Ejercicio 1

Probar que las siguientes afirmaciones son verdaderas utilizando las definiciones.

a) $n^2 - 4n - 2 \in O(n^2)$

$O(n^2) = \{f \ / \ \exists \ n_0, k > 0 \ tq. \ \forall n \geq n_0 : f(n) \leq k \cdot n^2\}$

Busquemos ese par $n_0 \ y \ k > 0$ para demostrar que pertenece.

$n^2 - 4n - 2 \in O(n^2) \Leftrightarrow \exists \ n_0, k > 0 \ tq. \ \forall n \geq n_0 : n^2 - 4n - 2 \leq k \cdot n^2$

Calculo auxiliar:

$n^2 - 4n - 2 \leq k \cdot n^2 \Leftrightarrow \frac{n^2-4n-2}{n^2} \leq k$

Elijamos, por ejemplo $n = 1$.

$(1 - 4 - 2)/1 \leq k \Leftrightarrow -5 \leq k$.

k debe ser mayor a 0, elijamos $k = 1$.

$Sean \ k = 1 \ y \ n_0 = 1 \ qvq \ \forall n \geq n_0 : n^2 - 4n - 2 \leq 1 \cdot n^2$

$Sea \ n \geq n_0 :$

$n^2 - 4n - 2 \leq 1 \cdot n^2 \Leftrightarrow 0 \leq 4n + 2$, y esto es **Verdadero** $(n \geq n_0 \geq 1)$

Conclusión: $n^2 - 4n - 2 \leq 1 \cdot n^2 \ \forall n \geq n_0$

Exhibimos $k = 1$ y $n_0 = 1$, vimos que la desigualdad se cumple.

$n^2 - 4n - 2 \in O(n^2)$

b) Para todo $k \in \mathbb{N}$ y toda función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, si $f \in O(n^k)$, entonces $f \in O(n^{k+1})$

Afirmo: Sean $\lambda > 0, m \in \mathbb{N}$, se cumple que $\lambda \cdot m^k \leq \lambda \cdot m^{k+1} \Leftrightarrow m^k \leq m^{k+1} \Leftrightarrow 1 \leq m$. Y esto es **Verdadero**, pues $m \in \mathbb{N}$.

$f \in O(n^k) \Leftrightarrow \exists n_0, j > 0 \ tq. \ \forall n \geq n_0 : f(n) \leq j \cdot n^k \Rightarrow \exists n_0, j > 0 \ tq. \ \forall n \geq n_0 : f(n) \leq j \cdot n^k \leq j \cdot n^{k+1}$

Pues ya vimos que $j \cdot n^k \leq j \cdot n^{k+1}$ $(j > 0, n \geq n_0 \geq 1, n \in \mathbb{N})$.

$f \in O(n^k) \Rightarrow f \in O(n^{k+1})$

c) Si $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es tal que $f \in O(log \ n)$, entonces $f \in O(n)$

Acá utilizaremos que $log(n) \leq n \ \forall n \in \mathbb{N}$

$f \in O(log \ n) \Leftrightarrow \exists n_0, k > 0 \ tq. \ \forall n \geq n_0 : f(n) \leq k \cdot log(n)$

$\Rightarrow \exists n_0, k > 0 \ tq. \ \forall n \geq n_0 : f(n) \leq k \cdot log(n) \leq k \cdot n$

$\Rightarrow f \in O(n)$

Ejercicio 2

Determinar si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. **Justificando** adecuadamente su respuesta.

a) $2^n \in O(1)$

En este ejercicio la vamos a complicar un poco (solucionarlo por límite es realmente trivial).

Mostremos que $2^n \in O(1)^c$

$O(g)^c = \{f \ / \ \forall n_0, k > 0, \ \exists n \geq n_0 : f(n) > k \cdot g(n)\}$

$O(1)^c = \{f \ / \ \forall n_0, k > 0, \ \exists n \geq n_0 : f(n) > k \cdot 1\}$

$2^n \in O(1)^c = \{f \ / \ \forall n_0, k > 0, \ \exists n \geq n_0 : 2^n > k \cdot 1\}$

Sean $n_0, k > 0, n_0 \in \mathbb{N}$, tal que vale $2^{n_0} \leq k \cdot 1$

Tomo $n > max(n_0, log(k))$, se tiene entonces que $n > n_0$ y que $n > log(k)$.

<u>Afirmación</u>: $2^n > k \Leftrightarrow log(2^n) > log(k) \Leftrightarrow n > log(k)$, pero esto es **Verdadero** pues $n > log(k)$

Conclusión: $\forall n_0, k > 0, \ \exists n \geq n_0 : 2^n > k \cdot 1$, $2^n \in O(1)^c \Leftarrow 2^n \notin O(1)$

b) $n \in O(n!)$

Este sale con límite. $f(n) = n \wedge g(n) = n!$

Queremos ver que $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$. Entonces habremos mostrado que $n \in O(n!)$

$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n\cdot(n-1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n-1)!} = 0.$

Por la propiedad 8 que nos dieron en la Teórica, $n \in O(n!)$

c) $n! \in O(n^n)$

Este sale con límite. $f(n) = n! \wedge g(n) = n^n$

Queremos ver que $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$. Entonces habremos mostrado que $n! \in O(n^n)$

Este es el límite más complicado y hay que usar el criterio de d′Alembert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot n!}{(n+1)\cdot(n+1)^n} \cdot \frac{n^n}{n!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} (\frac{n}{n+1})^n = \lim_{n\to\infty} (\frac{n+1-1}{n+1})^n = \lim_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{n+1})^n$$

$$\stackrel{n\neq 0}{=} \lim_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{n+1})^n \cdot \frac{1-\frac{1}{n+1}}{1-\frac{1}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1-\frac{1}{n+1})^{n+1}}{1-\frac{1}{n+1}}$$

Cálculos auxiliares:

$\lim_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{(n+1)}) = 1$

$$\lim_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{n+1})^{n+1} = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{-(n+1)})^{(n+1)\cdot\frac{-1}{-1}} = \lim_{n\to\infty} \left((1 + \frac{1}{-(n+1)})^{-(n+1)}\right)^{-1} = e^{-1}$$

Por álgebra de límites:

$\lim_{n\to\infty} \frac{(1-\frac{1}{n+1})^{n+1}}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{e^{-1}}{1} < 1$

Cómo el límite es menor que 1, el criterio de d′Alembert nos dice que:

$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

<u>Conclusión:</u> $2^n \in O(n^n)$

d) $2^n \in O(n!)$

Vamos a probar uno utilizando inducción :).

$2^n \in O(n!) \Leftrightarrow \exists \ n_0, k > 0 \ tq. \ \forall n \geq n_0 : 2^n \leq k \cdot n!$

Tomo $k = 1$ y $n_0 = 4$.

Objetivo: Ver que $\forall n \geq 1 : 2^n \leq n!$

Sea $P(n) : 2^n \leq n!$

Caso base con $n = 4$, queremos ver si $P(4)$ es **Verdadero**.

$P(4) : 2^4 \leq 4! \Leftrightarrow 16 \leq 24$. $P(4)$ es **Verdadero**

Sea $k \in \mathbb{N}, k > 4$, y supongamos que $P(k)$ vale, queremos ver que $P(k+1)$ también vale.

$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k \stackrel{HI}{\leq} 2 \cdot k!$

Ahora quiero ver que: $2 \cdot k! \leq (k+1)! \Leftrightarrow 2 \cdot k! \leq (k+1) \cdot k! \Leftrightarrow 2 \leq (k+1) \Leftrightarrow 1 \leq k$. Pero $k > 4$.
Luego $P(k) \Rightarrow P(k+1)$.
Como vale el caso base, y $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, $2^n \leq n! \; \forall \; n \geq 4, n \in \mathbb{N}$.

Retomando:

Pudimos ver que para $k = 1$ y $n_0 = 4$, se cumple que $\forall n \geq n_0 : 2^n \leq n!$

Conclusión: $2^n \in O(n!)$

e) Para todo $i, j \in \mathbb{N}, i \cdot n \in O(j \cdot n)$

Sean $i \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{N}$

Se quiere ver si $i \cdot n \in O(j \cdot n) \Leftrightarrow \exists \; n_0, k > 0 \; tq. \; \forall n \geq n_0 : i \cdot n \leq k \cdot j \cdot n$

Tomo $k = \left\lceil \frac{i}{j} \right\rceil$ y $n_0 = 1$, se tiene $k \geq \frac{i}{j}$

Sea $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$. QVQ: $i \cdot n \leq k \cdot j \cdot n \overset{n \in \mathbb{N}}{\Leftrightarrow} \frac{i}{j} \leq k$, y esto es **Verdadero**.

Conclusión: Para todo $i, j \in \mathbb{N}, i \cdot n \in O(j \cdot n)$

f) Para todo $k \in \mathbb{N}$, $2^k \in O(1)$

Sea $k \in \mathbb{N}$.

Se quiere ver si $2^k \in O(1) \Leftrightarrow \exists \; n_0, j > 0 \; tq. \; \forall n \geq n_0 : 2^k \leq j$

Tomo $j = 2^k$ y $n_0 = 1$.

Trivialmente $2^k \leq j$ es una Tautología, y entonces vale $\forall n \geq n_0$.

Conclusión: $2^k \in O(1) \; \forall \; k \in \mathbb{N}$

g) $log \; n \in O(n)$

Ésto quedo demostrado en el Ej 1.4

h) $n! \in O(2^n)$

Sea $f(n) = 2^n \wedge g(n) = n!$. Si demostramos que $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$, entonces tendremos que $g \notin O(f)$

Vamos a utilizar el criterio de d'Alembert

$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot 2^n}{(n+1) \cdot n!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1$

Luego, $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \Rightarrow g \notin O(f)$

i) $n^5 + bn^3 \in \Theta(n^5) \Leftrightarrow b = 0$

Esto es **Falso**, tomemos $b = 1$ y veamos que: $n^5 + n^3 \in \Theta(n^5) \Leftrightarrow n^5 + n^3 \in O(n^5) \wedge n^5 + n^3 \in \Omega(n^5)$

1: $n^5 + n^3 \in O(n^5) \Leftrightarrow \exists n_0, k > 0 \; tq \; \forall n \geq n_0 : n^5 + n^3 \leq k \cdot n^5$

Cálc. auxiliar: $n^5 + n^3 \leq k \cdot n^5 \Leftrightarrow 1 + \frac{n^3}{n^5} \leq k \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{n^2} \leq k$.
Tomo $n_0 = 1$ y $k = 2$.
Se quiere ver que $\forall n \geq 1 : n^5 + n^3 \leq 2 \cdot n^5$
Sea $n \geq n_0$
$n^5 + n^3 \leq 2 \cdot n^5 \Leftrightarrow -n^5 + n^3 \leq 0 \Leftrightarrow n^5(-1 + \frac{n^3}{n^5}) \leq 0 \overset{n \in \mathbb{N}}{\Leftrightarrow} -1 + \frac{1}{n^2} \leq 0$. Sabemos que $\frac{1}{n^2} < 1$.
Con lo cual la desigualdad es verdadera.
Conclusión: $n^5 + n^3 \in O(n^5)$

2: $n^5 + n^3 \in \Omega(n^5) \Leftrightarrow \exists n_0, k > 0 \; tq \; \forall n \geq n_0 : k \cdot n^5 \leq n^5 + n^3$

Cálc. auxiliar: $k \cdot n^5 \leq n^5 + n^3 \Leftrightarrow k \leq 1 + \frac{n^3}{n^5} \Leftrightarrow k \leq 1 + \frac{1}{n^2}$.
Tomo $n_0 = 1$ y $k = 1$.
Se quiere ver que $\forall n \geq 1 : n^5 \leq n^5 + n^3$
Sea $n \geq n_0$
$n^5 \leq n^5 + n^3 \Leftrightarrow 0 \leq n^3$. Esto vale $\forall n \in \mathbb{N}$
Con lo cual la desigualdad es verdadera.
Conclusión: $n^5 + n^3 \in \Omega(n^5)$

Como $n^5 + n^3 \in O(n^5) \wedge n^5 + n^3 \in \Omega(n^5)$, se concluye que $n^5 + n^3 \in \Theta(n^5)$, con $b \neq 0$.

Por lo tanto, la afirmación es (muy) falsa.

$j)$ Para todo $k \in \mathbb{R}$, $n^k log(n) \in O(n^{k+1})$

Sea $k \in \mathbb{R}$, $n^k log(n) \in O(n^{k+1}) \Leftrightarrow \exists n_0, \lambda > 0 \ tq \ \forall n \geq n_0 : n^k log(n) \leq \lambda \cdot n^{k+1}$

<u>Cálc. auxiliar:</u> $n^k log(n) \leq \lambda \cdot n^{k+1} \overset{n \in \mathbb{N}}{\Leftrightarrow} \frac{log(n)}{n} \leq \lambda$

Sea $n \in \mathbb{N}$, tomo $\lambda = \left\lceil \frac{log(n)}{n} \right\rceil$, se tiene entonces que $\lambda \geq \frac{log(n)}{n}$

<u>Aclaración</u>: Acá vemos que λ no depende de k, podríamos tomar cualquier n, calcular λ pero la demo sale más fácil así.

$n^k log(n) \leq \lambda \cdot n^{k+1} \Leftrightarrow \frac{log(n)}{n} \leq \lambda$. Y esto trivialmente vale.

<u>Conclusión</u>: Para todo $k \in \mathbb{R}$, $n^k log(n) \in O(n^{k+1})$

$k)$ Para toda función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, se tiene que $f \in O(f)$

$f \in O(f) \Leftrightarrow \exists n_0, k > 0 \ tq \ \forall n \geq n_0 : f(n) \leq k \cdot f(n)$.

Tomo $k = 1$, y trivialmente $f(n) \leq 1 \cdot f(n) \ \forall n \in \mathbb{N}$

<u>Conclusión</u>: $f \in O(f)$

Ejercicio 3

Que $O(g) \subseteq O(f)$, nos dice que g es de la misma familia (o menor) que f.
Que $O(g) \subseteq O(f)$ y $O(f) \subseteq O(g)$ nos dice que $O(g) = O(f)$ y por lo tanto f y g son de la misma familia.

Ejercicio 4

a) Sean f y g el mejor y el peor caso de un algoritmo. ¿Es cierto entonces que $g \notin O(f)$?

No es cierto. Por ejemplo, dado un algoritmo que recorre un arreglo de tamaño n, se tendrá que $T_{mejor} \in O(n)$ y que $T_{peor} \in O(n)$, y en este caso $n \in O(n)$

b) Sean $g(n)$ y $h(n)$ la cantidad de operaciones que realizan los algoritmos G y H en función del tamaño de la entrada. Si G ejecuta la mitad de operaciones que H, ¿vale que $g \in \Theta(h)$?

Respuesta corta: Si, vale. Difieren en una constante.

Respuesta larga: A demostrarlo...

c) Un algoritmo que toma un arreglo como input realiza $\Theta(n^2)$ operaciones cuando el arreglo tiene más de 100 elementos y $\Theta(1)$ operaciones cuando tiene 100 o menos. ¿Cuál es el mejor caso del algortimo?

El mejor caso sigue siendo $\Theta(n^2)$.

Cuando en complejidad se habla de órden exacto, en este caso $\Theta(n^2)$ es porque $\Theta(T_{peor}) = \Theta(T_{mejor})$

Nos interesa saber como se comporta el algoritmo para tamaños que tienden a tienden a infinito, el mejor caso debe ser el mismo independientemente del tamaño del input. Ejemplo: La búsqueda lineal, tiene mejor caso $O(1)$ ya que no depende del tamaño del arreglo.

d) Si $f(n) < g(n)\ \forall n$, ¿es cierto que $f \notin \Omega(g)$

No es cierto. Por ejemplo, tomemos $f(n) = \frac{n}{2}$ y $g(n) = n$, se puede ver fácilmente como $\frac{n}{2} \in \Omega(n)$

e) Si la complejidad en el peor caso de un algoritmo es $\Omega(n)$, ¿es verdad que la complejidad de mejor caso no puede ser $O(1)$?

No es cierto. Como vimos antes, el caso de la búsqueda lineal tiene mejor caso $O(1)$ y peor caso $O(n)$, y $n \in \Omega(n)$

f) Si la complejidad temporal en el peor caso de un algoritmo pertenece a $O(n)$, entonces su complejidad temporal en el mejor caso también pertenece a $O(n^2)$.

Si es cierto. Esto se deduce de las definiciones de T_{mejor} y T_{peor}.

$T_{mejor}(n) \leq T_{peor}(n)\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Entonces, si podemos acotar "por arriba" al peor caso con una función lineal, también podremos acotarlo por arriba con una función cuadrática. Y particularmente también vamos a poder acotar por arriba (con ambas) al T_{mejor}

Ejercicio 5

1. Si $O(f(n)) \cap \Omega(g(n)) = \emptyset$, entonces $O(g(n)) \cap \Omega(f(n)) = \emptyset$.

   Esto es falso. Para $f(n) = n$ y $g(n) = n^2$, $O(n) \cap \Omega(n^2) = \emptyset$

   Pero sin embargo, $O(n^2) \cap \Omega(n) \neq \emptyset$

2. Si $f \in O(g)$, entonces $f \in \Theta(g) \cup \Theta(h)$ para cualquier función h..

3. Si $f \in O(g)$ y $h \in O(g)$, entonces $(f + h) \in O(g)$

   Esto es **Verdadero**. Demostrémoslo.

   $f \in O(g) \Leftrightarrow \exists n_0, \alpha > 0 \ tq \ \forall n \geq n_0 : f(n) \leq \alpha \cdot g(n)$

   $h \in O(g) \Leftrightarrow \exists m_0, \lambda > 0 \ tq \ \forall n \geq n_0 : h(n) \leq \lambda \cdot g(n)$

   Ésta es nuestra hipótesis.

   Sea $\gamma_0 = max(m_0, n_0)$, se tiene entonces que $\gamma_0 \geq m_0 \wedge \gamma_0 \geq n_0$.

   Y también por hipótesis vale que:

   $\forall n \geq \gamma_0 : f(n) \leq \alpha \cdot g(n)$

   $\forall n \geq \gamma_0 : h(n) \leq \lambda \cdot g(n)$

   Se concluye que $f(n) + h(n) \leq \alpha \cdot g(n) + \lambda \cdot g(n) \Rightarrow f(n) + h(n) \leq (\alpha + \lambda) \cdot g(n) \ \forall n \geq \gamma_0$

   Por lo tanto, $(f + h) \in O(g)$

4. $O(n^2) \cap \Omega(n) = \Theta(n^2)$

   Esto es **Falso**.

   $n \in O(n^2) \wedge n \in \Omega(n) \Leftrightarrow n \in O(n^2) \cap \Omega(n)$

   Respuesta corta: Nunca vamos a poder encontrar $k_1, k_2 > 0$, tal que n quede "ensanguchada" por n^2.

   Respuesta larga: Probar que $n \in \Theta(n^2)^c$

5. $\Theta(n) \cup \Theta(n \cdot log(n)) = \Omega(n \cdot log(n)) \cap O(n)$

   Esto es **Falso**.

   $\Omega(n \cdot log(n)) \cap O(n) = \emptyset$

   Mostremoslo. Supongamos que existe f tal que $f \in O(n)$ y $f \in \Omega(n \cdot log(n))$. Luego:

   $\exists n_0, k > 0 \ tq \ \forall n \geq n_0 : f(n) \leq k \cdot n$

   $\exists n_1, j > 0 \ tq \ \forall n \geq n_1 : f(n) \geq j \cdot n \cdot log(n)$

   Sea $n_2 = max(n_0, n_1)$, entonces se cumple que:

   $\forall n \geq n_2 : f(n) \leq k \cdot n$

   $\forall n \geq n_2 : f(n) \geq j \cdot n \cdot log(n)$

   Tenemos que: $k \cdot n \geq j \cdot n \cdot log(n) \Leftrightarrow \frac{k}{j} \geq log(n)$

   Claramente la desigualdad no se va a cumplir para todo n puesto que $\frac{k}{j}$ es constante.

   Tomo $M = \frac{k}{j} > 0$. Y como $\lim_{n \to \infty} log(n) = +\infty$. Por definición de límite se tiene:

   $\forall M > 0 \ \exists \alpha_0 \in \mathbb{N} \ tq \ \forall n > \alpha_0 : log(n) > M$.

   Con lo cual llegamos a un absurdo, y podemos concluir que $\nexists f \ tq \ f \in O(n) \wedge f \in \Omega(n \cdot log(n))$

   Solo nos resta ver que el conjunto $\Theta(n) \cup \Theta(n \cdot log(n))$ no es vacío.

   Trivialmente $n \in \Theta(n)$, así que la unión tiene al menos un elemento, por lo cual no se da la igualdad.