Taller 2 Discretas

Fabian Humberto Chaparro Aguilera

May 30, 2023

1 ¿Existen enteros a y b tal que $a + b = 544$ y cuyo máximo común divisor es 11?

El ejercicio lo podemos plantear como:
MCD(a,b)=11
Por propiedad, tenemos que si a, b, c pertenecen a E y $c|a$ y $c|b$ entonces $c|(ax + by)$
$544 = k * 11 \rightarrow 544 = 49 * 11 + 5$
Debiado a que hay un residuo en la multiplicación, no hay números enteros que satisfagan las condiciones puestas.

2 Encuentre una regla de divisibilidad para 8 y para 16

Sabemos que un número es divisible por 8 si sus últimos 3 dígitos son divisibles por 8 Luego tenemos que:
$10 = 2(\text{mod } 8)$ $10^3 = 2^3 =(\text{mod } 8)$ Entonces:
Para todo $k \geq 3$
$10^k = 10^3 * 10^{k-3} \equiv 0(\text{mod } 8)$
$n \equiv a_0 + 10a_1 + 10^2a_2 \equiv 0(\text{mod } 8)$
Luego, $8|n$
Ahora, para 16: Sabemos que un número es divisible por 16 si sus últimos 4 dígitos son divisibles por 16 Luego tenemos que:
$10^2 = 2^2(\text{mod } 16)$
$10^3 = 2^3(\text{mod } 16)$
$10^4 = 0(\text{mod } 16)$
Entonces:
Para todo $k \geq 4$
$10^k = 10^4 * 10^{k-4} \equiv 0(\text{mod } 16)$
$n \equiv a_0 + 10a_1 + 10^2a_2 + 10^3a_3 \equiv 0(\text{mod } 16)$
Luego, $16|n$

3 Si p es un número primo y $a^2 \equiv b^2(\text{mod } p)$, pruebe que $a \equiv \pm$b

Podemos comenzar despejando:
$a^2 \equiv b^2(\text{mod } p) \rightarrow a^2 - b^2 \equiv 0(\text{mod } p)$
Lo cual es equivalente a:
$(a - b)(a + b) \equiv 0(\text{mod } p)$
Como p es primo, tenemos que: $a - b \equiv 0(\text{mod } p)$ o $a + b \equiv 0(\text{mod } p)$
Tenemos que como p divide a $(a - b)$ y $(a + b)$, y con ello podemos inferir:
$a \equiv b(\text{mod p})$ y $a \equiv -b(\text{mod } p) \rightarrow a \equiv \pm b(mod p)$

4 Encuentre el resto cuando 19^{19} es dividido por 5

Primero hay que obtener el modulo de cada 19
$19 (\mathrm{mod}\ 5) = 4$
Ahora si repetimos el proceso 19 veces obtendríamos 4*19
Y volviendo a operar tendremos:
$4 * 19 (\mathrm{mod}\ 5) = 4$
Por lo que la respuesta es 4

5 Encuentre los últimos dos dígitos de 7^{7^7}

Para resolver este ejercicio solo tenemos que resolver unas pocas potencias de 7
$7^0 = 1$
$7^1 = 7$
$7^2 = 49$
$7^3 = 343$
$7^4 = 2401$
Ahora sabemos que cada 4 potencias se repiten los últimos 2 dígitos
$49\%4 = 1$
Por lo que el resultado es 07

6 Encuentre $\phi(n)$ para $n = 35, n = 100$ y $n = 51200$

Comenzando por $n = 35$
$35 = 7 * 5$
$\phi(35) = \phi(7) * \phi(5)$ →6*4→24
Ahora $n = 100$
$100 = 2^2 * 5^2$
$\phi(100) = \phi(2^2) * \phi(5^2)$ →$(2^2 - 2) * (5^2 - 5)$ →2*20→40
Y para terminar $n = 51200$ $51200 = 2^{11} * 5^2$
$\phi(51200) = \phi(2^{11}) * \phi(5^2)$ →$(2^{11} - 2^{10}) * (5^2 - 5)$ →2048*1024→20480

7 Usted le pregunta a un robot que quiere comer. El responde "48.879". Sabiendo que el robot piensa en hexadecimal pero habla el decimal, ¿qué le debería dar de comer?

Primero dividimos 48879 en 16 para pasar a hexadecimal $48879 = 3054 * 16 + 15$
$3054 = 190 * 16 + 14$
$190 = 11 * 16 + 14$
Ahora sabemos que el valor en hexadecimal seria 11-14-14-15, que se traduce en $BEEF$

8 ¿65.314.638.792 es divisible por 24?

Se puede comenzar diciendo $24 = 8 * 3$
Para encontrar la respuesta basta con saber si 8 y 3 son divisores de 65.314.638.792
Primero, si los últimos 3 dígitos son múltiplos de 8, entonces 8 es divisor
$\frac{792}{8} = 99$ **Si es divisor**
Segundo, si la suma de los dígitos de 65.314.638.792 son igual a 3, entonces es divisor
$6 + 5 + 3 + 1 + 4 + 6 + 3 + 8 + 7 + 9 + 2 = 54$ →5+4=9 **Si es divisor**
Luego, 24 si es divisor

9 Pruebe que $n^p - n$ es divisible por p si p es un número primo

Podemos expresar $n^p - n$ de varias maneras:
$n^p - n$=$n^p - n \equiv 0$(mod p)= $n(n^{p-1} - 1)$
Según el teorema de Fermat, $n^{p-1} - 1$ es divisible por p, luego $n(n^{p-1} - 1)$ es divisible por p

10 Encuentre los enteros x y y tal que $314x + 159y = 1$

Tenemos que usar el álgoritmo de Euclides

$$314 = 159 + 155$$
$$159 = 155 + 4$$
$$155 = 4 * 38 + 3$$
$$4 = 3 + 1$$

Ahora necesitamos reemplazar en sentido contrario

$$1 = 4 - 3$$
$$1 = 4 - (155 - 4 * 38) = 4 * 39 - 155$$
$$1 = (159 - 155) * 39 - 155 = 159 * 39 - 155 * 40$$
$$1 = 159 * 39 - (314 - 159) * 40 = 159 * 79 - 314 * 40$$

Y con esto encontramos que $x = -40$ y $y = 79$, entonces

$$314(-40) + 159(79) = 1$$

11 Pruebe o controvierta la siguiente afirmación: Si a^2≡b^2(mod m) entonces a ≡b$(modm)$ o a≡ b(mod m)

Podemos comprobar que es falso si usamos $a = 2, b = 10, m = 96$
$2^2 \equiv 10^2$(mod 96) →2≡ 10(mod 96) **Es falso**
$4 \equiv 100$(mod 96) →2≡ -10(mod 96) **Es falso**

12 Encuentre todos los enteros positivos tales que $1066 \equiv 1776$(mod m)

Para resolver este ejercicio hay que encontrar todos los m que dividen a $(1776 - 1066) = 710$

número	divisor
710	2
355	5
71	71
1	1

Conociendo los divisores de 710, tenemos que los numeros que cumplen la condición son los números
$1, 2, 5, 2 * 5, 2 * 71, 5 * 71, 710$ ó $1, 2, 5, 10, 142, 355$

13 Muestre que la diferencia de dos cubos consecutivos nunca es divisible por 5

El ejercicio se puede representar como $(n + 1)^3 - n^3$, lo cúal es igual a $3n^2 + 3n + 1$
Para encontrar si es dívisible por 5 encontramos el mod 5 de cada termino.

n	1	2	3	4	5	6
$3n^2$	3	2	2	3	0	3
$3n$	3	1	4	2	0	3
1	1	1	1	1	1	1
mod 5	2	4	2	1	1	2

Y así comprobamos que $(n + 1)^3 - n^3$ nunca da 5

14 Encuentre un entero positivo n tal que $3^2|n$, $4^2|n+1$, $5^2|n+2$

Este ejercício se resolvio usando un código ubicado también dentro del repositorio de GitHub

15 ¿Cuál es el último digito de 7^{355}?

Para resolver este ejercicio basta con resolver pocas potencias de 7

$$7^0 = 17^1 = 77^2 = 497^3 = 3437^4 = 20417^5 = 16807$$

Haciendo esta secuencia encontramos que cada 4 numeros se repiten los últimos dígitos
Ahora, para encontrar cúal es el último dígito de 7^{355} tenemos que resolver lo siguiente: $355\%4 = 3$
Y con la respuesta a este modulo, encontramos la potencia 355 es equivalente a 3, y con ello obtenemos que el último dígito de 7^{355} es 3

16 Muestre que $3k+4$ y $4k+5$ no tienen un factor común más grande que 1

Esto se puede demostrar mirando los valores de $3k+4y4k+5$

k	3k+4
0	4
1	7
2	10
3	13

k	4k+5
0	5
1	9
2	13
3	18

Si miramos los resultados de cada ecuación, podemos ver que cuando k es par, $3k+4$ va a dar un número primo, mientras que para $4k+5$ no va a ser así; y cuando k es impar, se presenta el caso contrario.
Con esto podemos concluir que el MCD nunca va a ser mayor a 1