Ejercicio 1

Demostrar, usando inducción en la cantidad de aristas, que todo digrafo D satisface

$$\sum_{v\in V(D)} d_{\text{in}}(v) = \sum_{v\in V(D)} d_{\text{out}}(v) = |E(D)|$$

Para poder hacer inducción sobre la cantidad de aristas, primero empezamos definiendo el predicado:

$P(n)$: "Todo grafo $G(E,V)$ cumple que $\sum_{v\in V(D)} d_{\text{in}}(v) = \sum_{v\in V(D)} d_{\text{out}}(v) = |E| = m$"

Caso Base ($m=0$):

Un digrafo $G=(V,E)$ que tiene 0 aristas, cumple simultáneamente:

- $\sum_{v\in V(G)} d_{\text{in}}(v) = 0$
- $\sum_{v\in V(G)} d_{\text{out}}(v) = 0$
- $|E| = 0$

con lo cual se mantiene la igualdad $\sum_{v\in V(G)} d_{\text{in}}(v) = \sum_{v\in V(G)} d_{\text{out}}(v) = |E| = 0$.

Entonces el caso base **vale**.

Paso Inductivo:

Sea $k\in\mathbb{N}$, y supongamos que $P(k)$ vale.

Sea $G(V,E)$ un digrafo cualquiera, tal que: $|E| = k+1$.

Sea $e=(u,v)$, con $e\in E \wedge u,v\in V$.

Sea $G'=(V,E')$, tal que $E' = E\setminus\{e\} \Rightarrow |E'| = k$.

Si se cumple que $|E'|=k$, entonces se cumple la HI, con lo cual:

$\sum_{v\in V(G')} d_{\text{in}}(v) = \sum_{v\in V(G')} d_{\text{out}}(v) = k$

¿Qué pasa si agregamos e a E'?

En primer lugar se cumpliría la igualdad: $G'(V, E'\cup\{e\}) = G(V,E)$.

Además, tendría una serie de consecuencias:

- $\sum_{v\in V(G)} d_{\text{in}}(v) = \sum_{v\in V(G')} d_{\text{in}}(v) + 1 = k+1$
- $\sum_{v\in V(G)} d_{\text{out}}(v) = \sum_{v\in V(G')} d_{\text{out}}(v) + 1 = k+1$
- $|E| = |E'| + 1 = k+1$

Y esto es justamente lo que buscamos!

Ahora tenemos que $\sum_{v\in V(G)} d_{\text{in}}(v) = \sum_{v\in V(G)} d_{\text{out}}(v) = |E| = k+1$.

Con lo cual, queda demostrado que:

$\forall k\in\mathbb{N} : P(k)$ es verdadero.

Fin.

Ejercicio 2

Demostrar, usando la técnica de reducción al absurdo, que todo grafo no trivial tiene al menos dos vértices del mismo grafo. **Ayuda:** prestar atención a la secuencia ordenada de los grados de los vértices.

Vamos por partes, ¿Qué es la técnica de reducción al absurdo? (Reductio ad Absurdum)

Si se tiene una proposición P, se puede suponer que P es falsa ($\neg P$) y llegar a una contradicción, en cuyo caso se puede concluir que P es verdadera.

Para eso, definamos la proposición P.

P : "Todo grafo no trivial tiene al menos dos vértices del mismo grado".

$\neg P$: "Existe al menos un grafo no trivial que tiene todos sus vértices de distinto grado".

Supongamos que $\neg P$ se cumple, o sea que P es falsa.

Si eso fuera cierto, existiría un grafo $G(V, E)$, con |V| = n, de tal forma que:

$\{\deg(v) \mid v \in V\} = \{0, \ldots, n-1\}$

Sabemos que estos conjuntos tienen al menos 2 elementos, pues G es no trivial.

Pero en un grafo no puede coexistir un vértice con grado 0 y otro con grado $n-1$ ya que el vértice de grado $n-1$ debería estar conectado con todos los demás, incluido el de grado 0. Contradicción.

Por la técnica de reducción al absurdo, se concluye que P es verdadera.

Fin.

Ejercicio 3

Un grafo orientado es un digrafo D tal que al menos uno de $v \to w$ y $w \to v$ no es una arista de D, para todo $v, w \in V(D)$.

En otras palabras, un grafo orientado se obtiene a partir de un grafo no orientado dando una dirección a cada arista.

Demostrar en forma constructiva que para cada n existe un único grafo orientado cuyos vértices tienen todos grados de salida distintos.

Ayuda: aprovechar el ejercicio anterior y observar que el absurdo no se produce para un único grafo orientado.

Este problema lo encuentro un poco confuso, ya que el grafo no es único: para cada n vamos a más de un digrafo cuyos vértices tienen tienen todos grados de salida distintos.

Pero por otro lado considero excelente porque mezcla distintas técnicas de demostración.

Para demostrar en forma constructiva, primero debemos "armar" el grafo (es decir, exhibirlo).

Vamos a tratar de armarlo de la forma más débil posible, es decir: **ponerle la mínima cantidad de restricciones posibles**.

Sea $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ y sea $V = \{v_1, \ldots, v_k\}$ un conjunto de vértices.

Sea $G(V, E)$ un grafo no-dirigido con $|E| = k$, y sea $G'(V, E')$ un digrafo orientado tal que $|E'| = |E|$.

G' además cumple que: $\{d_{\text{out}}(v) \ / \ v \in V\} = \{0, \ldots, k-1\}$.

¿El mínimo de ese conjunto **DEBE** ser 0? La respuesta es sí. Veamos por qué eso es así:

Sea $z \in \mathbb{Z}, z \geq 0$.

Sea $\{d_{\text{out}}(v) \ / \ v \in V\} = \{z, \ldots, z + (k-1)\} \Rightarrow \sum_{v \in V} d_{\text{out}}(v) = kz + \dfrac{k(k-1)}{2}$

Supongamos que $z \geq 1$: **lleguemos a un absurdo!**.

Sabemos que el número máximo de aristas en un digrafo $D(V, E)$ no puede exeder $n(n-1)$. Si n es el número de vértices, cada vértice a lo sumo estará conectado a los otros (y no a sí mismo, pues D es simple), y como el número máximo de aristas para un determinado vértice es $n-1$, y como hay n vértices: $|E| \leq n(n-1)$.

Entonces:

$kz + \dfrac{k(k-1)}{2} \leq k(k-1)$

$kz \leq k(k-1) - \dfrac{k(k-1)}{2}$

$z \leq (k-1) - \dfrac{(k-1)}{2}$

$z \leq \dfrac{(k-1)}{2}$

Habíamos dicho que $k \geq 2$ y que $z \geq 1$. Si tomamos $z = 1 \land k = 2$

$1 \leq \dfrac{1}{2}$. Absurdo!

Por la ténica de reducción al absurdo, se tiene que $z = 0$.

Esto nos sugiere que...para cada grafo de n vértices, siempre vamos a encontrar un z que rompa la cota $n(n-1)$.

Pero... ¿Posta que funca?

Demostremos que si:

Sea $\{d_{\text{out}}(v) \ / \ v \in V\} = \{0, \dots, k-1\} \Rightarrow \sum_{v \in V} d_{\text{out}}(v) = \dfrac{k(k-1)}{2}$

Luego, se efectivamente se verifica que $\dfrac{k(k-1)}{2} \leq k(k-1)$, pues $k \geq 2$.

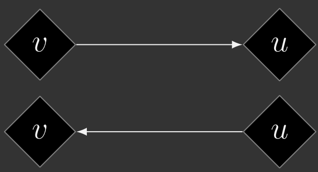
Ahora ya sabemos G' existe! Y además está exhibido.

Para completar la demostración, debemos probar que es único, pero realmente... no lo es.

Sea $v \in V$ con $d_{\text{out}}(v) > 0$. Este vértice existe, pues $k \geq 2$, y tomemos una de sus aristas salientes $e \in E'$ e invertamos su dirección!

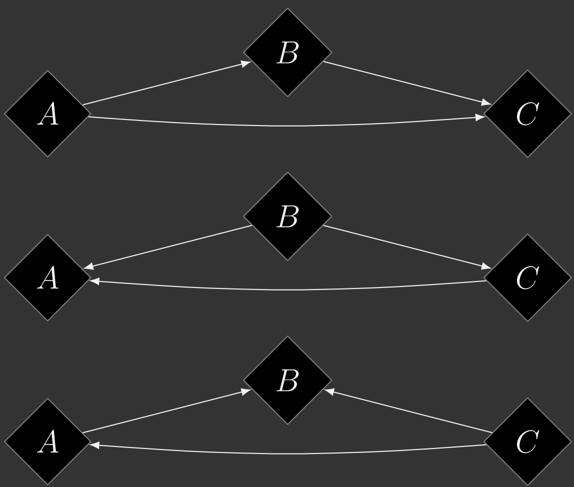
Acá se nos abren dos posibilidades, pero ya con la primera sabemos que no es único!

Si $k = 2$, tendremos dos tipos de grafos posibles:



Pero ya vemos que el grafo no es único, vemos que tanto G' como G'^T sirven.

Análogamente, para cualquier k, G' y G'^T funcionan. Pero no solo eso, acá algunas configuraciones que funcionan:



Etcétera.

En definitiva, si encontramos un digrafo orientado G' que funciona, cualquier digrafo G'' que sea isomorfismo de G', también sirve.

Conclusión: No pude probar la unicidad, no desde el punto de vista estructural, al menos.