équiprobables ?

Exercice 2 : On choisit au hasard et indépendamment trois réels dans l'intervalle $[0, L]$. Quelle est la probabilité pour que ces nombres soient les longueurs des côtés d'un triangle ?

Exercice 3 : On choisit au hasard et indépendamment deux réels s et p dans l'intervalle $[-a, a]$.

a) On considère le polynôme $P = x^2 + sx + p$. De ces deux événements quel est le plus probable : P a ses racines réelles (probabilité $P_1(a)$), P n'a pas de racines réelles (probabilité $P_2(a)$) ?

Limites de $P_1(a)$ et $P_2(a)$ quand a tend vers $+\infty$?

b) Quelle est la probabilité que l'équation bicarrée $x^4 + sx^2 + p = 0$ ait à la fois des racines réelles et des racines complexes non réelles ?

Exercice 4 : On choisit au hasard et indépendamment deux points dans le disque unité. Quelle est la valeur moyenne S de l'aire du disque ayant pour diamètre le segment joignant ces deux points ?

Exercice 5 : On choisit au hasard et indépendamment deux points sur un cercle de rayon R . Trouver la valeur moyenne L de la longueur de la corde joignant ces deux points.

Exercice 6 : On choisit au hasard trois réels a, b, c dans l'intervalle $[-A, A]$, et l'on considère le cercle C d'équation $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$. Quelle est la probabilité pour que ce cercle soit réel ? Limite de cette probabilité quand $A \rightarrow +\infty$?

[Réponses : 1) $M = \frac{1}{(b-a)^2} \iint_{[a,b]^2} |x-y| dx dy = \frac{b-a}{3}$, $P = \frac{4}{9}$, $m = \frac{b-a}{2+\sqrt{2}}$. 2) $\frac{1}{2}$. 4) $\frac{\pi}{4}$.

3) a) Pour $a > 4$, $P_1(a) = 1 - \frac{2}{3\sqrt{a}} > \frac{1}{2}$, et $P_1(a) \rightarrow 1$.

5) $L = \frac{R}{4\pi^2} \iint_{[0,2\pi]^2} |e^{i\theta} - e^{i\varphi}| d\theta d\varphi = \frac{4R}{\pi}$. 6) Si $A \geq 1$, on trouve $P(A) = 1 - \frac{\pi}{16A} \rightarrow 1$.]

6. Intégrales n -uples.

Exercice 1 : Calculer $\iiint_D e^{x^2+y^2-u^2-v^2} dx dy du dv$, où $D = \{ (x, y, u, v) ; x^2 + y^2 + u^2 + v^2 \leq 1 \}$.

[Réponse : $\pi^2 (1 - 1)$.]

Exercice 2 : Soit $K_n = \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n ; 0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq 1 \}$. Volume de K_n ? [Rép. : $\frac{1}{n!}$.]

Exercice 3 : Simplexe. Soit $\Delta_n = \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}_+^n ; x_1 + \dots + x_n \leq 1 \}$.

1) Calculer le volume de Δ_n , c'est-à-dire $\int \dots \int_{\Delta_n} dx_1 \dots dx_n$. Lien avec l'exercice 2 ?

2) Soit $f \in C(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$. Exprimer $\int \dots \int_{\Delta_n} f(x_1 + \dots + x_n) dx_1 \dots dx_n$ comme intégrale simple.

[Rép. : 1) $\frac{1}{n!}$; 2) $\frac{1}{(n-1)!} \int_0^1 f(s) s^{n-1} ds$.]

Exercice 4 : Coordonnées sphériques en dimension n . Montrer que les formules :

$$\begin{cases} x_1 = r \sin \theta_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = r \cdot \cos \theta_1 \cdot \sin \theta_2 \\ x_k = r \cdot \cos \theta_1 \dots \cos \theta_{k-1} \cdot \sin \theta_k \\ x_{n-1} = r \cdot \cos \theta_1 \dots \cos \theta_{n-2} \cdot \sin \theta_{n-1} \\ x_n = r \cdot \cos \theta_1 \dots \cos \theta_{n-2} \cdot \cos \theta_{n-1} \end{cases}$$

définissent une surjection de $\mathbf{R}_+ \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]^{n-2} \times [-\pi, \pi]$ sur \mathbf{R}^n , de jacobien :

$$J = (-1)^{n-1} r^{n-1} (\cos \theta_1)^{n-2} (\cos \theta_2)^{n-3} \dots \cos \theta_{n-2}.$$

La sphère unité a pour élément d'aire $dA = (\cos \theta_1)^{n-2} (\cos \theta_2)^{n-3} \dots \cos \theta_{n-2}.$

Exercice 5 : Boule euclidienne. Soit $B_n = \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n ; x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1 \}.$

Calculer le volume de B_n , c'est-à-dire $V_n = \int \dots \int_{B_n} dx_1 \dots dx_n$, puis l'aire de la sphère unité.

Equivalents quand $n \rightarrow +\infty$.

[Réponses : on peut utiliser l'exercice 4, mais ce n'est pas indispensable.

$$V_n = \frac{\pi^m}{m!} \text{ si } n = 2m, V_n = \frac{2^n \pi^m m!}{n!} \text{ si } n = 2m+1. V_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1+\frac{n}{2})} \sim \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \left(\frac{2\pi e}{n} \right)^{n/2}. A_n = n V_n.]$$

Exercice 6 : Généralisation. Reprenant les notations de l'ex. 3 calculer $\int \dots \int_{\Delta_n} x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n} dx_1 \dots dx_n$,

lorsque a_1, \dots, a_n sont naturels, puis réels > 0 , puis réels > -1 .

Application. Soit $p \geq 1$; on équipe \mathbf{R}^n de la norme $N_p : x = (x_1, \dots, x_n) \rightarrow [|x_1|^p + \dots + |x_n|^p]^{1/p}.$

Soit $B_n(p) = \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n ; |x_1|^p + \dots + |x_n|^p \leq 1 \}$ la boule unité de \mathbf{R}^n pour cette norme.

Calculer son volume $V_n(p)$. Cas où $p \rightarrow +\infty$?

$$[\text{Réponses : } \frac{a_1! a_2! \dots a_n!}{(a_1 + a_2 + \dots + a_n + n)!} \text{ et } \frac{\Gamma(a_1+1) \dots \Gamma(a_n+1)}{\Gamma(a_1 + a_2 + \dots + a_n + n + 1)} ; V_n(p) = \left(\frac{2}{p} \right)^n \frac{\Gamma(1/p)^n}{\Gamma(n/p + 1)}.]$$

Exercice 7 : Soit $D = [0, 1]^n$. Calculer $\int \dots \int_D \max(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$ et $\int \dots \int_D \min(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$.

Plus généralement si $m_k(x_1, \dots, x_n)$ est la k -ème valeur prise par les x_i une fois rangés dans l'ordre

croissant, calculer $\int \dots \int_D m_k(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$. [Réponses : $\frac{n}{n+1}, \frac{1}{n+1}, \frac{k}{n+1}.$]

Exercice 8 : On choisit au hasard et indépendamment n réels dans $[a, b]$.

Quelle est la valeur moyenne du plus grand ? du plus petit ? du k -ème dans l'ordre croissant ?

$$[\text{Réponses : } \frac{a+nb}{n+1}, \frac{na+b}{n+1}, \frac{(n-k)a+kb}{n+1}.]$$

Exercice 9 : Généralisation. Soient $f \in C([a, b]^2, \mathbf{R})$, $D = [a, b]^n$. Montrer que :

$$\int \dots \int_D f(\min(x_1, \dots, x_n), \max(x_1, \dots, x_n)) dx_1 \dots dx_n = n! \int \int_{a \leq s \leq t \leq b} f(s, t) V(s, t) ds dt.$$

où $V(s, t)$ est le volume du simplexe $\{ (x_2, \dots, x_{n-1}) ; s \leq x_2 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq t \}$; $V(s, t) = \frac{(t-s)^{n-2}}{(n-2)!}.$

Exercice 10 : Formule de Cerf-Mariconda.

Soient $f_k : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ n fonctions continues et $I_k = [a_k, b_k]$ n segments de \mathbf{R} ($1 \leq k \leq n$).

$$\text{Montrer que : } \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \int \dots \int_{I_1 \times \dots \times I_n} \begin{vmatrix} f_1(s_1) & \dots & f_1(s_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_n(s_1) & \dots & f_n(s_n) \end{vmatrix} ds_1 \dots ds_n, \text{ où } a_{pq} = \int_{I_q} f_p(s_p) ds_p.$$

Exercice 11 : Soit $D = \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}_+^n ; \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{x_k}{k} \leq 1 \}.$

Montrer que $\forall t \in \mathbf{R} \quad \int \dots \int_D e^{t(x_1 + \dots + x_n)} dx_1 \dots dx_n = \left(\frac{e^t - 1}{t}\right)^n$.

Exercice 12 : Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \int \dots \int_{[0,1]^n} \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} dx_1 \dots dx_n = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Exercice 13 : Soit $f \in C([0, 1], \mathbf{R})$. Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int \dots \int_{[0,1]^n} f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) dx_1 \dots dx_n = f\left(\frac{1}{2}\right) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int \dots \int_{[0,1]^n} f(\sqrt[n]{x_1 \dots x_n}) dx_1 \dots dx_n = f\left(\frac{1}{e}\right).$$

Exercice 14 : Soient f continue : $[0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^+$ telle que $\int_0^1 f(t) dt = 1$, et ψ continue : $[0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$.

Trouver $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \dots \int_0^1 \psi\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) f(x_1) \dots f(x_n) dx_1 \dots dx_n$ (Oral ENS).

Exercice 15 : On munit $S_2(\mathbf{R})$ de la norme $\|A\| = \sqrt{\text{tr}(A.A)}$ et de la norme $\|A\|$ subordonnée à la norme euclidienne standard. Calculer les volumes des deux boules unités correspondantes.

Remarque : cf. mes problèmes d'algèbre bilinéaire.

7. Intégrales multiples impropres.

Exercice 1 : Trouver des cns portant sur α pour que chacune des intégrales doubles $\iint_D \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^\alpha}$

converge, où $D = \{(x, y) ; 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$, puis $D = \{(x, y) ; x^2 + y^2 \geq 1\}$. Calcul éventuel.

[Réponses : 1) $\alpha < 1$ et alors $\frac{\pi}{1-\alpha}$; 2) $\alpha > 1$ et alors $\frac{\pi}{\alpha-1}$.]

Exercice 2 : Trouver des cns portant sur α pour que chacune des intégrales triples $\iiint_D \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^\alpha}$

converge, où $D = \{(x, y, z) ; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$, puis $D = \{(x, y, z) ; x^2 + y^2 + z^2 \geq 1\}$. Calcul éventuel.

[Réponses : 1) $\alpha < \frac{3}{2}$ et alors $\frac{4\pi}{3-2\alpha}$; 2) $\alpha > \frac{3}{2}$ et alors $\frac{4\pi}{2\alpha-3}$.]

Exercice 3 : Soit $D = \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+$. Trouver des cns portant sur α pour que chacune des intégrales doubles

$\iint_D \frac{dx dy}{(1+x+y)^\alpha}$, $\iint_D \frac{dx dy}{(1+x^2+y^2)^\alpha}$ converge. Calcul éventuel.

[Réponses : 1) $\alpha > 2$ et alors $\frac{1}{(\alpha-1)(\alpha-2)}$; 2) $\alpha > 1$ et alors $\frac{\pi}{4(\alpha-1)}$.]

Exercice 4 : Soit $D = \{(x, y) ; x^2 + y^2 < 1\}$.

Montrer que $\iint_D \frac{dx dy}{(1-x^2-y^2)^\alpha}$ converge ssi $\alpha < 1$, et qu'alors elle vaut $\frac{\pi}{1-\alpha}$.

Exercice 5 : Soient $D = [0, 1] \times [0, 1]$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

Montrer que $\iint_D \frac{dx dy}{|y-x|^\alpha}$ converge ssi $\alpha < 1$, et qu'alors elle vaut $\frac{2}{(1-\alpha)(2-\alpha)}$.

Exercice 6 : Soit $\|\cdot\|$ une norme quelconque sur \mathbf{R}^n . Trouver des cns portant sur α pour que les

intégrales n -uples $\int \dots \int_D \frac{dx_1 \dots dx_n}{\|x\|^\alpha}$ convergent, pour $D = \{x ; 0 < \|x\| \leq 1\}$, puis $D = \{x ; \|x\| \geq 1\}$.

[Réponses : $\alpha < n$, $\alpha > n$.]

Exercice 7 : Calculer le potentiel newtonien au point $A(a, b, c)$ créé par une répartition de masse de densité 1 sur la boule $B : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, c'est-à-dire $U = \iiint_B \frac{dM}{AM}$.

[Réponse : Si m est la masse, $d = OA$, alors $U = \frac{m}{d}$ si $d \geq R$, $U = \frac{m}{R} \left(\frac{3}{2} - \frac{d^2}{2R^2} \right)$ si $d \leq R$.]

Exercice 8 : Soit f une fonction continue sur \mathbf{R} à support compact, positive, paire, et telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x).dx = 1$. Calculer $\iint_{x \geq 0, x+y \geq 0} f(x).f(y).dxdy$.

Exercice 9 : Soient a et b des réels > 0 . Existence et calcul de $F(a, b) = \iint_{x \geq 0, y \geq 0} e^{-ax-by} \sin(x+y).dxdy$.

[Réponse : $F(a, b) = \frac{a+b}{(a^2+1)(b^2+1)}$.]

Exercice 10 : 1) Calculer $\iiint_D \frac{dx.dy.dz}{(1+x^2z^2).(1+y^2z^2)}$ où $D = \{ (x, y, z) ; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, z \geq 0 \}$.

2) En déduire $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\text{Arctant}}{t} \right)^2 .dt$. [Réponse : $\pi . \ln 2$.]

Exercice 11 : Existence et calcul de $\iint_{[0,1]^2} \frac{\min(x,y)}{\max(x,y)}.dxdy$ et de $\iint_D \frac{dx.dy}{x.y.\max(x,y)}$, où $D = [1, +\infty[^2$.

Exercice 12 : Existence et calcul de $\iint_D \frac{dx.dy}{\cos x + c \sin y}$, où $D = [0, \pi] \times [1, +\infty[$.

Exercice 13 : Soit $D = \{ (x, y) ; 0 \leq x < \pi \text{ et } 0 \leq y < 1 \}$. Calculer $\iint_D \frac{dx dy}{1+y \cos x}$.

[Réponses : ex. 10 : $\frac{1}{2}, 2$; ex. 11 : $\pi \ln \frac{e+1}{e-1}$; ex. 12 : $\frac{\pi^2}{2}$.]

Exercice 14 : Existence et calcul de $I(a) = \iint_{\mathbf{R}^2} (x^2+y^2)^a . \exp(-x^2-y^2).dxdy$.

[Réponse : $I(a)$ existe ssi $a > -1$, et alors $I(a) = \pi \Gamma(a+1)$.]

Exercice 15 : Intégrale de Gauss.

1) Calculer l'intégrale de Gauss $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t^2).dt$ en considérant $\iint_{\mathbf{R}^2} \exp(-x^2-y^2).dxdy$.

2) Rendre rigoureux ce raisonnement en considérant les domaines :

$$C(A) = \{ (x, y) ; |x| \leq A, |y| \leq A \} \text{ et } D(A) = \{ (x, y) ; x^2 + y^2 \leq A^2 \}.$$

Exercice 16 : Existence et calcul de $\iint_D \exp(-x^2).dxdy$, où $D = \{ (x, y) ; 0 \leq y \leq x \}$. [Rép. : $\frac{1}{2}$]

Exercice 17 : 1) Convergence et calcul de $\iint_{\mathbf{R}^2} |ax+by| e^{-x^2-y^2}.dxdy$.

2) Convergence et calcul de $\int \dots \int_{\mathbf{R}^n} |(ax)|^p . \exp(-\|x\|^2).dx_1 \dots dx_n$ ($a \in \mathbf{R}^n, p > -1$).

[Réponses : 1) $\sqrt{\pi} \sqrt{a^2+b^2}$; 2) $\|a\|^p \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) \pi^{\frac{n-1}{2}}$.]

Exercice 18 : Convergence et calcul de $\int \dots \int_{\mathbf{R}^n} \exp\left(-\sum_{i \leq j} x_i x_j\right).dx_1 \dots dx_n$. [Réponse : $\frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{n+1}}$]

Exercice 19 : 1) Soient $a > 0, ac - b^2 > 0$. Convergence et calcul de :

$$\iint_{\mathbf{R}^2} \exp(-ax^2-2bxy-cy^2).dxdy \text{ et de } \iint_{\mathbf{R}^2} (ax^2+2bxy+cy^2).\exp(-ax^2-2bxy-cy^2).dxdy.$$

2) Généralisation : Soit $A \in M_n(\mathbf{R})$ symétrique définie positive.

Convergence et calcul de $\int \dots \int_{\mathbf{R}^n} \exp(-{}^t x.A.x).dx_1 \dots dx_n$ et $\int \dots \int_{\mathbf{R}^n} ({}^t x.A.x).\exp(-{}^t x.A.x).dx_1 \dots dx_n$

Soit (u_1, \dots, u_n) une base de \mathbf{R}^n . Calculer $\int_{\mathbf{R}^n} e^{-\|x_1 u_1 + \dots + x_n u_n\|^2}.dx_1 \dots dx_n$.

[Réponses : 1) $\frac{\pi}{\sqrt{ac-b^2}}, \frac{\pi}{\sqrt{ac-b^2}}$; 2) : $\frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det A}}, \frac{n}{2} \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det A}}, \frac{\pi^{n/2}}{|\det(u_1, \dots, u_n)|}$.]

Exercice 20 : 1) Existence et calcul de $F(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}.e^{ixy}.dx$, y réel.

2) Soit $A \in \mathbf{S}_n^{++}(\mathbf{R})$. Existence et calcul de $J(y) = \int \dots \int_{\mathbf{R}^n} \exp(-{}^t x.A.x).\exp(i{}^t x.y).dx_1 \dots dx_n$, $y \in \mathbf{R}^n$.

[Réponses : 1) $F(y) = \sqrt{2\pi} e^{-y^2/2}$ 2) $J(y) = \sqrt{\frac{\pi^n}{\det A}} \exp(-\frac{1}{4} {}^t y.A^{-1}.y)$.]

Exercice 21 : Soit q une forme quadratique définie positive sur \mathbf{R}^n euclidien standard.

Déterminer les extrema absolus sur \mathbf{R}^n de $f(x) = q(x).\exp(-\|x\|^2)$. Calculer $\int \dots \int_{\mathbf{R}^n} f(x).dx$

Exercice 22 : **Formule d'Euler**.

1) Domaine de définition réel de $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}.(1-t)^{y-1}.dt$?

Pour $p > 0$, on note $\varphi_p(x) = e^{-x^2} x^{2p-1}$. Pour $a > 0$, soit $D_a = \{ (x, y) \in \mathbf{R}_+^2 ; x^2 + y^2 \leq a^2 \}$, $\Delta_a = [0, a]^2$, et $I(a) = \iint_{D_a} \varphi_p(x).\varphi_q(y).dx.dy$ $J(a) = \iint_{\Delta_a} \varphi_p(x).\varphi_q(y).dx.dy$.

2) Montrer que : $(\forall a \geq 0) I(a) \leq J(a) \leq I(a\sqrt{2})$.

3) Exprimer $I(a)$ et $J(a)$ pour $a \geq 0$.

4) En déduire $(\forall x, y > 0) B(x, y) = \frac{\Gamma(x).\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$, d'abord pour x et $y \geq 1$, puis pour x et $y > 0$.

5) Retrouver la formule d'Euler $\Gamma(x).\Gamma(y) = \Gamma(x+y).B(x, y)$ au moyen du changement de variables $s = x + y, t = y$.

Exercice 23 : Soient a, b, c réels, $D = \mathbf{R}_+^2$. Discuter la nature des intégrales

$A = \iint_D \frac{x^a y^b}{(1+x^2+y^2)^c}.dxdy$ et $B = \iint_D \frac{x^a y^b}{(1+x+y)^c}.dxdy$. Calcul éventuel.

[Réponses : 1) $a > -1, b > -1, c > \frac{a+b}{2} + 1$ et alors $A = \frac{\Gamma(\frac{a+1}{2})\Gamma(\frac{b+1}{2})\Gamma(c-\frac{a+b}{2}-1)}{\Gamma(c)}$;

2) $a > -1, b > -1, c > a + b + 2$ et alors $B = 4 \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)\Gamma(c-a-b-2)}{\Gamma(c)}$]

Exercice 24 : Soit $D = \mathbf{R}_+^2$. Calculer de deux manières $\iint_D e^{-xy}.\sin x.dxdy$. En déduire $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}.dx$.

Plus précisément, on introduira $F(n, A) = \iint_{\Delta(n, A)} e^{-xy}.\sin x.dxdy$, où $\Delta(n, A) = [n\pi, (n+1)\pi] \times [0, A]$.

Exercice 25 : Existence et calcul de $\iint_{[0, +\infty]^2} |\ln x - \ln y|.e^{-(x+y)}.dxdy$. [Rép. : $2 \ln 2$]

Exercice 26 : 1) Montrer que $\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}.du = \frac{\pi^2}{12}$.

2) En déduire $\iint_D \frac{dx.dy}{(x+1)^2 - y^2}$, où $D = \{ (x, y) ; x > 0, y > 0, x + y < 1 \}$. [Réponse : $\frac{\pi^2}{24}$]

Exercice 27 : Intégrales de Fresnel.

Utiliser la formule $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-a^2 x} dx$ ($a > 0$) pour calculer les intégrales de Fresnel

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx \text{ et } J = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx, \text{ puis } \int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx \text{ et } \int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx \quad [\text{Réponse : } I = J = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.]$$

Exercice 28 : Soient $K = \{ (x, y, z) \in \mathbf{R}_+^3 ; x + y + z \leq 1 \}$, $w = 1 - x - y - z$.

Existence et calcul de $I = \iiint_K x^a \cdot y^b \cdot z^c \cdot w^d \cdot dx \cdot dy \cdot dz$, où $(a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4$.

$$[\text{Réponse : } a, b, c, d > -1, I = \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)\Gamma(c+1)\Gamma(d+1)}{\Gamma(a+b+c+d+4)}.]$$

Exercice 29 : Intégrales de Dirichlet.

Les paramètres sont tous > 0 . Calculer à l'aide des fonctions eulériennes Γ et B les intégrales

$$\iint_K x^{\alpha-1} \cdot y^{\beta-1} \cdot dx \cdot dy \quad \text{où} \quad K = \{ (x, y) ; (\frac{x}{a})^m + (\frac{y}{b})^n \leq 1 \}$$

$$\iiint_K x^{\alpha-1} \cdot y^{\beta-1} \cdot z^{\gamma-1} \cdot dx \cdot dy \cdot dz \quad \text{où} \quad K = \{ (x, y, z) ; (\frac{x}{a})^m + (\frac{y}{b})^n + (\frac{z}{c})^p \leq 1 \}.$$

$$[\text{Réponses : } \frac{a^\alpha b^\beta}{mn} \frac{\Gamma(\frac{\alpha}{m}) \cdot \Gamma(\frac{\beta}{n})}{\Gamma(\frac{\alpha}{m} + \frac{\beta}{n} + 1)} ; \frac{a^\alpha b^\beta c^\gamma}{mnp} \frac{\Gamma(\frac{\alpha}{m}) \cdot \Gamma(\frac{\beta}{n}) \cdot \Gamma(\frac{\gamma}{p})}{\Gamma(\frac{\alpha}{m} + \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma}{p} + 1)}.]$$

Exercice 30 : Soit $D = \{ (x, y, z) ; x > 0, y > 0, xz - y^2 > 0 \}$. On définit pour tout réel $p > 0$:

$$I(p) = \iiint_D \exp(-x-z) \cdot (xz - y^2)^{p-1} \cdot dx \cdot dy \cdot dz.$$

Calculer $I(p)$ à l'aide des deux changements de variables suivants :

$$\begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X & 0 \\ Y & Z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{bmatrix} \quad (X \text{ et } Z > 0) \quad \text{et} \quad (x, y, z) \rightarrow (\frac{x+z}{2}, y, \frac{x-z}{2}).$$

On exprimera les résultats à l'aide de la fonction Γ .

[Réponse : On reconnaît la factorisation de Cholesky. On trouve

$$I(p) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Gamma(p) \cdot \Gamma(p + \frac{1}{2}) = \frac{\pi}{2^{2p}} \Gamma(2p), \text{ formule de duplication de Legendre.}]$$

Exercice 31 : Inégalité intégrale de Hilbert.

Soient $f, g : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$ deux fonctions continues de carré intégrable.

$$1) \text{ Montrer que } \iint_{\mathbf{R}_+^2} \frac{f(x)g(y)}{x+y} \cdot dx \cdot dy \leq \pi \sqrt{\int_0^{+\infty} f(x)^2 \cdot dx} \sqrt{\int_0^{+\infty} g(y)^2 \cdot dy}.$$

[Ind. : mettre le premier membre sous la forme $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t} \int_0^{+\infty} f(x) \cdot g(xt) \cdot dx$ et utiliser Cauchy-Schwarz.]

2) Montrer que π est la meilleure constante en prenant pour f et g :

$$f(x) = g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ si } 1 \leq x \leq A, f(x) = g(x) = 0 \text{ sinon.}$$

Exercice 32 : Paradoxe de la peinture.

1) On fait tourner l'hyperbole $y = 1/x$, $x \geq 1$, autour de l'axe Ox . Que dire de l'aire de la surface engendrée, et du volume délimité ?

2) Plus généralement, soient $\alpha < 0$, $D = \{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 ; z \leq -1, x^2 + y^2 \leq (-z)^{2\alpha} \}$, ∂D le bord de D .

a) Représenter D ; calculer $\text{Volume}(D)$ et $\text{Aire}(\partial D)$.

b) Montrer que si $\alpha \in [-1, -\frac{1}{2}]$, alors $\text{Volume}(D) < +\infty$ et $\text{Aire}(\partial D) = +\infty$.

Autrement dit, si l'on verse dans D , considérée comme un entonnoir infini, un volume fini de peinture, la frontière ∂D sera peinte avec un volume fini, alors qu'elle a une surface infinie.

[Réponses : 1) $V = \int_{+1}^{+\infty} \frac{\pi}{z^2} dz = \pi$, $S = 2\pi \int_1^{+\infty} \frac{1}{z} \sqrt{1+z^{-4}} dz = +\infty$.

2) $V = \int_{+1}^{+\infty} \frac{\pi}{z^{-2\alpha}} dz < +\infty \Leftrightarrow \alpha < -\frac{1}{2}$; $S = 2\pi \int_{+1}^{+\infty} z^\alpha \sqrt{1+\alpha^2 z^{2\alpha-2}} dz < +\infty \Leftrightarrow \alpha < -1$.]

Exercice 33 : Problème de Bâle.

1) Montrer que $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2} = \sum_{n \geq 0} \iint_{[0,1]^2} (xy)^{2n} dx dy = \iint_{[0,1]^2} \frac{dx dy}{1-x^2 y^2}$.

2) Montrer que le changement de variable $\Phi : (u, v) \rightarrow (x, y) = (\frac{\sin u}{\cos v}, \frac{\sin v}{\cos u})$ met en bijection le triangle $T = \{ (u, v) ; u \text{ et } v \geq 0, u + v \leq \frac{\pi}{2} \}$ et le carré $[0, 1]^2$. Calculer le jacobien D de Φ .

3) En déduire que $\iint_{[0,1]^2} \frac{dx dy}{1-x^2 y^2} = \iint_T du dv$, et finalement calculer $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$.

Remarque : le théorème d'Apéry sur l'irrationalité de $\zeta(3)$ utilise des intégrales doubles impropres.

8. Contre-exemples.

Exercice 1 : Pour chacune des fonctions suivantes, définies sur $[-1, 1]^2$, leur valeur en 0 étant nulle par exemple, déterminer si elles sont continues, bornées, intégrables-Riemann, séparément continues, et comparer $\int_{-1}^{+1} (\int_{-1}^{+1} f(x, y) dy) dx$ et $\int_{-1}^{+1} (\int_{-1}^{+1} f(x, y) dx) dy$.

♣ $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ ♦ $f(x, y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$

♥ $f(x, y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ ♠ $f(x, y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$.

Exercice 2 : Soit f la fonction définie sur $[0, 1]^2$ par :

$$\begin{cases} 2^{2n} & \text{si } n \in \mathbb{N}^* \text{ et } (x, y) \in [\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}[\times [\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}[\\ \end{cases}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} -2^{2n+1} & \text{si } n \in \mathbb{N}^* \text{ et } (x, y) \in [\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}[\times [\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}[\\ \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 & \text{dans les autres cas} \end{cases}$$

f est-elle continue ? bornée ? intégrable-Riemann ?

Montrer que $\int_0^1 (\int_0^1 f(x, y) dy) dx \neq \int_0^1 (\int_0^1 f(x, y) dx) dy$.

Exercice 3 : Intégrales impropres.

Montrer que $\int_1^{+\infty} (\int_1^{+\infty} \frac{x-y}{(x+y)^3} dx) dy \neq \int_1^{+\infty} (\int_1^{+\infty} \frac{x-y}{(x+y)^3} dy) dx$.

Montrer que $\int_1^{+\infty} (\int_1^{+\infty} \frac{x-y}{\max(x^3, y^3)} dx) dy \neq \int_1^{+\infty} (\int_1^{+\infty} \frac{x-y}{\max(x^3, y^3)} dy) dx$.

NB : Ce phénomène n'est possible que pour un domaine non borné et pour une fonction f changeant de signe.

9. Centres de gravité, moments d'inertie.

Dans les exercices suivants, les fils, plaques et solides sont supposés homogènes.

Exercice 1 : Centres de gravité d'une plaque triangulaire homogène, resp. d'un triangle en fil de fer homogène.

[Réponse : Le centre de gravité de la plaque triangulaire ABC est l'isobarycentre du triangle ABC. Celui du fil de fer est le centre du cercle inscrit dans le triangle formé des milieux des côtés.]

Exercice 2 : Centre de gravité, moments d'inerties par rapport aux axes de la plaque :

$$x \geq 0, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1.$$

Exercice 3 : 1) Moments d'inertie par rapport à O, aux plans xOy, yOz, zOx, aux axes Ox, Oy et Oz d'une boule pleine $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$.

2) Même question mais avec la sphère « creuse » $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

[Rép. : 1) $I_O = \frac{3MR^2}{5}$, $I_{xOy} = \frac{MR^2}{5}$, $I_{Oz} = \frac{2MR^2}{5}$, 2) $I_O = MR^2$, $I_{xOy} = \frac{MR^2}{3}$, $I_{Oz} = \frac{2MR^2}{3}$.]

Exercice 4 : Reprendre l'exercice précédent avec un ellipsoïde plein et creux.

Exercice 5 : Trouver le centre de gravité G_n de la demi-boule homogène $x_n \geq 0$, $x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1$.

Limite de $x_n(G_n)$ quand $n \rightarrow +\infty$.

[Réponse : $x_k(G_n) = 0$ pour $k < n$ et $x_n(G_n) = \frac{1}{(n+1) \cdot W_n} \rightarrow 0$, où W_n est l'intégrale de Wallis.]

Exercice 6 : Moments d'inertie par rapport à O, puis par rapport à l'hyperplan $x_n = 0$, de la boule pleine $x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq R^2$, puis de la sphère « creuse » $x_1^2 + \dots + x_n^2 = R^2$.

[Réponses : 1) $I_O = \frac{n}{n+2} MR^2$, $I_P = \frac{1}{n+2} MR^2$; 2) $I_O = MR^2$, $I_P = \frac{1}{n} MR^2$.]

Exercice 7 : 1) Moments d'inertie par rapport à O, aux plans xOy, yOz, zOx, aux axes Ox, Oy et Oz d'un cylindre plein $x^2 + y^2 \leq R^2$, $-a \leq z \leq a$.

2) Même question mais avec un cylindre creux.

Exercice 8 : 1) Moments d'inertie d'un tore à collier plein de centre O par rapport à O, aux plans xOy, yOz, zOx, aux axes Ox, Oy et Oz.

2) Mêmes questions pour un tore creux.

[Rép. : 1) $I_O = M(a^2 + \frac{5}{4}b^2)$, $I_{xOy} = \frac{Mb^2}{2}$, $I_{Oz} = M(a^2 + \frac{3}{4}b^2)$, $I_{Ox} = I_{Oy} = \frac{Mb^2}{4}$.

2) $I_O = M(a^2 + 2b^2)$, $I_{xOy} = \frac{Mb^2}{2}$, $I_{Oz} = M(a^2 + \frac{3}{2}b^2)$, $I_{Ox} = I_{Oy} = \frac{Mb^2}{4}$.]

Exercice 9 : On considère un fil ayant la forme d'une arche de cycloïde :

$$x = a.(t - \sin t), \quad y = a.(1 - \cos t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

1) Masse et centre de gravité du fil.

2) Aire du domaine obtenu en faisant tourner ce fil autour de l'axe Ox.

10. Intégrales curvilignes, formule de Riemann-Green.

Exercice 1 : Calculer les intégrales curvilignes suivantes sur les courbes indiquées :

a) $\int_{\Gamma} (x-y).dx + (x+y).dy$ où Γ est le segment joignant A(1, 0) à B(0, 1).

b) $\int_{\Gamma} y.dx + x.dy$ où Γ est l'arc de la parabole $y = x^2$ d'origine A(0, 0) et d'extrémité B(2, 4).

c) $\int_{\Gamma} x^2.dy + y^2.dx$ où Γ est la demi-ellipse $4x^2 + y^2 = 4$ d'origine A(2, 0) et d'extrémité B(-2, 0).

[Réponses : a) 1. b) 8. c) $-32/3$.]

Exercice 2 : Soit Γ un arc de classe C^1 d'extrémités $A(2, 0)$ et $B(1, 1)$.

Calculer $\int_{\Gamma} \omega$, où $\omega = (y^3 + 6xy^2).dx + (3xy^2 + 6x^2y).dy$.

[Réponse : $\omega = dF$, où $F(x, y) = xy^3 + 3x^2y^2$, donc $\int_{\Gamma} \omega = F(B) - F(A) = 4$.]

Exercice 3 : Dans le plan orienté, soient $K = \{ (x, y) ; 2x^2 + y^2 = 2, y \geq 0 \}$, Γ son bord parcouru dans le sens trigonométrique. Calculer $I = \int_{\Gamma} x^2 dy - y^2 dx$ et $J = \iint_K (x+y).dxdy$.

[Réponses : $I = \frac{8}{3}$, $J = \frac{4}{3}$.]

Exercice 4 : On considère la forme différentielle $\omega = \frac{x.dy - y.dx}{x^2 + y^2}$ sur $\mathbf{R}^2 - \{O\}$.

Calculer l'intégrale curviligne $\int_{\Gamma} \omega$, où Γ est le cercle de centre $A(a, b)$ et de rayon R , ne passant pas par l'origine, et parcouru dans le sens direct.

[Réponses : 2π si $a^2 + b^2 > R^2$, 0 si $a^2 + b^2 < R^2$, π si $a^2 + b^2 = R^2$.]

Exercice 5 : Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. 1) Montrer que la forme différentielle

$$\omega = \frac{e^{-y}}{x^2 + y^2} \cdot [(x.\sin x - y.\cos x).dx + (x.\cos x + y.\sin x).dy] \quad \text{est fermée.}$$

2) Que dire de l'intégrale curviligne $\int_{\gamma} \omega$, où γ est le contour formé du segment $[a, b]$ de Ox , du demi-cercle $x^2 + y^2 = b^2$ ($y \geq 0$), du segment $[-b, -a]$ de Ox et du demi-cercle $x^2 + y^2 = a^2$ ($y \geq 0$) ?

3) En déduire les intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}.dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}.dx$.

Exercice 6 : On considère les fonctions $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-u^2}.\sin(xu^2).du$ et $g(x) = \int_0^{+\infty} e^{-u^2}.\cos(xu^2).du$.

1) Montrer que f et g sont définies sur \mathbf{R} . Parité ?

2) On considère les formes différentielles $\omega_1 = (y^2 - x^2).[\cos(2xy).dx + \sin(2xy).dy]$

$$\omega_2 = h(y^2 - x^2).[\sin(2xy).dx - \cos(2xy).dy]$$

où h est une fonction de classe C^1 de \mathbf{R} dans \mathbf{R} , telle que $h(0) = 1$.

Déterminer h pour que ω_1 et ω_2 soient exactes.

3) Soit γ le contour formé du segment $[OA]$ de Ox , où $A(R, 0)$, de l'arc de cercle $AB : x^2 + y^2 = R^2$ (l'angle polaire $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$), et du segment BO .

Quelle est la valeur des intégrales curvilignes $\int_{\gamma} \omega_1$ et $\int_{\gamma} \omega_2$?

Limites de $\int_{OA} \omega_1$, $\int_{OA} \omega_2$, $\int_{AB} \omega_1$ et $\int_{AB} \omega_2$ lorsque $R \rightarrow +\infty$?

4) On pose $a = \tan \theta$. Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} e^{(a^2-1)x^2} . [\cos(2ax^2) + a.\sin(2ax^2)].dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{(a^2-1)x^2} . [\sin(2ax^2) - a.\cos(2ax^2)].dx = 0$$

5) En déduire les intégrales $\int_0^{+\infty} e^{-u^2}.\cos(\frac{2au^2}{1-a^2}).du$ et $\int_0^{+\infty} e^{-u^2}.\sin(\frac{2au^2}{1-a^2}).du$.

6) Montrer que $g(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{2(1+x^2)}}$ et $f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{sgn}(x) \sqrt{\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{2(1+x^2)}}$.
(Saint-Cyr, 1983)

Exercice 7 : Soit $c > 0$. 1) Montrer que la forme différentielle

$$\omega(x, y) = 4(x^2 + y^2 - c^2).x.dx + 4(x^2 + y^2 + c^2).y.dy$$

est fermée et exacte. Trouver ses primitives.

2) Intégrer l'équation différentielle $4(x^2 + y^2 - c^2).x.dx + 4(x^2 + y^2 + c^2).y.dy = 0$.

Reconnaître géométriquement les courbes intégrales.

[Rép. : $\omega = dF$, où $F(x, y) = [(x - c)^2 + y^2][(x + c)^2 + y^2]$; on trouve des ovales de Cassini.]

Exercice 8 : 1) Que dire de la forme différentielle $\omega(x, y) = (2x^2y^3 - x).dx + (2x^3y^2 - y).dy$?

2) Résoudre l'équation différentielle $(2x^2y^3 - x).dx + (2x^3y^2 - y).dy = 0$.

Exercice 9 : Soient $D = \{(x, y) ; x > 0, y > 0\}$, $\omega = (x^2 + y^2) \left(\frac{3x^2 - y^2}{x^2y}.dx + \frac{3y^2 - x^2}{xy^2}.dy \right)$.

Est-ce une différentielle exacte sur D ? Si oui, en trouver une primitive.

[Rép. : ex. 8 : $\omega = dF$, où $F(x, y) = \frac{2}{3}x^3y^3 - \frac{x^2+y^2}{2}$; ex. 9 : $\omega = dF$, où $F(x, y) = \frac{x^3}{y} + 2xy + \frac{y^3}{x}$.]

Exercice 10 : Recherche de facteur intégrant.

On considère la forme différentielle $\omega(x, y) = (x^3 - 3xy^2).dx + (3x^2y - y^3).dy$.

Trouver une fonction $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ de classe C^1 et non nulle telle que $f(\frac{y}{x}).\omega(x, y)$ soit exacte.

Exercice 11 : Recherche de facteur intégrant.

On considère la forme différentielle $\omega(x, y) = (x^2 + y^2 - 1).dx - 2xy.dy$.

1) Montrer que ω n'est fermée sur aucun ouvert non vide de \mathbf{R}^2 .

2) Trouver un ouvert non vide U de \mathbf{R}^2 , et une fonction non nulle $\varphi : I \rightarrow \mathbf{R}$ de classe C^1 , tels que : $\varphi(x^2 - y^2).\omega(x, y)$ soit exacte dans U . Déterminer alors ses primitives.

[Réponses : ex. 10 : $f(t) = (\frac{1+t^2}{1-t^2})^3$; ex. 11 : $\varphi(t) = -2 \ln |1 + t|$; $U = \{(x, y) ; x^2 - y^2 \neq -1\}$.]

Bibliographie

Joël Martin : La bible du contrepet

J. H. Conway, N. J. A. Sloane : Sphere packings, lattices and groups (Springer)

Ramis, Couty-Ezra, Lelong Ferrand-Arnaudiès, Monier, etc. : Cours de taupe

M. Berger, B. Gostiaux : Géométrie différentielle (A. Colin)

B. M. Makarov, M. G. Goluzina, A. A. Lodkin, A. N. Podkorytov :

Problèmes d'analyse réelle (Cassini, 2010), chap. VIII.6, p. 146-154

B. Hauchecorne : Les contre-exemples en mathématiques (Ellipses)

Concours TPE 1995, épreuve pratique

Concours ENS P' 1995 : $\zeta(3)$ est irrationnel

Concours X ENS Cachan 2004, filière PSI