Lista de exercícios 01: Equações Diferenciais

Aluno: Luiz Felipe Banhos Alves
Matrícula: 120110674

1. Ache uma solução geral para a equação diferencial dada.
   (a) $y'' + 8y' - 9y = 0$;
   (b) $9y'' - 30y' + 25y = 0$;
   (c) $y'' + 16y = te^t$;
   (d) $y''' + 3y'' + 5y' + 3y = 0$;

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

a) $y = Ae^{rt} \Rightarrow Ar^2e^{rt} + 8Are^{rt} - 9Ae^{rt} = 0$

$$r^2 + 8r - 9 = 0 \longrightarrow r = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 36}}{2} \longrightarrow r_1 = 1, \quad r_2 = -9$$

$$\therefore \quad \boxed{y = A_1 e^{t} + A_2 e^{-9t}}$$

b) $9r^2 - 30r + 25 = 0 \longrightarrow r = \frac{30 \pm \sqrt{900 - 4.9.25}}{18} \longrightarrow r_1 = 5/3, \quad r_2 = 5/3$

$$\therefore \quad \boxed{y = A_1 e^{5/3t} + A_2 t e^{5/3t}}$$

c) $\Rightarrow y'' + 16y = te^t \Rightarrow y(t) = (At + B)e^t$ (Solução particular)

$$y'(t) = Ae^t + (At + B)e^t$$
$$y''(t) = Ae^t + Ae^t + (At + B)e^t$$
$$y''(t) = 2Ae^t + (At + B)e^t$$

Substituindo: $2Ae^t + (At+B)e^t + 16(At + B)e^t = te^t$

$$2Ae^t + 17(At + B)e^t = te^t$$
$$17At + 17B + 2A = t$$

• Decorre:

$$\{17A = 1 \Rightarrow A = 1/17 \qquad \begin{cases} 17B + 2A = 0 \\ 17B = -2/17 \\ B = -2/289 \end{cases}$$

$$y_p(t) = (t/17 - 2/289)e^t$$

$$\Rightarrow y'' + 16y = 0 \qquad \text{(Solução Homogênea)}$$

$$\hookrightarrow r^2 + 16 = 0$$

$$r = \pm 4j$$

$$y_H(t) = e^{\alpha t}(A_1\cos(\beta t) + A_2\sin(\beta t)) = A_1\cos(4t) + A_2\sin(4t)$$

Portanto, a solução geral é:

$$y = A_1\cos(4t) + A_2\sin(4t) + (t/17 - 2/289)e^t$$

d) $r^3 + 3r^2 + 5r + 3 = 0$; se $r = -1$ $\quad (-1)^3 + 3(-1)^2 + 5(-1) + 3 = 0$

Logo, -1 é raiz.

Com isso,

$$\begin{array}{l|l} r^3 + 3r^2 + 5r + 3 & r + 1 \\ \hline \underline{r^3 + r^2} & r^2 + 2r + 3 \\ \quad 2r^2 + 5r + 3 & \\ \quad \underline{2r^2 + 2r} & \\ \qquad 3r + 3 & \\ \qquad \underline{3r + 3} & \\ \qquad (0) & \end{array}$$

Assim, $(r^2 + 2r + 3)(r+1) = 0 \longrightarrow r^2 + 2r + 3 = 0$; $r = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 - 4.3}}{2}$ $\rightarrow r_1 = -1 + \sqrt{2}j$, $r_2 = -1 - \sqrt{2}j$

Dessa forma,

$$r_1 = -1 + \sqrt{2}j$$
$$r_2 = -1 - \sqrt{2}j$$
$$r_3 = -1$$

$$y = A_1 e^{-t} + e^{-t}\left(A_2\cos(\sqrt{2}\,t) + A_3\sin(\sqrt{2}\,t)\right)$$

$$\boxed{y = \left(A_1 + A_2\cos(\sqrt{2}\,t) + A_3\sin(\sqrt{2}\,t)\right)e^{-t}}$$

2. Determine a solução para o problema de valor inicial dado.
   (a) $y'' + 4y' + 7y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$;
   (b) $y''' + 12y'' + 27y' + 40y = 0$; $y(0) = -3$, $y'(0) = -6$, $y''(0) = -12$;

a) $r^2 + 4r + 7 = 0 \Rightarrow r = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16 - 4\cdot 7}}{2} \to r_1 = -2 + \sqrt{3}\,i$, $r_2 = -2 - \sqrt{3}\,i$

Assim, $y = e^{-2t}\left(A_1\cos(\sqrt{3}\,t) + A_2\sin(\sqrt{3}\,t)\right)$

• PVI (1): $y(0) = A_1 = 1 \longrightarrow y = e^{-2t}\left(\cos(\sqrt{3}\,t) + A_2\sin(\sqrt{3}\,t)\right)$

• PVI (2):

$y' = -2e^{-2t}\left(\cos(\sqrt{3}\,t) + A_2\sin(\sqrt{3}\,t)\right) + e^{-2t}\left(-\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}\,t) + \sqrt{3}A_2\cos(\sqrt{3}\,t)\right)$

$y'(0) = -2 + \sqrt{3}A_2 = -2 \Rightarrow A_2 = 0 \longrightarrow y = e^{-2t}\cos(\sqrt{3}\,t)$

$\therefore \boxed{y = e^{-2t}\cos(\sqrt{3}\,t)}$

b) $r^3 + 12r^2 + 27r + 40 = 0 \to r_1 \cong -9{,}63$, $r_2 \cong -1{,}19 - 1{,}66i$, $r_3 \cong -1{,}19 + 1{,}66i$

$y = A_1 e^{-9{,}63t} + e^{-1{,}19t}\left(A_2\cos(1{,}66t) + A_3\sin(1{,}66t)\right)$

• PVI 01: $y(0) = A_1 + A_2 = -3 \longrightarrow A_1 + A_2 = -3 \quad (1)$

• PVI 02:

$$y' = -9{,}63 A_1 e^{-9{,}63t} - 1{,}19 e^{-1{,}19t}\left(A_2 \cos(1{,}66t) + A_3 \sin(1{,}66t)\right) + e^{-1{,}19t}\left(-1{,}66 A_2 \sin(1{,}66t) + 1{,}66 A_3 \cos(1{,}66t)\right)$$

$$y'(0) = -9{,}63 A_1 - 1{,}19 A_2 + 1{,}66 A_3 = -6 \longrightarrow -9{,}63 A_1 - 1{,}19 A_2 + 1{,}66 A_3 = -6 \quad (2)$$

• PVI 03:

$$y'' = 92{,}74 A_1 e^{-9{,}63t} + 1{,}42 e^{-1{,}19t}\left(A_2 \cos(1{,}66t) + A_3 \sin(1{,}66t)\right) - 1{,}19 e^{-1{,}19t}\left(-1{,}66 A_2 \sin(1{,}66t) + 1{,}66 A_3 \cos(1{,}66t)\right)$$
$$- 1{,}19 e^{-1{,}19t}\left(-1{,}66 A_2 \sin(1{,}66t) + 1{,}66 A_3 \cos(1{,}66t)\right) + e^{-1{,}19t}\left(-2{,}75 A_2 \cos(1{,}66t) - 2{,}75 A_3 \sin(1{,}66t)\right)$$

$$y''(0) = 92{,}74 A_1 + 1{,}42 A_2 - 1{,}19 \cdot 1{,}66 A_3 - 1{,}19 \cdot 1{,}66 A_3 - 2{,}75 A_2 = -12$$
$$\longrightarrow 92{,}74 A_1 - 1{,}33 A_2 - 3{,}95 A_3 = -12 \quad (3)$$

Desso modo,

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = -3 \\ -9{,}63 A_1 - 1{,}19 A_2 + 1{,}66 A_3 = -6 \\ 92{,}74 A_1 - 1{,}33 A_2 - 3{,}95 A_3 = -12 \end{cases}$$

• Resolução do sistema:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 \\ -9{,}63 & -1{,}19 & 1{,}66 & -6 \\ 92{,}74 & -1{,}33 & -3{,}95 & -12 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ (L_2 + 9{,}63L_1) \\ (L_3 - 92{,}74L_1) \end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 8{,}44 & 1{,}66 & -34{,}89 \\ 0 & -94{,}07 & -3{,}95 & 266{,}22 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ (L_3 + \frac{94{,}07}{8{,}44}L_2) \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 8{,}44 & 1{,}66 & -34{,}89 \\ 0 & 0 & 14{,}55 & -122{,}65 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{cases} A_1 + A_2 = -3 \\ 8{,}44 A_2 + 1{,}66 A_3 = -34{,}89 \\ 14{,}55 A_3 = -122{,}65 \end{cases}$$

$\Rightarrow A_3 \cong -8{,}43 \; ; \; A_2 \cong -2{,}48 \; ; \; A_1 = -0{,}52$

Portanto, $y = A_1 e^{-9{,}63t} + e^{-1{,}19t}\left(A_2 \cos(1{,}66t) + A_3 \sin(1{,}66t)\right)$

$$\boxed{y = -0{,}52 e^{-9{,}63t} + e^{-1{,}19}\left(-2{,}48 \cos(1{,}66t - 8{,}43 \sin(1{,}66t))\right)}$$

3. Determine a solução geral da equação diferencial sujeita às condições iniciais indicadas.

$$y''' + 8y = 2t - 5 + 8e^{-2t},\ y(0) = -5,\ y'(0) = 3,\ y''(0) = -4. \qquad (1)$$

• Solução homogênea: $y''' + 8y = 0 \Rightarrow r^3 + 8 = 0 \Rightarrow r^3 = 8e^{(\pi j + 2\pi k j)}$

$$r_k = 2 \cdot e^{(\frac{\pi}{3} j + \frac{2\pi}{3} k j)}$$

$$r_0 = 2 \cdot e^{\frac{\pi}{3} j} = 1 + \sqrt{3} j$$

$$r_1 = 2 \cdot e^{\pi j} = -2$$

$$r_2 = 2 \cdot e^{\frac{5}{3}\pi j} = 1 - \sqrt{3} j$$

Logo, $y_H = A_1 e^{-2t} + e^{t}(A_2 \cos(\sqrt{3} t) + A_3 \sin(\sqrt{3} t))$

• Solução particular 01: $y''' + 8y = 2t - 5$; $y = c_1 t + c_2$

$$y' = c_1$$

$$y'' = 0 = y'''$$

$$8(c_1 t + c_2) = 2t - 5$$

$c_1 = 1/4$ e $c_2 = -5/8$

$$\therefore\ y_{p_1} = t/4 - 5/8$$

• Solução particular 02: $y''' + 8y = 8e^{-2t}$; $y = c_1 t e^{-2t}$

$y' = c_1 e^{-2t} - 2c_1 t e^{-2t}$; $y'' = -2c_1 e^{-2t} - 2c_1 e^{-2t} + 4c_1 t e^{-2t}$

$$y''' = 8c_1 e^{-2t} + 4c_1 e^{-2t} - 8c_1 t e^{-2t} = 12c_1 e^{-2t} - 8c_1 t e^{-2t}$$

$$\Rightarrow 12c_1 e^{-2t} - 8c_1 t e^{-2t} + 8c_1 t e^{-2t} = 8e^{-2t} \Rightarrow c_1 = 2/3$$

$$\therefore\ y_{p_2} = 2/3\, t e^{-2t}$$

Portanto, a solução geral é:

$$y = A_1 e^{-2t} + e^{t}(A_2 \cos(\sqrt{3} t) + A_3 \sin(\sqrt{3} t)) + 2/3\, t e^{-2t} + t/4 - 5/8$$

$$y = t/4 + (A_1 + 2/3\, t) e^{-2t} + e^{t}(A_2 \cos(\sqrt{3} t) + A_3 \sin(\sqrt{3} t)) - 5/8$$

• PVI 01: $y(0) = A_1 + A_2 - 5/8 = -5 \longrightarrow A_1 + A_2 = -35/8 \quad (1)$

• PVI 02: $y' = 1/4 + 2/3\, e^{-2t} - 2(A_1 + 2/3\, t)e^{-2t} + e^{t}(A_2 \cos(\sqrt{3}t) + A_3 \sin(\sqrt{3}t))$
$+ e^{t}(-A_2\sqrt{3} \sin(\sqrt{3}t) + A_3\sqrt{3} \cos(\sqrt{3}t))$

$y'(0) = 1/4 + 2/3 - 2A_1 + A_2 + A_3\sqrt{3} = 3$
$-2A_1 + A_2 + A_3\sqrt{3} = 25/12 \quad (2)$

• PVI 03:

$y'' = -4/3\, e^{-2t} - 4/3\, e^{-2t} + 4(A_1 + 2/3\, t)e^{-2t} + e^{t}(A_2 \cos(\sqrt{3}t) + A_3 \sin(\sqrt{3}t))$
$+ e^{t}(-A_2\sqrt{3} \sin(\sqrt{3}t) + A_3\sqrt{3} \cos.(\sqrt{3}t)) + e^{t}(-A_2\sqrt{3} \sin(\sqrt{3}t) + A_3\sqrt{3} \cos(\sqrt{3}t))$
$+ e^{t}(-A_2\, 3 \cos(\sqrt{3}) - A_3 . 3 \sin(\sqrt{3}t))$

$y''(0) = -8/3 + 4A_1 + A_2 + A_3\sqrt{3} + A_3\sqrt{3} - A_2.3 = -4$
$4A_1 - 2A_2 + 2\sqrt{3}A_3 = -4/3 \quad (3)$

Logo, $\begin{cases} A_1 + A_2 = -35/8 & (1) \\ -2A_1 + A_2 + A_3\sqrt{3} = 25/12 & (2) \\ 4A_1 - 2A_2 + 2\sqrt{3}A_3 = -4/3 & (3) \end{cases}$; $A_1 = -23/12$, $A_2 = -59/24$, $A_3 \cong 0{,}41$

Assim, $y = t/4 + (A_1 + 2/3\, t)e^{-2t} + e^{t}(A_2 \cos(\sqrt{3}t) + A_3 \sin(\sqrt{3}t)) - 5/8$

$$\boxed{y = t/4 + (2/3\, t - 23/12)e^{-2t} + e^{t}(0{,}41 \sin(\sqrt{3}t) - 59/24 \cos(\sqrt{3}t)) - 5/8}$$

4. Considere a equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2b\frac{dy}{dx} + y = 0, \qquad (2)$$

em que b é uma constante. Descreva como o comportamento das soluções dessa equação muda enquanto b varia.

$$y'' + 2by' + y = 0 \xrightarrow{\text{Eq. carac.}} r^2 + 2br + 1 = 0 \Rightarrow r = \frac{-2b \pm \sqrt{4b^2 - 4}}{2}$$

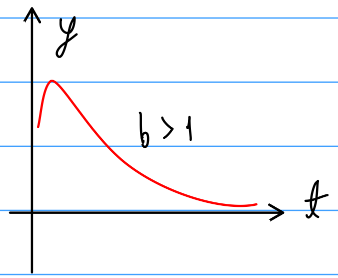
$$r = -b \pm \sqrt{b^2 - 1}$$

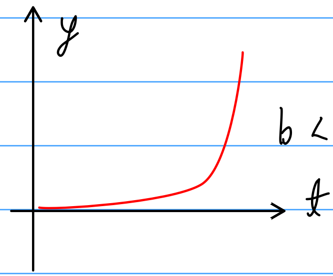
- Para : $b^2 - 1 > 0$

$$b > |1|$$

Logo, $y = A_1 e^{(-b + \sqrt{b^2-1})t} + A_2 e^{(-b - \sqrt{b^2-1})t}$

Nesse caso, a função terá um comportamento semelhante ao gráfico abaixo:

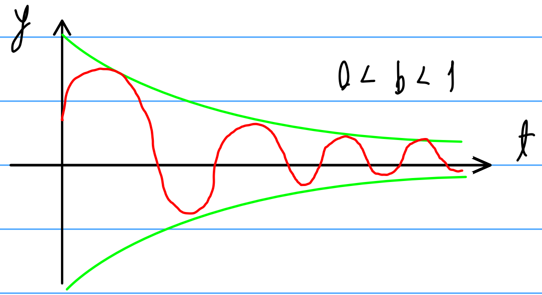


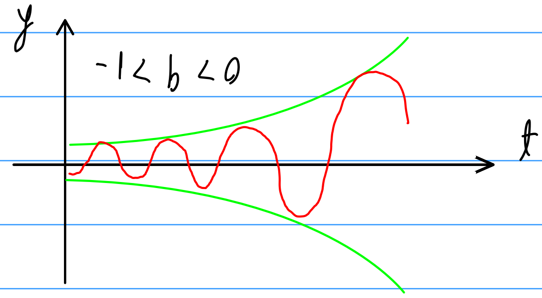


- Para : $b^2 - 1 < 0$

$$b < |1| \Rightarrow r = -b \pm \sqrt{1-b^2}\, j$$

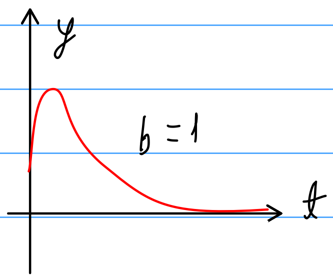
Assim, $y = e^{-bt}\left(A_1 \cos(\sqrt{1-b^2}\, t) + A_2 \sin(\sqrt{1-b^2}\, t)\right)$

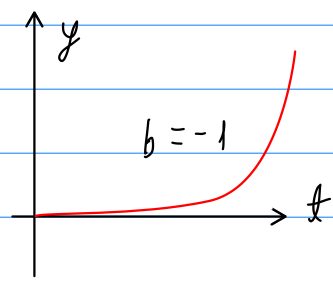




- Para : $b^2 - 1 = 0$; Assim, $y = (A_1 t + A_2)\, e^{\pm t}$

$$b = \pm 1$$





5. Considere a equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + cy = 0, \tag{3}$$

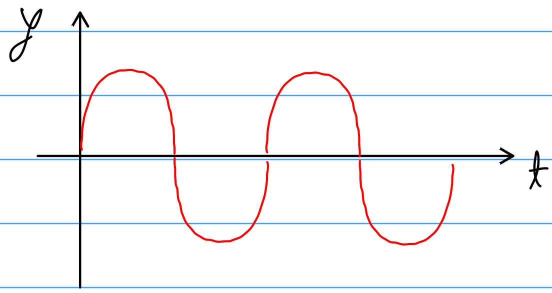
em que c é uma constante. Descreva como o comportamento das soluções dessa equação muda enquanto c varia.

$y'' + cy = 0 \Rightarrow r^2 + c = 0$

$r = \pm\sqrt{-c}$

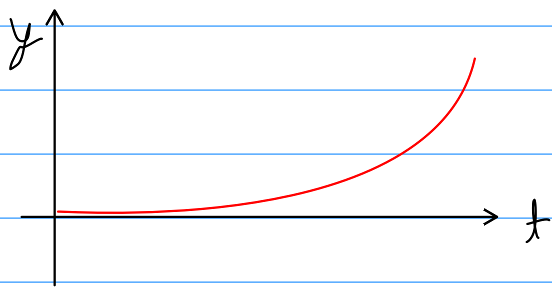
• Para $c > 0$: $r = \pm\sqrt{c}\, j$

$y = A_1 \cos(\sqrt{c}\, t) + A_2 \sin(\sqrt{c}\, t)$



• Para $c < 0$: $r = \pm\sqrt{c}$

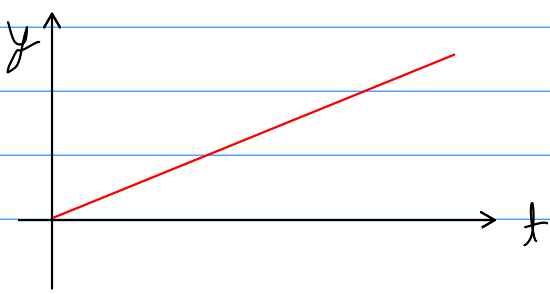
$y = A_1 e^{\sqrt{c}\, t} + A_2 e^{-\sqrt{c}\, t}$



• Para $c = 0$: $y'' = 0 \Rightarrow r^2 = 0$

$r = 0$

$y = A_1 + A_2 t$



6. A equação diferencial linear de segunda ordem

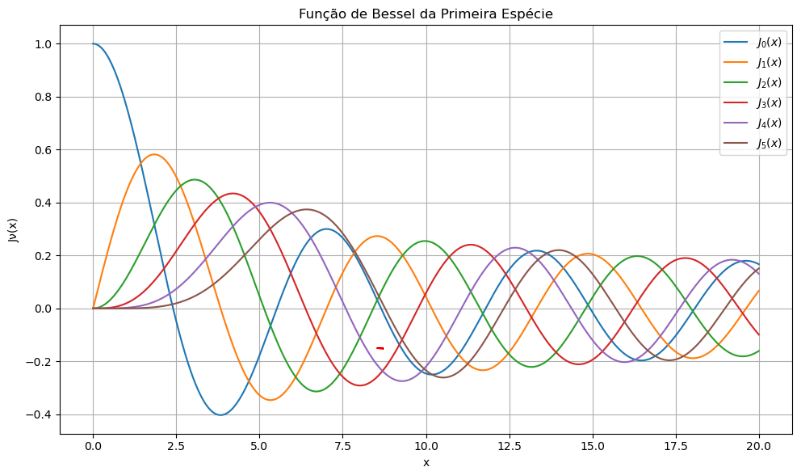
$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \nu^2\right) y = 0, \tag{4}$$

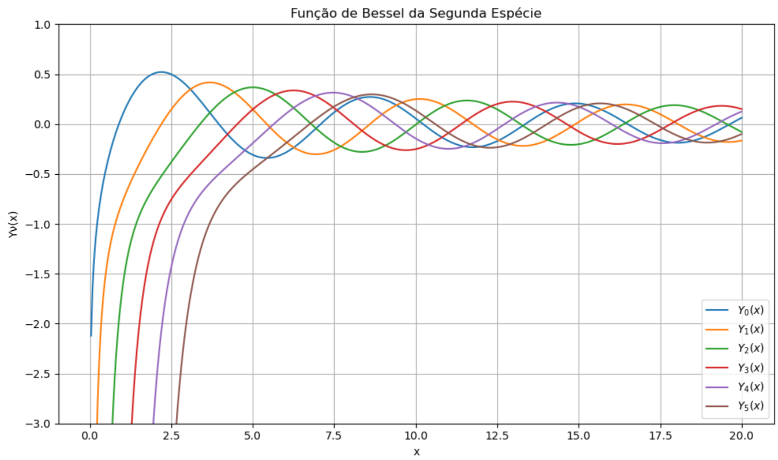
em que $\nu \geq 0$ é um parâmetro, é chamada **equação diferencial de Bessel de ordem ν**. A solução geral dessa equação é

$$y(x) = AJ_\nu(x) + BY_\nu(x), \tag{5}$$

em que A e B são constantes, $J_\nu(x)$ é chamada de **função de Bessel de primeira espécie de ordem ν** e $Y_\nu(x)$ é chamada de **função de Bessel de segunda espécie de ordem ν**.

Utilizando um software numérico, apresente os gráficos dessas duas funções para diferentes ordens (até 5ª ordem). Descreva o comportamento dessas funções, destacando suas diferenças.





Nota-se que a função $J_\nu(x)$ é suave, com oscilações que decaem em amplitude a medida que a variável x cresce. É importante destacar que para $x = 0$ o valor da função de Bessel de primeira espécie é finita, assumindo 1 para ordem zero e 0 para as ordens superiores.

Para a função de Bessel de segunda espécie há uma singularidade em $x = 0$ ($Y \to -\infty$), o que implica em equações não fisicamente realizáveis em certas aplicações. Além disso, Y_ν também oscila com amplitude similar a J_ν para grandes valores de x.