

## Formes différentielles

Fiche de A. Gammella-Mathieu (IUT de Mesures Physiques de Metz – Université de Lorraine)

### Exercice 1

Déterminer si les formes différentielles suivantes sont exactes et dans ce cas, les intégrer :

1.  $\omega_1 = 2xydx + x^2dy$
2.  $\omega_2 = xydx - zdy + xzdz$
3.  $\omega_3 = 2xe^{x^2-y}dx - 2e^{x^2-y}dy$
4.  $\omega_4 = yz^2dx + (xz^2 + z)dy + (2xyz + 2z + y)dz$ .

[Correction ▼](#)

[006873]

### Exercice 2

On considère le changement de variables en coordonnées sphériques suivant :

$$\begin{cases} x &= r \cos \varphi \cos \theta \\ y &= r \cos \varphi \sin \theta \\ z &= r \sin \varphi \end{cases}$$

1. Calculer  $dx, dy, dz$ .
2. Vérifier que  $x dx + y dy + z dz = r dr$ . En déduire  $\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}$  et  $\frac{\partial r}{\partial z}$ .

[Correction ▼](#)

[006874]

### Exercice 3

On considère la forme différentielle  $\omega = (x^2 + y^2 + 2x)dx + 2ydy$ .

1. Montrer que  $\omega$  n'est pas exacte.
2. Trouver une fonction  $\psi(x)$  telle que  $\psi(x)\omega = df$ . Préciser alors  $f$ . (On dit que  $\psi$  est un facteur intégrant.)

[Correction ▼](#)

[006875]

### Exercice 4

On considère le champ vectoriel  $\vec{V}(x, y) = (1 + 2xy, x^3 - 3)$ . Ce champ est-il un champ de gradient ?

[Correction ▼](#)

[006876]

### Exercice 5

Quel est le champ vectoriel qui dérive du potentiel

$$U(x, y, z) = 1 + x + xy + xyz?$$

[Correction ▼](#)

[006877]

### Exercice 6

Calculer la circulation du champ vectoriel  $\vec{V}(x, y) = (3x, x + y)$  le long du cercle  $C$  de centre  $O$  et de rayon 1, parcouru dans le sens direct.

**Exercice 7**

Calculer le travail  $W$  de la force  $\vec{F}(x, y, z) = (yz, zx, xy)$  le long de l'hélice  $H$  paramétrée par  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$  et  $z = t$  où  $t$  varie de 0 à  $\frac{\pi}{4}$ .

Correction ▼

[006879]

**Exercice 8**

On donne le champ vectoriel

$$\vec{V}(x, y, z) = (y^2 \cos x, 2y \sin x + e^{2z}, 2ye^{2z}).$$

1. Montrer que ce champ est un champ de gradient.
2. Déterminer le potentiel  $U(x, y, z)$  dont dérive ce champ sachant qu'il vaut 1 à l'origine.
3. Quelle est la circulation de ce champ de  $A(0, 1, 0)$  à  $B(\frac{\pi}{2}, 3, 0)$  ?

Correction ▼

[006880]

**Exercice 9**

En utilisant la formule de Green-Riemann, calculer  $I = \iint_{\mathcal{D}} xy dx dy$  où

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq 1\}.$$

Indication ▼

Correction ▼

[006881]

**Exercice 10**

On considère la forme différentielle

$$\omega = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy.$$

1. Dans quel domaine cette forme différentielle est-elle définie ?
2. Calculer l'intégrale curviligne  $\int_C \omega$  où  $C$  est le cercle de centre  $O$  et de rayon 1, parcouru dans le sens direct.
3. La forme  $\omega$  est-elle exacte ?

Correction ▼

[006882]

**Références**

P. Thuillier, J.C. Belloc, *Mathématiques, analyse tome 1*, 2ème édition, Masson (1990).

D. Duverney, S. Heumez, G. Huvent, *Toutes les mathématiques MPSI, PCSI, PTSI, TSI*, Ellipses (2004).

**Indication pour l'exercice 9 ▲**

On rappelle la formule de Green-Riemann qui permet de faire le lien entre intégrale double et intégrale curviligne :

**Théorème.** Soit  $\mathcal{D}$  un domaine de  $\mathbb{R}^2$  limité par une courbe fermée  $\mathcal{C}$  que l'on suppose coupée par toute parallèle aux axes en deux points au plus. On considère une forme différentielle  $\omega = Pdx + Qdy$  définie sur  $\mathcal{D}$ . Si les fonctions  $P$  et  $Q$  sont de classe  $C^1$ , on a :

$$\int_{\mathcal{C}^+} Pdx + Qdy = \iint_{\mathcal{D}} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

où l'on a noté  $\mathcal{C}^+$  la courbe  $\mathcal{C}$  que l'on a orientée dans le sens direct.

---

## Correction de l'exercice 1 ▲

1. Pour  $\omega_1$ , on pose  $P(x, y) = 2xy$  et  $Q(x, y) = x^2$ . Comme  $\omega_1$  est définie sur l'ouvert étoilé  $\mathbb{R}^2$  et que  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$ , le théorème de Poincaré permet de dire que  $\omega_1$  est exacte. On cherche  $f$  tel que  $df = \omega_1$ . Ceci équivaut à résoudre le système

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \end{cases}$$

En intégrant la première ligne par rapport à  $x$ , on trouve  $f(x, y) = x^2y + c(y)$ . En dérivant l'expression que l'on vient d'obtenir par rapport à  $y$  et en identifiant avec la deuxième ligne du système, on trouve

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + c'(y) = x^2.$$

Il s'ensuit que  $c'(y) = 0$  et donc que  $c(y) = c \in \mathbb{R}$ . Par suite, la fonction  $f$  cherchée est :

$$f(x, y) = x^2y + c$$

où  $c$  est une constante réelle.

2. Pour  $\omega_2$ , on pose  $P(x, y, z) = xy$ ,  $Q(x, y, z) = -z$  et  $R(x, y, z) = xz$ . On constate que  $\frac{\partial P}{\partial y} = x$  alors que  $\frac{\partial Q}{\partial x} = 0$ . La forme  $\omega_2$  n'est donc pas exacte.
3. Pour  $\omega_3$ , on pose  $P(x, y) = 2xe^{x^2-y}$  et  $Q(x, y) = -2e^{x^2-y}$ . Là aussi,  $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$  puisque  $\frac{\partial P}{\partial y} = -2xe^{x^2-y}$  alors que  $\frac{\partial Q}{\partial x} = -4xe^{x^2-y}$ ;  $\omega_3$  n'est donc pas exacte.
4. Pour  $\omega_4$ , posons  $P(x, y, z) = yz^2$ ,  $Q(x, y, z) = xz^2 + z$ ,  $R(x, y, z) = 2xyz + 2z + y$ . On constate que
- (a)  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = z^2$
  - (b)  $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} = 2zy$
  - (c)  $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} = 2xz + 1$ .

La forme  $\omega_4$  est de plus définie sur l'ouvert étoilé  $\mathbb{R}^3$ , elle est donc exacte d'après le théorème de Poincaré. Cherchons maintenant  $f$  telle que  $df = \omega_4$ , ceci revient à résoudre le système :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = yz^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = xz^2 + z \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 2xyz + 2z + y \end{cases}$$

En intégrant la première équation par rapport à  $x$ , on trouve

$$f(x, y, z) = xyz^2 + \psi(y, z).$$

Maintenant, en dérivant l'expression obtenue successivement par  $y$  et  $z$  et en égalisant avec les deux dernières équations du système, on obtient un nouveau système

$$\begin{cases} xz^2 + \frac{\partial \psi}{\partial y} = xz^2 + z \\ 2xyz + \frac{\partial \psi}{\partial z} = 2xyz + 2z + y \end{cases}$$

qui équivaut à :

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial y} = z & (1) \\ \frac{\partial \psi}{\partial z} = 2z + y & (2) \end{cases}$$

Finalement, en intégrant (1) par rapport à  $y$ , il vient  $\psi(y, z) = zy + c(z)$ . En dérivant cette expression de  $\psi$  par rapport à  $z$  et en égalisant avec (2), on trouve  $y + c'(z) = 2z + y$ , c'est-à-dire  $c'(z) = 2z$  donc  $c(z) = z^2 + c$  où  $c \in \mathbb{R}$ . Ainsi, la fonction  $f$  telle que  $\omega_4 = df$  est de la forme

$$f(x, y, z) = xyz^2 + zy + z^2 + c$$

où  $c \in \mathbb{R}$ .

---

### Correction de l'exercice 2 ▲

---

1. On vérifie que :

$$(a) \quad dx = \cos \varphi \cos \theta dr - r \sin \varphi \cos \theta d\varphi - r \sin \theta \cos \varphi d\theta$$

$$(b) \quad dy = \cos \varphi \sin \theta dr - r \sin \varphi \sin \theta d\varphi + r \cos \theta \cos \varphi d\theta$$

$$(c) \quad dz = \sin \varphi dr + r \cos \varphi d\varphi.$$

Par suite, on a :

$$(a) \quad xdx = r \cos^2 \varphi \cos^2 \theta dr - r^2 \sin \varphi \cos \varphi \cos^2 \theta d\varphi - r^2 \sin \theta \cos \theta \cos^2 \varphi d\theta$$

$$(b) \quad ydy = r \cos^2 \varphi \sin^2 \theta dr - r^2 \sin \varphi \cos \varphi \sin^2 \theta d\varphi + r^2 \cos \theta \sin \theta \cos^2 \varphi d\theta$$

$$(c) \quad zdz = r \sin^2 \varphi dr + r^2 \cos \varphi \sin \varphi d\varphi.$$

2. En additionnant, on obtient  $xdx + ydy + zdz = r dr$ . On en déduit que :

$$xdx + ydy + zdz = r \left( \frac{\partial r}{\partial x} dx + \frac{\partial r}{\partial y} dy + \frac{\partial r}{\partial z} dz \right).$$

Ainsi

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}.$$

---

### Correction de l'exercice 3 ▲

---

1. Posons  $P(x, y) = x^2 + y^2 + 2x$  et  $Q(x, y) = 2y$ . On voit facilement que  $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$ . La forme  $\omega$  n'est donc pas exacte.

2. Comme  $\omega$  est définie sur  $\mathbb{R}^2$ , il suffit que  $\psi\omega$  soit exacte pour que  $f$  existe. Maintenant,  $\psi\omega$  est exacte si et seulement si

$$\frac{\partial(\psi(x)(x^2 + y^2 + 2x))}{\partial y} = \frac{\partial(\psi(x)2y)}{\partial x}.$$

Ceci équivaut à  $2y\psi(x) = 2y\psi'(x)$ . Ainsi,  $\psi(x) = \psi'(x)$  pour tout  $x$ . Donc  $\psi(x) = ke^x$  avec  $k$  constante. On peut choisir  $k = 1$ . Ainsi

$$\psi\omega = e^x(x^2 + y^2 + 2x)dx + e^x(2y)dy.$$

On cherche ensuite  $f$  telle que :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = e^x(x^2 + y^2 + 2x) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = e^x(2y) \end{cases}$$

En intégrant la deuxième équation par rapport à  $y$ , on trouve

$$f(x, y) = e^x y^2 + c(x).$$

En dérivant cette expression par rapport à  $x$  et en égalisant avec la première équation du système, on obtient

$$e^x y^2 + c'(x) = e^x(x^2 + y^2 + 2x)$$

c'est-à-dire

$$c'(x) = e^x(x^2 + 2x).$$

Il en résulte que  $c(x) = x^2 e^x + c$  et donc que

$$f(x, y) = e^x(x^2 + y^2) + c$$

avec  $c$  dans  $\mathbb{R}$ .

---

**Correction de l'exercice 4 ▲**

---

Au champ  $\vec{V}(x, y)$  est associée la forme

$$\omega = (1 + 2xy)dx + (x^3 - 3)dy.$$

Cette forme n'est pas exacte puisque  $\frac{\partial(1+2xy)}{\partial y} \neq \frac{\partial(x^3-3)}{\partial x}$ . Il s'ensuit que  $V(\vec{x}, y)$  n'est pas un champ de gradient.

---

**Correction de l'exercice 5 ▲**

---

Le champ vectoriel qui dérive du potentiel  $U$  est

$$\vec{\text{grad}}(U) = \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right).$$

Il s'agit donc du champ vectoriel de composantes :

$$\vec{\text{grad}}(U) = (1 + y + yz, x + xz, xy).$$

---

**Correction de l'exercice 6 ▲**

---

Soit  $\omega = 3xdx + (x + y)dy$  la forme différentielle naturellement associée à  $\vec{V}(x, y)$  et considérons  $x = \cos t$  et  $y = \sin t$  comme paramétrage du cercle de centre  $O$  et de rayon 1 (avec  $t \in [0; 2\pi]$ ). Il s'ensuit que la circulation  $\int_C \vec{V} \cdot d\vec{l}$  n'est autre que :

$$\int_C \vec{V} \cdot d\vec{l} = \int_C \omega = \int_0^{2\pi} (3 \cos t (-\sin t) + (\cos t + \sin t) \cos t) dt.$$

Comme  $\cos^2 t = \frac{\cos(2t) + 1}{2}$ , on obtient :

$$\int_C \vec{V} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} (-2 \sin t \cos t + \frac{\cos(2t) + 1}{2}) dt = [\cos^2(t) + \frac{1}{4} \sin(2t) + \frac{t}{2}]_0^{2\pi} = \pi.$$

Remarquons que si la forme  $\omega$  avait été exacte, on aurait obtenu  $\int_C \vec{V} \cdot d\vec{l} = 0$  comme réponse, puisque l'intégrale curviligne d'une forme exacte sur une courbe fermée est nulle.

---

**Correction de l'exercice 7 ▲**

---

Notons  $\omega = yzdx + zxdy + xydz$  la forme différentielle associée à  $\vec{F}(x, y, z)$ . Par définition de  $W$ , on a  $W = \int_H \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_H \omega$ . D'après le paramétrage donné pour  $H$ , on a

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} yzdx + zxdy + xydz \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} ((\sin t)t(-\sin t) + t \cos^2 t + \cos t \sin t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (t \cos(2t) + \cos t \sin t) dt. \end{aligned}$$

On a utilisé ici la formule trigonométrique :  $\cos(2t) = \cos^2 t - \sin^2 t$ . En faisant une intégration par parties, on constate que

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} t \cos(2t) dt = \left[ \frac{t \sin(2t)}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(2t)}{2} dt.$$

On en déduit que

$$W = \left[ \frac{t \sin(2t)}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{4} [\cos(2t)]_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2} [\sin^2(t)]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{\pi}{8}.$$

Remarquons que  $\omega = yzdx + zxdy + xydz$  est exacte. De plus, on vérifie aisément que  $\omega = d(xyz)$ . On peut alors retrouver le résultat précédent en faisant :

$$W = f(B) - f(A)$$

où l'on a posé  $f(x, y, z) = xyz$ ,

$$B = (\cos(\frac{\pi}{4}), \sin(\frac{\pi}{4}), \frac{\pi}{4}) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4})$$

et

$$A = (\cos(0), \sin(0), 0) = (1, 0, 0).$$

### Correction de l'exercice 8 ▲

1. On note  $P(x, y, z) = y^2 \cos x$ ,  $Q(x, y, z) = 2y \sin x + e^{2z}$  et  $R(x, y, z) = 2ye^{2z}$ . La forme  $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ , naturellement associée au champ  $\vec{V}(x, y, z)$ , est exacte puisqu'elle est définie sur  $\mathbb{R}^3$  et

(a)  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y \cos x$

(b)  $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} = 0$

(c)  $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} = 2e^{2z}$ .

Le champ  $\vec{V}(x, y, z)$  est donc un champ de gradient.

2. Cherchons  $U$  tel que  $\omega = dU$ . Cela nous conduit à résoudre le système :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = y^2 \cos x \\ \frac{\partial U}{\partial y} = 2y \sin x + e^{2z} \\ \frac{\partial U}{\partial z} = 2ye^{2z} \end{cases}$$

En intégrant la première équation par rapport à  $x$ , on trouve :

$$U(x, y, z) = y^2 \sin x + \psi(y, z).$$

Maintenant, en utilisant les deux dernières équations, on est amené à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial y} = e^{2z} \\ \frac{\partial \psi}{\partial z} = 2ye^{2z} \end{cases}$$

Par suite, on vérifie que  $\psi(y, z) = e^{2z}y + c(z)$  avec  $c'(z) = 0$ . Donc  $c(z) = c$  avec  $c$  constante réelle et finalement :

$$U(x, y, z) = y^2 \sin x + e^{2z}y + c$$

avec  $c \in \mathbb{R}$ . Par ailleurs, on veut que  $U(0, 0, 0) = 1$  ce qui donne  $c = 1$ .

3. La circulation du champ de  $A(0, 1, 0)$  à  $B(\frac{\pi}{2}, 3, 0)$  est

$$\int_{\widehat{AB}} \vec{V} \cdot d\vec{l} = \int_{\widehat{AB}} \omega = U(B) - U(A) = U(\frac{\pi}{2}, 3, 0) - U(0, 1, 0) = 11.$$

Remarquons que lorsque  $\omega$  est exacte, pour calculer l'intégrale curviligne de  $\omega$  sur un chemin, il suffit de connaître l'origine et l'extrémité du chemin. Autrement dit, l'intégrale curviligne d'une forme exacte sur  $\widehat{AB}$  ne dépend que de  $A$  et de  $B$ , et non du chemin choisi pour aller de  $A$  à  $B$ .

---

**Correction de l'exercice 9 ▲**

On rapporte le plan à un repère orthonormé direct d'origine  $O$ . D'après la formule de Green-Riemann, en choisissant de prendre  $P = 0$  et  $Q = x^2y$  de sorte que  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = xy$ , on obtient :

$$I = \iint_{\mathcal{D}} xy dx dy = \int_T x^2 y dy$$

où l'on a noté  $T$  le triangle  $OAB$  orienté dans le sens direct avec  $O(0,0)$ ,  $A(1,0)$  et  $B(1,1)$ . Ainsi

$$I = \iint_{\mathcal{D}} xy dx dy = \int_{\widehat{OA}} x^2 y dy + \int_{\widehat{AB}} x^2 y dy + \int_{\widehat{BO}} x^2 y dy.$$

L'intégrale curviligne d'une forme différentielle sur un chemin est indépendante du paramétrage choisi pour ce chemin. Pour le calcul, nous choisissons de paramétrer  $\widehat{OA}$  par  $x = t$  et  $y = 0$  avec  $t$  variant de 0 à 1 et ainsi  $\int_{\widehat{OA}} x^2 y dy = 0$ . De même, nous choisissons de paramétrer  $\widehat{BO}$  par  $x = 0$  et  $y = t$  avec  $t$  variant de 1 à 0 et ainsi  $\int_{\widehat{BO}} x^2 y dy = 0$ . Enfin, nous choisissons de paramétrer  $\widehat{AB}$  par  $x = t$  et  $y = 1 - t$  avec  $t$  allant de 1 à 0 et donc :

$$I = \iint_{\mathcal{D}} xy dx dy = \int_{\widehat{AB}} x^2 y dy = \int_1^0 \frac{t^2(1-t)}{2} (-dt) = \int_0^1 \frac{t^2(1-t)}{2} dt = \frac{1}{24}.$$

Remarquons qu'il n'aurait pas été plus difficile ici de calculer directement l'intégrale double sans utiliser la formule de Green-Riemann :

$$\iint_{\mathcal{D}} xy dx dy = \int_0^1 \left( \int_0^{1-x} xy dy \right) dx = \int_0^1 x \left[ \frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x} dx = \int_0^1 x \frac{(1-x)^2}{2} dx = \frac{1}{24}.$$

---

**Correction de l'exercice 10 ▲**

1. La forme  $\omega = \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$  est définie sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ .
2. Paramétrons le cercle  $C$  par  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$  avec  $t \in [0; 2\pi]$ . On obtient :

$$\begin{aligned} \int_C \omega &= \int_0^{2\pi} (-\sin t(-\sin t) + \cos t(\cos t)) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sin^2 t + \cos^2 t dt \\ &= \int_0^{2\pi} 1 dt \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

3. La forme  $\omega$  n'est pas exacte, sinon son intégrale curviligne sur la courbe fermée  $C$  serait nulle et cela contredirait notre résultat de la question précédente. Remarquons cependant que

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{-y}{x^2+y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{x^2+y^2} \right) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

En fait, avec cet exemple, on voit que dans le théorème de Poincaré, l'hypothèse que l'ouvert doit être étoilé, est indispensable. Ici  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$  n'est pas étoilé, c'est un domaine "troué". De plus,  $\int_C \omega$  n'est pas nulle car le cercle entoure le "trou".

---