Luiz Felipe

⇒ Derivadas importantes:

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$k \in \mathbb{R}$	0	$\operatorname{sen} x$	$\cos x$	e^x	e^x
ax^n	nax^{n-1}	$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$	$\ln x$	$1/x$
$\sqrt{x}$	$1/2 \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$	$\operatorname{tg} x$	$\sec^2 x$	a^x	$a^x \ln a$
$1/x$	$-1/x^2$	$\operatorname{cotg} x$	$-\operatorname{cossec}^2 x$	$\log_a x$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$
		$\sec x$	$\sec x \operatorname{tg} x$		
		$\operatorname{cossec} x$	$-\operatorname{cossec} x \operatorname{cotg} x$		

• Conceitualmente, a primeira equação diferencial: $f(x) = e^x$; $f'(x) = e^x$

$f(x) = f'(x)$

$y - y' = 0$; $\boxed{y = c e^x}$

• Conceitos importantes:

Ordem: $\begin{cases} y'(x) + 2y(x) = 0 & (1°) \\ y''(x) - 3y'(x) = 0 & (2°) \\ y'''(x) + 2y(x) = 0 & (3°) \end{cases}$

Linearidade: $\begin{cases} y''(x) - 7y(x) = 0 \ \checkmark \\ y''(x) + \log(y(x)) = 0 \ ✗ \\ y''(x)y(x) + e^{y(x)} = 0 \ ✗ \end{cases}$

Homogeneidade: $\begin{cases} y'(x) + 7y(x) = 0 & (\text{homogênea}) \\ y'(x) + 7y(x) = x^2 & (\hat{N} \text{ homogênea}) \end{cases}$

CASO APAREÇA UM TERMO QUE NÃO SEJA Y(x) A EQUAÇÃO DEIXA DE SER HOMEGÊNEA.

Exemplo: $y'(x) = 2y(x)$;

$y(x) = e^{2x}$

$y'(x) = 2\underbrace{e^{2x}}_{y(x)} = 2y(x)$

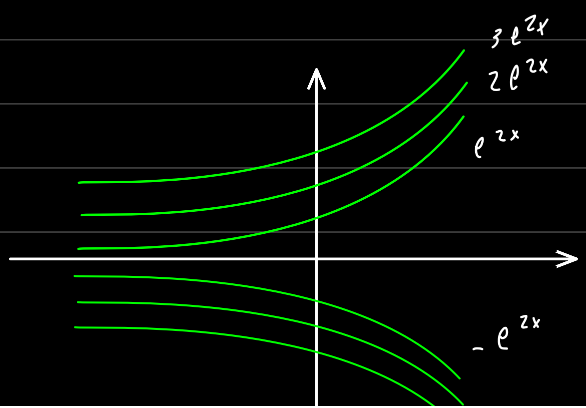
$y(x) = 3e^{2x}$

$y'(x) = 2.\underbrace{3e^{2x}}_{y(x)}$

$y'(x) = 2y(x)$

Logo, $y(x) = c e^{2x}$; $c \in \mathbb{R}$

↳ solução geral.



Família de soluções

• Problema do valor inicial (P.V.I)

Sabendo que $y(0) = 3 \Rightarrow y(x) = c\,e^{2x} \Rightarrow 3 = c.1 \Rightarrow c = 3 \Rightarrow \boxed{y(x) = 3\,e^{2x}}$

Por Laplace: $y'(x) = 2y(x) \xrightarrow{\mathcal{L}} sY(s) - y(0) = 2Y(s) \Rightarrow (s-2)Y(s) = 3$

$Y(s) = \dfrac{3}{s-2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(x) = 3.e^{2x}$

$t^n \xrightarrow{\mathcal{L}} \dfrac{n!}{s^{n+1}}$

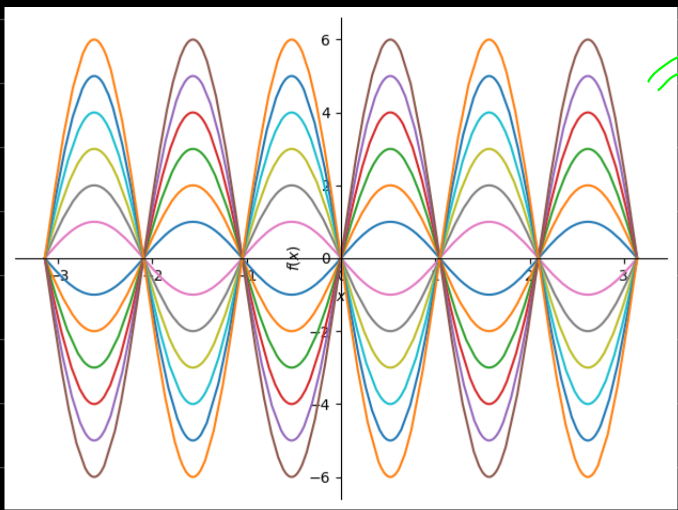
• Exemplo intuitivo: $y'' + 9y(x) = 0 \rightsquigarrow y'' = -9y(x)$; tomando $y(x) = \text{sen}\,3x$

$y'(x) = 3\cos 3x$

$y''(x) = -9\,\text{sen}\,3x$

$y''(x) = -9\,y(x)$

Solução geral: $\boxed{y(x) = c\,\text{sen}\,3x}$



$\Rightarrow$ Família de soluções

O P.V.I. PARA ESSE CASO PRECISA DE DUAS INFORMAÇÕES, ISTO É, DEVE-SE FORNECER Y'(x) E Y(x). PARA UMA E.D. DE TERCEIRA ORDEM, NECESSITA-SE DE TRÊS INFORMAÇÕES.
E ASSIM POR DIANTE.

Por Laplace: $y(\pi) = 0$; $y'(\pi) = -1$; $y''(x) + 9y(x) = 0$

$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 9Y(s) = 0 \Rightarrow (s^2+9)Y(s) = sy(0) + y'(0)$; $y(0) = A$, $y'(0) = B$

$$Y(s) = \frac{sA + B}{s^2+9} = \frac{As}{s^2+3^2} + \frac{B}{s^2+3^2} = A\,\frac{s}{s^2+3^2} + \frac{B}{3}\,\frac{3}{s^2+3^2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = y(x) = A\cos(3x) + \frac{B}{3}\,\text{sen}(3x)$$

PVI: $y(\pi) = A\,\overset{-1}{\cancel{\cos(3\pi)}} + \dfrac{B}{3}\,\overset{0}{\cancel{\text{sen}(3\pi)}} = 0 \Rightarrow A.-1 = 0 \Rightarrow A = 0$

Logo, $y(x) = B/3\,\text{sen}(3x) \Rightarrow y'(x) = B\cos(3x)$

$y'(\pi) = B\cos(3\pi) = -1$

$B.(-1) = -1$

$B = 1$

$\therefore\ y(x) = \dfrac{1}{3}\,\text{sen}(3x)$

$y'' + ay = 0$
$y(x) = C_1 \operatorname{sen}(\sqrt{a}\,x) + C_2 \cos(\sqrt{a}\,x)$ (solução geral)

• A soma de duas soluções também é solução.

$y'' + 9y = 0 \; (1)$; soluções: $y_1(x)$ e $y_2(x)$

soma: $s = y_1(x) + y_2(x) \Rightarrow s'' = y_1''(x) + y_2''(x) \; (2)$

$\Rightarrow (2) \to (1)$: $s'' + 9s = 0 \Rightarrow y_1'' + y_2'' + 9(y_1 + y_2) = 0$

$$\underbrace{y_1'' + 9y_1}_{=0} + \underbrace{y_2'' + 9y_2}_{=0} = 0$$

$\Rightarrow$ Solução de equação diferencial linear, homogênea de ordem 2.

$ay'' + by' + cy = 0$; Supondo $y = ke^{rx}$ como solução.

Então $y' = rke^{rx}$ e $y'' = r^2ke^{rx}$

Assim, $a \cdot r^2ke^{rx} + brke^{rx} + cke^{rx} = 0$; $k \neq 0$ (para evitar a solução trivial)

$ar^2 + br + c = 0$ (Equação característica)

• Raízes reais e distintas:

Exemplo: $y'' - 3y' + 2y = 0 \Rightarrow r^2 - 3r + 2 = 0$; $r = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2}$ $\nearrow 2$, $\searrow 1$

Logo, $\boxed{y(x) = k_1e^{x} + k_2e^{2x}}$

• Considerando o P.V.I.: $y(0) = 0$ e $y'(0) = -1$

Assim, $y(0) = k_1 + k_2 = 0 \Rightarrow k_1 + k_2 = 0 \; (1)$

$y'(x) = k_1e^{x} + 2k_2e^{2x} \Rightarrow y'(0) = k_1 + 2k_2 = -1 \Rightarrow k_1 + 2k_2 = -1 \; (2)$

$(2) - (1) = k_2 = -1$

$k_1 = 1$

$\therefore \boxed{y(x) = e^{x} - e^{2x}}$

• Raízes complexas; Exemplo: $y'' - 8y' + 25y = 0$

$$r^2 - 8r + 25 = 0 \Rightarrow r = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4.25}}{2} = \frac{8 \pm 6i}{2} = 4 \pm j3$$

Assim, $y(x) = k_1 e^{4x} e^{j3x} + k_2 e^{4x} e^{-j3x} = e^{4x}(k_1 e^{j3x} + k_2 e^{-j3x})$

$y(x) = e^{4x}(k_1 \cos 3x + k_1 j \operatorname{sen} 3x + k_2 \cos 3x - k_2 j \operatorname{sen} 3x)$

$y(x) = e^{4x}(C_1 \cos 3x + C_2 \operatorname{sen} 3x)$

Portanto, se a raiz for do tipo $r = a \pm jb$ a solução geral é:

$$\boxed{y(x) = k_1 e^{ax} \cos(bx) + k_2 e^{ax} \operatorname{sen}(bx)}$$

• Raízes repetidas: Exemplo: $y'' - 8y'' + 16y = 0$

$$r^2 - 8r + 16 = 0 \Rightarrow r = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4.16}}{2} = 4$$

$y(x) = C_1 e^{4x} + C_2 x e^{4x}$

↳ Acrescenta.

⇒ Equações não-homogêneas: $y' + 3y = F(x)$

A solução será a soma das soluções homogênea e particular, $y_h + y_p$

Testando: $(y_h + y_p)' + 3(y_h + y_p) = F(x)$

$$\underbrace{y'_h + 3y_h}_{=0} + \underbrace{y_p' + 3y_p}_{} = F(x)$$

↳ A solução particular é similar a $F(x)$

Portanto, a solução geral é: $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

• A solução particular é determinada por: Método dos coeficientes a determinar

Exemplo: $y' + 3y = \underbrace{2x}_{F(x)}$

Sol. homogênea: $y' + 3y = 0$; $y_h(x) = C_1 e^{-3x}$

$r + 3 = 0 \Rightarrow r = -3$

Sol. particular: Assumi-se que $y_p(x)$ é similar a $f(x)$, logo, $y(x) = Ax + B$.

$(Ax+B)' + 3(Ax+B) = 2x \Rightarrow A + 3Ax + 3B = 2x \rightarrow A + 3B = 0 \Rightarrow \boxed{B = -2/9}$

$\rightarrow 3A = 2 \Rightarrow \boxed{A = 2/3}$

Dessa forma, $y_p(x) = \frac{2}{3}x - \frac{2}{9}$

$$\therefore \boxed{y(x) = C_1 e^{-3x} + \frac{2}{3}x - \frac{2}{9}}$$

- Considerações importante para definição de $y_p(x)$:

$f(x)$	$y_p(x)$
$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots$	$Ax^n + Bx^{n-1} + \dots$
e^{ax}	Ae^{ax}
$\operatorname{sen}(ax)$ e/ou $\cos(ax)$	$A\cos(ax) + B\operatorname{sen}(ax)$

⇒ Equações de primeira ordem:

1. $\frac{dy}{dx} = f(x)$ 2. $\frac{dy}{dx} = f(y)$ (Autônoma)   3. $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$

↳ Se, $F(x,y) = g(x) \cdot h(y)$ ela vai ser separável.

Exemplos: 1. $\frac{dy}{dx} = 2x^2$; 2. $\frac{dy}{dx} = 3y$

3. $\frac{dy}{dx} = xy$

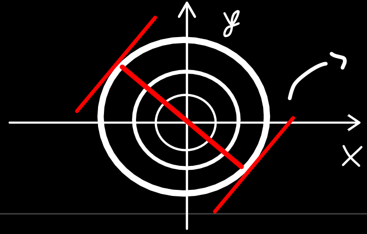
- Tipo 1: $\frac{dy}{dx} = 3x^2 \Rightarrow dy = 3x^2 dx \Rightarrow \int dy = 3\int x^2 dx$

$y = x^3 + C$; P.V.I. $y(1) = 1 \Rightarrow 1 = 1 + C \Rightarrow C = 0$

$y = x^3$

- Tipo 3: (Equações separáveis) $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y} \Rightarrow \int y\,dy = \int -x\,dx$

$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C \Rightarrow \boxed{y^2 + x^2 = C}$



As retas tangentes opostas diametralmente são paralelas.

Ex.: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^2+4x+2}{2(y-1)} \Rightarrow \int (2y-2)\,dy = \int (3x^2+4x+2)\,dx$

$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + c$; P.V.I. $(0,-1)$

$1 + 2 = c \Rightarrow c = 3$

$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + 3$

$\hookrightarrow y^2 - 2y + 1 = x^3 + 2x^2 + 2x + 4 \Rightarrow (y-1)^2 = x^3 + 2x^2 + 2x + 4$

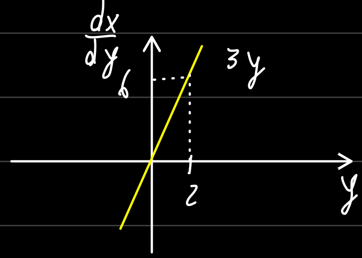
$y = 1 \pm \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4}$

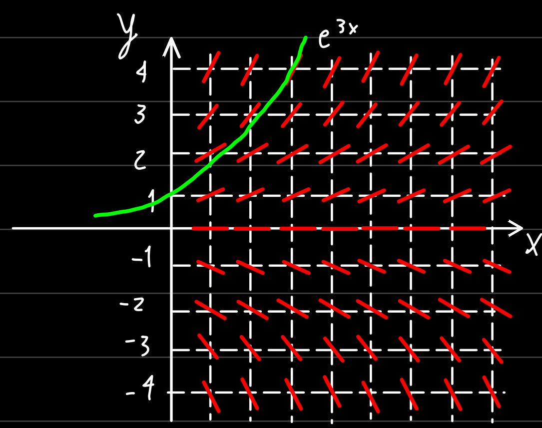
$y = 1 \pm \sqrt{x^2(x+2) + 2x + 4} = 1 \pm \sqrt{(x^2+2)(x+2)}$

$y = 1 \pm \sqrt{(x^2+2)(x+2)}$

• Tipo 2: $\dfrac{dy}{dx} = f(y)$ Autônomas, pode-se realizar um estudo de comportamento das soluções.

Exemplo: $\dfrac{dy}{dx} = 3y$





Campo de Direções

Considerando: $y(0) = 1$; $\dfrac{dy}{dx} = 3y \Rightarrow y' - 3y = 0$ $\quad y(x) = ce^{3x}$ $\quad y(x) = e^{3x}$

$r - 3 = 0$; $y(0) = c = 1$;

$r = 3$

Exemplo: (Equação Logística) $\quad r$ = cte de proporcionalidade

k = capacidade suporte

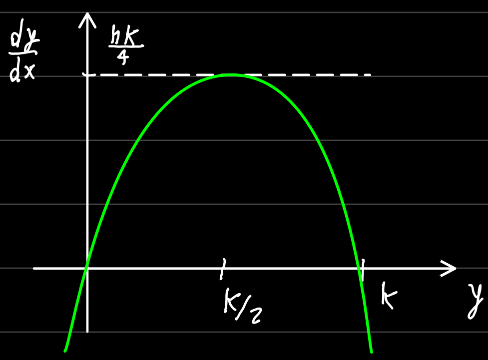
$$\frac{d}{dx}y = ry\left(1 - \frac{y}{k}\right)$$

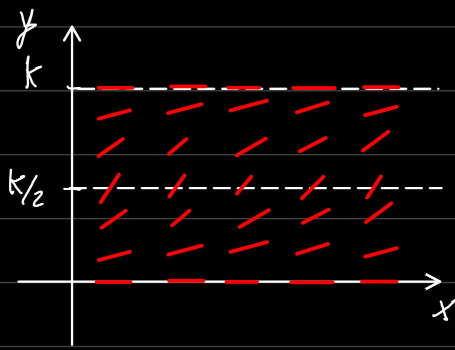
$$f = ry - \frac{ry^2}{k}$$
$$f' = r - \frac{r2}{k}y$$
$$f'' = -\frac{r2}{k}$$

$$y' = ry - \frac{ry^2}{k} \longrightarrow \text{esboçar } y' \times y \text{ (campo de direções)}$$

$$f' = r - \frac{2r}{k}y = 0 \rightsquigarrow \boxed{y = k/2 \text{ (Máximo)}} \longrightarrow f = \frac{rk}{2} - \frac{rk}{4} = \frac{rk}{4}$$

$$y' = ry - \frac{ry^2}{k} = 0 \Rightarrow ry\left(1 - \frac{y}{k}\right) = 0 \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} y = 0 \\ y = k \end{matrix} \quad \text{raízes}}$$





$$\frac{dy}{dx} = ry\left(1 - \frac{y}{k}\right) \Rightarrow \int \underbrace{\frac{1}{y\left(1 - \frac{y}{k}\right)}}_{(*)} dy = \int r\,dx$$

$$(*) = \frac{1}{y(1 - y/k)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{1 - y/k} \; ; \quad A = 1 \text{ e } B = 1/k$$

$$\therefore \int \frac{1}{y}\,dy + \int \frac{1/k}{1 - y/k}\,dy = rx + C \; ; \quad u = 1 - y/k \; ; \; \frac{du}{dy} = -\frac{1}{k}$$

$$\ln|y| + \frac{1}{k}\int \frac{1}{u}(-k)\,du = rx + c \Rightarrow \ln|y| - \ln|u| = rx + c \; ; \; \boxed{0 \le y \le k}$$

$$\ln\left(\frac{y}{u}\right) = rx + c \Rightarrow \ln\left(\frac{y}{1 - y/k}\right) = rx + c \Rightarrow \frac{y}{1 - y/k} = Ce^{rx};$$

$$\frac{1}{1/y - 1/k} = Ce^{rx} \Rightarrow \frac{1}{Ce^{rx}} = 1/y + 1/k \Rightarrow 1/y = Ce^{-rx} + 1/k$$

$$y = \frac{1}{Ce^{-rx} + 1/k}$$

$$\boxed{y = \frac{1}{Ce^{-rx} + 1/k}}$$

Considerando P.V.I.: $y(0) = y_0$

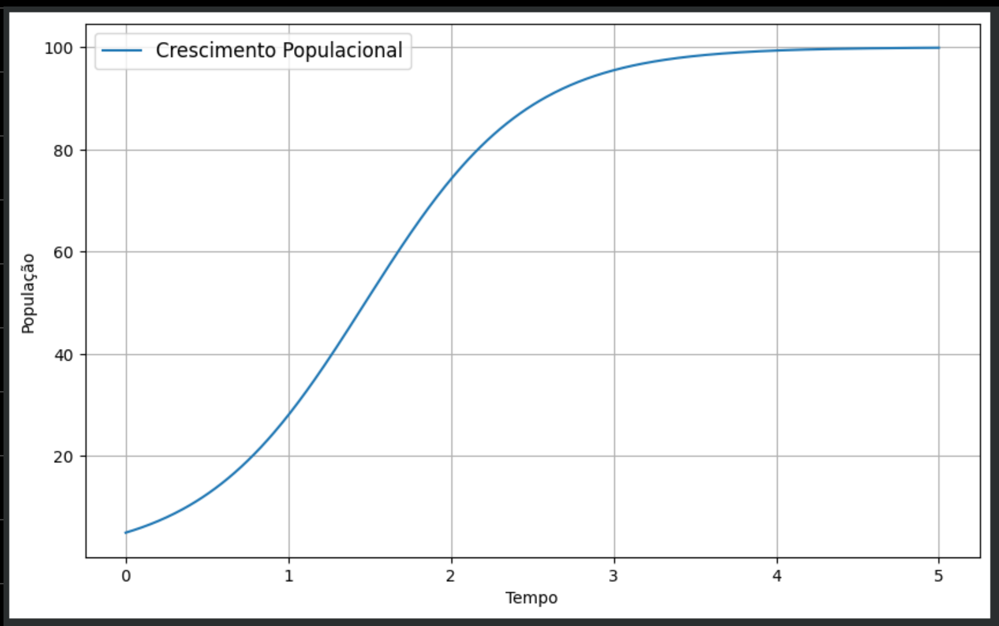
$$y(0) = \frac{1}{c + 1/k} = y_0 \Rightarrow \frac{1}{y_0} - \frac{1}{k} = c \Rightarrow c = \frac{k - y_0}{k y_0}$$

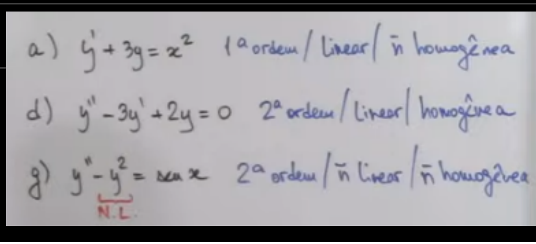
Logo, $$y(x) = \frac{1}{\frac{(k-y_0)}{k y_0} e^{-rx} + \frac{1}{k}} = \frac{1}{\frac{(k-y_0)e^{-rx} + y_0}{k y_0}} = \frac{k y_0}{(k-y_0)e^{-rx} + y_0}$$

$$\boxed{y(x) = \frac{k y_0}{(k-y_0)e^{-rx} + y_0}}$$

Solução no Python: $$y(x) = \frac{k y_0 e^{rx}}{k + y_0 e^{rx} - y_0}$$

$$\frac{k y_0}{k e^{-rx} + y_0 - y_0 e^{-rx}} = \frac{k y_0}{(k-y_0)e^{-rx} + y_0}$$




a) $y' + 3y = x^2$ 1ª ordem / Linear / ñ homogênea

d) $y'' - 3y' + 2y = 0$ 2ª ordem / Linear / homogênea

g) $y'' - \underbrace{y'^2}_{N.L.} = \operatorname{sen} x$ 2ª ordem / ñ Linear / ñ homogênea

$$ax^2+bx+c=0 \Rightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \Rightarrow x^2+b/a\,x+(b/2a)^2-(b/2a)^2+\frac{c}{a}=0$$

$$(x+b/2a)^2=+(b/2a)^2-c/a \Rightarrow x+b/2a=\pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}$$

$$x=\frac{-b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}} \Rightarrow x=\frac{-b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\therefore\ x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$